1 Lineare Programme und Dualitätstheorie

1.1 Lineare Programme

Für einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ bedeuten im Folgenden die Schreibweisen $x \geq 0$ und $x > 0$, dass alle Komponenten $x_i \geq 0$ bzw. $x_i > 0$ sind. In diesem Sinne bedeutet dann $x \geq y$, $x > y$ oder $x \leq y$, $x < y$ für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, dass $x - y \geq 0$, $x - y > 0$ bzw. $y - x \geq 0$, $y - x > 0$ ist. Für $1 \leq m \leq n$ seien nun eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vom Rang m sowie Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$, und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Definition 1.1: *Als „lineares Programm“ (abgekürzt LP) in „Normalform“ (bzw. „kanonischer Form“) bezeichnet man die Aufgabe, unter den Nebenbedingungen*

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \tag{1.1.1}$$

ein Minimum der „Zielfunktion“ (oder „Kostenfunktion“) $Q(x) := c^T \cdot x$ zu bestimmen. Anders ausgedrückt sucht ein solches lineares Programm im „zulässigen Bereich“

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n |\ Ax = b,\ x \geq 0\} \tag{1.1.2}$$

ein $x^* \in M$ zu bestimmen, so dass

$$c^T \cdot x^* = \min_{x \in M} c^T \cdot x. \tag{1.1.3}$$

Ein LP in sog. „Standardform“ lautet

$$c^T \cdot x^* = \max_{x \in M} c^T \cdot x, \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n |\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}. \tag{1.1.4}$$

Beide Formulierungen eines LP sind äquivalent in einander überführbar.

Zur Einordnung der Beispiele in Abschnitt 0.6 in diesen Rahmen können folgende Umformungen herangezogen werden:

- Ein Ungleichung mit $\geq$ wird durch Multiplikation mit -1 in eine mit $\leq$ überführt.
- Eine Ungleichung $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq \beta$ wird durch Einführung einer sog. „Schlupfvariable“ y in eine Gleichung und eine Vorzeichenbedingung überführt:

  $$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + y = \beta, \quad y \geq 0.$$

- Für jede Gleichung $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \beta$ kann (eventuell nach Multiplikation mit -1) stets $\beta \geq 0$ vorausgesetzt werden.
- Fehlt für eine Variable, etwa für x_1, die Vorzeichenbedingung, so wird x_1 durch die Differenz $y_1 - y_2$ zweier neuer Variablen ersetzt, und man fordert $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$.

- Gleichungen, die Linearkombinationen anderer Gleichungen sind, werden weggelassen, so dass für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ stets $\operatorname{Rang} A = m$ angenommen wird.
- Wegen $\max\, c^T \cdot x = -\min\, (-c^T \cdot x)$ kann man alle linearen Programme auf die Bestimmung eines *Minimums* zurückführen.

Der zulässige Bereich M eines LP ist der Durchschnitt einer linearen Mannigfaltigkeit mit Halbräumen und folglich abgeschlossen. Weiter ist M *"konvex"*:

$$x, y \in M \;\Rightarrow\; \lambda x + (1-\lambda)\, y \in M \quad \forall\, \lambda\, \in [0,1].$$

Ist $M = \emptyset$, so besitzt das LP keine Lösung. Im Fall $M \neq \emptyset$ existiert immer eine Lösung, wenn M beschränkt (und damit kompakt) ist; für unbeschränktes M braucht keine Lösung zu existieren.

Neben der „kanonischen“ Form eines LP treten diese häufig auch auf in sog. „Standardform“

$$c^T \cdot x \to \max!, \quad Ax \le b, \;\; x \ge 0. \tag{1.1.5}$$

Mit Hilfe der obigen zulässigen Umformungen lassen sich alle diese Formulierungen von LPs in einander umformen.

Beispiel 1.1: In einfachen Fällen lassen sich lineare Programme grafisch lösen: Der zulässige Bereich M in Beispiel 0.3 (Standardformulierung) ist der Durchschnitt von 5 Halbebenen des $\mathbb{R}^2$, deren Begrenzungsgeraden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 &= 0,\\ x_1 + x_2 &= 100\\ 4x_1 + x_2 &= 160\\ 20x_1 + 10x_2 &= 1100 \end{aligned}$$

gegeben sind:

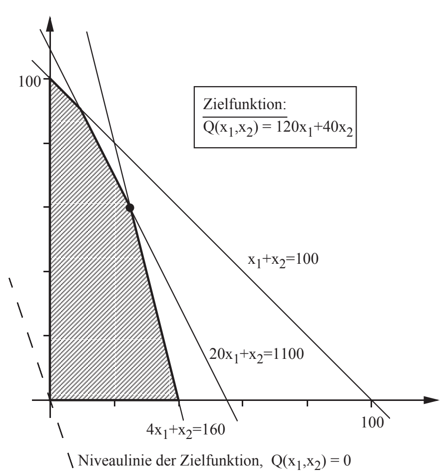

Abbildung 1.1: *Grafische Lösung eines Linearen Programms*

Parallelverschiebung der Niveaulinie bis an den Rand von M ergibt als maximalen Wert den der Niveaulinie durch den Punkt (x_1^*, x_2^*) mit

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x_1^* + \quad x_2^* & = & 160 \\ 20x_1^* + 10x_2^* & = & 1100 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_2^* & = & 60 \\ x_1^* & = & 25 \end{array},$$

$$Q_{\max} = 120x_1^* + 40x_2^* = 5400.$$

Der optimale Punkt ist in diesem Fall eine Ecke des Polygongebiets M. Dies ist kein Zufall und wird sich als wesentlicher Punkt bei der Behandlung allgemeinerer Probleme dieses Typs erweisen. Die maximal mögliche Stückzahl von $x_1 + x_2 = 100$ wird unter dem Kriterium der Gewinnmaximierung also nicht erreicht; dafür wird die zur Verfügung stehende Arbeitszeit voll genutzt.

1.2 Dualitätstheorie

Den linearen Optimierungs- bzw. Programmierungsaufgaben in Standardform bzw. Normalform, abgekürzt benannt mit (I) und (II), ordnet man „duale“ Aufgaben (I^*) bzw. (II^*) zu:

$$\begin{array}{llll} (I) & c^T \cdot x \to \max! & (I^*) & b^T \cdot y \to \min! \\ & x \geq 0, \quad Ax \leq b. & & y \geq 0, \quad A^T y \geq c. \\[1ex] (II) & c^T \cdot x \to \min! & (II^*) & b^T \cdot y \to \max! \\ & x \geq 0, \quad Ax = b. & & A^T y \leq c. \end{array}$$

Die zugehörigen zulässigen Mengen werden jeweils mit M (für (I) und (II)) sowie M^* (für (I^*) und (II^*)) bezeichnet.

Zwischen den Aufgaben (I) und (I^*) sowie (II) und (II^*) bestehen enge Beziehungen betreffend ihre Lösbarkeit und die Charakterisierung der Lösungen. Wir stellen dazu einige Hilfsmittel aus der Theorie linearer Gleichungen und Ungleichungen bereit.

Bemerkung 1.1: Ist die zulässige Menge M (bzw. M^*) einer der obigen Aufgaben nicht leer und beschränkt (und damit kompakt), so ist die Aufgabe wegen der Stetigkeit der (linearen) Zielfunktion lösbar.

Satz 1.1: *Für zwei Punkte $x \in M$, $y \in M^*$ gilt stets im Falle der Standardformulierung*

$$(I) \qquad b^T \cdot y \geq c^T \cdot x \tag{1.2.6}$$

und im Falle der Normalformulierung

$$(II) \qquad b^T \cdot y \leq c^T \cdot x. \tag{1.2.7}$$

Gilt $b^T \cdot y = c^T \cdot x$ gilt, so sind $x \in M$ und $y \in M^*$ Lösungen der Aufgaben (I) und (I^*) bzw. (II) und (II^*).

Beweis: i) In der Standardformulierung gilt für $x \in M$ und $y \in M^*$ definitionsgemäß (beachte $x, y \geq 0$):

$$b^T \cdot y \geq (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T y \geq x^T \cdot c = c^T \cdot x.$$

ii) Sei $b^T \cdot y = c^T \cdot x$. Die Annahme der Existenz eines $\tilde{x} \in M$ mit $c^T \cdot \tilde{x} > c^T \cdot x$ ergäbe nach dem gerade Gezeigten den Widerspruch

$$c^T \cdot x = b^T \cdot y \geq c^T \cdot \tilde{x},$$

d. h.: x ist Lösung von (I). Analog ergibt die Annahme der Existenz eines $\tilde{y} \in M^*$ mit $b^T \cdot \tilde{y} < b^T \cdot y$ den Widerspruch $b^T \cdot y = c^T \cdot x \leq b^T \cdot \tilde{y}$, d. h.: y ist Lösung von (I^*).

iii) Für die Normalformulierung verläuft die Argumentation analog und wird als Übungsaufgabe gestellt. Q.E.D.

Beispiel 1.2: Das Beispiel 1.1 ist in Standardform gegeben. Das zugehörige *duale* Problem lautet:

$$\begin{aligned} 100y_1 + 160y_2 + 1100y_3 &\to \min! \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 &\geq 0, \\ y_1 + 4y_2 + 20y_3 &\geq 120, \\ y_1 + y_2 + 10y_3 &\geq 40. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Offenbar ist die zugehörige zulässige Menge $M^* \neq \emptyset$ und unbeschränkt. Mit der Optimallösung $(x_1^*, x_2^*)^T = (25, 60)^T$ von (I) gilt nach Satz 1.1 für jedes $(y_1, y_2, y_3)^T \in M^*$:

$$100y_1 + 160y_2 + 1100y_3 \geq 120x_1^* + 40x_2^* = 5400.$$

Mit Hilfe der skalierten Gleichung $5y_1^* + 8y_2^* + 55y_3^* = 270$ (Division durch 20) erhält man eine Optimallösung von (I^*):

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*)^T = (0, 20, 2)^T.$$

Lemma 1.1: *(Alternativsatz für lineare Gleichungen) Es gilt genau eine der folgenden Alternativen:*

i) $Ax = b$ *lösbar.*

ii) $A^T y = 0,\ b^T \cdot y = 1$ *lösbar.*

Beweis: Wir zeigen, dass die beiden Aufgaben in (i) und (ii) nicht gleichzeitig lösbar sein können. Die Gleichung $Ax = b$ impliziert

$$y^T \cdot Ax = y^T \cdot b = 1, \quad y^T \cdot Ax = (A^T y)^T \cdot x = 0,$$

was einen Widerspruch darstellt. Sei nun $Ax = b$ unlösbar. Dann ist $\mathrm{Rang}\,[A,b] = \mathrm{Rang}\,A + 1$ und folglich

$$\mathrm{Rang}\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Rang}\,A + 1.$$

Also ist das System

$$\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lösbar. Umgekehrt folgt dann aus der Lösbarkeit von (i) notwendig die Unlösbarkeit von (ii). Diese Aussagen lassen sich auch aus der allgemeinen Beziehung

$$\mathrm{Bild}\,A = (\mathrm{Kern}\,A^T)^\perp$$

für lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ erschließen. Q.E.D.

Lemma 1.2: *(Alternativsatz für nichtnegative Lösungen linearer Gleichungen) Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:*

i) $Ax = b,\ x \geq 0$ *lösbar.*

ii) $A^T y \geq 0,\ b^T \cdot y < 0$ *lösbar.*

Beweis: Wenn beide Aufgaben lösbar wären, ergäbe sich der Widerspruch

$$0 > b^T \cdot y = (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T y \geq 0.$$

Sei nun (i) unlösbar. Dann ist b nicht in dem von den Spaltenvektoren a_i der Matrix A aufgespannten Kegel

$$C := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \Big|\ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geq 0 \Big\}$$

enthalten, d. h.:

$$d := \inf_{x \in C} \|b - x\|_2 > 0.$$

Da C abgeschlossen ist, existiert eine „beste Approximation“ $s \in C$ zu b: $\|b - s\|_2 = d$. Wir wollen zeigen, dass $y := s - b$ Lösung von (ii) ist.

a) Mit $s \in C$ ist auch $ts \in C$ für $t \geq 0$. Also:

$$\begin{aligned} \|b - s\|_2^2 \leq \|b - ts\|_2^2 &= \|b - s + (1-t)s\|_2^2 \\ &= \|b - s\|_2^2 + 2(1-t)(b - s, s)_2 + (1-t)^2 \|s\|_2^2. \end{aligned}$$

Für $t \to 1$ folgt

$$0 \leq (b - s, s)_2 = (b - s, s - b)_2 + (b - s, b)_2 = -d^2 - (y, b)_2$$

bzw.

$$(y,b)_2 + d^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad b^T \cdot y < 0.$$

b) Mit $s \in C$ und $z \in C$ ist auch $s + tz \in C,\ t \ge 0$. Also:

$$\|b-s\|_2^2 \le \|b-s-tz\|_2^2 = \|b-s\|_2^2 - 2t(b-s,z)_2 + t^2\|z\|_2^2.$$

Für $t \to 0$ folgt

$$0 \le -(b-s,z)_2 \quad \Rightarrow \quad (y,z)_2 \ge 0, \ \ z \in C.$$

Mit $z := a_i,\ i = 1,\dots,n$, erhalten wir

$$a_i^T \cdot y \ge 0,\ i = 1,\dots,n, \quad \Rightarrow \quad A^T y \ge 0,$$

was den Beweis vervollständigt. Q.E.D.

Lemma 1.3: *(Alternativsatz für nichtnegative Lösungen linearer Ungleichungen) Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:*

i) $Ax \le b,\ x \ge 0$ *lösbar.*

ii) $A^T y \ge 0,\ b^T \cdot y < 0,\ y \ge 0$ *lösbar.*

Beweis: Wären beide Probleme lösbar, so folgte der Widerspruch

$$b^T \cdot y \ge (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T y \ge 0 > b^T \cdot y.$$

Sei nun wieder (i) unlösbar. Dann ist auch

$$[A, I_m] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = b, \quad x \ge 0,\ z \ge 0 \ \ (z \in \mathbb{R}^m),$$

unlösbar. Nach Lemma 1.2 existiert also $y \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\begin{bmatrix} A^T \\ I_m \end{bmatrix} y \ge 0, \ \ b^T \cdot y < 0,$$

d. h.: (ii) ist lösbar. Q.E.D.

Lemma 1.4: *(Alternativsatz für semi-positive Lösungen linearer homogener Ungleichungen) Es gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:*

i) $Ax \le 0,\ x \ge 0,\ x \ne 0$ *lösbar.*

ii) $A^T y > 0,\ y \ge 0$ *lösbar.*

Beweis: Wären beide Probleme lösbar, so ergäbe sich der Widerspruch

$$0 \geq (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T y > 0.$$

Sei nun wieder (i) unlösbar. Dann ist auch

$$\begin{bmatrix} & A & \\ -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x \geq 0,$$

unlösbar. Nach Lemma 1.3 existieren dann $y \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{bmatrix} & -1 \\ A^T & \vdots \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix} \geq 0, \quad o^T \cdot y + (-1)\eta < 0, \quad \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} \geq 0,$$

i. e.: Die Aufgabe

$$A^T y > 0, \quad y \geq 0,$$

ist lösbar. Q.E.D.

Satz 1.2: *(Alternativsatz für das lineare Standardproblem) Es gilt genau eine der folgenden Alternativen:*

a) Im Fall $M \neq \emptyset$, $M^* \neq \emptyset$ sind die Probleme (I) und (I^*) beide lösbar und es gilt $\max_I = \min_{I^*}$.

b) Ist $M = \emptyset$ oder $M^* = \emptyset$, so sind beide Aufgaben (I) und (I^*) unlösbar.

Beweis: a1) Aufgrund von Satz 1.1 ist nur zu zeigen, dass es Punkte $x \in M$, $y \in M^*$ gibt mit $b^T \cdot y \leq c^T \cdot x$. Angenommen, es existieren keine Punkte dieser Art. Dann besitzt die Aufgabe

$$\begin{aligned} Ax \leq b,\ \ b^T \cdot y - c^T \cdot x \leq 0, \\ -A^T y \leq -c,\ \ x \geq 0,\ y \geq 0, \end{aligned}$$

keine Lösung, d. h.: Das Ungleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \\ -c^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

hat keine nicht-negative Lösung $x \geq 0$, $y \geq 0$. Nach Lemma 1.3 existiert daher eine Lösung $(z, w, \theta)^T \geq 0$ der Aufgabe

$$\begin{bmatrix} A^T & 0 & -c \\ 0 & -A & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \\ \theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad b^T \cdot z - c^T \cdot w < 0.$$

Hierfür gilt offensichtlich $A^Tz \geq \theta c$ und $Aw \leq \theta b$. Zu zeigen ist nun $\theta > 0$ bzw. $\theta \neq 0$. Wäre $\theta = 0$, so ergäbe sich mit $A^Tz \geq 0,\ Aw \leq 0$ auch

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^T \cdot A^Tz = (Ax)^T \cdot z \leq b^T \cdot z, \\ 0 &\geq y^T \cdot Aw = (A^Ty)^T \cdot w \geq c^T \cdot w, \end{aligned}$$

d. h. der Widersprich $b^T \cdot z - c^T \cdot w \geq 0$. Also ist $\theta > 0$, und die Punkte $x^* = \theta^{-1}w \in M,\ y^* = \theta^{-1}z \in M^*$ erfüllen dann

$$b^T \cdot y^* - c^T \cdot x^* < 0$$

im Widerspruch zur obigen Widerspruchsannahme.

aii) Zu zeigen ist noch $\max_I = \min_{I^*}$. Nach Satz 1.1 gilt für Lösungen $\hat{x} \in M$ und $\hat{y} \in M^*$ von (I) bzw. (I^*) zunächst wieder

$$\min\nolimits_{I^*} := \min_{y \in M^*} b^T \cdot y = b^T \cdot \hat{y} \ \geq \ c^T \cdot \hat{x} = \max_{x \in M} c^T \cdot x =: \max\nolimits_I .$$

Nun gibt es nach (ai) Punkte $\bar{x} \in M$ und $\bar{y} \in M^*$ mit der Eigenschaft $b^T \cdot \bar{y} \leq c^T \cdot \bar{x}$, d. h.:

$$\min\nolimits_{I^*} = \min_{y \in M^*} b^T \cdot y \leq b^T \cdot \bar{y} \leq c^T \cdot \bar{x} \leq \max_{x \in M} c^T \cdot x = \max\nolimits_I .$$

Also folgt $\max_I = \min_{I^*}$.

b) Im Fall $M = \emptyset$ ist die Aufgabe $\{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ unlösbar. Nach Lemma 1.3 existiert dann eine Lösung $y \geq 0$ der Aufgabe $\{A^Ty \geq 0,\ b^T \cdot y < 0\}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist auch $A^T(\lambda x) \geq 0$. Sei nun $M^* \neq \emptyset$ und $\tilde{y} \in M^*$, d. h.: $A^T\tilde{y} \geq c,\ \tilde{y} \geq 0$. Dann ist auch

$$A^T(\tilde{y} + \lambda y) \geq c \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

d. h.: $\tilde{y} + \lambda y \in M^*$ für $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Wegen

$$(\tilde{y} + \lambda y)^T \cdot b = \tilde{y}^T \cdot b + \lambda \underbrace{y^T \cdot b}_{<\,0} \to -\infty \quad (\lambda \to \infty)$$

besitzt also auch (I^*) keine Lösung. Analog erschließt man im Fall $M^* = \emptyset$ die Unlösbarkeit von (I). Q.E.D.

Korollar 1.1: *Im Fall $M \neq \emptyset$ und $c \leq 0$ hat die Aufgabe (I) eine Lösung.*

Beweis: Der zulässige Bereich der dualen Aufgabe (I^*) ist

$$M^* = \{y \in \mathbb{R}^m |\ y \geq 0,\ A^Ty \geq c\}.$$

Im Fall $c \leq 0$ ist offenbar $y = 0 \in M^*$. Also sind $M \neq \emptyset$ (nach Voraussetzung) und $M^* \neq \emptyset$, so dass nach Satz 1.2 beide Aufgaben (I) und (I^*) lösbar sind. Q.E.D.

Korollar 1.2: *Die Alternativaussage von Satz 1.2 für das Standardproblem gilt analog auch für das kanonische Problem.*

Beweis: Die Aussage folgt aus der Äquivalenz der beiden Problemformulierungen. Q.E.D.

Satz 1.3: *(Gleichgewichtssatz für das Standardproblem) Für zwei zulässige Punkte* $x \in M,\ y \in M^*$ *der Probleme* (I) *bzw.* (I^*) *sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) Die Punkte x *und* y *sind jeweils optimal.*

b) $x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad (A^T y)_i = c_i,\ i = 1, \dots, n; \quad y_j > 0 \quad \Rightarrow \quad (Ax)_j = b_j,\ j = 1, \dots, m.$

Beweis: a) Sind $x \in M,\ y \in M^*$ optimal, so gilt nach Satz 1.2:

$$c^T \cdot x = b^T \cdot y \geq (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T y\,.$$

Also ist $x^T \cdot (c - A^T y) \geq 0$, d. h.:

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\geq 0} \{\underbrace{c_i - (A^T y)_i}_{\leq 0}\} \geq 0\,.$$

Folglich muss für $x_i > 0$ notwendig $c_i - (A^T y)_i = 0$ sein. Analog erschließt man aus

$$b^T \cdot y = c^T \cdot x \leq (A^T y)^T \cdot x = y^T \cdot Ax$$

bzw. $y^T \cdot (b - Ax) \leq 0$, dass $y_j > 0$ notwendig $b_j - (Ax)_i = 0$ bedingt.

b) Seien nun umgekehrt die Implikationen (b) gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} c^T \cdot x &= \sum_{x_i > 0} x_i c_i = \sum_{x_i > 0} x_i (A^T y)_i = x^T \cdot A^T y \\ &= (Ax)^T \cdot y = \sum_{y_j > 0} (Ax)_j y_j = \sum_{y_j > 0} b_j y_j = b^T \cdot y\,, \end{aligned}$$

so dass nach Satz 1.1 die Optimalität von x und y folgt. Q.E.D.

Satz 1.4: *(Gleichgewichtssatz für das kanonische Problem) Für zwei zulässige Punkte* $x \in M,\ y \in M^*$ *der Probleme* (II) *bzw.* (II^*) *sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) Die Punkte x *und* y *sind jeweils optimal.*

b) $x_i > 0 \quad \Rightarrow \quad (A^T y)_i = c_i,\ i = 1, \dots, n.$

Beweis: Der Beweis ist analog zu dem für das Standardproblem. Q.E.D.

1.3 Geometrie der zulässigen Menge

Wir betrachten im Folgenden die linearen Programmierungsaufgaben stets in Normalform („kanonische“ Form). Zunächst studieren wir die Struktur der Lösungsmenge eines LP:

$$(II) \qquad Q(x) := c^T \cdot x \to \min!, \quad x \geq 0, \;\; Ax = b.$$

Dabei seien wieder die folgenden Konventionen vereinbart:

$$\begin{aligned} &A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \; m < n, \; \operatorname{Rang} A = m, \\ &b \in \mathbb{R}^m, \; b \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.2: Der Fall $m \geq n$ ist nicht interessant. Die Annahme $\operatorname{Rang} A = m$ widerspricht der Bedingung $m > n$ und im Fall $m = n$ würde wegen der Regularität von A der Zulässige Bereich höchstens aus einem Punkt bestehen.

Weiter bezeichnen wir mit $a_k, k = 1, \dots, n,$ die Spaltenvektoren der Matrix A. Die zulässige Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n | \; x \geq 0, \; Ax = b\}$$

ist als Durchschnitt einer linearen Mannigfaltigkeit mit Halbräumen abgeschlossen und konvex, d. h.:

$$x^1, x^2 \in M \quad \Rightarrow \quad \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Im Folgenden wird generell $M \neq \emptyset$ vorausgesetzt.

Definition 1.2: *i) Ein Vektor $x \in M$ heißt „Ecke“ (oder„Extremalpunkt“) der zulässigen Menge M, wenn er keine Darstellung der Form*

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$$

mit $x^1,\, x^2 \in M, \; x^1 \neq x^2$, und einem $\lambda \in (0,1)$ zulässt.

ii) Für $x \in M$ bezeichnen wir mit $I(x) := \{i \in \{1,\dots,n\} \,|\, x_i > 0\}$ die zugehörige Menge der „aktiven“ Indizes.

Lemma 1.5 (Sekantensatz): *Sind für ein $x \in M$ die Spaltenvektoren in der Menge*

$$B(x) := \{a_k | \; k \in I(x)\} \tag{1.3.9}$$

linear abhängig, so besitzt x eine Darstellung

$$x = \tfrac{1}{2}\,(x^1 + y) \tag{1.3.10}$$

mit $x^1, \; y \in M$ und $I(x^1) \subset I(x), \; I(x^1) \neq I(x)$. Insbesondere kann x keine Ecke von M sein.

Beweis: O.B.d.A. sei $I(x) = \{1, \dots, k\}$, so dass

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i = b.$$

Sind nun die Vektoren in $B(x)$ linear abhängig, so gibt es Zahlen $d_i,\ i = 1, \dots, k$, die nicht alle Null sind, so dass

$$\sum_{i=1}^{k} d_i a_i = 0.$$

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt der Vektor

$$x(\lambda) = (x_1 + \lambda d_1, \dots, x_k + \lambda d_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})^T$$

die Gleichung $Ax(\lambda) = b$. Wegen $x_i > 0,\ i = 1, \dots, k$, ist für hinreichend kleines $|\lambda|$ auch $x(\lambda) \geq 0$ und somit $x(\lambda) \in M$. Lässt man nun λ ausgehend von Null wachsen oder fallen, so gelangt man in einem der beiden Fälle zu einem λ^*, für das mindestens eine der Komponenten $x_i(\lambda^*),\ i = 1, \dots, k$, Null ist. Ferner ist $x(\lambda) \in M$ für $|\lambda| \leq |\lambda^*|$. Mit $x^1 = x(\lambda^*)$ und $y = x(-\lambda^*)$ gilt dann

$$x = \tfrac{1}{2}\,(x^1 + y), \qquad I(x^1) \subset I(x),\ I(x^1) \neq I(x),$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Lemma 1.6 (Eckensatz): *Ein Vektor $x \in M$ ist genau dann Ecke von M, wenn die Spaltenvektoren a_k in $B(x)$ linear unabhängig sind.*

Beweis: Aus Lemma 1.5 folgt, dass für eine Ecke $x \in M$ notwendig die Vektoren in $B(x)$ linear unabhängig sein müssen. Sei nun $B(x)$ linear unabhängig, aber $x \in M$ keine Ecke. Dann besitzt x eine Darstellung der Form $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ mit $x^1, x^2 \in M,\ x^1 \neq x^2,\ \lambda \in (0,1)$. Für Indizes $i \notin I(x)$ impliziert $x_i = 0$ also auch $x_i^1 = x_i^2 = 0$, so dass

$$\sum_{i\in I(x)} x_i^1 a_i = \sum_{i\in I(x)} x_i^2 a_i = b \quad\Rightarrow\quad \sum_{i\in I(x)} (x_i^1 - x_i^2) a_i = 0.$$

Wegen $x^1 \neq x^2$ sind also die Vektoren in $B(x)$ linear abhängig im Widerspruch zur anfänglichen Annahme. Q.E.D.

Definition 1.3: *Wegen* $\mathrm{Rang}\,A = m$ *besteht $B(x)$ für eine Ecke $x \in M$ aus höchstens m Vektoren. Ist für eine Ecke $x \in M$ aber* $\dim B(x) < m$, *so heißt x „entartete Ecke“; in diesem Fall kann $B(x)$ zu einer Basis $\hat{B}(x)$ aus Spaltenvektoren von A ergänzt werden. In jedem Fall heißt eine solche Basis $\hat{B}(x)$ „Basis zur (entarteten) Ecke x“.*

Durch eine Basis $B(x)$ ist die zugehörige Ecke $x \in M$ über das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig bestimmt. Andererseits gibt es höchstens

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Systeme von m linear unabhängigen Spaltenvektoren der Matrix A, d. h. Ecken von M.

Lemma 1.7 (Eckenlösung): *Besitzt das LP eine Lösung $x \in M$, so gibt es eine Ecke $x^* \in M$, die ebenfalls Lösung ist.*

Beweis: Ist x selbst keine Ecke, so wenden wir Lemma 1.5 an, d. h.: Das Minimum von $c^T \cdot x$ wird im Mittelpunkt $x = \frac{1}{2}(x^1 + y)$ der Verbindungsgeraden zwischen x^1 und y angenommen. Folglich ist die lineare Funktion $c^T \cdot x$ dort konstant, d. h.: x^1 ist auch Lösung, aber mit $I(x^1) \subset I(x)$, $I(x^1) \neq I(x)$. Mit diesem Argument gelangt man in endlich vielen Schritten zu einer Lösung x^*, die Ecke von M ist (im Extremfall $x^* = 0$).
Q.E.D.

Aufgrund der bisherigen Diskussion „genügt“ es theoretisch zur Lösung der linearen Optimierungsaufgabe, d. h. des linearen Programms (II), alle Ecken des zugehörigen zulässigen Bereichs M zu ermitteln und die mit dem kleinsten Zielfunktionalwert $Q(x) = c^T \cdot x$ zu bestimmen. Aufgrund der i. Allg. sehr großen Anzahl von Ecken („Stirlingsche[1] Formel“ $n! \approx \exp(n \log n)$) (Beispiel: $n = 2.100$, $m = 307 \quad \Rightarrow \quad \#\text{Ecken} \approx 10^{375}$) wäre dieses Vorgehen aber selbst bei nur moderat großen Problemen viel zu aufwendig. Ökonomischer ist es, ausgehend von einer bekannten Ecke (deren Bestimmung aber oft nicht einfach ist) unter den benachbarten Ecken diejenigen mit dem kleinsten Zielfunktionalwert zu bestimmen. Sukzessive Anwendung dieses Prozesses liefert dann (hoffentlich) nach endlich vielen Schritten eine optimale Ecke. Diese Idee liegt dem in Abschnitt 0.1 erwähnten „Simplex-Verfahren“ nach G. B. Dantzig (1947) zugrunde.

1.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1: Man rekapituliere die folgenden Definitionen und Aussagen aus der Linearen Algebra für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

1. Was sind der „Kern“ $\text{Kern}\, A$, das „Bild“ $\text{Bild}\, A$ und der „Rang“ $\text{Rang}\, A$?
2. Was ist die „Transponierte“ A^T?

[1] James Stirling (1692–1770): Schottischer Mathematik; ab 1725 für zehn Jahre Lehrer an der Watt’s Academy in Covent Garden, seit 1726 Mitglied der Royal Society, ab 1734 arbeitete er für die Scotch Mines Company in Leadhills in Lanarkshire, Schottland, seit 1746 Mitglied der Kniglich-Preuischen Akademie der Wissenschaften; Beiträge zur Theorie der Kubiken, zur Newtonschen Interpolationstheorie und zu verschiedenen Reihenentwicklungen. Nach ihm sind die Stirling-Zahlen in der Kombinatorik und die Stirling-Formel zur Approximation der Fakultät $n!$ für große n benannt, beides ist in seiner 1730 veröffentlichten Schrift „Methodus Differentialis“ zu finden.

3. Was bedeutet die Beziehung $\text{Bild}\, A = (\text{Kern}\, A^T)^\perp$?

4. Was sind im Fall $m = n$ äquivalente Bedingungen für die Regularität von A ?

Aufgabe 1.2: Man bringe die folgende Optimierungsaufgabe in die kanonische Form eines linearen Programms und gebe die zugehörigen *dualen* Aufgaben an:

a)
$$\begin{aligned} Q(x) := x_1 + x_2 + x_3 &\to \min! \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 &\leq 5, \\ x_2 + x_3 &\leq 0, \\ 3x_2 - 4x_3 &\leq 1. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} Q(x) := |x_1| + |x_2| + |x_3| &\to \min! \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2x_1 + x_3 &\leq 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3: Man löse die folgende Optimierungsaufgabe grafisch:

$$\begin{aligned} Q(x) := 2x_1 + x_2 &\to \min! \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad -2x_1 + x_2 &\leq -2, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ -x_1 - x_2 &\leq -5. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4: Ein Landwirt besitzt 100 Morgen Land und hat 200 Arbeitstage im Jahr zur Verfügung, um dieses Land zu bewirtschaften. Er entscheidet sich für den Anbau von Weizen und Gemüse, was pro Morgen einen Arbeitsaufwand von einem Tag für Weizen und vier Tagen für Gemüse erfordert. Für die Bebauung kann er höchstens 12.000 EURO Kapital aufwenden. Der Kapitalaufwand pro Morgen Weizen beträgt 100 EURO, der für Gemüse 200 EURO. Unter diesen Produktionsbedingungen möchte der Landwirt maximalen Gewinn erzielen, wobei er mit einem Gewinn von 40 EURO pro Morgen Weizen und von 120 EURO pro Morgen Gemüse rechnet. Man formuliere das Problem als lineares Programm und löse dieses grafisch.

Aufgabe 1.5: Mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ seien die folgenden zueinander „dualen" Programmierungsaufgaben in Normalform gegeben:

$$\begin{aligned} (II) \qquad & c^T \cdot x \to \min!, \quad x \in M := \{x \in \mathbb{R}^n |\; x \geq 0,\; Ax = b\}. \\ (II^*) \qquad & b^T \cdot y \to \max!, \quad y \in M^* := \{y \in \mathbb{R}^m |\; A^T y \leq c\}. \end{aligned}$$

Man zeige:

i) Für $x \in M$, $y \in M^*$ gilt stets $b^T \cdot y \geq c^T \cdot x$.

ii) Gilt für zwei $x \in M$, $y \in M^*$ die Gleichung $b^T \cdot y = c^T \cdot x$, so sind x und y Lösungen von (II) bzw. (II^*).

(Hinweis: Man adaptiere die Argumentation im Beweis von Satz 1.1 des Textes.)

Aufgabe 1.6: Man beweise den folgenden Alternativsatz: *Für eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und Vektoren* $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ *gilt genau eine der folgenden Alternativen:*

i) Die Aufgabe $Ax = 0,\ c^T \cdot x = 1,\ x \geq 0$ *ist lösbar.*

ii) Die Aufgabe $A^T y \geq c$ *ist lösbar.*

(Hinweis: Man verwende Lemma 1.2 des Textes.)

Aufgabe 1.7: Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2, \end{aligned}$$

keine nichtnegative Lösung besitzt.

Aufgabe 1.8: Man zeige, dass die folgende Optimierungsaufgabe unlösbar ist:

$$\begin{gathered} Q(y) := y_1 + 2y_2 - 3y_3 \to \max! \\ y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0, \\ -4y_1 + 4y_2 + 2y_3 = 8, \\ 5y_1 - 7y_2 - y_3 = -12. \end{gathered}$$

Aufgabe 1.9: Das Paar $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^m$, $x^* \geq 0$, $y^* \geq 0$, sei ein stationärer Punkt („Sattelpunkt“) der zur Standardaufgabe

$$(I) \quad c^T \cdot x \to \max!,\ \ x \geq 0,\ \ Ax \leq b,$$

gehörenden „Lagrange-Funktion“

$$L(x, y) := c^T \cdot x - y^T \cdot (Ax - b),$$

d. h.: Es ist die „Sattelpunktbedingung“ erfüllt

$$L(x, y^*) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x^*, y), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^m,\ y \geq 0.$$

Man zeige, dass dann notwendig die Ungleichungen $Ax^* \leq b$, $A^T y^* \geq c$ gelten und dass x^* und y^* Lösungen der Aufgabe (I) bzw, der dazu dualen Aufgabe (I^*) sind.

(Hinweis: Man leite aus der Sattelpunktbedingung die Nichtnegativität der Ausdrücke $(A^T y^* - c)^T \cdot (x - x^*)$ und $(b - Ax^*)^T \cdot (y - y^*)$ her.)

Aufgabe 1.10: Man löse die Optimierungsaufgaben

$$\begin{gathered} Q(y) := 2y_1 - 2y_2 - 6y_3 \to \max!\ \text{ bzw. } \min! \\ y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0, \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \leq -1, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1. \end{gathered}$$

(Hinweis: Man löse zunächst die dualen Aufgaben auf grafischem Wege und wende dann den Dualitäts- und den Gleichgewichtssatz an.)

Aufgabe 1.11: Man zeige, dass die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} Q(x) := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \max! \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \\ x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_3 + x_4 &\leq 1, \\ x_2 + x_3 &\leq 1, \\ x_1 + x_3 &\leq 1, \\ x_3 + x_4 &\leq 3, \end{aligned}$$

die Lösung $x = (1, 1, 0, 1)^T$ hat. (Hinweis: Man konstruiere mit Hilfe des Gleichgewichtssatzes eine Lösung des zugehörigen dualen Problems.)