A Lösungen der Übungsaufgaben

Im Folgenden sind Lösungen für die am Ende der einzelnen Kapitel formulierten Übungsaufgaben zusammengestellt. Es handelt sich dabei nicht um „Musterlösungen“ mit vollständig ausformuliertem Lösungsweg, sondern meist nur um „Lösungsansätze“ in knapper Form.

A.1 Kapitel 1

Lösung A.1.1: a) $A \cap B = \{3, 10\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$.
b) $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | \, 5 < n \le 100\}$, $A \cup B = \mathbb{N}$, $A \setminus B = \{n \in \mathbb{N} | \, n \le 5\}$.
c) $A \cap B = A \setminus \{2\}$, $A \cup B = B \cup \{2\}$, $A \setminus B = \{2\}$.

Lösung A.1.2: $\exists\, a \in \mathbb{Q} \;\; \forall\, n_a \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \ge n_a : \;\; n \le a$.

Lösung A.1.3: Wir zeigen, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Diese besagt, dass es ein ungerades $n \in \mathbb{N}$ gibt, für das n^2 gerade ist. Sei also $n = 2m - 1$ und $n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$ gerade. Dann müsste aber auch $1 = n^2 - 4m^2 + 4m$ gerade sein, was nicht richtig ist.

Lösung A.1.4: Für $n = 1$, d. h. $A = \{a_1\}$, ist wegen $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$ und $\#\mathcal{P}(A) = 2 = 2^1$ die Behauptung richtig. Sei sie nun als richtig angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für $A_{n+1} = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$

$$\mathcal{P}(A_{n+1}) = \mathcal{P}(A_n) \cup \{B \cup \{a_{n+1}\}, \; B \in \mathcal{P}(A_n)\}$$

und folglich $\#\mathcal{P}(A_{n+1}) = 2 \cdot \#\mathcal{P}(A_n) = 2^{n+1}$.

Lösung A.1.5: 1. Injektiv wegen $n^2 = m^2 \;\; \Rightarrow \;\; n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; n - m = 0$, aber offenbar nicht surjektiv;
2. Nicht injektiv aber surjektiv;
3. Injektiv und surjektiv, d. h. bijektiv.

Lösung A.1.6: a) Die Induktionsverankerung ist offensichtlich gegegen. Als Induktionsannahme sei die Formel nun gültig für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist sie auch richtig für $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n{+}1 = \frac{n(n+1)}{2} + n{+}1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.$$

b) Für $n = 1$ ist die Behauptung wegen $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ richtig. Sei die Behauptung nun richtig für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Behauptung auch für $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.\end{aligned}$$

c) Ein Blick in den Text liefert die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2,$$

die offensichtlich für $n = 1$ richtig ist. Der Schritt von n nach $n+1$ im Induktionsbeweis lautet dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 + (n+1)^3 \\ &= \bigg(n+1+\Big(\frac{n}{2}\Big)^2\bigg)\,(n+1)^2 = \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2.\end{aligned}$$

Lösung A.1.7: a) Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen, in Symbolen $a \sim b$, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für je zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b$ oder $a \not\sim b$. (Relation)
2. $a \sim a$ (Reflexivität)
3. $a \sim b \;\Rightarrow\; b \sim a$ (Symmetrie)
4. $a \sim b,\; b \sim c \;\Rightarrow\; a \sim c$ (Transitivität).

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge A in sog. Äquivalenzklassen einteilen:

$$[a] := \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Das (zufällig gewählte) erzeugende Element a wird dann als ein „Repräsentant" der Äquivalenzklasse $[a]$ bezeichnet.

b) Die gegebene Beziehung ist offensichtlich eine „Relation" mit den Eigenschaften:
i) Reflexivität: $rs = rs$;
ii) Symmetrie: $rs' = r's \;\Rightarrow\; r's = rs'$;
iii) Transitivität: $rs' = r's,\; r's'' = r''s'$,
$s'(r''s) = (s'r'')s = (r's'')s = s''(r's) = s''(rs') = s'(s''r) \;\Rightarrow\; r''s = s''r$.
Sie ist also eine Äquivalenzreation.

c) Die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen kann mit der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen identifiziert werden. Jeder solchen Äquivalenzklasse $[\{r, s\}]$ kann z. B. als „Repräsentant“ $\{r_0, s_0\}$ zugeordnet werden, wobei der Bruch r_0/s_0 jeweils durch maximales Kürzen aus r/s entsteht.

Lösung A.1.8: a) Der *Widerspruchsbeweis* beginnt mit der (zu widerlegenden) Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Diese seien ihrer Größe nach nummeriert: $p_1, p_2, \dots, p_N$. Jenseits der größten Primzahl p_N soll es also nach Annahme keine weitere Primzahl geben. Wir betrachten nun die Zahl

$$p := \prod_{n=1}^{N} p_n + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N + 1.$$

Wegen $p_k \ge 2$ $(k = 1, \dots, N-1)$, ist sicherlich $p > p_N$. Ferner kann p wegen

$$p - \prod_{n=1}^{N} p_n = 1$$

nicht durch irgend eine der N Primzahlen p_n teilbar sein. Da sich jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellen lässt, kann p also durch keine natürliche Zahl außer 1 und sich selbst teilbar sein und muss folglich selbst prim sein. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass p_N die größte Primzahl ist.

b) Angenommen eine Primzahl p hätte eine rationale Wurzel $\sqrt{p} = r/s$ ($r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$ teilerfrei). Dann wäre

$$r^2 = ps^2.$$

Folglich ist r^2 und damit auch r durch p teilbar. Also ist r^2 durch p^2 teilbar. Dies impliziert aber, dass auch s^2 durch p teilbar ist, was wiederum die Teilbarkeit von s durch p impliziert im Widerspruch zur angenommenen Teilerfremdheit von r und s.

Lösung A.1.9: a) Die Produktmengen sind definiert durch

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} := \{\{n, m\} \mid n, m \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} := \{\{n, m, p\} \mid n, m, p \in \mathbb{N}\}.$$

b) Die wie folgt definierten Abbildungen

$$1 \to \{1,1\},\ 2 \to \{2,1\},\ 3 \to \{1,2\},\ 4 \to \{2,2\},\ 5 \to \{3,1\},\ 6 \to \{3,2\},\ 7 \to \{3,3\},\ \dots$$
$$1 \to \{1,1,1\},\ 2 \to \{2,1,1\},\ 3 \to \{1,2,1\},\ 4 \to \{1,1,2\},\ 5 \to \{2,2,1\},\ 6 \to \{2,1,2\},\ \dots$$

sind injektiv und surjektiv (Veranschaulichung anhand von Skizzen).

Lösung A.1.10: Es werden zunächst 6 Zahlen und danach als $7.$ die Zusatzzahl gezogen. Die Anzahl der Möglichkeiten, 6 verschiedene Zahlen (in beliebiger Reihenfolge) aus 49 Zahlen zu ziehen, ist (nach Text) $\binom{49}{6}$. Damit ein Tip von 6 Zahlen der Gewinnstufe „5 Richtige mit Zusatzzahl“ angehört, muss irgendeine der getippten 6 Zahlen gleich der

Zusatzzahl sein, und die verbleibenden 5 müssen in irgend einer Reihenfolge unter den 6 als erste gezogenen Zahlen vorkommen. Dafür gibt es dann $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten. Also ist die Chance für diesen Tip

$$\frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{13.983.816}.$$

Lösung A.1.11: Der Beweis ist durch vollständige Induktion nach k bei festem n.
i) Zunächst wird gezeigt, dass die Behauptung richtig ist für ein Glied a_1 sowie für zwei Glieder a_1, a_2. Es ist

$$a_1^n = \frac{n!}{n!}\, a_1^n = \sum_{\nu_1=n} \frac{n!}{\nu_1!}\, a_1^{\nu_1}.$$

Weiter ist

$$(a_1+a_2)^n = \sum_{\nu_1+\nu_2=n} \frac{n!}{\nu_1\nu_2!}\, a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}.$$

Die Richtigkeit der binomischen Formel wird angenommen. Es gilt also:

$$(a_1+a_2)^n = a_1^n + \binom{n}{1}a_1^{n-1}a_2 + \binom{n}{2}a_1^{n-2}a_2^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a_1a_2^{n-1} + a_2^n.$$

Dies lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\sum_{\nu_1+\nu_2=n} \frac{n!}{\nu_1!\nu_2!}\, a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2},$$

wobei $n!/(\nu_1!\nu_2!)$ den jeweiligen Koeffizienten der Summanden entspricht. Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung für zwei Glieder a_1, a_2:

$$(a_1+a_2)^n = \sum_{\nu_1+\nu_2=n} \frac{n!}{\nu_1!\nu_2!}\, a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}.$$

ii) Wir nehmen an, dass die Behauptung richtig ist für $k-1 \geq 1$.
iii) Es ist zu zeigen, dass

$$(a_1+\ldots+a_k)^n \;=\; \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k=n} \frac{n!}{\nu_1!\ldots\nu_k!}\, a_1^{\nu_1}\ldots a_k^{\nu_k}.$$

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$\begin{aligned} \nu &:= \nu_1+\ldots+\nu_{n-1}, \\ a &:= a_1+\ldots+a_{k-1}, \\ a^\nu &:= (a_1+\ldots+a_{k-1})^\nu. \end{aligned}$$

Damit ist $a_1+\ldots+a_k = a+a_k$. Wir wenden nun die binomische Formel auf $(a+a_k)^n$ an. Nach Teil (i) gilt:

$$(a_1+\ldots+a_k)^n = (a+a_k)^n = \sum_{\nu+\nu_k=n} \frac{n!}{\nu!\nu_k!}\, a^\nu a_k^{\nu_k}$$

und weiter unter Verwendung der Induktionsannahme:

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k=n} \frac{n!}{\nu!\nu_k!} a_k^{\nu_k} \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_{k-1}=\nu} \frac{\nu!}{\nu_1!\ldots\nu_{k-1}!} a_1^{\nu_1}\ldots a_{k-1}^{\nu_{k-1}}$$

Da bei Multiplikation jedes Gliedes der ersten Summe mit der zweiten Summe der Faktor $\nu!$ gekürzt werden kann, ergibt sich

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k=n} \frac{n!}{\nu_1!\ldots\nu_k!} a_1^{\nu_1}\ldots a_k^{\nu_k},$$

was zu zeigen war.

A.2 Kapitel 2

Lösung A.2.1: a) Für rationale Zahlen gelten konstruktionsgemäß die von den natürlichen Zahlen her bekannten arithmetischen Rechenregeln (Peanosche Axiome), d. h. die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität von Addition und Multiplikation. Damit folgt analog wie im Fall einer natürlichen Zahl $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, auch für $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 1$:

$$(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = 1 - a^{n+1}.$$

b) Durch Anwendung der geometrischen Summenformel erhalten wir:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = 2 - \frac{1}{2^n} \;\to\; 2 \quad (n \to \infty),$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^k = \frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2+(-\frac{1}{2})^n}{3} \;\to\; \frac{2}{3} \quad (n \to \infty),$$

Man versuche, den Limes $\frac{2}{3}$ der zweiten Partialsummenfolge auf direktem Wege zu ermitteln.

Lösung A.2.2: i) Bei der „direkten" Argumentation wird zunächst die rechte Seite mit $a-b$ multipliziert,

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n,$$

und dann das Resultat ausmultipliziert. Dies ergibt offenbar die Behauptung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. In dieser Argumentation ist aber im Kern doch wieder das Induktionsprinzip enthalten, da die Multiplikation für beliebiges n induktiv definiert ist; das Arbeiten mit "..." ist nur eine abgekürzte Schreibweise für diesen Prozess. Alternativ kann der Beweis auch mit vollständiger Induktion geführt werden: Für $n=2$ ist die Behauptung wegen $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ evident. Sei sie als richtig angenommen für ein $n\ge 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^{n+1}-b^{n+1} &= a(a^n-b^n)+(a-b)b^n \\ &= a(a-b)\{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\}+(a-b)b^n \\ &= (a-b)\{a^n+a^{n-1}b+\ldots+ab^{n-1}+b^n\}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

ii) Für $r\in\mathbb{N}$ gilt nach Teil i):

$$a^r-b^r=(a-b)(a^{r-1}+a^{r-2}b+\cdots+ab^{r-2}+b^{r-1)}.$$

Wegen $a,b>0$ impliziert dies für $a>b$ auch $a^r>b^r$ und im Fall $a\ge b$ auch $a^r\ge b^r$.

Lösung A.2.3: Die Konvergenz $a_n\to a\ (n\to\infty)$ bedeutet nach Definition, dass für beliebiges $\varepsilon>0$ ein $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n-a|<\varepsilon$ ist für alle $n\ge n_\varepsilon$, oder in Kurzform:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_\varepsilon:\ \ |a_n-a|<\varepsilon.$$

Die formale Negation dieser Aussage lautet:

$$\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists n_\varepsilon\ge n:\ \ |a_{n_\varepsilon}-a|\ge\varepsilon,$$

d. h.: Es existiert ein $\varepsilon>0$, so dass es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $n_\varepsilon\ge n$ gibt mit $|a_{n_\varepsilon}-a|\ge\varepsilon$. Dies impliziert (nicht trivial!), dass es ein $\varepsilon>0$ und eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit $|a_{n_k}-a|\ge\varepsilon$.

Lösung A.2.4: i) Für zwei Cauchy-Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limiten a bzw. b ist auch die Produktfolge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge mit Limes ab. Damit erschließt man durch Induktion nach r, dass für $r\in\mathbb{N}$ die Potenzfolge $(a_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist mit dem Limes a^r.

ii) Mit der binomischen Formal folgt

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|}\le\frac{|a_n-a|}{|\sqrt{a}|}\quad\to\quad 0\quad(n\to\infty).$$

Lösung A.2.5: i) Mit Hilfe der 3. binomischen Formel sieht man

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>0.$$

Hieraus folgt aber noch nicht die strikte Divergenz der Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, wie das Gegenbeispiel der Folge $(1-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt. Stattdessen verwenden wir ein Widerspruchsargument: Angenommen, die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht strikt divergent, dann besitzt sie eine beschränkte Teilfolge $(\sqrt{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d. h.: $\sqrt{n_k} \le N,\ k \in \mathbb{N}$, mit einem $N \in \mathbb{N}$. Für diese gilt dann $n_k \le N^2,\ k \in \mathbb{N}$, was der strikten Divergenz von $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ widerspricht.

ii) Wie in (i) gilt

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Es konvergiert $\sqrt{n} \to \infty\ (n \to \infty)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_\varepsilon$ gilt: $1/\sqrt{n} < \varepsilon$. Folglich ist die gegebene Folge eine Nullfolge (und damit notwendig auch Cauchy-Folge).

iii) Analog zu (i) erhalten wir durch Kürzen:

$$a_n := \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-1/n}} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty).$$

Lösung A.2.6: Im Text wurde die Aussage der Aufgabe bezogen auf Summen, Produkte sowie Quotienten von Cauchy-Folgen sowie, was etwas einfacher ist, für konvergente Folgen in $\mathbb{Q}$ behandelt. Die verwendeten Argumente funktionieren natürlich auch für derartige Folgen in $\mathbb{R}$. Der Zweck der Übung ist, diese Argumentation nochmals zu rekapitulieren; insbesondere, dass aus $b \ne 0$ auch $b_n \ne 0$ für fast alle n folgt.

i) Konvergente Folgen sind beschränkt. Für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes a konvergiert auch die Folge $(\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Limes αa. Zum Beweis der Behauptung genügt es also, die Konvergenz der Summen-, der Produkt sowie der Reziprokenfolge zu zeigen. Ersteres ergibt sich aus (beachte $|a_n| \le K$):

$$|a_n + b_n - a - b| \le |a_n - a| + |b_n - b| \ \to\ 0 \quad (n \to \infty),$$
$$|a_n b_n - ab| \le |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \ \to\ 0 \quad (n \to \infty).$$

ii) Wegen der Konvergenz $b_n \to b\ (n \to \infty)$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| \le \frac{1}{2}|b|$ für $n \ge N$. Für solche n ist dann $|b_n| \ge |b| - |b_n - b| \ge \frac{1}{2}|b| > 0$, und es gilt:

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \frac{|b - b_n|}{|b_n|\,|b|} \le \frac{|b - b_n|}{\frac{1}{2}|b|^2} \ \to\ 0 \quad (n \to \infty).$$

Lösung A.2.7: i) Es kann verwendet werden, dass Summen, Produkte und (unter den üblichen Bedingungen) auch Quotienten konvergenter Folgen in $\mathbb{R}$ konvergent sind.

a) Durch Kürzen mit n^2 erhalten wir

$$a_n = \frac{2n^2 - n}{2n^2 + 1} = \frac{2 - n^{-1}}{2 + n^{-2}}$$

und damit nach den Regeln der Folgenkonvergenz $a_n \to 1\ (n \to \infty)$.

b) Mit $b_n = 1 + h_n,\ h_n > 0$, ergibt die Bernoullische Ungleichung:

$$10 = (1 + h_n)^n \ge 1 + n h_n \quad \Rightarrow \quad h_n \le \frac{9}{n} \ \to\ 0 \quad (n \to \infty).$$

Folglich gilt $b_n \ \to\ 1\ (n \to \infty)$.

ii) Hier soll das Gefühl für Folgenwachstum gestärkt werden. Es ist dabei nicht verlangt (aber auch nicht verboten), den ε-Kalkül zu verwenden.

a) Für $n \geq 11$ gilt

$$\frac{n^{10}}{n!} \leq \frac{n^{10}}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-10)} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{10}{n})} \leq \frac{1}{n}\,\frac{1}{(\frac{1}{11})^{10}} \;\to\; 0 \quad (n\to\infty).$$

b) Für $n \geq 11$ gilt

$$\frac{10^n}{n!} = \frac{10}{n}\,\frac{10^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{10}{n}\,\frac{1}{\frac{1}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{10}} \leq \frac{1}{n}\,\frac{1}{(\frac{1}{10})^{10}} \;\to\; 0 \quad (n\to\infty).$$

Lösung A.2.8: Bei dieser einfachen Aufgabe ist besonders auf Korrektheit der Argumentation (Handhabung der Absolutstriche usw.) zu achten.

i) Die binomische Formel ergibt

$$0 \leq \big(\varepsilon^{1/2}|a| - \varepsilon^{-1/2}|b|\big)^2 = \varepsilon a^2 - 2|ab| + \varepsilon^{-1}b^2 \quad \text{bzw.} \quad |ab| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}a^2 + \tfrac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

ii) Aus

$$0 = x^2 + xy + y^2 \geq x^2 - |xy| + y^2 \geq x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$

folgt $x = y = 0$. Weiter folgt aus

$$0 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

und

$$x^2 - xy + y^2 \geq x^2 - |xy| + y^2 \geq \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$

wegen der Nullteilerfreiheit des Körpers $\mathbb{R}$, dass $x + y = 0$.

Lösung A.2.9: a) Die „Vollständigkeit“ von R bedeutet, dass es zu jeder Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ einen Limes $a \in \mathbb{R}$ gibt: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Äquivalenz zur Trennungseigenschaft:

i) Es sei die Vollständigkeitseigenschaft angenommen. Dann gilt nach Satz 2.3 auch die Intervallschachtelungseigenschaft. Seien nun $A, B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen mit $a < b$ für $a \in A,\ b \in B$. Wir greifen zwei beliebige Zahlen $a_1 \in A$ und $b_1 \in B$ heraus und betrachten das Intervall $I_1 := [a_1, b_1]$. Gilt für dessen Mittelpunkt $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \notin A \cup B$ und gibt es keine Zahlen $a_1' \in A$ oder $b_1' \in B$ mit $c_1 < a_1' < b_1$ bzw. $a_1 < b_1' < c_1$, so ist mit $s = c_1$ eine trennende Zahl gefunden. Andernfalls setzen wir mit diesen $a_1' \in A$ oder $b_1' \in B$:

$$I_2 = [a_2, b_2] := \begin{cases} [a_1, c_1] & \text{für } c_1 \in B, \\ [c_1, b_1] & \text{für } c_1 \in A, \\ [a_1, b_1'] & \text{für } a_1 < b_1' < c_1, \\ [a_1', b_1] & \text{für } c_1 < a_1' < b_1. \end{cases}$$

In allen vier Fällen gilt dann offenbar $|b_2 - a_2| \le \frac{1}{2}|b_1 - a_1|$. Durch Fortsetzung dieses Konstruktionsprozesses erhalten wir entweder nach n Schritten eine trennende Zahl $s = c_{n+1}$, oder es ergibt sich eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$ mit den Eigenschaften $a_n \in A,\ b_n \in B$ und

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad |b_n - a_n| \le 2^{1-n}|b_1 - a_1|.$$

Die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet also eine Intervallschachtelung und besitzt einen gemeinsamen Punkt $s \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Wegen $a_n \le s \le b_n$ und $|a_n - b_n| \to 0\ (n \to \infty)$ kann es dann keine Punkte $a \in A$ oder $b \in B$ geben mit $s < a$ oder $b < s$. Es gilt also $a \le s \le b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$, d.h.: s ist die gesuchte trennende Zahl.

ii) Sei nun die Trennungseigenschaft angenommen, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da die Cauchy-Folge beschränkt ist, sind die folgenden Mengen nicht leer:

$$A := \{a \in \mathbb{R}|\ a < a_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}, \quad B := \{b \in \mathbb{R}|\ b > a_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Offenbar ist dann $a < b$ für alle $a \in A,\ b \in B$. Gemäß der Trennungseigenschaft gibt es also ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \le s \le b$ für alle $a \in A,\ b \in B$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ muss dann für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten $|a_n - s| < \varepsilon$, d. h.: s ist Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung A.2.10: a) Es wird die folgende Eigenschaft reeller Zahlen $a, b \ge 0$ verwendet:

$$a^k < b^k \ \Leftrightarrow\ a < b, \qquad a^k \le b^k \ \Leftrightarrow\ a \le b, \quad k \in \mathbb{N},$$

was man leicht mit Hilfe der Beziehung $b^k - a^k = (b-a)(a^{k-1}b^0 + a^{k-2}b^1 + \cdots + a^1 b^{k-2} + a^0 b^{k-1})$ gewinnt. Gemäß Text genügt es, die k-te Wurzel für Zahlen $x \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < x < 1$ zu konstruieren. Denn für $x = 1$ ist trivialerweise $a = 1$ k-te Wurzel und der Fall $x > 1$ kann über die Setzung $x' := 1/x$ auf den Fall $0 < x' < 1$ zurückgeführt werden:

$$\sqrt[k]{x} := \frac{1}{\sqrt[k]{x'}}, \qquad (\sqrt[k]{x})^k = \Big(\frac{1}{\sqrt[k]{x'}}\Big)^k = \frac{1}{(\sqrt[k]{x'})^k} = \frac{1}{x'} = x.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1$, beliebig aber fest. Dann gibt es ein größtes $d_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, so dass

$$a_1 := 0, d_1 < b_1 := 0, (d_1 + 1), \quad a_1^k \le x < b_1^k.$$

i) Wir betrachten nun zwei Fälle:
Fall a) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung

$$a_n = 0, d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n < b_n = 0, d_1 d_2 \dots d_{n-1}(d_n+1), \quad a_n^k \le x < b_n^k,$$

mit $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\},\ k = 1, \dots, n-1$ und $d_n \le 8$ vor. Die nächste Einschließung gewinnen wir dann durch den Ansatz $a_{n+1} := 0, d_1 \dots d_n d_{n+1}$ mit Hilfe der Bedingung:

$$d_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ möglichst groß, aber } a_{n+1}^k \le x\,,$$

und setzen

$$b_{n+1} := \begin{cases} 0, d_1 \dots d_n(d_{n+1}+1) & \text{für } d_{n+1} \le 8, \\ 0, d_1 \dots (d_n+1)0 & \text{für } d_{n+1} = 9. \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist dann

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n, \quad a_{n+1}^k \le x < b_{n+1}^k.$$

Fall b) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung

$$a_n = 0,d_1d_2\dots d_{n-1}d_n < b_n = 0,d_1d_2\dots d_{m-1}(d_m{+}1)0\dots0, \quad a_n^k \le x < b_n^k,$$

mit $d_k \in \{0,1,\dots,9\}$, $k = 1,\dots,m-1$, $d_m \le 8$ und $d_{m+1} = \dots = d_n = 9$ vor. Die nächste Einschließung gewinnen wir dann durch den Ansatz $a_{n+1} := 0,d_1\dots d_n d_{n+1}$ mit Hilfe der Bedingung:

$$d_{n+1} \in \{0,1,\dots,9\} \text{ möglichst groß, aber } a_{n+1}^k \le x\,,$$

und setzen

$$b_{n+1} := \begin{cases} 0,d_1\dots d_n(d_{n+1}{+}1) & \text{für } d_{n+1} \le 8, \\ 0,d_1\dots(d_m{+}1)0\dots0 & \text{für } d_{n+1} = 9. \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt dann in beiden Fällen:

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n, \quad a_{n+1}^k \le x < b_{n+1}^k, \quad b_n - a_n \le 10^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zum Nachweis, dass dadurch eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ als k-te Wurzel von x definiert ist, kann wie folgt argumentiert werden:

ii) Verwendung der Intervallschachtelungseigenschaft (Satz aus dem Text): Die erzeugten Folgen von Partialbrüchen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren offensichtlich eine Intervallschachtelung $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, welche wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ einen gemeinsamen Punkt a besitzt. Dieser ist dann wegen $a_n^k \le x < b_n^k$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k = \lim_{n\to\infty} b_n^k,$$

die gesuchte k-te Wurzel von x.

iii) Verwendung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$: Man zeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$ ist. Dieser Limes ist dann wegen der obigen Identitäten gerade die gesuchte k-te Wurzel von x. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für Indizes $m \ge n{+}1$ gilt nach Konstruktion

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n = b_m - a_n \le b_n - a_n \le 10^{-n}.$$

Hieraus folgt die Cauchy-Folgeneigenschaft der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Man mache sich dies nochmal klar.).

b) Es wird verwendet, dass die s-te Wurzel von $a \in \mathbb{R}_+$ als (eindeutig bestimmte) positive Lösung der Gleichung $x^s = a$ existiert, und dass für Potenzen die Rechenregel $a^{rs} = (a^s)^r = (a^r)^s$ gilt. Die Beziehung

$$\big((\sqrt[s]{a})^r\big)^s = (\sqrt[s]{a})^{rs} = \big((\sqrt[s]{a})^s\big)^r = a^r = \big(\sqrt[s]{a^r}\big)^s.$$

impliziert dann, dass $(\sqrt[s]{a})^r$ und $\sqrt[s]{a^r}$ beide positive s-te Wurzel von a^r sind. Wegen deren Eindeutigkeit folgt die behauptete Gleichheit. Die anderen Rechenregeln ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen der Potenz- und Wurzelbildung.

Lösung A.2.11: Gemäß der Bedingungen für einen Körper ist zu zeigen:

a) die Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetze für Addition und Multiplikation (Nachrechnen);

b) die Existenz der „neutralen" Elemente Null $= \{0,0\}$ für die Addition sowie Eins $= \{1,0\}$ für die Multiplikation sowie die Lösbarkeit der Gleichungen $a+z=\{0,0\}$ und $az=\{1,0\}$ $(a\neq\{0,0\})$ für beliebig gegebenes $a\in\mathbb{C}$. Lösungen sind:

$$z=\{-a_1,-a_2\},\qquad z=\frac{1}{a}=\Big\{\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\Big\}.$$

Lösung A.2.12: Die Ausdrucksweise „verträglich" bedeutet in diesem Fall, dass für je zwei komplexe Zahlen in den beiden Schreibweisen $z=\{x,y\}=x+iy$ und $z'=\{x',y'\}=x'+iy'$ mit den jeweils festgelegten arithmetischen Rechenregeln gilt:

$$\begin{aligned}\{x,y\}+\{x',y'\}&=z+z'=(x+iy)+(x'+iy'),\\ \{x,y\}\cdot\{x',y'\}&=zz'=(x+iy)\cdot(x'+iy').\end{aligned}$$

a) Für $z=x+iy,\ z'=x'+iy'\in\mathbb{C}$ folgt aus $z=z'$, daß $|z-z'|=0$. Dies impliziert

$$(x-x')^2+(y-y')^2=0$$

und somit $x=x'$ und $y=y'$.

b) Die Behauptung besagt die Nullteilerfreiheit des Körpers $\mathbb{C}$. Dies genügt bereits als Argument. Alternativ kann auch gerechnet werden. Man hat mit Hilfe von (a):

$$(x+iy)(x'+iy')=xx'-yy'+i(xy'+x'y)=0\quad\Rightarrow\quad xx'-yy'=0,\ xy'+x'y=0.$$

Gilt nun $x'\neq 0$, so folgt durch Multiplikation mit x bzw. y und anschließender Addition:

$$x^2x'-xyy'=0,\ \ xy'y+x'y^2=0\quad\Leftrightarrow\quad 0=x^2x'+x'y^2=x'(x^2+y^2),$$

d. h.: $x=y=0$. Für $y'\neq 0$ wird mit y bzw. x multipliziert, und Subtraktion ergibt

$$yxx'-y^2y'=0,\ \ x^2y'+xx'y=0\quad\Leftrightarrow\quad 0=x^2y'+y^2y'=(x^2+y^2)y',$$

was wiederum $x=y=0$ impliziert.

Lösung A.2.13: Diese Aufgabe sieht schwierig aus, ist aber im Grunde einfach. Die algebraischen Zahlen sind definiert als die Menge der Lösungen aller algebraischen Gleichungen bzw. der Nullstellen aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$.

i) Verwendet werden kann die Aussage von Aufgabe 1.5, dass mit $\mathbb{N}$ auch $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sowie die Aussage der Vorlesung, dass mit $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ auch $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$ abzählbar sind. Jetzt kommt der „harte" Kern der Aufgabe: Diese Schlussweise überträgt sich auf beliebige abzählbare Mengen A und B, so dass auch $A\times B$ abzählbar ist. Mit Hilfe eines Induktionsschlusses folgt dann, daß auch beliebige endliche Produkte von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ abzählbar sind.

ii) Die Menge der algebraischen Gleichungen (bzw. der Polynome) $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+$

$a_n x^n = 0$ $(a_k \in \mathbb{Z})$ hat offenbar dieselbe Mächtigkeit wie eine solche Produktmenge. Nun hat jedes Polynom höchstens endlich viele Nullstellen. Durch einen diagonalen Abzählprozeß analog wie beim Nachweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erhält man dann auch die Abzählbarkeit der Menge aller dieser Nullstellen, d. h. der Menge der *algebraischen* Zahlen. Dazu ist es nicht erforderlich, diesen Abzählprozess explizit in Indexschreibweise anzugeben; er sollte aber graphisch beschrieben sein.

A.3 Kapitel 3

Lösung A.3.1: a) O.B.d.A sei $a > 0$; ansonsten ersetze man die untere Schranke durch 0. Für fixiertes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $a - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$. Mit

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{n_\epsilon + 1}}{a_{n_\epsilon}} a_{n_\varepsilon}$$

folgt dann

$$a_{n_\varepsilon}(a-\varepsilon)^{n-n_\varepsilon} < a_n < a_{n_\varepsilon}(a+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon}.$$

Wurzelziehen ergibt

$$(a-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{n_\varepsilon}}{(a-\varepsilon)^{n_\varepsilon}}} < \sqrt[n]{a_n} < (a+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{n_\varepsilon}}{(a+\varepsilon)^{n_\varepsilon}}}\,.$$

Da die Wurzeln auf der linken und rechten Seite für $n \to \infty$ gegen 1 konvergieren und ε beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. Im Fall $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ergibt diese Argumentation durch Anwendung auf die positive Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$.

b) Wir zeigen nun für die drei Folgen deren Konvergenz oder Divergenz:

i) $\sqrt[n]{n!} \to \infty$, denn

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to \infty \quad (n \to \infty);$$

ii) $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \to e > 1$, denn

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{n! \cdot (n+1)}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n \to \infty);$$

iii) $\frac{n^n}{n!} \to \infty$, denn sonst gäbe es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und es folgte wegen $\frac{n^n}{n!} > 1$:

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to 1 \quad (n_k \to \infty),$$

im Widerspruch zu (ii). Alternativ kann auch direkt wie folgt argumentiert werden:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} > n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Lösung A.3.2: a) Ein „Häufungswert“ einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ist ein $a \in \mathbb{K}$, zu dem für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenelemente a_n existieren mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Ein „Häufungspunkt“ einer unendlichen Teilmenge $A \subset \mathbb{K}$ ist ein $a \in \mathbb{K}$, zu dem für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Punkte $x \in A,\ x \neq a$, existieren mit $|x - a| < \varepsilon$. Wegen der Bedingung $x \neq a$ kann eine endliche Teilmenge $A \subset \mathbb{K}$ klarerweise keinen Häufungspunkt haben.

b) Nach Definition eines Häufungspunktes gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ (mindestens) ein $a_n \in A,\ a_n \neq a$, so dass

$$|a_n - a| < 1/n.$$

Wir wählen sukzessive für $n = 1, 2, 3, \dots$ solche Elemente $a_n \in A$ aus und erhalten so eine gegen a konvergierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Widerspruchsbeweis: Die Nichtkonvergenz der Folge gegen a impliziert die Existenz eines $\varepsilon > 0$ und einer Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge nach Voraussetzung beschränkt ist, hat diese Teilfolge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß wiederum eine Teilfolge $(a_{n'_k})$, deren Limes wegen der Voraussetzung gleich a sein muss. Es gilt also $|a_{n'_k} - a| \to 0\ (k \to \infty)$, was der Annahme widerspricht.

Eine *unbeschränkte* Folge enthält eine Teilfolge, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, kann aber noch weitere konvergente Teilfolgen enthalten. In diesem Fall ist die Aussage also offenbar nicht richtig. Ein Beispiel ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit den folgenden Elementen

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade}, \\ n & \text{für } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Lösung A.3.3: Wir verwenden, dass eine monoton wachsende, beschränkte Folge konvergent ist. Da die Reihe $s_\infty = \sum_{n=1}^\infty a_n$ nach Voraussetzung konvergent ist, muss $a_n \to 0\ (n \to \infty)$ konvergieren. Es gibt also neben einer Schranke K für alle a_n ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n| \leq 1$ ist für $n \geq n_1$. Also gilt für die Partialsummen der Reihe der k-ten Potenzen für $n \geq n_1$:

$$\sum_{n=1}^{n} a_n^k = \sum_{n=1}^{n_1} a_n^k + \sum_{n=n_1+1}^{n} a_n^k \leq n_1 K^k + \sum_{n=n_1+1}^{n} a_n \leq n_1 K^k + s_\infty.$$

Die Folge der Partialsummen ist also beschränkt. Da sie wegen $a_n^k \geq 0$ auch monoton wachsend ist, folgt ihre Konvergenz.

Alternativ lässt sich die Behauptung auch direkt durch Betrachtung von Partialsummen und Anwendung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums beweisen.

Lösung A.3.4: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ jeweils mit den kleinsten und größten Häufungswerten $\underline{a} := \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \overline{a} := \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\underline{b} := \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \overline{b} := \limsup_{n\to\infty} b_n$. Die entsprechenden Größen für die Summen- und Produktfolgen

$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seinen mit $\underline{a+b} \le \overline{a+b}$ bzw. $\underline{ab} \le \overline{ab}$ bezeichnet. Für Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt stets

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{k\to\infty} a_{n_k}, \qquad \limsup_{k\to\infty} a_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

a) Sei $(a_{n_k} + b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $a_{n_k} + b_{n_k} \to \underline{a+b}$. Ferner seien $(a_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n'_k} \to \liminf_{k\to\infty} a_{n_k}$ $(k \to \infty)$ sowie $(b_{n''_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_{n''_k} \to \liminf_{k\to\infty} b_{n'_k}$ $(k \to \infty)$. Dann konvergiert auch $a_{n''_k} + b_{n''_k} \to \underline{a+b}$ $(k \to \infty)$, und es folgt:

$$\underline{a} + \underline{b} \le \liminf_{k\to\infty} a_{n''_k} + \liminf_{k\to\infty} b_{n''_k} = \lim_{k\to\infty} a_{n''_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n''_k} = \lim_{k\to\infty} (a_{n''_k} + b_{n''_k}) = \underline{a+b}.$$

Zum Beweis der nächsten Ungleichung seien $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to \liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{a}$, $(b_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_{n'_k} \to \limsup_{k\to\infty} b_{n_k}$ und $(a_{n''_k} + b_{n''_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{n'_k} + b_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n''_k} + b_{n''_k} \to \liminf_{k\to\infty} (a_{n'_k} + b_{n'_k})$. Damit folgt:

$$\underline{a+b} \le \liminf_{k\to\infty} (a_{n'_k} + b_{n'_k}) = \lim_{k\to\infty} (a_{n''_k} + b_{n''_k}) = \lim_{k\to\infty} a_{n''_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n''_k} = \underline{a} + \overline{b}.$$

Als nächtes seien $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{b} = \lim_{k\to\infty} b_{n_k}$ und $(a_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\liminf_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} a_{n'_k}$. Dann folgt:

$$\underline{a} + \overline{b} \le \liminf_{k\to\infty} a_{n_k} + \overline{b} = \lim_{k\to\infty} a_{n'_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n'_k} = \lim_{k\to\infty} (a_{n'_k} + b_{n'_k}) \le \overline{a+b}.$$

Schließlich seien $(a_{n_k} + b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{a+b} = \lim_{k\to\infty} (a_{n_k} + b_{n_k})$, $(a_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\limsup_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} a_{n'_k}$ und $(b_{n''_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge von $(b_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\limsup_{k\to\infty} b_{n'_k} = \lim_{k\to\infty} b_{n''_k}$. Damit folgt:

$$\overline{a+b} = \lim_{k\to\infty} (a_{n''_k} + b_{n''_k}) = \lim_{k\to\infty} a_{n''_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n''_k} \le \overline{a} + \overline{b},$$

was noch zu beweisen war.

b) Im Falle $a_n, b_n \ge 0$ kann ganz analog wie in a) argumentiert werden.

Lösung A.3.5: In dieser Aufgabe geht es um die kombinierte Anwendung verschiedener Techniken, die im Zusammenhang mit der Folgen- und Reihenkonvergenz erlernt worden sind.

a) Das Leibnizsche Kriterium besagt, dass eine „alternierende“ Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ in $\mathbb{R}$, d. h. $a_n a_{n+1} \le 0$, deren Elemente betragsmäßig eine monotone Nullfolge bilden, konvergent ist.

b) Mit der Setzung $a_k := (-1)^k$ impliziert das Dirichletsche Kriterium das Leibnizsche Kriterium.

c) Es ist

$$s_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

und folglich $s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$.

Setzen wir $A_0 := 0$, so ist $a_k = A_k - A_{k-1},\ k = 1,\dots,n$ und $A_0 b_1 = 0$. Damit folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k-1}) + A_n b_{n+1}.$$

Aufgrund der Voraussetzung ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Folglich konvergiert auch die Produktfolge $(A_n b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Dies folgt leicht mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums für Reihen. Ferner konvergiert nach dem eben Gezeigten die Teleskopreihe $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$, diese sogar absolut, da ihre Glieder alle $b_k - b_{k+1} \geq 0$ oder $b_k - b_{k+1} \leq 0$ erfüllen. Da die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ konvergent. Im Hinblick auf obige Identität ergeben die Regeln der Folgenkonvergenz, daß die Produktreihe $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ konvergiert.

Lösung A.3.6: a) Das Problem ist die Kombination einer divergenten Folge mit einer Nullfolge. Umformung mit Hilfe des „Tricks“ von früheren Aufgaben ergibt

$$a_n = n\Big(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1\Big) = n\,\frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

Nach den Regeln der „Folgenarithmetik“ impliziert $\frac{1}{n} \to 0$ auch $\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \to 2$ und folglich $a_n \to \frac{1}{2}\ (n\to\infty)$.

b) Das Konvergenzverhalten der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für verschiedene $x \in \mathbb{R}$ möglicherweise unterschiedlich. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen $x^2 \geq 0$:

$$0 < \frac{2}{1+x^2} \leq 2$$

und somit

$$\Big|\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big| = \Big|\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2}\Big| = \Big|1 - \frac{2}{1+x^2}\Big| \leq q \leq 1$$

mit einem geeigneten $q = q(x) \in \mathbb{R}$. Dies impliziert für $q < 1$, d.h. für $x \neq 0$:

$$|a_n| = \Big|\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big|^n \leq q^n \ \to\ 0 \quad (n\to\infty).$$

Im Fall $x = 0$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

Lösung A.3.7: Zweck der Aufgabe ist das Üben der Anwendung von Konvergenzkriterien.

a) Wegen

$$a_k a_{k+1} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\,\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}} = \frac{(-1)^{2k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} < 0$$

und der monotonen Konvergenz der Absolutbeträge (beachte $\sqrt{k+1} > \sqrt{k}$),

$$|a_k| = \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}} = |a_{k+1}| \ \to \ 0 \quad (k \to \infty),$$

ist das Leibnizsche Kriterium anwendbar und liefert die Konvergenz der Reihe $s_\infty^{(a)}$. Diese Konvergenz ist aber *nicht absolut*, da nach der Vorlesung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \to \ \infty \quad (k \to \infty).$$

b) Es ist $1/k \leq 1$ und somit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Folglich ist die Reihe $s_\infty^{(a)}$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent.

c) Wegen

$$\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| = \frac{(k+1)^3}{3^{k+1}}\,\frac{3^k}{k^3} = \frac{(k+1)^3}{k^3}\,\frac{1}{3} \ \to \ \frac{1}{3} < 1 \quad (k \to \infty)$$

ist das Quotientenkriterium erfüllt, und die Reihe $s_\infty^{(c)}$ ist demnach absolut konvergent.

Lösung A.3.8: Zweck der Aufgabe ist u. a. das Erlernen des Umgangs mit parameterabhängigen Reihen als Vorbereitung auf Funktionenreihen (z. B.: Potenzreihen).

i) Für beliebiges festes $|x| < 1$ gilt $|x| \leq q < 1$ und

$$|1 + x^k| \geq 1 - |x|^k \geq 1 - q^k =: c(q) > 0.$$

Somit

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k}\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\frac{x^k}{1+x^k}\Big| \leq \frac{1}{c(q)} \sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

Also ist in diesem Fall die geometrische Reihe Majorante für $s_\infty(x)$, was die absolute Konvergenz der Reihe impliziert.

ii) Für $|x| \geq q > 1$ konvergiert $|x|^{-k} \to 0 \ (k \to \infty)$, und es gilt

$$|1 + x^k| \leq 1 + |x|^k.$$

Dies impliziert

$$\Big|\frac{x^k}{1+x^k}\Big| \geq \frac{|x|^k}{1+|x|^k} = \frac{1}{|x|^{-k}+1} \ \to \ 1 \quad (k \to \infty),$$

d. h.: Die Folgenglieder bilden keine Nullfolge, und die Folge selbst kann somit nicht konvergent sein.

Lösung A.3.9: a) Eine „Potenzreihe“ ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

Ihr „Konvergenzradius“ ist das Supremum aller $\rho \geq 0$, für das die Reihe für $|x - x_0| < \rho$ absolut konvergiert. Für diesen gelten die Formeln (die Existenz des Limes vorausgesetzt):

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}.$$

bi) Es ist $\rho = 1/2$, da (bei Setzung $c_k := 0$ für k ungerade)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \big(2\big)^{2k} x^{2k}, \qquad \sqrt[2k]{|c_{2k}|} = \sqrt[2k]{2^{2k}} = 2.$$

bii) Es ist $\rho = 1$, da

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \Big(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\Big)^{1/2} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

iii) Es ist $\rho = \infty$, da

$$\sqrt[k]{|c_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Lösung A.3.10: a) Widerspruchsbeweis: Im Fall $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ ist nichts zu zeigen. Sei also $s_* := \liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n =: s^*$. Gemäß ihrer Definition sind $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ Häufungswerte der Folge, d. h.: Es gibt Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $s_* = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ und $s^* = \lim_{k\to\infty} a_{n'_k}$. Sei nun angenommen, dass es ein a gibt mit $s_* < a < s^*$, welches kein Häufungswert ist. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so dass das Intervall $I_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ höchstens endlich viele Elemente der Folge enthält. Nach Voraussetzung gibt es nun ein $n_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt: $|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$. Dann liegen von n_ε ab alle Folgenelemente entweder im Intervall $(-\infty, a - \varepsilon]$ oder im Intervall $[a + \varepsilon, \infty)$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass sowohl s_* als auch s^* Häufungswerte sind.
Wir betrachten die Menge der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$. Aus diesen bilden wir eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Prinzip:

$$q_1 := \tfrac{1}{1}, \quad q_2 := \tfrac{1}{2}, \quad q_3 = \tfrac{2}{2}, \quad q_4 := \tfrac{1}{3}, \quad q_5 := \tfrac{2}{3}, \quad q_6 := \tfrac{3}{3}, \quad q_7 := \tfrac{1}{4}, \quad q_8 := \tfrac{2}{4} \quad \ldots$$

Diese Folge hat u. a. die unterschiedlichen Häufungswerte 0 und 1, und es gilt offenbar $|q_{n+1} - q_n| \to 0 \ (n \to \infty)$.

b) Aus der rekursiven Definition $a_1 := a,\ a_2 := b,\ a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}),\ n \geq 3$, ergibt sich

$$a_n - a_{n-1} = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-1}) = -\tfrac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2}), \quad n \geq 3,$$

und folglich $|a_n - a_{n-1}| \leq 2^{2-n}|b-a|$, $n \geq 3$. Damit erschließen wir, dass für beliebiges $m \in \mathbb{N}$:

$$|a_{n+m} - a_n| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}|a_n - a_{n-1}| \leq 2^{2-n}|b-a| \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \leq 2^{2-n}|b-a|.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit einem Limes $\lim_{n\to\infty} a_n =: a_\infty \in [a,b]$. Zur bestimmung dieses Limes beachten wir, dass mit $h := b - a$ konstruktionsgemäß gilt:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2^0 h, \\
a_3 &= a_2 - 2^{-1}h = a_1 + 2^0 h - 2^{-1}h, \\
a_4 &= a_3 + 2^{-2}h = a_1 + 2^0 h - 2^{-1}h + 2^{-2}h, \\
a_5 &= a_4 - 2^{-3}h = a_1 + 2^0 h - 2^{-1}h + 2^{-2}h - 2^{-3}h, \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + (-1)^n 2^{2-n}h = a_1 + 2^0 h - 2^{-1}h + 2^{-2}h - 2^{-3}h + \cdots + (-1)^n 2^{2-n}h \\
&= a_1 + h \sum_{k=0}^{n-2} (-\tfrac{1}{2})^k.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel ergibt sich also

$$a_n = a_1 + h\,\frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - (-\frac{1}{2})} \;\to\; a + \tfrac{2}{3}(b-a) =: a_\infty \quad (n \to \infty).$$

c) Die Menge $\mathbb{Q}$ liegt konstruktionsgemäß „dicht“ in $\mathbb{R}$, d. h.: Jedes $a \in \mathbb{R}$ ist Limes einer Folge in $\mathbb{Q}$. Sei nun $\{q_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ irgendeine Durchnummerierung aller rationalen Zahlen (s. Teil b). Da es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $q \in \mathbb{Q}$ gibt mit $|a - q| < \varepsilon$, kann man mit der üblichen Methode wieder eine Teilfolge von $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auswählen, welche gegen a konvergiert. Die Menge der Häufungswerte dieser Folge ist also ganz $\mathbb{R}$ und damit überabzählbar.

Lösung A.3.11: a) In der reduzierten harmonischen Reihe s_{red} treten im einstelligen Nennerbereich $1-9$ genau 9 Nenner auf; im zweistelligen Nennerbereich $10-99$ treten genau $9\cdot 9 = 9^2$ Nenner (neun Ziffern an der ersten Stelle mal neun Ziffern an der zweiten Stelle) auf; im dreistelligen Nennerbereich $100-999$ treten genau $9\cdot 9\cdot 9 = 9^3$ Nenner auf; usw.; allgemein treten im n-stelligen Nennerbereich $10^{n-1} - 10^n - 1$ genau 9^n Nenner auf.
Die 9 auftretenden einstelligen Nennerwerte sind allesamt ≥ 1; daher sind die Brüche in der Reihe jeweils ≥ 1; die 92 auftretenden zweistelligen Nenner sind alle ≥ 10; daher sind die entsprechenden Brüche alle $\leq \frac{1}{10}$; die 93 dreistelligen zulässigen Nenner sind jeweils ≥ 100; daher sind die entsprechenden Brüche allesamt $\leq \frac{1}{100}$; usw.

Das ergibt die obere Schranke

$$\begin{aligned}
s_{\text{red}} &= \left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{111}+\cdots+\frac{1}{999}\right)+\ldots \\
&< \left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{100}\right)+\ldots \\
&= 9\cdot\frac{1}{1}+9^2\cdot\frac{1}{10}+9^3\cdot\frac{1}{100}+\ldots \\
&= 9\cdot\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots\right) \\
&= \frac{9}{1-9/10}=90.
\end{aligned}$$

Also ist die reduzierte harmonische Reihe konvergent mit einem Limes $s_{\text{red}} \leq 90$.

Bemerkung: Bei der betrachteten Reihe handelt es sich um eine sog. „Kempner[1]-Reihe"; ihr Konstruktionsprinzip lässt sich noch wesentlich verallgemeinern; viele dieser reduzierten Reihen erweisen sich als konvergent. Das bekannteste Beispiel einer nicht konvergenten, reduzierten harmonischen Reihe erhält man, wenn nur Primzahlen als Nenner zugelassen sind.

b) Wir zeigen zunächst die Beschränktheit der Folge. Aus der Potenzreihenentwickung von e^z entnehmen wir die Beziehung

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\geq 1-x, \quad 0\leq x\leq 1,$$

bzw. wegen der Monotonie des Logarithmus $-x \geq \ln(1-x)$. Damit erhalten wir

$$\ln(n)-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\leq-\frac{1}{n+1}.$$

bzw.

$$\ln(n)+\frac{1}{n+1}\leq\ln(n+1).$$

Damit erschließen wir nun durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq\ln(n)+1.$$

Für $n=1$ ist offensichtlich $1\leq\ln(1)+1=1$. Sei die Ungleichung nun richtig für ein $n\geq 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\leq\ln(n)+1+\frac{1}{n+1}\leq\ln(n+1)+1.$$

[1]Aubrey J. Kempner (1880-1973), US-amerikanischer Mathematiker, Promotion 1912 an der Univ. Göttingen, Prof.an der University of Colorado at Boulder

Dies impliziert

$$0 < a_n = \frac{1}{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big) \le \frac{1}{n}\exp\big(\ln(n+1)\big) = \frac{n+1}{n} \le 2,$$

d. h. die Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1}\frac{n+1}{n+2} &= \frac{1}{n+1}\exp\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\Big)\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)\frac{n}{n+1}\exp\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\frac{n+1}{n+2} \\ &= a_n\frac{n}{n+1}\exp\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\exp\Big(\frac{1}{n+1}\Big) \ge 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \qquad \text{bzw.} \qquad \exp\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\frac{n+1}{n+2} \ge 1$$

folgt

$$a_{n+1}\frac{n+1}{n+2} \ge a_n\frac{n}{n+1},$$

d. h. die Monotonie der beschränkten Folge $(a_n n/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$. Damit existiert der Limes $a := \lim_{n\to\infty} a_n n/(n+1) = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$a_n = \frac{1}{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big).$$

Zur Bestimmung dieses Limes nehmen wir an, dass es eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt (sog. „Euler-Mascheroni[2]-Konstante“) mit

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\Big\}.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{n}\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\Big)\exp\big(\ln(n)\big) \\ &= \exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\Big) \to e^{\gamma} \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

[2]Lorenzo Mascheroni (1750–1800): Italienischer Geistlicher und Mathematiker; lehrte Rhetorik, Physik und Mathematik am Seminar in Bergamo und danach als Prof. für Mathematik in Pavia, in seinem Werk *Adnotationes ad calculum integralem Euleri* (1790) findet sich eine Integraldarstellung der nach ihm benannten Zahl und ihre auf 32 Nachkommastellen genaue Berechnung; auch Beiträge zur Statik von Gewölben.

c) Wir versuchen das Quotientenkriterium: a)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2,7)^{n+1}(n+1)!}\frac{(2,7)^n n!}{n^n} = \frac{1}{2,7}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n = \frac{1}{2,7}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e}{2,7} > 1.$$

Die Reihe (a) ist also divergent. Dagegen ist die Reihe (b) wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e}{2,8} < 1$$

konvergent.

Lösung A.3.12: Die positiven Glieder der Reihe seien mit a_k und die negativen mit b_k bezeichnet. Da die Reihe konvergent aber nicht absolut konvergent ist, muss es von beiden Sorten von Gliedern jeweils unendlich viele geben. Ferner gilt für deren Summen notwendig $\sum_{k=1}^n a_k \to \infty \ (n\to\infty)$ bzw. $\sum_{k=1}^n b_k \to -\infty \ (n\to\infty)$; andernfalls wäre die Reihe, wie man sich leicht überlegt, absolut konvergent. Wir zitieren im Folgenden die originale knappe Beweisskizze von Riemann (1826-1866) (siehe W. Walter: Analysis I, Springer-Verlag, 1990): *Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth größer als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a, als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d. h. die Reihe wird gegen C konvergieren.*

Lösung A.3.13: Die Folge der Fibonacci-Zahlen a_n ist, was man leicht verifiziert, strikt monoton wachsend. Die Folge der Quotienten $x_n := a_{n+1}/a_n > 1$ ist dann wegen

$$1 < x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \le 2$$

beschränkt. Der postulierte Limes $g = \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big)$ genügt der Gleichung (nachrechnen)

$$g = 1 + \frac{1}{g}.$$

Damit erhalten wir

$$|x_{n+1} - g| = \left|1 + \frac{1}{x_n} - 1 - \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{g}\right| = \frac{|x_n - g|}{g x_n},$$

und folglich durch Rekusion wegen $x_k \ge 1$ und $g > 1$:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - g| &= \frac{|x_n - g|}{g x_n} = \frac{|x_{n-1} - g|}{g^2 x_n x_{n-1}} = \cdots = \frac{|x_1 - g|}{g^n x_n x_{n-1} \ldots x_1} \\ &\le \frac{|x_1 - g|}{g^n} \ \to\ 0 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

Lösung A.3.14: Die Folgenelemente genügen der rekursiven Beziehung

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) Wir zeigen zunächst die Beschränktheit der Folge. Man verifiziert durch Quadrieren und Ausnutzung der Ungleichungsregeln für rationale Potenzen, dass

$$\sqrt{1+a} \le 1 + \sqrt{a}, \quad \sqrt{a + 1 + \sqrt{a}} \le 1 + \sqrt{a};$$

(Dreiecksungleichung für den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^2$). Im Hinblick auf die obige rekursive Beziehung behaupten wir also versuchsweise, dass

$$\sqrt{a} \le a_n \le 1 + \sqrt{a}.$$

Dies wird mit Induktion bewiesen. Zunächst ist offenbar $0 \le a_1 = \sqrt{a} \le 1 + \sqrt{a}$. Ist die Abschätzung für a_n richtig, so folgt mit obiger Ungleichung (und der „Monotonie“ der Wurzeloperation)

$$0 \le a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \le \sqrt{a + 1 + \sqrt{a}} \;\le\; 1 + \sqrt{a},$$

so dass sie für die ganze Folge richtig ist.

ii) Die Folge ist monoton wachsend, was wir wieder durch Induktion zeigen. Zunächst ist $a_2 = \sqrt{a + a_1} = \sqrt{a + \sqrt{a}} \ge \sqrt{a} = a_1$. Aus $a_n \ge a_{n-1}$ (und der „Monotonie“ der Wurzeloperation) folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \ge \sqrt{a + a_{n-1}} = a_n$$

und damit die Monotonie der ganzen Folge. Die beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat nun einen Limes $x \in \mathbb{R}_+$. Für diesen gilt wegen der obigen rekursiven Beziehung unter Beachtung der bekannten Regeln der Folgenkonvergenz

$$x = \lim_{n\to\mathbb{N}} a_{n+1} = \lim_{n\to\mathbb{N}} \sqrt{a + a_n} = \sqrt{a + x}.$$

Also ist $x \in \mathbb{R}_+$ positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - a = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + a}.$$

Lösung A.3.15: Wir haben nach Definition unendlicher Dezimalbrüche:

$$0,\overline{d_1 \dots d_s} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(10^{-ks} \sum_{j=1}^{s} d_j\, 10^{-j} \right) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(10^{-s-ks} \sum_{j=1}^{s} d_j\, 10^{s-j} \right) \right)$$

Bei Beachtung von

$$d_1 \dots d_s = \sum_{j=1}^{s} d_j\, 10^{s-j}$$

erhalten wir

$$0,\overline{d_1 \dots d_s} = d_1 \dots d_s \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 10^{-(k+1)s} \right) = d_1 \dots d_s \lim_{n\to\infty} \left(10^{-s} \sum_{k=0}^{n} \left(10^{-s}\right)^k \right)$$

Mit Hilfe der „geometrischen Summenformel“ (s. Text) folgt daraus

$$0,\overline{d_1 \dots d_s} \;=\; d_1 \dots d_s \lim_{n\to\infty} 10^{-s} \frac{1-10^{-s(n+1)}}{1-10^{-s}} = \frac{d_1 \dots d_s}{10^s - 1} = \frac{d_1 \dots d_s}{\underbrace{9 \dots 9}_{s \text{ mal}}}\,.$$

Lösung A.3.16: Der Konvergenzradius einer Potenzreihe ist definiert als das Supremum aller $\rho \in \mathbb{R}$, für welches die Reihe für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < \rho$ absolut konvergiert; dabei sind die Grenzfälle $\rho = 0$ und $\rho = \infty$ sinngemäß eingeschlossen. Nach der Vorlesung gilt:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Zur Ermittlung der Konvergenz der Potenzreihe wenden wir das Quotientenkriterium an: *Mit einem* $q \in (0,1)$ *gilt für fast alle* $k \in \mathbb{N}$*:*

$$\frac{|c_{k+1}(x-x_0)^{k+1}|}{|c_k(x-x_0)^k|} = \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}|x-x_0| \le q\,.$$

i) Es wird zunächst der Fall $0 < A_+ < \infty$ betrachtet. Für

$$\frac{1}{|x-x_0|} > A_+ = \limsup_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \quad \text{bzw.} \quad |x-x_0| < A_+^{-1}.$$

liegt absolute Konvergenz vor. Dies bedeutet im Hinblick auf die Definition von ρ, dass $\rho \ge A_+^{-1}$ bzw. $\rho^{-1} \le A_+$. Der zweite Teil der Behauptung wird durch ein Widerspruchsargument bewiesen. Angenommen, es wäre

$$0 < \frac{1}{\rho} < A_- = \liminf_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}.$$

Dann gibt es ein $r < \rho$ mit

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{r} < \liminf_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}, \quad \text{und} \quad \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \le \frac{1}{r}$$

kann für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ gelten. Folglich gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$:

$$1 < \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} r = \frac{|c_{k+1}| r^{k+1}}{|c_k| r^k}.$$

Gemäß dem Quotientenkriterium ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ also divergent. Dies widerspricht aber der Beziehung $r < \rho$.

ii) Im Fall $A_+ = 0$ ist auch $A_- = 0$ und $\rho = \infty$. Im Fall $A_+ = \infty$ ist $\rho = 0$. In beiden Grenzsituationen ist die Behauptung also sinngemäß richtig.

Lösung A.3.17: Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch die (absolut) konvergente Exponentialreihe,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

a) Nach Definition gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}_+$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots > 1 + \frac{x^n}{n!}.$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x < 0$ gilt nach (a):

$$\big(1 + (-x)^n/n!\big)e^x < e^{-x}e^x = 1 \quad \text{bzw.} \quad e^x < \frac{1}{1 + (-x)^n/n!}.$$

c) Für $x \in \mathbb{R}_+$ gilt (Begründung für die Konvergenz der Reihen durch Indexshift):

$$\frac{e^x}{x^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-n}}{k!} \geq \sum_{k=0,\, k\neq n+1}^{\infty} \frac{x^{k-n}}{k!} + \frac{x}{(n+1)!} \geq \frac{x}{(n+1)!} \to \infty \quad (x \to \infty).$$

A.4 Kapitel 4

Lösung A.4.1: Die maximalen Definitionsbereiche sind:

a) $D = \{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$,

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

c) $D = \mathbb{R}$.

Die zugehörigen Graphen kann man sich selbst überlegen.

Lösung A.4.2: ai) Wegen $f(x) = x$ für $x < 1$ ist f stetig in $x_0 < 1$. Analog ist f wegen $f(x) = 1$ für $x > 1$ stetig in $x_0 > 1$. Zur Behandlung des Grenzpunktes $x_0 = 1$ verwenden wir die ε/δ- Definition der Stetigkeit. Für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| \leq \delta_\varepsilon := \varepsilon$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 1| \leq \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } x \geq 1 \\ |x-1| & \text{für } x < 1 \end{array} \right\} < \varepsilon,$$

d. h.: die Funktion ist auch stetig in $x_0 = 1$. Alternativ kann man die gegebene Funktion auch in der Form (nachrechnen!)

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(x + 1 - |x-1|)$$

schreiben und dann ihre Stetigkeit aus der des Absolutbetrags und der Summe stetiger Funktionen folgern.

aii) Die Funktion $f(x) = |x|^q$ kann für $q = r/s \in \mathbb{Q}_+$ als Komposition der drei stetigen Funktionen $f_1(x) := |x|$ auf $\mathbb{R}$, $f_2(x) := x^r$ auf $\mathbb{R}$ und $f_3(x) := x^{1/s}$ auf $\mathbb{R}_+$ aufgefasst werden:

$$f(x) = (|x|^r)^{1/s} = f_3(f_2(f_1(x))),$$

und ist damit selbst stetig.

b) Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Im Fall $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cup\{0\}$ ist definitionsgemäß $f(x_n) = 0$ und im Fall $x_n = r_n/s_n \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ (teilerfremd) $f(x_n) = 1/s_n$. Da x_0 als irrationale Zahl als (echt) unendlicher Dezimalbruch darstellbar ist, müssen die approximierenden $x_n = r_n/s_n \in \mathbb{Q}$ streng divergierende Nenner s_n haben, d. h.: $s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. (Andernfalls gäbe es eine Teilfolge mit beschränkten Nennern, welche dann notwendig selbst wieder eine Teilfolge enthielte, die entweder streng divergiert oder gegen eine rationale Zahl konvergiert, beides im Widerspruch zur Annahme $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \neq \mathbb{Q}$.). Also gilt entweder $f(x_n) = 0$ oder $f(x_n) = 1/s_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Die Funktion ist also stetig in x_0.

ii) Für $x_0 = r/s \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit den Elementen $x_n = r/s+e/n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (mit der irrationalen Eulerschen Zahl e). Dann gilt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, aber

$$0 = f(x_n) \not\to 1/s = f(x_0),$$

d. h.: Die Funktion ist also in x_0 nicht stetig. Im Fall $x_0 = 0$ gilt mit der analog gebildeten Folge ebenfalls $0 = f(x_n) \not\to 1 = f(x_0)$.

Lösung A.4.3: a) Sei $L \in \mathbb{R}_+$ die L-Konstante von f. Für beliebiges $x_0 \in D$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ wählen wir $\delta := \varepsilon/L$. Dann gilt für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0| < \varepsilon.$$

b) Die Funktion $f(x) = \sqrt{|1-x|}$ ist als Zusammensetzung der stetigen Funktionen $g(x) = |1-x|$ und $h(y) = \sqrt{y}$ ebenfalls stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Nach der Vorlesung ist sie dann auf jedem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$, insbesondere also dem Intervall $[0,2]$ gleichmäßig stetig. Für $x \in [0,1)$ ist

$$|f(x) - f(1)| = \sqrt{|1-x|} = \frac{|1-x|}{\sqrt{|1-x|}}.$$

Es kann also keine L-Konstante für f geben, da für $x \to 1$ gilt:

$$\frac{|f(x) - f(1)|}{|x-1|} = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \to \infty.$$

c) Die gleichmäßige Stetigkeit von f auf $D = (0,1]$ würde für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\delta_\varepsilon > 0$ implizieren, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| = \delta_\varepsilon$ gilt:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{\delta_\varepsilon}{|xy|} \le \varepsilon.$$

Dies kann aber für Punkte mit $|xy| \to 0$ nicht erfüllt sein.

Lösung A.4.4: a) Die stetige Funktion f bilde das abgeschlossene Intervall I_D auf das abgeschlossenen Intervall I_B ab. Dann gilt:

i) Jeder Wert $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$ ist in I_B und damit Bild eines $x \in I_D$, d.h.: $f(x) = c$ (Zwischenwertsatz).

ii) Da I_B beschränkt ist, gilt $\sup_{x\in I_D} |f(x)| \le \sup_{y\in I_B} |y| < \infty$ (Beschränktheit).

iii) Das abgeschlossene Intervall I_B besitzt einen maximalen Punkt, den rechten Endpunkt. Dieser ist wegen der Surjektivität von f auch Bildpunkt eines $x \in I_D$, und in diesem x nimmt f sein Maximum an.

b) Sei nun die Gültigkeit der Sätze vom Zwischenwert, der Beschränktheit und vom Maximum angenommen. Zunächst ist der Bildbereich $B_f \subset \mathbb{R}$ von f beschränkt. Weiter existieren $x_{\min}, x_{\max} \in I_D$ mit $f(x_{\min}) = \inf_{x\in I_D} f(x)$ und $f(x_{\max}) = \sup_{x\in I_D} f(x)$. Schließlich gibt es zu jedem $y \in [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$ ein $x \in I_D$ mit $y = f(x)$. Also ist der Bildbereich von f beschränkt, „zusammenhängend“ und enthält den linken und rechten Endpunkt, d. h.: B_f ist ein abgeschlossenes Intervall.

Lösung A.4.5: i) Für $x < -2$ und $x > 2$ ist f als lineare Funktion stetig; in $x = 0$ (isolierter Punkt) ist f trivialerweise stetig. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist in $x = 0$ unstetig, da für die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$f^{-1}\big(\tfrac{1}{n}\big) = 2 + \tfrac{1}{n} \;\to\; 2 \neq 0 = f^{-1}(0) \quad (n \to \infty).$$

Bei diesem Beispiel ist der Definitionsbereich $D_f = M$ der Funktion f nicht abgeschlossen.

Lösung A.4.6: a) Als Polynom ist p stetig. Wegen $p(-1) = -7$ und $p(1) = 1$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in (-1, 1)$ mit $p(x) = 0$.

b) Die Funktion $h(x) = \frac{e^{(x^2)}-1}{e-x}$ ist stetig auf $[0, 1]$ und erfüllt $h : [0, 1] \to [0, 1]$. Stetigkeit ist klar als Komposition stetiger Funktionen. Da für $0 \le x < y \le 1$ gilt

$$\big(e^{(x^2)} - 1\big)(e - y) < \big(e^{(x^2)} - 1\big)(e - x) < \big(e^{(y^2)} - 1\big)(e - x),$$

ist h monoton wachsend und somit $h([0, 1]) = [h(0), h(1)] = [0, 1]$. Aus der Monotonie und Stetigkeit von $\sqrt{\cdot}$ auf R_+ folgt, dass damit auch die Funktion $g(\cdot) := \sqrt{h(\cdot)} : [0, 1] \to [0, 1]$ wohldefiniert und stetig ist. Dasselbe gilt dann auch für die gegebene Funktion $f(\cdot) = 1 - g(\cdot)$, die folglich einen Fixpunkt $x \in [0, 1]$ besitzt, d. h. $f(x) = x$.

Lösung A.4.7: a) Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$ mit $x = k + \hat{x}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{x} \in [0, 1)$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \hat{x}, & k \in 2\mathbb{Z}, \\ 1 - \hat{x}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist klarerweise $\tilde{f}(x)$ periodisch mit Periode $\omega = 2$. Ferner ist $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in [0, 1]$. Die stetigkeit von $\tilde{f}$ auf den Intervallen $[k, k + 1)$ ist klar nach Konstruktion.

Es bleibt die Stetigkeit in den Punkten $k \in \mathbb{Z}$ zu zeigen. Sei also $x_n < k$ eine Folge mit $x_n \to k$ $(n \to \infty)$; o.B.d.A sei $x_n > k-1$, d.h. $x_n = (k-1) + \hat{x}_n$ mit $\hat{x}_n \to 1$. Dann gilt

$$\tilde{f}(x_n) \to f(k) = \begin{cases} 0, & k \in 2\mathbb{Z}, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da aus der Periode $\omega = 1$ notwendig $f(0) = f(0+\omega) = f(1)$ folgt, und $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$, kann dies nicht gehen.

a) Wir zeigen die Behauptung durch ein Widerspruchsargument. Sei $f \not\equiv 0$ eine periodische, rationale Funktion mit Periode ω. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $f + c$ eine Nullstelle x_0 hat. Mit f ist auch $f + c$ periodisch mit derselben Periode ω. Folglich hat $f + c$ unendlich viele Nullstellen $x_n = x_0 \pm n\omega,\, n \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet einen Widerspruch, denn die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} + c = \frac{a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 + c(b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0)}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$$

kann höchstens $\max\{n, m\}$ Nullstellen haben.

b) Wir zeigen die Behauptung wieder durch ein Widerspruchsargument. Sei $f \not\equiv 0$ eine periodische Exponentialsumme mit Periode ω. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $f + c$ eine Nullstelle x_0 hat. Mit f ist auch $f + c$ periodisch mit derselben Periode ω. Folglich hat $f + c$ unendlich viele Nullstellen $x_n = x_0 \pm n\omega,\, n \in \mathbb{N}$. Dies führt aber auf einen Widerspruch, denn

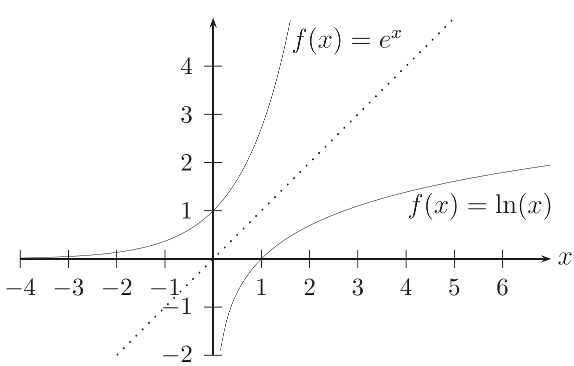
$$f(x) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{kx} = e^{-mx} \sum_{k=0}^{2m} a_{k-m} (e^x)^k.$$

Das Polynom

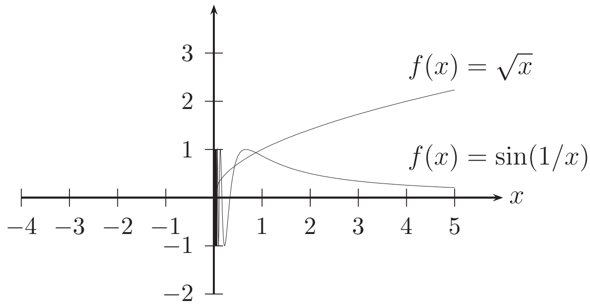
$$p(y) := \sum_{k=0}^{2m} a_{k-m} y^k$$

kann aber nur endlich viele Nullstellen haben und die Abbildung $x \mapsto y = e^x$ ist injektiv auf $\mathbb{R}$.

Lösung A.4.8: i) $f(x) = e^x$ und ii) $f(x) = \ln(x)$:



iii) $f(x) = \sin(1/x)$ und iv) $f(x) = \sqrt{x}$:



Lösung A.4.9: a) Aus der Potenzreihendarstellung des Sinus und der Abschätzung für das zugehörige Reihenrestglied

$$\sin(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}, \qquad |r_{2n+3}| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad |x| \le 2n+4,$$

folgt für $n = 0$ zunächst:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{r_3}{x} = 1\,.$$

Dies impliziert dann für allgemeines $a \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^a} &= \lim_{x\to 0} \Big\{ \frac{\sin(x)}{x} x^{1-a} \Big\} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x\to 0} x^{1-a} = \lim_{x\to 0} x^{1-a} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < a < 1, \\ 1 & \text{für} \quad a = 1, \\ \infty & \text{für} \quad a > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

b) Wegen $|\sin(x)| \le 1,\ x \in \mathbb{R}$, gilt $|\lim_{x\to 0} \big(x^a \sin(1/x)\big)| \le \lim_{x\to 0} |x|^a = 0$.

Lösung A.4.10: Wir verwenden mehrere bekannte Beziehungen für Sinus und Kosinus.

i) Zunächst ist $T_1 = \sin(\pi) = 0$. Für $n \ge 2$ gilt definitionsgemäß:

$$\begin{aligned}\sqrt{2n^2 - 2n\sqrt{n^2 - T_n^2}} &= \sqrt{2n^2 - 2n\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2\Big(\frac{\pi}{n}\Big)}} = \sqrt{2n^2 - 2n\sqrt{n^2 \cos^2\Big(\frac{\pi}{n}\Big)}} \\ &= \sqrt{2n^2 - 2n^2 \cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big)} = 2n\sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 - \cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)} \\ &= 2n \sin\Big(\frac{\pi}{2n}\Big) = T_{2n},\end{aligned}$$

da $\sin(x) \ge 0$ für $0 \le x \le \pi$. Die letzte Identität ergibt sich mit Hilfe von

$$\begin{aligned}1 - \cos(x) &= 1 - \cos\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\Big) = 1 - \cos^2\Big(\frac{x}{2}\Big) + \sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big) \\ &= \sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big) + \sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big) = 2\sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big)\,.\end{aligned}$$

In obigem Argument wird verwendet, dass $\cos(\pi/n) = \sqrt{\cos^2(\pi/n)}$, was aber wegen $\cos(\pi) = -1$ erst ab $n = 2$ gilt.

ii) Zum Nachweis der Konvergenz $T_n \to \pi \ (n \to \infty)$ beachten wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Dies impliziert

$$T_n = n\sin(\pi/n) = \pi\Big(\frac{1}{\pi/n}\sin(\pi/n)\Big) \ \to \ \pi \quad (n \to \infty).$$

Lösung A.4.11: a) Für $x \in (0,\pi)$ ist $|\cos(x)| < 1$ und $\cos(0) = 1$ sowie $\cos(\pi) = -1$. Folglich konvergiert

$$|\cos^n(x)| \to f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (0,\pi), \\ 1, & x \in \{0,\pi\}, \end{cases} \qquad (n \to \infty).$$

Die Konvergenz ist *nicht* gleichmäßig, da es wegen $\lim_{x\to\pi}\cos(x) = 1$ zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \varepsilon < 1$, ein $x_\varepsilon \in (0,\pi)$ gibt, so dass

$$|\cos(x_\varepsilon)| > \sqrt[n]{\varepsilon} \qquad \text{bzw.} \qquad |\cos^n(x_\varepsilon)| > (\sqrt[n]{\varepsilon})^n = \varepsilon.$$

b) Auf dem kompakten Teilintervall $I = [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ ist die Konvergenz gleichmäßig, da hier $|\cos(x)| < 1$ ist.

Lösung A.4.12: Zur Beantwortung der Frage beachten wir, dass für $x > 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > 1 + x.$$

Wegen $\pi > e$ ist $\pi/e > 1$ und somit $x := \pi/e - 1 > 0$. Also folgt

$$\frac{e^{\pi/e}}{e} = e^x > 1 + x = \frac{\pi}{e}$$

bzw. $e^{\pi/e} > \pi$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt $e^\pi > \pi^e$.

Lösung A.4.13: Nach einer bekannten Formel gilt:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}.$$

Da n fest ist, konvergiert die rechte Seite für $x \to a$ gegen na^{n-1}, d. h.:

$$\lim_{x\neq a,\, x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \ = \ na^{n-1}.$$

Lösung A.4.14: a) Sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ stetig gemäß der „Folgendefinition". Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wir haben zu zeigen, dass es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß $|x - x_0| < \delta$ für $x \in D$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ impliziert. Angenommen, es gibt kein solches δ. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$, so dass $|x_n - x_0| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Die entstehende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen x_0; es gilt aber $\inf_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Dies widerspricht der angenommenen Eigenschaft der Funktion f.

b) Sei die Funktion nun stetig gemäß der ε/δ-Definition. Sei $x_0 \in D$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus D mit $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und dem zugehörigen $\delta \in \mathbb{R}_+$ ein $n_\delta \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$ für $n \geq n_\delta$ und folglich:

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Also konvergiert $f(x_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty)$.

Lösung A.4.15: Es ist zu zeigen, dass eins der beiden Kriterien aus Aufgabe 8.1 erfüllt ist. Der wohl einfachste Weg führt über das „Folgen"-Kriterium. Sei $x_0 \in D$ beliebig. Da nach Voraussetzung $f(x) = f(x+0)f(0)$ gilt, folgt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} = x_0$:

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)f(x_0) - f(x_0)f(0)| = |f(x_0)|\,|f(x_n - x_0) - f(0)|.$$

Da f nach Voraussetzung stetig bei $x = 0$ ist, folgt für $n \to \infty$:

$$|f(x_n) - f(x_0)| \to |f(x_0)|\,|f(0) - f(0)| = 0,$$

was zu zeigen war.

Lösung A.4.16: a) Nach Definition des Tangens gilt formal:

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{x^2 - 1}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{x^2-1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{x^2-1}\right)}.$$

Dieser Ausdruck ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen der Zähler sowie der Nenner definiert sind und in denen der Nenner ungleich Null ist. Zähler und Nenner sind definiert für $x^2 \neq 1$, d. h. für $x \notin \{-1, 1\}$. Der Nenner gleich Null für

$$\frac{\pi x}{x^2 - 1} \in \{(k + \tfrac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

bzw. für

$$x^2 - \frac{2}{2k - 1}x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_\pm(k) = \frac{1 \pm \sqrt{2 + 4k^2 - 4k}}{2k - 1}.$$

Die Funktion f ist also definiert für

$$x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{ -1, 1, \frac{1 \pm \sqrt{2 + 4k^2 - 4k}}{2k - 1},\ k \in \mathbb{Z}\Big\},$$

und dort als Komposition stetiger Funktionen auch selbst stetig.

Lösung A.4.17: a) Nach Voraussetzung ist

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Mit $\delta_\varepsilon := \varepsilon/L$ gilt dann für $|x-y| < \delta_\varepsilon$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| < \varepsilon,$$

d. h.: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig stetig.

b) Ist zusätzlich $A := \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(a)| < \infty$, so folgt für beliebiges $x \in I$:

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(a)| + |f(a)| \leq L|x-a| + |f(a)| \leq L|b-a| + A.$$

c) Die Funktionen $f_n \equiv n$ sind offensichtlich gleichgradig stetig, da ihre Lipschitz-Konstanten gleich Null sind. Ihre Normen verhalten sich aber wie $\|f_n\|_\infty \to \infty \ (n \to \infty)$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann also keine konvergente Teilfolge haben.

Lösung A.4.18: Wir haben zu zeigen, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl gleichgradig stetig (Lipschitz-stetig) als auch gleichmäßig beschränkt ist. Die auf $I = [0, \pi]$ definierten Funktionen

$$f_n(x) := \sin(x + n\pi)$$

sind differenzierbar mit den Ableitungen $f_n'(x) = \cos(x+n\pi)$. Diese sind gleichmäßig beschränkt auf I, so dass die f_n gleichmäßig Lipschitz-stetig und folglich auch gleichgradig stetig sind. Daher folgt dann aus

$$|f_n(0)| = |\sin(n\pi)| = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

auch die gleichmäßige Beschränktheit der f_n. (Bem.: Die Folge hat wegen der Periodizität des Sinus die beiden Häufngspunkte $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = -\sin(x)$.)

Zusatz: Die auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ definierten Funktionen

$$f_n(x) := n \sin\left(\frac{1}{n}x\right)\cos(x + n\pi)$$

haben die Ableitungen

$$f_n'(x) = \cos(x/n)\cos(x+n\pi) - n\sin(x/n)\sin(x+n\pi).$$

Für diese gilt:

$$|f_n'(x)| \leq 1 + |n\sin(x/n)|.$$

Mit Hilfe der Reihenentwicklung des Sinus haben wir für $n \geq \frac{1}{2}\pi$:

$$|n\sin(x/n)| = \Big|n\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(x/n)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \leq \Big|\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x(x/n)^{2k}}{(2k+1)!}\Big| \leq \tfrac{1}{2}\pi\, e.$$

Die Funktionen f_n sind folglich gleichmäßig Lipschitz-stetig und damit auch gleichgradig stetig. Wegen $|f_n(0)| = 0$ sind sie auch gleichmäßig beschränkt.

A.5 Kapitel 5

Lösung A.5.1: Für differenzierbare Funktionen f, g gilt:

$$(fg)' = f'g + fg', \qquad \Big(\frac{f}{g}\Big)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0), \qquad f(g)' = f'(g)g'.$$

a) Die Ableitung existiert für $x \in (1,\infty)$, da die Funktion $f(x) = x\ln(x)$ aus den differenzierbaren Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \ln(x)$ zusammengesetzt ist. Die Ableitung ist:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(x\ln(x)\big) = \ln(x) + 1.$$

b) Wegen $f(x) = x^{(x^{-2})} := e^{x^{-2}\ln(x)}$ ist f aus den differenzierbaren Funktionen $f_1(x) = x^{-2}$, $f_2(x) = \ln(x)$ und $f_3(x) = e^x$ zusammengesetzt. Die Ableitung ist:

$$f'(x) = e^{x^{-2}\ln(x)}\frac{d}{dx}\big(x^{-2}\ln(x)\big) = x^{(x^{-2})}\big(-2x^{-3}\ln(x) + x^{-3}\big) = x^{(x^{-2}-3)}\big(1 - 2\ln(x)\big).$$

Lösung A.5.2: a) Die Funktion $f_1(x) = x\sin(1/x)$ ist für $x \neq 0$ offenbar stetig. Sie besitzt auch einen „regulären Limes“ bei $x = 0$: $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$, und ist damit für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig. Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \frac{h\sin(1/h)}{h} = \sin(1/h).$$

Diese Funktion ist aber nicht für $h \to 0$ stetig fortsetzbar, da z. B. für $h_n = 1/(n\pi)$ und $h'_n = 1/((2n+\frac{1}{2})\pi)$ gilt

$$\sin(1/h_n) \to 0 \ \ (n\to\infty), \qquad \sin(1/h_{n'}) \to 1 \ \ (n'\to\infty).$$

Folglich ist f_1 in $x = 0$ nicht differenzierbar.

b) Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \frac{h^2\sin(1/h)}{h} = h\sin(1/h).$$

Diese Funktion konvergiert für $h \to 0$ gegen Null (wegen $|\sin(x)| \leq 1$). Folglich ist f_2 in $x = 0$ differenzierbar mit der Ableitung $f'_2(0) = 0$. Für $x \neq 0$ ist die Ableitung

$$f'_2(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Diese Funktion ist für $x \to 0$ nicht konvergent (mit einem ähnlichen Argument wie in (a)), d. h.: f'_2 ist in $x = 0$ nicht stetig (und damit auch nicht differenzierbar).

c) Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \frac{h^3\sin(1/h)}{h} = h^2\sin(1/h).$$

Diese Funktion konvergiert für $h \to 0$ gegen Null (wegen $|\sin(x)| \leq 1$). Folglich ist f_3 in $x = 0$ differenzierbar mit der Ableitung $f'_3(0) = 0$. Für $x \neq 0$ ist die Ableitung

$$f'_3(x) = 3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x).$$

Diese Funktion konvergiert für $x \to 0$ gegen Null (wegen $|\sin(x)| \le 1$), d. h.: f_3' ist in $x = 0$ stetig. Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f_3'(h) - f_3'(0)}{h} = \frac{3h^2 \sin(1/h) - h\cos(1/h)}{h} = 3h\sin(1/h) - \cos(1/h).$$

Diese Funktion ist für $h \to 0$ nicht konvergent, d.h.: Die Ableitung f_3' ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Lösung A.5.3: a) Wegen der Identität $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ gilt

$$\frac{d^{10}}{dx^{10}}\big(\sin(x)\cos(x)\big) = \frac{d^{10}}{dx^{10}}\big(\tfrac{1}{2}\sin(2x)\big) = \tfrac{1}{2}2^{10}(-1)^5\sin(2x) = -2^{10}\sin(x)\cos(x).$$

b) Es gilt

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

und folglich

$$\frac{d^{10}}{dx^{10}}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = \frac{2(-1)^{10}(10!)}{(1-x)^{11}}.$$

Lösung A.5.4: a) Wegen $f'' > 0$ auf I ist die Ableitung f' streng monton wachsend. Seien nun $x, y \in I$ mit (o.B.d.A.) $x < y$ und $\lambda \in (0,1)$. Wir setzen $x_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann $\xi \in (x, x_\lambda)$ und $\eta \in (x_\lambda, y)$ mit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{x_\lambda - x} = f'(\xi) < f'(\eta) = \frac{f(y) - f(x_\lambda)}{y - x_\lambda}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} x_\lambda - x &= \lambda x + (1-\lambda)y - x = (1-\lambda)(y-x), \\ y - x_\lambda &= y - \lambda x - (1-\lambda)y = \lambda(y-x), \end{aligned}$$

ergibt sich somit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{1-\lambda} < \frac{f(y) - f(x_\lambda))}{\lambda},$$

bzw.

$$f(x_\lambda) = \lambda f(x_\lambda) + (1-\lambda)f(x_\lambda) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Die Funktion ist also konvex.

b) Es ist $\cos''(x) = -\cos(x)$. Die Funktion $\cos(x)$ ist also genau dort strikt konvex, wo $\cos(x) < 0$ ist. Dies ist der Fall für die offenen Intervalle $((2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+\frac{3}{2})\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Wegen der 2π-Periodizität des Cosinus genügt es, das Intervall $(0, 2\pi)$ zu betrachten. Die einzigen Nullstellen des Cosinus sind hier $x = \frac{1}{2}\pi$ und $x = \frac{3}{2}\pi$. Wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$ muss also $\cos(x) < 0$ sein auf $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, da der Zwischenwertsatz sonst die Existenz einer weiteren Nullstelle im Intervall $(0, 2\pi)$ implizieren würde. Damit ist dann $-\cos(x) > 0$ auf $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ und somit f dort strikt konvex.

Lösung A.5.5: a) Die erste und zweite Ableitung von $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$ sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x\ln(x)}\big(xx^{-1} + \ln(x)\big) = x^x\big(1 + \ln(x)\big), \\ f''(x) &= e^{x\ln(x)}x^{-1} + e^{x\ln(x)}\big(1 + \ln(x)\big)^2 = x^x\Big(x^{-1} + \big(1 + \ln(x)\big)^2\Big). \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von f' ist bei $x = 1/e$. Da dort

$$f''(1/e) = e^{-1/e}\Big(e + \big(1 + \ln(1/e)\big)^2\Big) > 0$$

ist, liegt ein striktes Minimum vor.
b) Die erste und zweite Ableitung von $f(x) = x^{x^{-1}} = e^{x^{-1}\ln(x)}$ sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^{-1}\ln(x)}\big(x^{-1}x^{-1} - x^{-2}\ln(x)\big) = e^{(x^{-1}-2)\ln(x)}\big(1 - \ln(x)\big), \\ f''(x) &= e^{(x^{-1}-2)\ln(x)}\big(-x^{-1}\big) + e^{(x^{-1}-2)\ln(x)}\big(-x^{-2}\ln(x) + (x^{-1} - 2)x^{-1}\big)\big(1 - \ln(x)\big) \\ &= -x^{x-3} + x^{x-4}\big(1 - \ln(x) - 2x\big)\big(1 - \ln(x)\big). \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von f' ist bei $x = e$. Da dort

$$f''(e) = -e^{e-3} + e^{e-4}\big(1 - \ln(e) - 2e\big)\big(1 - \ln(e)\big) < 0$$

ist, liegt ein striktes Maximum vor.

Lösung A.5.6: Die Funktion $f(x) = x^n e^{-x}$ ist auf dem gegebenen Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ zweimal stetig differenzierbar. Ihre Ableitungen sind

$$f'(x) = (nx^{n-1} - x^n)e^{-x}, \qquad f''(x) = \big(n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n\big)e^{-x}.$$

Nullstellen hat f' im Fall $n = 1$ in $x_0 = 1$ und im Fall $n \geq 2$ in $x_0 \in \{0, n\}$. In $x_0 = 0$ ist aber $f(0) = 0 < f(1) = e^{-1}$, so dass hier kein globales Maximum vorliegen kann. In der Nullstelle $x_0 = n$

$$f''(n) = \big(n(n-1)n^{n-2} - 2nn^{n-1} + n^n\big)e^{-n} = -n^{n-1}e^{-n} < 0,$$

so dass hier ein (lokales) striktes Maximum vorliegt. Wegen $f(x) > 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ist dies sogar ein globales Maximum auf $\mathbb{R}_+$.

Lösung A.5.7: Die Fläche des einbeschriebenen Trapezes ist gegeben durch

$$F = H\,\frac{2R + 2x}{2} = H(R + x)$$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt $H = \sqrt{R^2 - x^2}$. Daraus folgt für die Trapezfläche in Abhängigkeit von x:

$$F(x) = \sqrt{R^2 - x^2}(R + x).$$

Zur Bestimmung von Extrema suchen wir zunächst Nullsstellen der Ableitung

$$F'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-2x}{\sqrt{R^2-x^2}}(R+x) + \sqrt{R^2-x^2} = \frac{R^2-Rx-2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Diese sind

$$x_\pm = -\frac{R}{4} \pm \sqrt{\frac{R^2}{16}+\frac{R^2}{2}} = -\frac{R}{4} \pm \frac{3R}{4}$$

Wegen der Positivität der Fläche ist $x_+ = \frac{1}{2}R$ die „richtige" Lösung. Der Nenner in $F'(x_+)$ ist offensichtlich ungleich Null. Um zu entscheiden, ob bei x_+ wirklich ein Minimum der Trapezfläche vorliegt, betrachten wir die zweite Ableitung von $F(x)$:

$$F''(x) = \frac{(-R-4x)\sqrt{R^2-x^2} - (R^2-Rx-2x^2)(R^2-x^2)^{-1/2}\frac{1}{2}(-2x)}{R^2-x^2}\,.$$

Bei $x_+ = \frac{1}{2}R$ ist

$$\begin{aligned} F''(\tfrac{1}{2}R) &= \frac{(-3R)\sqrt{R^2-\frac{1}{4}R^2} - (R^2-\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{2}R^2)(R^2-\frac{1}{4}R^2)^{-1/2}\frac{1}{2}(-R)}{R^2-\frac{1}{4}R^2} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}}{\frac{3}{4}R^2} < 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Trapezfläche für $x = \frac{1}{2}R$ ein Maximum besitzt.

Lösung A.5.8: a) Wegen der Stetigkeit (und Differenzierbarkeit) des Sinus gilt für festes $x \in I := [-\pi, \pi]$:

$$f_n(x) = \sin(\tfrac{1}{n}x) \quad \to \quad \sin(0) = 0 \quad (n \to \infty).$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen Null. Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\xi_x \in (0, x)$ oder $\xi_x \in (x, 0)$ mit

$$|\sin(\tfrac{1}{n}x) - \sin(0)| = \left|\cos(\tfrac{1}{n}\xi_x)\,\tfrac{1}{n^2}x\right| \le \tfrac{\pi}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dies bedeutet, daß die Funktionen f_n gleichmäßig gegen Null konvergieren.

b) Wegen $nq^n \to 0\ (n \to \infty)$ für $0 \le q < 1$ konvergiert für festes $x \in I := [0, 1)$

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Ferner ist $f_n(0) = 0$. Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen Null. Die Ableitungen sind

$$f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx) = n(1-(n+1)x)(1-x)^{n-1}.$$

Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \frac{1}{2n}]$ gilt

$$f_n'(x) = n\big(1-(n+1)x\big)(1-x)^{n-1} \ge n\Big(1-\frac{n+1}{2n}\Big)\Big(1-\frac{1}{2n}\Big)^{n-1}.$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es nun zu jedem $x \in I$ ein $\xi_x \in (0,x)$ mit

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x) - f_n(0) = f'(\xi_x)x\,.$$

Für die Punkte $x_n := \frac{1}{2n}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|f_n(x_n) - f(x_n)| &= f_n(x_n) - f_n(0) = f'(\xi_{x_n} x_n \\
&\geq n\Big(1 - \frac{n+1}{2n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^{n-1}\frac{1}{2n} \\
&\geq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{n+1}{2n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^{2n} \to \frac{1}{4e} \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$

d. h.: Die Konvergenz der Funktionenfolge ist **nicht** gleichmäßig.

Lösung A.5.9: Mit den Ableitungen der Funktion $f(x) = (1+x)^{-1}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}, \quad K \in \mathbb{N}$$

ergibt sich zunächst die formale Taylor-Reihe

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

Diese Reihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$. Zum Nachweis, dass diese Taylor-Reihe die Funktion für $|x| < 1$ auch darstellt, betrachten wir das Restglied der zugehörigen n-ten Taylor-Summe:

$$R_n(0,x) = \frac{(-1)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}}\, x^n\,.$$

Für $0 \leq x < 1$ ist $0 < \xi_n < x$ und folglich:

$$|R_n(0,x)| \leq |x|^n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Für $-1 < x < 0$ folgt mit Hilfe der geometrischen Summenformel

$$|R_n(0,x)| = \Big|\frac{1}{1-|x|} - \sum_{k=0}^{n} |x|^k\Big| = \Big|\frac{1}{1-|x|} - \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}\Big| = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Lösung A.5.10: Zur Bestimmung der Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

müssen die Ableitungen der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ in $x_0 = 0$ berechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x),\\
f''(x) &= 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2\big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big),\\
f^{(3)}(x) &= -4\cos(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = -8\sin(x)\cos(x),\\
f^{(4)}(x) &= -8\cos^2(x) + 8\sin^2(x) = -8\big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big).\\
f^{(5)}(x) &= 16\sin(x)\cos(x) + 16\sin(x)\cos(x) = 32\sin(x)\cos(x),\\
f^{(6)}(x) &= 32\cos^2(x) - 32\sin^2(x)\big) = 32\big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big),\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

woraus wir die allgemeine Form der Ableitungen für $k = 1, 2, \dots$ ablesen:

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{(k-1)}2^k \sin(x)\cos(x), \qquad f^{(2k)}(x) = (-1)^k 2^{k-1}\big(\cos(x)^2 - \sin^2(x)\big).$$

Für $x = 0$ ergibt sich $f^{2k-1}(0) = 0$ und $f^{2k}(0) = (-1)^k 2^{k-1}$ und damit:

$$\sin^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k-1}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Diese Potenzreihe hat wegen

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^{k-1}}{(2k)!}} \le \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{(2k)!}} = 0$$

den Konvergenzradius $\rho = \infty$ und ist folglich für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Für das Restglied des n-ten Taylor-Polynoms gilt bei fest gehaltenem x:

$$|R_n(0,x)| = \left|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

d. h.: Die Reihe stellt die Funktion f auch in jedem $x \in \mathbb{R}$ dar.

Lösung A.5.11: a) Die Taylor-Entwicklung des 1. Differenzenquotienten um x_0 bis zum Restglied 2. Ordnung ergibt unter Verwendung der Notation $f_0 := f(x_0)$, $f_0' := f'(x_0)$, $f_0'' := f''(x_0)$:

$$D_h^{(1)} f(x_0) = \frac{1}{h}\big(f_0 + f_0'h + \tfrac{1}{2}f''(\xi)h^2 - f_0\big) = f_0' + \tfrac{1}{2}h2f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

Dies impliziert

$$|D_h^{(1)} f(x_0) - f_0'| \le \tfrac{1}{2}h \sup_{x\in(a,b)} |f''(x)|.$$

b) Taylor-Entwicklung des 2. Differenzenquotienten um x_0 bis zum Restglied 3. Ordnung ergibt:

$$\begin{aligned}
D_h^{(2)} f(x_0) &= \frac{1}{h^2}\big(f_0 + 2hf_0' + 2h^2 f_0'' + \tfrac{8}{6}h^3 f^{(3)}(\xi_1) - 2f_0 - 2hf_0' - h^2 f_0'' - \tfrac{2}{6}h^3 f_0^{(3)}(\xi_2) + f_0\big)\\
&= f_0'' + \tfrac{8}{6}hf^{(3)}(\xi_1) - \tfrac{2}{6}hf^{(3)}(\xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in (a,b).
\end{aligned}$$

Dies impliziert
$$|D_h^{(2)}f(x_0) - f_0''| \le \tfrac{5}{3}h \sup_{x\in(a,b)} |f^{(3)}(x)|.$$

Lösung A.5.12: a) Die Taylor-Entwicklung des 1. Differenzenquotienten um x_0 bis zum Restglied 3. Ordnung ergibt unter Verwendung der Notation $f_0' := f'(x_0)$, $f_0'' := f''(x_0)$ und allgemein $f_0^{(k)} := f^{(k)}(x_0)$:

$$\begin{aligned} D_h^{(1)}f(x_0) &= \frac{1}{2h}\Big(f_0 + f_0'h + \tfrac{1}{2}f_0''h^2 + \tfrac{1}{6}f^{(3)}(\xi_-)h^3 - f_0 + f_0'h - \tfrac{1}{2}f_0''h^2 + \tfrac{1}{6}f^{(3)}(\xi_+)h^3\Big) \\ &= f_0' + \tfrac{1}{12}\big(f^{(3)}(\xi_-) + f^{(3)}(\xi_+)\big)h^2, \quad \xi_-,\, \xi_+ \in (a,b). \end{aligned}$$

Dies impliziert
$$|D_h^{(1)}f(x_0) - f_0'| \le \tfrac{1}{6}h^2 \sup_{x\in(a,b)} |f^{(3)}(x)|.$$

b) Taylor-Entwicklung des 2. Differenzenquotienten um x_0 bis zum Restglied 4. Ordnung ergibt:

$$\begin{aligned} D_h^{(1)}f(x_0) &= \frac{1}{h^2}\Big(f_0 + f_0'h + \tfrac{1}{2}f_0''h^2 + \tfrac{1}{6}f_0^{(3)}h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\xi_-)h^4 - 2f_0 \\ &\qquad + f_0 - f_0'h + \tfrac{1}{2}f_0''h^2 - \tfrac{1}{6}f_0^{(3)}h^3 + \tfrac{1}{24}f^{(4)}(\xi_+)h^3\Big) \\ &= f_0'' + \tfrac{1}{24}\big(f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+)\big)h^2, \quad \xi_-,\, \xi_+ \in (a,b). \end{aligned}$$

Dies impliziert
$$|D_h^{(2)}f(x_0) - f_0''| \le \tfrac{1}{12}h^2 \sup_{x\in(a,b)} |f^{(4)}(x)|.$$

Lösung A.5.13: Anwendung der L'Hospitalschen Regel erfordert die folgenden Schritte:

1. Überprüfung, welche Art von Grenzprozess überhaupt vorliegt: „0/0“, „∞/∞“, ...;
2. Überprüfung der Differenzierbarkeit der Ausdrücke im Zähler und Nenner;
3. Überprüfung der Konvergenz der Ausdrücke im Zähler und Nenner sowie ihrer jeweiligen Ableitungen.

Wenn dies alles gegeben ist, kann die L'Hospitalschen Regel angewendet werden. Bei den folgenden „Lösungsvorschlägen“ werden diese Schritte zu Abkürzung in einen zusammengefasst, also quasi „von hinten“ argumentiert. Die formal korrekte Argumentation erfordert aber die vorherige Durchführung der drei o. a. Einzelschritte.

a) Es handelt sich um einen Grenzprozess der Art „0/0“. Die Quotienten der 1. und 2. Ableitungen sind konvergent und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-1} - \cos(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(1+x)^{-2} + \sin(x)}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

b) Nach Transformation $y := x^{-1}$ handelt es sich um einen Grenzprozess der Art „0/0“. Zunächst gilt

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{-1}}{1} = 1$$

und folglich

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{y^{-1}} = \lim_{y\to 0} e^{y^{-1}\ln(1+y))} = e.$$

Weiter gilt

$$\frac{d}{dy} e^{y^{-1}\ln(1+y)} = (1+y)^{y^{-1}}\big(-y^{-2}\ln(1+y) + y^{-1}(1+y)^{-1}\big).$$

und somit (bei Konvergenz von Zähler und Nenner)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\big((1+x^{-1})^x - e\big) &= \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{y^{-1}} - e}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{y^{-1}\ln(1+y)} - e}{y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{y^{-1}}\big(-y^{-2}\ln(1+y) + y^{-1}(1+y)^{-1}\big)}{1} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{y^{-1}}\big(y - (1+y)\ln(1+y)\big)}{y^2(1+y)} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{y^{-1}}}{1+y}\lim_{y\to 0}\frac{y-(1+y)\ln(1+y)}{y^2} \\
&= e\lim_{y\to 0}\frac{y-(1+y)\ln(1+y)}{y^2} \\
&= e\lim_{y\to 0}\frac{1-\ln(1+y)-(1+y)(1+y)^{-1}}{2y} \\
&= \frac{e}{2}\lim_{y\to 0}\frac{-\ln(1+y)}{y} = \frac{e}{2}\lim_{y\to 0}\frac{-(1+y)^{-1}}{1} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

c) Die L'Hospitalsche Regel ist nicht anwendbar, da offensichtlich zwar der Nenner aber wegen $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$ der Zähler nicht gegen Null konvergiert:

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(1+x) - e^{-x}\big) \to -1 \quad (x\to 0),$$

und damit

$$\frac{\ln(1+x) - e^{-x}}{x} \to -\infty \quad (x\to 0).$$

Unkritische Anwendung der L'Hospitalschen Regel ergibt das falsche Resultat

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^{-x}}{x} =_{\text{(falsch!)}} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-1}+e^{-x}}{1} = 2.$$

Lösung A.5.14: a) Die L'Hospitalsche Regel ist nicht anwendbar, da zwar der Nenner, aber wegen $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$ der Zähler nicht gegen Null konvergiert:

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x} = \infty = -\lim_{x\uparrow 0}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}.$$

Unkritische Anwendung der L'Hospitalschen Regel liefert den Quotienten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1} = 1.$$

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{1}{x^\alpha} = 0\,.$$

Lösung A.5.15: Die gegebenen Ausdrücke werden zunächst durch Logarithmieren und Reziprokenbildung in Quotientenform überführt. Sind auf diese die Regeln von L'Hospital anwendbar, so ergeben sich die gesuchten Limiten durch Exponentieren und Ausnutzung der Stetigkeit der e-Funktion.

a) Es ist

$$\lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \tan(x) = \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \infty, \qquad \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \cot(x) = \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0\,;$$

wir haben es also mit einem Grenzprozess des Typs „∞^0“ zu tun. Logarithmieren ergibt:

$$\ln\big(\tan(x)^{\cot(x)}\big) = \cot(x)\ln\big(\tan(x)\big) = \frac{\ln\big(\tan(x)\big)}{\tan(x)}.$$

Für $x \uparrow \frac{1}{2}\pi$ gehen Zähler und Nenner beide gegen ∞. Es ist $\tan'(x) = \cos(x)^{-2}$. Der Quotient der Ableitungen konvergiert, so dass gemäß der L'Hospitalschen Regeln gilt:

$$\lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \ln\big(\tan(x)^{\cot(x)}\big) = \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)^2}{\tan(x)\cos(x)^2} = \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\tan(x)} = \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \cot(x) = 0\,.$$

Durch Exponenzierung folgt

$$\lim_{x\uparrow\frac{1}{2}\pi} \tan(x)^{\cot(x)} = 1\,.$$

b) Es ist

$$\lim_{x\downarrow 0} \big(1+\sin(x)\big) = 1, \qquad \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{\sin(x)} = \infty\,;$$

wir haben es also mit einem Grenzprozess des Typs „1^∞“ zu tun. Logarithmieren ergibt:

$$\ln\Big(\big(1+\sin(x)\big)^{1/\sin(x)}\Big) = \frac{\ln\big(1+\sin(x)\big)}{\sin(x)}.$$

Zähler und Nenner gehen wegen $\lim_{x\to 1}\ln(x) = 0$ für $x \to 0$ beide gegen Null. Der Quotient der Ableitungen konvergiert, so dass gemäß der L'Hospitalschen Regeln gilt:

$$\lim_{x\to 0} \ln\Big(\big(1+\sin(x)\big)^{1/\sin(x)}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\big(1+\sin(x)\big)\cos(x)} = 1.$$

Durch Exponenzierung folgt

$$\lim_{x\to 0} \big(1+\sin(x)\big)^{1/\sin(x)} = \exp\Big(\lim_{x\to 0} \ln\big((1+\sin(x))^{1/\sin(x)}\big)\Big) = e\,.$$

Lösung A.5.16: a) Sei $1 \le a < 10$. Das Newton-Verfahren zur Berechnung von $1/a$ lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x_n^2}} = 2x_n + ax_n^2.$$

Zur Durchführung dieser Iteration werden nur Addition und Multiplikationen verwendet. Mit $x_n \in \mathbb{R}_+$ ist dann auch $x_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, d. h.: Die Newton-Iteration ist für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}_+$ durchführbar.

b) Der Beziehung

$$|x_{n+1} - a^{-1}| = |2x_n - ax_n^2 - a^{-1}| = |a^{-1}(2ax_n - x_n^2 - a^{-2})| = |a^{-1}|(x_n - a^{-1})^2$$

bzw.

$$\Big|\frac{x_{n+1} - a^{-1}}{a}\Big| = \Big|\frac{x_n - a^{-1}}{a}\Big|^2$$

entnehmen wir, dass diese Iteration für alle Startwerte mit der Eigenschaft $|x_0 - a^{-1}| < a$ quadratisch gegen $x_* = a^{-1}$ konvergiert.

c) Für den Startwert $x_0 = 0,5$ ist wegen $1 \le a < 10$:

$$|x_0 - a^{-1}| = \Big|\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\Big| = \frac{a-1}{2a} \le \frac{1}{2} < a,$$

so dass die Newton-Iteration gemäß Teil (b) quadratisch konvergiert. Im Hinblick auf die a priori Fehlerabschätzung

$$|x_n - a^{-1}| \le a\, q^{2^n}, \quad q := \frac{|x_0 - a^{-1}|}{a} \le \frac{1}{2a} \le \frac{1}{2}$$

ergibt sich die Anzahl n von Iterationsschritten zur Erreichung einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-16}$ aus

$$2^n \approx \beta := \frac{\ln(a^{-1}\cdot 10^{-16})}{\ln(q)} \approx \frac{\ln(10^{-17})}{\ln(0,5)} \approx 57, \qquad n \approx \frac{\ln(\beta)}{\ln(2)} \approx 5,7.$$

Es sind also maximal etwa 6 Iterationsschritte zur Erlangung der geforderten 16 Stellen Genauigkeit erforderlich.

Lösung A.5.17: a) Die Reihe

$$s_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$$

hat nach der geometrischen Summenformel den Limes

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Die Konvergenz der Partialsummen ist gleichmäßig für $x \in (\delta, \infty)$ mit beliebig kleinem $\delta > 0$; die Limesfunktion ist stetig auf $(0, \infty)$.

b) Die formalen Ableitungen der Reihe (gliedweise Ableitung) sind

$$s_\infty^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n k^n e^{-kx}.$$

Diese Reihen sind wegen

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^n e^{-kx}} = \limsup_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{k}\right)^n e^{-x} = e^{-x} < 1$$

nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent. Die Partialsummen konvergieren gleichmäßig für $x > \delta$ mit beliebigem $\delta > 0$. Folglich stellen alle Ableitungsreihen stetige Funktionen dar, und die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n k^n e^{-kx}.$$

Lösung A.5.18: a) Vektorraum: Mit f, g sind auch die Summe $f+g$ sowie das Produkt λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ L-stetig. Folglich ist $C^{0,1}[a,b]$ ein Vektorraum.

b) Norm: Es sind die Normeigenschaften nachzuprüfen. Zunächst definiert $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ offensichtlich eine Abbildung von $C^{0,1}[a,b]$ nach $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Weiter gilt:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0,$$

sowie für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda f\|_{\mathrm{Lip}} = \|\lambda f\|_\infty + \sup_{x,y\in I, x\neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x-y|} = |\lambda|\, \|f\|_{\mathrm{Lip}},$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} &= \|f+g\|_\infty + \sup_{x,y\in I, x\neq y} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|} \\
&\le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \sup_{x,y\in I, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \sup_{x,y\in I, x\neq y} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \\
&= \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}.
\end{aligned}$$

c) Vollständigkeit: Es ist zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in C^{0,1}[a,b]$ einen Limes $f \in C^{0,1}[a,b]$ hat. Wegen

$$\|g\|_\infty \le \|g\|_{\mathrm{Lip}}, \quad k = 1, \dots, m,$$

ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $k = 1, \dots, m$, Cauchy-Folge im Banach-Raum $C[a,b]$. und besitzt folglich einen Limes $f \in C[a,b]$:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty), \quad k = 0, \dots, n.$$

Für $x, y \in I$, $x \neq y$ und $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, gilt dann

$$\|f_m - f_n\|_{\text{Lip}} \geq \frac{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)|}{|x - y|} \to \frac{|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(y)|}{|x - y|} \quad (m \to \infty).$$

Folglich ist

$$\sup_{x,y \in I, x \neq y} \frac{|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(y)|}{|x - y|} \leq \liminf_{m \to \infty} \|f_m - f_n\|_{\text{Lip}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Hieraus folgt $f \in C^{0,1}[a, b]$ und $\|f_n - f\|_{\text{Lip}} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Lösung A.5.19: a) Vektorraum: Mit f, g sind auch die Summe $f + g$ sowie das Produkt λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Sukzessive Anwendung dieser Eigenschaft auf die Ableitungen von f, g impliziert dann, dass mit f, g auch $f + g$ sowie λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ m-mal stetig differenzierbar sind. Folglich ist $C^m[a, b]$ ein Vektorraum.

b) Norm: Es sind die Normeigenschaften nachzuprüfen. Zunächst definiert $\|\cdot\|_{m;\infty}$ offensichtlich eine Abbildung von $C^m[a, b]$ nach $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Weiter gilt:

$$\|f\|_{m;\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0,$$

sowie für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda f\|_{m;\infty} = \max_{k=1,\dots m} \|(\lambda f)^{(k)}\|_\infty = |\lambda| \max_{k=1,\dots m} \|f^{(k)}\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_{m;\infty},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{m;\infty} &= \max_{k=1,\dots m} \|(f + g)^{(k)}\|_\infty \leq \max_{k=1,\dots m} \|f^{(k)}\|_\infty + \max_{k=1,\dots m} \|g^{(k)}\|_\infty \\ &= \|f\|_{m;\infty} + \|g\|_{m;\infty}. \end{aligned}$$

c) Vollständigkeit: Es ist zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in C^m[a, b]$ einen Limes $f \in C^m[a, b]$ hat. Wegen

$$\|g^{(k)}\|_\infty \leq \|g\|_{m;\infty}, \quad k = 1, \dots, m,$$

ist jede der Ableitungsfolgen $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, $k = 1, \dots, m$, für sich genommen eine Cauchy-Folge im Banach-Raum $C[a, b]$ und besitzt einen Limes $f_k \in C[a, b]$:

$$\|f_n^{(k)} - f_k\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty), \quad k = 0, \dots, n.$$

Wir setzen $f := f_0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der jeweiligen Ableitungsfolgen

$$\|\tfrac{d}{dx} f_n^{(k)} - f_k\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty), \quad k = 0, \dots, n - 1,$$

sind dann auch die jeweiligen Limesfunktionen f_k stetig differenzierbar, und es gilt $f_k = f'_{k-1}$, $k = 1, \dots, m$, bzw. $f_k = f_0^{(k)} = f^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$. Die gegebene Cauchy-Folge konvergiert also in $C^m[a, b]$ gegen den Limes f.

A.6 Kapitel 6

Lösung A.6.1: i) Sei u eine Lösung der Anfangswertaufgabe. Integration der Differentialgleichung ergibt dann gemäß des Fundamentalsatzes

$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s)\,ds = \int_0^t f(s,u(s))\,ds,$$

d. h.: u ist auch Lösung der Integralgleichung.

ii) Sei $u \in C[0,\infty)$ eine Lösung der Integralgleichung. Dann ist wegen der Stetigkeit von $u(t)$ auch die zusammengesetzte Funktion $f(t,u(t))$ stetig und nach dem Fundamentalsatz die integrierte Funktion

$$u(t) - u_0 = \int_0^t f(s,u(s))\,ds$$

stetig differenzierbar, d. h.: $u \in C^1[0,\infty)$. Differentiation ergibt

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad t \ge 0.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $u(0) = u^0$, d. h.: Die Funktion $u \in C^1[0,\infty)$ ist Lösung der Anfangswertaufgabe.

Lösung A.6.2: Die Stammfunktionen sind

$$a) \quad F(x) = \ln^2(x) + c,$$

wegen $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$,

$$b) \quad F(x) = -\tfrac{1}{4}\cos(2x) + c,$$

$$c) \quad F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2} + c,$$

und unter Verwendung der Beziehungen (Partialbruchzerlegung)

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}, \qquad \ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big).$$

$$d) \quad F(x) = \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) + c\,, \quad |x| < 1,$$

mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Eine alternative Darstellung der Lösung zu (d) ist

$$F(x) = 2\,\mathrm{arc\,tanh}(x) + c\,.$$

Lösung A.6.3: a) Das Integral wird zerlegt gemäß

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx &= \int_0^{\pi} |\sin(x)|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin(x)|\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 4.\end{aligned}$$

b) Die Stammfunktion des Integranden ist $F(x) = \ln\big(\ln(x)\big)$:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)} = \ln\big(\ln(x)\big)\Big|_e^{e^2} = \ln\big(\ln(e^2)\big) - \ln\big(\ln(e)\big) = \ln(2).$$

Dasselbe Ergebnis liefert die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ für $x = 1$ (alterniernde harmonische Reihe):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Lösung A.6.4: a) Partielle Integration ergibt

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x)\big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \big(1 - \sin^2(x)\big)\,dx.$$

Dies liefert dann

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

b) Partielle Integration ergibt

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = -x\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = -x\cos(x)\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Lösung A.6.5: a) Das uneigentliche Integral existiert nicht, denn es ist zwar

$$\int_0^{2n\pi} \sin(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin(x)\,dx = 0,$$

aber für $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$ wird im Hinblick auf

$$\int_{2n\pi}^{x} \sin(x)\,dx = -\cos(x) + 1$$

jeder Wert in $[-1, 1]$ angenommen.

b) Durch die Substitution $x := \sqrt{y}$ mit $dx = \frac{1}{2}dy/\sqrt{y}$ erhalten wir:

$$\int_0^{b} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy.$$

Dies ist ein „normales“ Riemann-Integral, da der Integrand $g(y) = \sin(y)/\sqrt{y}$ auf dem Intervall $[0, b^2]$ mit $g(0) := 0$ als stetige Funktion definiert ist. Wir betrachten den Grenzprozeß $b \to \infty$ und können daher o.B.d.A. annehmen, dass $b^2 \in [m\pi, (m+1)\pi)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Das Integral wird entsprechend aufgespalten gemäß

$$\int_0^b \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}}\, dy}_{=:\, A_k} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{m\pi}^{b^2} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}}\, dy}_{=:\, A(b)}.$$

Aufgrund des oszillierenden Verhaltens der Sinus-Funktion ist

$$A_k > 0, \quad k \text{ gerade}, \qquad A_k < 0, \quad k \text{ ungerade},$$

d. h.: $A_k A_{k+1} < 0$. Da die Funktion $1/\sqrt{y}$ monoton fällt, ist wegen der 2π-Periodizität des Sinus und $|\sin(x)| \le 1$ auch die Folge der Absolutbeträge $|A_k|$ monoton gegen Null fallend. Nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty A_k$. Es bleibt zu zeigen, dass $A(b) \to 0$ für $b \to \infty$. Dazu schätzen wir wie folgt ab:

$$|A(b)| \le |A_{m+1}| \to 0 \quad (b^2 \to \infty).$$

Lösung A.6.6: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Die Substitution $x = \sin(y)$ ergibt mit $dx = \cos(y)\, dy$ und $\delta := \frac{1}{2}\pi - \arcsin(1-\varepsilon)$:

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\frac{1}{2}\pi+\delta}^{\frac{1}{2}\pi-\delta} \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-\sin(y)^2}}\, dy = \int_{-\frac{1}{2}\pi+\delta}^{\frac{1}{2}\pi-\delta} \frac{\cos(y)}{\cos(y)}\, dy \;\to\; \pi \quad (\varepsilon \to 0).$$

Lösung A.6.7: a) Wir zeigen, dass für $x \in \mathbb{R}_+$ die beiden uneigentlichen Integrale

$$I_1(x) := \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt, \quad I_2(x) := \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

existieren. Zunächst ist wegen $e^{-t} \le 1$:

$$I_1(x) \le \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_0^1 = \frac{1}{x}.$$

Wegen

$$t^{x-1} e^{-t} = t^{-2}\big(t^{x+1} e^{-t}\big) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

gilt weiter mit einem $t_0 \ge 1$:

$$I_2(x) \le \int_1^{t_0} t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_{t_0}^\infty t^{-2}\, dt.$$

Da diese beiden Integrale existieren, existiert auch $I_2(x)$ als uneigentliches Riemann-Integral.

b) Zum Nachweis der Funktionalgleichung schreiben wir unter Verwendung von partieller Integration für $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(-e^{-t}t^{x-1}\Big|_{t=\varepsilon}^{t=1/\varepsilon} + (x-1)\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{x-2}\,dt\right) \\
&= (x-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{x-2}\,dt = (x-1)\Gamma(x-1).
\end{aligned}$$

c) Die letzte Behauptung zeigen wir durch vollständige Induktion. Zunächst ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1.$$

Sei nun $\Gamma(n) = (n-1)!$ richtig. Dann folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$.

Lösung A.6.8: Die Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des Absolutbetrags und der Linearität und Definitheit des Riemann-Integrals:

1. Definitheit:
$$\|f\|_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad |f| \equiv 0 \quad\Rightarrow\quad f \equiv 0;$$

2. Homogenität ($\alpha \in \mathbb{R}$):
$$\|\alpha f\|_1 = \int_c^d |\alpha f(x)|\,dx = |\alpha|\int_c^d |f(x)|\,dx = |\alpha|\,\|f\|_1;$$

3. Dreiecksungleichung:
$$\|f+g\|_1 = \int_c^d |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_c^d \big(|f(x)|+|g(x)|\big)\,dx \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Aus der Abschätzung

$$\|f\|_1 = \int_c^d |f(x)|\,dx \leq \max_{x\in[c,d]} |f(x)|\,(d-c)$$

folgt unmittelbar, dass jede bzgl. der Maximum-Norm konvergente Folge auch bzgl. der L^1-Norm konvergiert.

A.7 Kapitel 7

Lösung A.7.1: Nach Definition ist

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im} f(x)\,dx,$$

und folglich

$$\begin{aligned}\int_a^b \overline{f(x)}\,dx &= \int_a^b \mathrm{Re}\overline{f(x)}\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\overline{f(x)}\,dx\\ &= \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\,dx - i\int_a^b \mathrm{Im} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b f(x)\,dx}.\end{aligned}$$

Lösung A.7.2: Mit $R[a,b]$ wird der Vektorraum der über dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnet. Er wird mit der L^2-Norm versehen zu einem (nicht vollständigen) normierten Raum. Mit $C[a,b]$ wird dagegen der Vektorraum der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen, üblicherweise versehen mit der Maximumnorm, verstanden. Er ist dann vollständig, d. h. ein „Banach-Raum“. Der $C[a,b]$ ist ein echter Untervektorraum von $R[a,b]$; versehen mit der L^2-Norm ist dieser dann ebenfalls nicht abgeschlossen (bzw. „nicht vollständig“ als normierter Raum).

Eine Folge von Funktionen $f_n \in R[a,b], n \in \mathbb{N}$, konvergiert für $n \to \infty$ gegen eine Funktion $f \in R[a,b]$
i) punktweise, wenn $f_n(x) \to f(x)$, $x \in [a,b]$;
ii) gleichmäßig, wenn $\sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$;
iii) im quadratischen Mittel, wenn $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \to 0$.

a) Wegen der Stetigkeit (und Differenzierbarkeit) des Sinus gilt für festes $x \in I := [-\pi,\pi]$:

$$f_n(x) = \sin(\tfrac{1}{n}x) \quad\to\quad \sin(0) = 0 \quad (n \to \infty).$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen $f(x) \equiv 0$. Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\xi_x \in (0,x)$ oder $\xi_x \in (x,0)$ mit

$$|\sin(\tfrac{1}{n}x) - \sin(0)| = \big|\cos(\tfrac{1}{n}\xi_x)\,\tfrac{1}{n}x\big| \le \frac{\pi}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dies bedeutet, dass die Funktionen f_n auch gleichmäßig gegen Null konvergieren. Dies impliziert mit der Ungleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \le 2\pi \max_{[-\pi,\pi]} |f_n - f|^2 \le \frac{2\pi^3}{n^2}$$

auch die Konvergenz im quadratischen Mittel.

b) Wegen $nq^n \to 0\ (n \to \infty)$ für $0 \le q < 1$ konvergiert für festes $x \in I := [0,1)$

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Ferner ist $f_n(0) = 0$. Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen $f(x) \equiv 0$. Die Ableitungen sind

$$f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx) = n(1-(n+1)x)(1-x)^{n-1}.$$

Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \frac{1}{2n}]$ gilt

$$f_n'(x) = n\big(1-(n+1)x\big)(1-x)^{n-1} \geq n\Big(1 - \frac{n+1}{2n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^{n-1}.$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es nun zu jedem $x \in I$ ein $\xi_x \in (0,x)$ mit

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x) - f_n(0) = f_n'(\xi_x)x\,.$$

Für die Punkte $x_n := \frac{1}{2n}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|f_n(x_n) - f(x_n)| &= f_n(x_n) - f_n(0) = f_n'(\xi_{x_n})x_n \\
&\geq n\Big(1 - \frac{n+1}{2n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^{n-1}\frac{1}{2n} \\
&\geq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{n+1}{2n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^{2n} \to \frac{1}{4e} \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

d. h.: Die Konvergenz der Funktionenfolge ist **nicht** gleichmäßig. Dagegen impliziert

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx &= n^2 \int_0^1 x^2(1-x)^{2n}\,dx \\
&= n^2\Big\{\int_0^1 2x\frac{1}{2n+1}(1-x)^{2n+1}\,dx - x^2\frac{1}{2n+1}(1-x)^{2n+1}\Big|_0^1\Big\} \\
&= \frac{2n^2}{2n+1}\int_0^1 x(1-x)^{2n+1}\,dx \\
&= \frac{2n^2}{2n+1}\Big\{\int_0^1 \frac{1}{2n+2}(1-x)^{2n+2}\,dx - x\frac{1}{2n+2}(1-x)^{2n+2}\Big|_0^1\Big\} \\
&= \frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)}\int_0^1 (1-x)^{2n+2}\,dx \\
&= -\frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\,(1-x)^{2n+3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}
\end{aligned}$$

die Konvergenz im quadratischen Mittel.

c) Beispiele zur Demonstration der (paarweisen) Nichtäquivalenz der drei Konvergenzbegriffe sind etwa:

– Punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent (s. o.):

$$f_n(x) := nx(1-x)^n, \;\; x \in [0,1].$$

– Punktweise aber nicht im quadratischen Mittel konvergent (s. o.):

$$f_n(x) := n^2 x(1-x)^n, \quad x \in [0,1].$$

– Im quadratischen Mittel aber nicht punktweise konvergent: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von „Peaks“ auf dem Intervall $[0,1]$ der Höhe Eins, deren Träger die Länge $1/n$ haben und die periodisch im Intervall $[0,1]$ hin und her wandern.

Lösung A.7.3: a) Die Folge der Funktionen $f_n(x) := \cos(\frac{1}{n}x)$ konvergiert im L^2-Sinne gegen Eins. Dazu berechnen wir mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \big|\cos(\tfrac{1}{n}x) - 1\big|^2\,dx &= \int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx - 2\int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)\,dx + 2\pi \\ &= \cos(\tfrac{1}{n}x)n\sin(\tfrac{1}{n}x)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx - n\sin(\tfrac{1}{n}x)\Big|_0^{2\pi} + 2\pi \\ &= \cos(\tfrac{2}{n}\pi)n\sin(\tfrac{2}{n}\pi) - \int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx - n\sin(\tfrac{2}{n}\pi) + 4\pi\end{aligned}$$

und erhalten wegen $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1:$

$$\int_0^{2\pi} \big|\cos(\tfrac{1}{n}x) - 1\big|^2\,dx = \big(\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{2}{n}\pi) - 1\big)\frac{n}{2\pi}\sin(\tfrac{2}{n}\pi)2\pi + 2\pi \to 0 \quad (n\to\infty).$$

b) Die Folge der Funktionen $f_n(x) := (x+\frac{1}{n})^{-1/2}$ konvergiert *nicht* im L^2-Sinne. Dazu betrachten wor die Normen $\|f_n\|:$

$$\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2\,dx = \int_0^{1} (x+\tfrac{1}{n})^{-1}\,dx = \ln(x+\tfrac{1}{n})\Big|_0^{2\pi} = \ln(2\pi+\tfrac{1}{n}) - \ln(\tfrac{1}{n}) \to \infty \quad (n\to\infty).$$

Bemerkung: Es konvergiert aber sehrwohl $f_n \to x^{-1/2}$ $(n\to\infty)$ im schwächeren L^1-Sinne:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f_n(x) - x^{-1/2}|\,dx &= \int_0^{2\pi} \big\{x^{-1/2} - (x+\tfrac{1}{n})^{-1/2}\big\}\,dx = \tfrac{1}{2}x^{1/2}\Big|_0^{2\pi} - \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{n})^{1/2}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}(2\pi)^{1/2} - \tfrac{1}{2}(2\pi+\tfrac{1}{n})^{1/2} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n})^{1/2} \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Lösung A.7.4: 0) Auf dem Funktionenraum $R[a,b]$ sind die L^2- und die L^1-Normen definiert durch

$$\|f\|_{L^2} := \Big(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}, \qquad \|f\|_{L^1} := \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

i) Die Folge der Funktionen $f_n(x) := \sin(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{n}x)$ konvergiert im L^2-Sinne gegen Eins. Dazu betrachten wir wegen $\sin(x+\frac{1}{2}\pi) = \cos(x):$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \big|\cos(\tfrac{1}{n}x) - 1\big|^2\,dx &= \int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx - 2\int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)\,dx + 2\pi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx - 2n\sin(\tfrac{1}{n}x)\Big|_0^{2\pi} + 2\pi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx - 2n\sin(\tfrac{2}{n}\pi) + 2\pi.\end{aligned}$$

Mit Hilfe partieller Integration gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx = \cos(\tfrac{1}{n}x)n\sin(\tfrac{1}{n}x)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx$$
$$= \cos(\tfrac{2\pi}{n})n\sin(\tfrac{2\pi}{n}) + 2\pi - \int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx$$

und folglich

$$\int_0^{2\pi} \cos(\tfrac{1}{n}x)^2\,dx = \pi + \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{2\pi}{n})n\sin(\tfrac{2\pi}{n}).$$

Dies oben eingesetzt impliziert dann

$$\int_0^{2\pi} \big|\cos(\tfrac{1}{n}x) - 1\big|^2\,dx = \tfrac{1}{2}n\cos(\tfrac{2\pi}{n})\sin(\tfrac{2\pi}{n}) - 2n\sin(\tfrac{2\pi}{n}) + 3\pi.$$

Wegen $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$ und $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$ folgt dann schließlich

$$\int_0^{2\pi} \big|\cos(\tfrac{1}{n}x) - 1\big|^2\,dx = \tfrac{n}{2\pi}\cos(\tfrac{2\pi}{n})\sin(\tfrac{2\pi}{n})\pi - \tfrac{n}{2\pi}\sin(\tfrac{2\pi}{n})4\pi + 3\pi \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Die L^2-Konvergenz impliziert dann über die Höldersche Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} |f_n - f|\,dx \le \Big(\int_0^{2\pi} |f_n - f|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{2\pi} dx\Big)^{1/2}$$

direkt auch die L^1-Konvergenz.

ii) Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^2+1/n^2)^{1/2}}$ konvergiert *nicht* im L^2-Sinne. Dazu betrachten wir die Normen $\|f_n\|_{L^2}$:

$$\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1/n^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\big(x^2+1/n^2\big)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\ln\big((1+1/n^2\big) - \frac{1}{2}\ln\big(1/n^2\big) \to \infty \quad (n\to\infty).$$

Es konvergiert aber sehr wohl $f_n \to f := x^{-1/2}$ $(n\to\infty)$ im schwächeren L^1-Sinne (Dabei wird $f(x) = x^{-1/2}$ auf dem Intervall $[0,1]$ als „uneigentlich“ R-integrierbar betrachtet.). Wir spalten das Integral auf gemäß

$$\int_0^1 \Big|\frac{x^{1/2}}{(x^2+1/n^2)^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}}\Big|\,dx = \int_0^{1/n}\Big|\dots\Big|\,dx + \int_{1/n}^1\Big|\dots\Big|\,dx.$$

Für das erste Integral gilt

$$\int_0^{1/n}\Big|\dots\Big|\,dx \le \int_0^{1/n}\frac{2}{x^{1/2}}\,dx \le x^{1/2}\Big|_0^{1/n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Für $x\in[0,1]$ ist

$$x^2 + 1/n^2 \le x^2 + 2x/n + 1/n^2 = (x+1/n)^2 \quad\Rightarrow\quad (x^2+1/n^2)^{1/2} - x \le 1/n.$$

Für das zweite Integral folgt damit ebenfalls

$$\int_{1/n}^1 \Big|\dots\Big|\,dx = \int_{1/n}^1 \Big|\frac{x-(x^2+1/n^2)^{1/2}}{\sqrt{x}(x^2+1/n^2)^{1/2}}\Big|\,dx \le \frac{1}{n}\int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{2}{n}\frac{1}{x^{1/2}}\Big|_{1/n}^1 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Lösung A.7.5: Für $k=l$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ilx}\,dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi,$$

und für $k\neq l$ nach der Eulerschen Formel:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ilx}\,dx \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x}\,dx &= \int_0^{2\pi} \big\{\cos((k-l)x) + i\sin((k-l)x)\big\}\,dx\\ &= \int_0^{2\pi} \cos((k-l)x)\,dx + i\int_0^{2\pi} \sin((k-l)x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Lösung A.7.6: Die Fourier-Koeffizienten können statt über $[0,2\pi]$ auch über $[-\pi,\pi]$ berechnet werden.

a) Für gerades f gilt, da $\sin(kx)$ ungerade ist:

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f hat also die Form

$$F_\infty^f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^\infty a_k\cos(kx).$$

b) Für ungerades f gilt analog, da $\cos(kx)$ gerade ist:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\,dx = 0,\\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f hat also die Form

$$F_\infty^f(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k\sin(kx).$$

Lösung A.7.7: Die Fourier-Koeffizienten der durch $f(x) = |x|,\ -\pi \le x \le \pi$, definierten 2π-periodischen Funktion sind

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}x^2\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\pi^2 + \frac{1}{2\pi}\pi^2 = \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{k\pi}x\sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{k^2\pi}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}\big(\cos(k\pi) - \cos(0)\big) \\ &= \frac{2}{k^2\pi}\begin{cases} -2, & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Da f gerade ist, gilt ferner:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(kx)\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Fourier-Reihe von f ist demnach

$$F_\infty^f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Diese Reihe konvergiert absolut. Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, stellt sie die Funktion f auch für alle $x \in \mathbb{R}$ dar.

Lösung A.7.8: a) Die allgemeine (reelle) Form der Fourier-Reihe ist

$$F_\infty(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx.$$

b) Die Fourier-Koeffizienten können statt über $[0, 2\pi]$ auch über $[-\pi, \pi]$ berechnet werden. Für gerades f gilt, da $\sin(kx)$ ungerade ist:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0. \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f hat also die Form

$$F_\infty^f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Für ungerades f gilt analog, da $\cos(kx)$ gerade ist:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\,dx = 0,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f hat also die Form

$$F_\infty^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

c) Die reellen Fourier-Koeffizienten der durch

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi),$$

definierten, ungeraden 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind nach Teil (b) $a_0 = a_k = 0$ und

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx - \frac{1}{k\pi}x\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos(k\pi)+\cos(-k\pi)}{k} = -\frac{2\cos(k\pi)}{k}\\
&= -\frac{2(-1)^k}{k}.
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f ist demnach

$$F_\infty^f(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{k}\sin(kx).$$

Diese Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen f. Sie stellt f in allen Punkten dar, in denen f stetig differenzierbar ist. In den Sprungstellen $x = \pm k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiert sie gegen den Mittelwert Null der benachbarten Grenzwerte. Die Funktion f wird also überall in $[-\pi, \pi]$ durch ihre Fourier-Reihe dargestellt.

Lösung A.7.9: a) Für jedes $x \in [0, 2\pi]$ haben die beiden Reihen nach dem Quotientenkriterium absolut konvergente Majoranten ($r = 2, 3$):

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^r}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}.$$

Die Partialsummen sind offenbar stetige und 2π-periodische Funktionen, welche auf $[0,2\pi]$ gleichmäßig konvergieren. Wegen der Vollständigkeit von $C[0,2\pi]$ existieren also die Limiten

$$f_{r-1}(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^r}, \quad x \in [0,2\pi].$$

Diese sind dann offenbar ebenfalls 2π-periodisch mit Werten $f_i(0) = f_i(2\pi)$ und somit in $R[0,2\pi]$.

b) Die abgeleitete Reihe (i) hat ebenfalls eine nach dem Quotientenkriterium gleichmäßig für $x \in [0,2\pi]$ absolut konvergente Majorante:

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2};$$

sie konvergiert also gleichmäßig auf $[0,2\pi]$. Die abgeleitete Reihe (ii) ist nach Vorlesung für jedes $\delta > 0$ auf $[\delta, 2\pi-\delta]$ gleichmäßig konvergent, und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Nach dem Satz zur Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation sind daher beide Funktionen auf $(0,2\pi)$ stetig differenzierbar, und es gilt $(r = 2,3)$

$$f'_{r-1}(x) = \frac{d}{dx}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^r}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\sin(kx)}{k^{r-1}},$$

c) Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der beiden Reihen $(r = 2,3)$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} \frac{\cos(lx)}{l^r}\Big)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l^r}\int_0^{2\pi} \cos(lx)\cos(kx)\,dx\Big) = \frac{1}{k^r}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} \frac{\cos(lx)}{l^r}\Big)\sin(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l^r}\int_0^{2\pi} \cos(lx)\sin(kx)\,dx\Big) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Lösung A.7.10: a) Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{k} f(x)\sin(kx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx$$

und somit

$$\Big|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\Big| \le \frac{2\pi}{k}\max_{x\in[0,2\pi]}|f'(x)| \to 0 \quad (k\to\infty).$$

b) Für allgemeines $f\in R[0,2\pi]$ (d.h., f nicht notwendig differenzierbar) kann die obige Argumentation offensichtlich nicht verwendet werden. In diesem Fall verwenden wir L^2-Konvergenz der Fourier-Reihe von f und die Vollständigkeitsrelation („Parsevalsche Gleichung“):

$$\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty \big\{a_k^2+b_k^2\big\}.$$

Die Konvergenz dieser Reihe bedingt nun notwendig, dass

$$\Big|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\Big|^2 + \Big|\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\Big|^2 = \pi^2(a_k^2+b_k^2) \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Lösung A.7.11: a) i) Für die Fourier-Koeffizienten der gegebenen Funktion gilt

$$\begin{aligned}
\pi a_k &= \int_0^{2\pi} e^x\cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}e^x\sin(kx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} e^x\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{k}e^x\sin(kx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k^2}e^x\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} e^x\cos(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{k^2}\big(e^{2\pi}-1\big) - \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} e^x\cos(kx)\,dx,
\end{aligned}$$

und folglich

$$\int_0^{2\pi} e^x\cos(kx)\,dx = \frac{1}{k^2}\big(e^{2\pi}-1\big)\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)^{-1} = \frac{e^{2\pi}-1}{k^2+1}.$$

Dies impliziert

$$a_k = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\,\frac{1}{k^2+1}, \qquad k\in\mathbb{N}_0.$$

Analog ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\pi b_k &= \int_0^{2\pi} e^x\sin(kx)\,dx = -\frac{1}{k}e^x\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} e^x\cos(kx)\,dx\\
&= -\frac{1}{k}\big(e^{2\pi}-1\big) + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} e^x\cos(kx)\,dx\\
&= -\frac{1}{k}\big(e^{2\pi}-1\big) + \frac{1}{k}\frac{e^{2\pi}-1}{k^2+1} = -\big(e^{2\pi}-1\big)\frac{k}{k^2+1},
\end{aligned}$$

und folglich

$$b_k = -\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\,\frac{k}{k^2+1}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Die Fourier-Reihe ist also in reeller Darstellung:

$$f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2+1}\cos(kx) - \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{k}{k^2+1}\sin(kx).$$

ii) Die komplexen Fourier-Koeffizienten ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned}
c_0 &= \tfrac{1}{2}a_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi},\\
c_k &= \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(k^2+1)}(1+ik) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-ik)},\\
c_{-k} &= \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(k^2+1)}(1-ik) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1+ik)}.
\end{aligned}$$

Also ist die Fourier-Reihe in komplexer Darstellung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi}-1}{1-ik}\, e^{ikx}.$$

b) Die Fourier-Reihe konvergiert im L^2-Sinne, auf ganz $[0,2\pi]$ punktweise und auf jedem Teilintervall $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, gleichmäßig gegen f.

Lösung A.7.12: a) Die Fourier-Summen (in komplexer Darstellung)

$$F_n^f(x) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

sind stetige Funktionen. Ihre *gleichmäßige* Konvergenz würde dann die Stetigkeit der Limesfunktion f implizieren, im Widerspruch zur vorausgesetzten Unstetigkeit von f. Dieses Argument funktioniert auch für jede Teilfolge $(F_{n_k}^f)_{k\in\mathbb{N}}$, da jede den selben Limes hat.

b) O.B.d.A. sei $\xi \in (0,2\pi)$ die einzige Unstetigkeitsstelle von f. Nach dem Satz der Vorlesung konvergieren dann die Fourier-Summen auf dem Intervall $[\xi,2\pi]$ punktweise und auf jedem Teilintervall $[\xi+\delta,2\pi]$, $0<\delta<2\pi-\xi$, gleichmäßig gegen f. Da es auf dem Intervall $[\xi,2\pi]$ keine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(F_{n_k}^f)_{k\in\mathbb{N}}$ geben kann, gibt es ein $c_\xi > 0$ und ein $n_\xi \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{x\in[\xi,2\pi]} |f(x) - F_n^f(x)| \ge c_\xi > 0, \quad n \ge n_\xi.$$

Dagegen gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $n_\delta \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{x\in[\xi+\delta,2\pi]} |f(x) - F_n^f(x)| < c_\xi > 0, \quad n \ge n_\delta.$$

Hieraus folgern wir die Existenz einer Folge von Punkten $x_n \in [\xi,2\pi]$, so dass

$$|x_n - \xi| \to 0 \;\; (n\to\infty), \quad |f(x_n) - F_n^f(x_n)| \ge c_\xi > 0.$$