2 Die reellen und die komplexen Zahlen

2.1 Von den rationalen zu den reellen Zahlen

Die rationalen Zahlen ergaben sich durch Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen, um allgemeine lineare Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten lösen zu können. Weiterer Vervollständigungsschritte werden notwendig, wenn wir kompliziertere Gleichungen lösen wollen. Die allgemeine „quadratische“ Gleichung

$$a + bx + cx^2 = y \tag{2.1.1}$$

ist nicht für beliebig gewählte $a, b, c \in \mathbb{Q}$ durch ein $x \in \mathbb{Q}$ lösbar. Dazu geben wir das folgende Beispiel.

Lemma 2.1 (Irrationalität der Quadratwurzel): *Die quadratische Gleichung*

$$x^2 = 2 \tag{2.1.2}$$

besitzt keine rationale Lösung.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine rationale Lösung $x := \sqrt{2} = r/s$ mit (teilerfremden) Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$. Für diese ist dann notwendig $r \neq 0$ und

$$r^2 = 2s^2, \quad \tfrac{1}{2}r^2 = s^2.$$

Also muss r^2 und damit auch r gerade sein. Damit sind auch $\frac{1}{2}r^2$ und s^2 gerade. Nun ist aber wegen der Teilerfremdheit s und folglich auch s^2 ungerade, was einen Widerspruch ergibt. Folglich kann die Gleichung (2.1.2) keine rationale Lösung haben. Q.E.D.

Bemerkung 2.1: Das obige Lemma besagt, dass die Zahl 2 keine rationale Quadratwurzel besitzt. Diese Tatsache hat eine wichtige geometrische Interpretation. Nach dem Satz von Pythagoras[1] ist im rechtwinkligen Dreieck die Summe der Flächeninhalte der Kathedenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats, d. h.: $a^2+b^2 = c^2$. Bezogen auf das Einheitsdreieck impliziert dies $1+1 = c^2$ bzw. $c = \sqrt{2}$. Die Entdeckung von Eudoxos[2], dass $\sqrt{2}$ nicht rational und damit die Kathede und Hypotenuse im Dreieck „inkommensurabel“ (d. h. nicht mit gleicher Einheit messbar) sind, war eine der bedeutendsten (und verwirrendsten) Entdeckungen der antiken griechischen Mathematik. Hierbei wird aber mit dem Begriff der „Länge“ einer Strecke sehr naiv umgegangen, da dieser zunächst gar nicht definiert ist, d. h. die „Zahl“ $\sqrt{2}$ so nicht erklärt werden kann.

[1] Pythagoras (um 580 v. Chr.): Griechischer Philosoph und Mathematiker aus Samos; lehrte hauptsächlich in Kroton (Italien); Begründer des Ordens der „Pythogoreer“; der Inhalt des ihm zuordneten geometrischen Satzes war in Indien und Mesopotamien bereits früher (ohne) Beweis bekannt.

[2] Eudoxos (um 400 v. Chr.): Griechischer Astronom und Philosoph aus Knidos; erkannte bereits die Krümmung der Erdoberfläche.

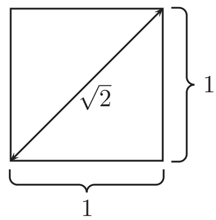

Abbildung 2.1: Geometrische „Definition“ von $\sqrt{2}$.

Bemerkung 2.2: Man beachte, dass eine quadratische Gleichung für bestimmte Koeffizienten sehr wohl in $\mathbb{Q}$ lösbar sein kann, z. B. hat die quadratische Gleichung $x^2 = 4$ die rationalen Lösungen $x = 2$ und $x = -2$.

Nun ist es möglich, rationale Zahlen zu konstruieren, welche die Gleichung $x^2 = 2$ mit zunehmender Genauigkeit erfüllen, d. h. gewissermaßen Approximationen für „$\sqrt{2}$“ sind. Das elementare Verfahren, die Quadratwurzel aus 2 anzunähern, baut rekursiv eine Einschließung durch Dezimalbrüche auf. Dabei wird die folgende Eigenschaft rationaler Zahlen verwendet

$$a, b \geq 0, \ a^2 < b^2 \quad \Rightarrow \quad a < b,$$

welche man leicht mit Hilfe der Beziehung $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ gewinnt. Die Konstruktion beginnt bei dem Paar $a_1 := 1,4$ und $b_1 := 1,5$ mit der Eigenschaft

$$a_1 < b_1, \quad a_1^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = b_1^2.$$

Wir betrachten nun zwei Fälle:

Fall a) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung

$$a_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1}(d_n{+}1), \quad a_n^2 < 2 < b_n^2,$$

mit $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $k = 1, \dots, n-1$ und $d_n \leq 8$ vor. Die nächste Einschließung gewinnen wir dann durch den Ansatz $a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n d_{n+1}$ mit Hilfe der Bedingung:

$$d_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ möglichst groß, aber } a_{n+1}^2 < 2\,,$$

und setzen

$$b_{n+1} := \begin{cases} 1, d_1 \dots d_n(d_{n+1}{+}1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8, \\ 1, d_1 \dots (d_n{+}1)0 & \text{für } d_{n+1} = 9. \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist dann

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \quad a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Fall b) Es liege für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Einschließung

$$a_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{m-1}(d_m{+}1)0 \dots 0, \quad a_n^2 < 2 < b_n^2,$$

mit $d_k \in \{0,1,\dots,9\}$, $k = 1,\dots,m-1$, $d_m \le 8$ und $d_{m+1} = \dots = d_n = 9$ vor. Die nächste Einschließung gewinnen wir dann durch den Ansatz $a_{n+1} := 1,d_1\dots d_n d_{n+1}$ mit Hilfe der Bedingung:

$$d_{n+1} \in \{0,1,\dots,9\} \text{ möglichst groß, aber } a_{n+1}^2 < 2\,,$$

und setzen

$$b_{n+1} := \begin{cases} 1,d_1\dots d_n(d_{n+1}{+}1) & \text{für } d_{n+1} \le 8, \\ 1,d_1\dots(d_m{+}1)0\dots0 & \text{für } d_{n+1} = 9. \end{cases}$$

Der Fall (b) kann nur endlich oft hintereinander auftreten, da andernfalls (gemäß der Konvention für die Behandlung von $\overline{9}$) $a_n = b_n$ ab einem gewissen n wäre. Dies würde aber wegen $a_n^2 \le 2 \le b_n^2$ implizieren, dass $a_n^2 = 2$ im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$. Nach Konstruktion gilt dann in beiden Fällen:

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n, \quad a_{n+1}^2 < 2 < b_{n+1}^2.$$

Auf diesem Wege erhalten wir zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften:

$$1,4 = a_1 \le \dots \le a_n \le a_{n+1} \;<\; b_{n+1} \le b_n \le \dots \le b_1 = 1,5.$$

Konkret erhalten wir die Dezimalbrüche

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1,4 & a_2 = 1,41, & a_3 = 1,414, & \dots, \\ b_1 = 1,5 & b_2 = 1,42, & b_3 = 1,415, & \dots. \end{array}$$

Da der Abstand

$$b_n - a_n \le 10^{-n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

immer kleiner wird, sollte man damit die ominöse „Zahl“ erfassen können. Im Folgenden werden wir diese Idee zur Konstruktion des Körpers $\mathbb{R}$ der „reellen“ Zahlen, der auch die gesuchte $\sqrt{2}$ enthält, präzisieren.

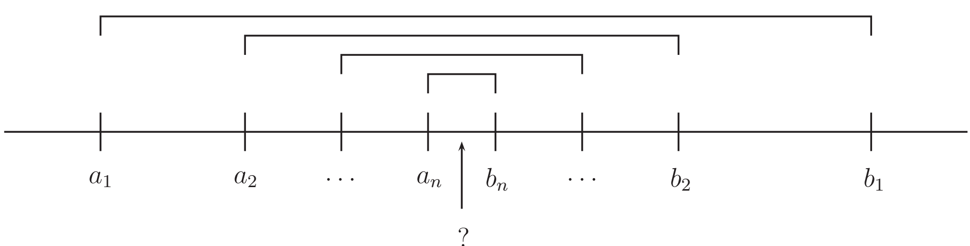

Abbildung 2.2: Intervallschachtelung der Lösung von $x^2 = 2$ ($x = \sqrt{2}$).

Bemerkung 2.3: An dieser Stelle stoßen wir auf eine kritische Stelle in der formal „exakten“ Begründung der Analysis. Unsere Antwort auf die Frage, ob als „Limes“ des obigen

Einschachtelungsprozesses, d. h. ob zwischen allen $a_n <? < b_n$ wirklich „etwas“, nämlich die Zahl $\sqrt{2}$, oder nur „Leere“ liegt ist eine philosophische Frage. Dabei hilft uns auch nicht die physikalische Anschauung, d. h. die Betrachtung der Zahlengerade oder des Kreidestriches an der Tafel, da gerade hier die Quantisierung von Raum und Zeit Teil der modernen Naturbeschreibung ist. Wir folgen hier aus Nützlichkeitserwägungen der heute herrschenden „idealistischen“ Tradition und nehmen die „Zahl“ $\sqrt{2}$ als Resultat des Schachtelungsprozesses als real existent an. Eine Analysis, die nur mit den rationalen Zahlen und damit gebildeten Intervallschachtelungen als Objekten auskommt, wäre sehr unhandlich und würde die Verwendung des mathematischen Kalküls bei der Naturbeschreibung wesentlich erschweren.

Eine Menge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nummerierter (d. h. angeordneter) rationaler Zahlen wird „Folge“ genannt; z. B. ist $(1+1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Sinne eine Folge. Offenbar kommen die Elemente dieser Folge für größer werdendes n immer näher an die 1. Dies schreiben wir als

$$1+\frac{1}{n}\to 1 \ \ (n\to\infty) \qquad \text{b.z.w.} \qquad \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)=1,$$

und nennen die Folge „konvergent“ gegen 1. Allgemein heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ „konvergent“ gegen einen „Limes“ a, wenn gilt

$$|a_n-a|\to 0 \ \ (n\to\infty),$$

was auch kurz als $a_n\to a\ (n\to\infty)$ geschrieben wird. Im Falle, dass

$$|a_n|\to\infty \ \ (n\to\infty),$$

heißt sie „strikt divergent“. Diese Aussage wird durch folgendes überprüfbare Kriterium nach Cauchy[3] präzisiert:

Definition 2.1 (Cauchysches Konvergenzkriterium): *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist „konvergent“ gegen einen Limes a, wenn es zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon>0$ ein $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ gibt, so dass*

$$|a_n-a|<\varepsilon \quad \textit{für } n\ge n_\varepsilon,$$

bzw. in Quantorenschreibweise:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall\, n\ge n_\varepsilon:\ \ |a_n-a|<\varepsilon.$$

Sie ist „strikt divergent“, wenn

$$|a_n|>\frac{1}{\varepsilon} \quad \textit{für } n\ge n_\varepsilon.$$

[3] Augustin Louis Cauchy (1789–1857): Ingenieur, Physiker und bedeutendster französischer Mathematiker seiner Zeit; wirkte an der École Polytechnique und der Sorbonne in Paris; gilt als Begründer der modernen Analysis und der Funktionentheorie.

Bemerkung 2.4: Für Beweiszwecke ist es wichtig die präzise Negation der Aussage „*Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen den Grenzwert* a“ zu kennnen. Diese lautet in Worten: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $n_{\varepsilon,n} \geq n$ gibt mit $|a_{n_{\varepsilon,n}} - a| \geq \varepsilon$, bzw. in Quantorennotation:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n_{\varepsilon,n} \geq n : \quad |a_{n_{\varepsilon,n}} - a| \geq \varepsilon.$$

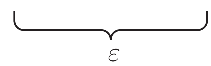

Abbildung 2.3: Zum Cauchyschen Konvergenzkriterium.

In dieser Definition kann o.B.d.A. $0 < \varepsilon \leq 1$ angenommen werden. Natürlich sind nicht alle Folgen konvergent, wie die trivialen Beispiele $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigen. Die erste Folge ist strikt divergent, während die zweite zwar beschränkt ist, aber keinen eindeutigen Limes hat. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes $a = 0$ heißt „Nullfolge“; z. B. ist die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Lemma 2.2 (Nullfolge): *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zahlen* $a_n \neq 0$ *ist Nullfolge genau dann, wenn die Folge* $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der Reziproken strikt divergiert.*

Beweis: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, so gibt es zu beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \varepsilon$ ist für $n \geq n_\varepsilon$. Dies ist gleichbedeutend mit $|1/a_n| = 1/|a_n| > 1/\varepsilon$, woraus wir schließen, dass $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergiert. Q.E.D.

Für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes a konvergieren auch die zugehörigen Absolutbeträge:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

Dies folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung aus

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Eine konvergente Folge ist also notwendig „beschränkt“, d. h.: Es gibt eine Konstante $K \in \mathbb{Q}_+$, so dass

$$|a_n| \leq K, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die mit einer unendlichen Teilmenge $\mathbb{N}' = \{n_k,\, k \in \mathbb{N},\, n_{k+1} > n_k\} \subset \mathbb{N}$ gebildeten Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nennt man „Teilfolge“ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Offenbar sind alle Teilfolgen einer konvergenten Folge ebenfalls konvergent mit demselben Limes.

An dem obigen Beispiel der approximierenden Folge für $\sqrt{2}$ sehen wir, dass es anscheinend Folgen gibt, die zwar inhärent zu konvergieren scheinen, aber dennoch keinen Limes in $\mathbb{Q}$ haben. Dies gibt Anlass zur Definition einer sog. „Cauchy-Folge“ (oder auch „Fundamentalfolge“):

Definition 2.2 (Cauchy-Folge): *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt „Cauchy-Folge“, wenn sie inhärent konvergent ist, d. h.: Zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt:*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq n_\varepsilon.$$

Lemma 2.3: *Jede gegen einen Limes a konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist notwendig eine Cauchy-Folge. Eine Cauchy-Folge ist notwendig beschränkt.*

Beweis: i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes a. Dann gibt es zu beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq n_\varepsilon$:

$$|a_n - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |a_m - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

d. h.: Die konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Angenommen, die Folge ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|a_{n_k}| \to \infty$ $(k \to \infty)$. Aus dieser kann man eine weitere, gleichfalls mit $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnete, Teilfolge extrahieren mit der Eigenschaft

$$|a_{n_{k+1}}| > 2|a_{n_k}|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt dann

$$|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \geq |a_{n_{k+1}}| - |a_{n_k}| > |a_{n_k}| \to \infty \quad (k \to \infty),$$

im Widerspruch zur Cauchy-Folgeneigenschaft. Q.E.D.

Bemerkung 2.5: Das obige Beispiel der approximierenden Folge für die Lösung von $x^2 = 2$ zeigt, dass nicht jede Cauchy-Folge eine Limes in $\mathbb{Q}$ haben muss. In diesem Sinne ist der Körper $\mathbb{Q}$ also nicht *vollständig*.

Lemma 2.4: *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen.*

i) Dann sind auch die Summen- und Produktfolgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, und im Falle der Konvergenz $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n + b_n\} = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty} \{a_n b_n\} = ab. \tag{2.1.3}$$

ii) Gilt für alle Folgenelemente $|b_n| \geq \alpha > 0$, so ist auch die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und hat im Falle der Konvergenz mit $|b| > 0$ den Limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \tag{2.1.4}$$

iii) Gilt ferner $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt für die Limiten

$$a \leq b. \tag{2.1.5}$$

Bemerkung 2.6: Die Sprechweise „*für fast alle* $n \in \mathbb{N}$“ bedeutet in diesem Zusammenhang „*für alle* $n \in \mathbb{N}$ *bis auf möglicherweise endlich viele Ausnahmen*“. Später kann die Bedeutung dieser Sprechweise aber noch eine andere sein (z. B. im Zusammenhang mit „messbaren“ Mengen).

Beweis: Sei K eine gemeinsame Schranke der beiden gegebenen Cauchy-Folgen. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es nun Indizes n_ε^a und n_ε^b, so dass für $n, m \ge n_\varepsilon^a$ bzw. $n, m \ge n_\varepsilon^b$:

$$|a_n - a_m| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad |b_n - b_m| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

i) Dann ist für $n, m \ge n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b\}$:

$$\begin{aligned} |(a_n+b_n) - (a_m+b_m)| &= |(a_n-a_m) + (b_n-b_m)| \\ &\le |a_n-a_m| + |b_n-b_m| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

d. h.: Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_m b_m| &= |(a_n-a_m)b_n + a_m(b_n-b_m)| \\ &\le |a_n-a_m|\,|b_n| + |a_m|\,|b_n-b_m| \\ &\le |b_n|\,\tfrac{1}{2}\varepsilon + |a_m|\,\tfrac{1}{2}\varepsilon \le K\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Also ist auch die Produktfolge Cauchy-Folge. Dabei stört der zusätzliche Faktor K in der Ungleichung nicht.

Bemerkung: Der eben angewandte „Trick“, eine triviale Summe $-a_m b_n + a_m b_n = 0$ einzuschieben, wird im Folgenden häufig verwendet werden.

ii) Es genügt, zu zeigen, dass die reziproke Folge $(1/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist. Wegen

$$\frac{a_n}{b_n} = \Big\{a_n \cdot \frac{1}{b_n}\Big\}$$

folgt dann mit (ii) auch die Cauchy-Folgeneigenschaft für die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung gibt es wieder für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \le \frac{1}{2}\alpha$ ein n_ε^b, so dass für $n \ge n_\varepsilon^b$:

$$|b_n - b_m| < \varepsilon.$$

Weiter gilt wegen $|b_n| \ge \alpha$:

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_m}\Big| = \Big|\frac{b_m - b_n}{b_n b_m}\Big| = \frac{|b_m - b_n|}{|b_m||b_n|} \le \frac{|b_m - b_n|}{\alpha^2} \le \frac{\varepsilon}{\alpha^2}.$$

Hieraus entnehmen wir, dass die reziproke Folge Cauchy-Folge ist.

Im Fall der Konvergenz beider Folgen erhalten wir mit analogen Argumenten auch die Konvergenz der Summen-, Produkt- und Quotientenfolgen gegen die entsprechende Limiten $a + b$, ab und a/b.

iii) Wäre $b < a$, so gäbe es ein $\delta > 0$ mit $b + \delta = a$. Wegen der Konvergenz $b_n \to$

b, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ gibt es nun ein $n_\delta \in \mathbb{N}$, so dass $|b - b_n| < \frac{1}{2}\delta$ und $|a - a_n| < \frac{1}{2}\delta$ für alle $n \geq n_\delta$. Daraus folgte dann

$$\begin{aligned} b_n &= b_n - b + b - a + a - a_n + a_n \\ &\leq |b_n - b| + b - a + |a - a_n| + a_n \\ &< \tfrac{1}{2}\delta - \delta + \tfrac{1}{2}\delta + a_n = a_n, \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme. Q.E.D.

Wir führen nun für Cauchy-Folgen rationaler Zahlen eine Äquivalenzrelation ein durch:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Leftrightarrow \quad |a_n - a'_n| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Die Äquivalenzeigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind offensichtlich gegeben. Dadurch werden Äquivalenzklassen $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ von Cauchy-Folgen definiert mit Repräsentanten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen die Menge dieser Äquivalenzklassen mit

$$\tilde{\mathbb{R}} := \big\{[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big\}.$$

Die rationalen Zahlen werden in diese Menge eingebettet durch die Setzung

$$a \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad [(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n := a] \in \tilde{\mathbb{R}}.$$

Offenbar gehört jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zur selben Äquivalenzklasse wie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Natürlich kann man mit Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen nicht gut hantieren. Durch einen „Trick“ werden wir daher jeder solchen Äquivalenzklassen einen Repräsentanten zuordnen, der mehr den vertrauten Charakter einer richtigen Zahl hat, nämlich einen (möglicherweise unendlichen) Dezimalbruch (unter Beachtung der in Satz 1.2 festgelegten Konvention).

Satz 2.1: *Jeder Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ entspricht genau ein (möglicherweise unendlicher) Dezimalbruch. Die Menge dieser Dezimalbrüche bezeichnen wir als Menge $\mathbb{R}$ der „reellen Zahlen“:*

$$\mathbb{R} = \big\{a := \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k \dots) \mid a_0 \in \mathbb{N}_0,\ d_k \in \{0, \dots, 9\}\big\}.$$

Für eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird der ihrer Äquivalenzklasse zugeordnete Dezimalbruch $a \in \mathbb{R}$ als deren „Limes“ bezeichnet: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entsprechend heißt dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine „approximierende“ Folge von $a \in \mathbb{R}$. In diesem Sinne hat dann jede Cauchy-Folge rationaler Zahlen konstruktionsgemäß einen Limes in $\mathbb{R}$.

Beweis: i) Ein unendlicher Dezimalbruch ist gegeben als eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (rationalen) endlichen Teilbrüchen

$$a_n = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_n), \quad a_0 \in \mathbb{N}_0,\ d_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

Dies ist eine Cauchy-Folge, da für $m > n+1$ unter Verwendung der geometrischen Summenformel gilt:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_0 + 0, d_1d_2d_3\dots d_n - a_0 - 0, d_1d_2d_3\dots d_nd_{n+1}\dots d_m|\\ &\le |0,0\dots 0d_{n+1}\dots d_m| = d_{n+1}10^{-n-1} + \dots + d_m 10^{-m}\\ &\le 10^{-n}\big\{10^0 + 10^{-1} + \dots + 10^{n-m+1}\big\}\\ &= 10^{-n}\big\{(\tfrac{1}{10})^0 + (\tfrac{1}{10})^1 + \dots + (\tfrac{1}{10})^{m-n-1}\big\}\\ &= 10^{-n}\frac{1-(\frac{1}{10})^{m-n}}{1-\frac{1}{10}} \le 10^{-n}\frac{10}{9} \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Folglich repräsentiert der Dezimalbruch ein Element aus $\tilde{\mathbb{R}}$. Diese „Einbettung“ von $\mathbb{R}$ nach $\tilde{\mathbb{R}}$ ist injektiv, da zwei Dezimalbrüche a und a', die zur selben Äquivalenzklasse gehören, dann notwendig gleich sein müssen (Man beachte, dass bei Dezimalbrüchen die Periode $\overline{9}$ ausgeschlossen worden war.):

$$|a - a'| = |a_0 + 0, d_1\dots d_n - a_0' - 0, d_1'\dots d_n'| \to 0 \quad (n\to\infty) \quad \Rightarrow \quad a = a'.$$

ii) Wir wollen nun zu jeder Äquivalenzklasse $a = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \tilde{\mathbb{R}}$ mit Repräsentanten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen zugehörigen Dezimalbruch $z = \pm(z_0 + 0, d_1d_2d_3\dots)$ konstruieren, der zur selben Äquivalenzklasse gehört. Damit wäre dann die Surjektivität der Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\tilde{\mathbb{R}}$ gezeigt. Im Spezialfall, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge ist, kann $z = 0$ gesetzt werden. Andernfalls sind entweder fast alle $a_n > 0$ oder fast alle $a_n < 0$. O.B.d.A. sei $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$, angenommen. Ist hierfür ein Dezimalbruch $z \ge 0$ gefunden, so überträgt sich dieses Resultat auf den Fall $a_n < 0$ bzw. $-a_n > 0$ mit dem Dezimalbruch $-z$.

Die Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt durch eine Konstante $N \in \mathbb{N},\ N \ge 2$, d. h.:

$$0 < a_n < N, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es ein $z_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass im Intervall

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, 0 \le z_0 \le x < z_0 + 1 \le N\}$$

unendlich viele der Folgenelemente liegen. Wir wollen diese Teilfolge wieder mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Das Intervall I_0 wird nun in 10 gleiche Teilintervalle unterteilt, wovon wieder mindestens eines, für ein $d_1 \in \{0,\dots,9\}$,

$$I_1 = \{x \in I_0 \,|\, z_0 + d_1 10^{-1} \le x < z_0 + (d_1+1)10^{-1}\},$$

unendlich viele der Folgenelemente enthalten muss; wir bezeichnen die so ausgezeichnete Teilfolge wiederum mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Im nächsten Schritt erhalten wir ein weiteres Teilintervall, für ein $d_2 \in \{0,\dots,9\}$,

$$I_2 = \{x \in I_0 \,|\, z_0 + d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} \le x < z_0 + d_1 10^{-1} + (d_2+1)10^{-2}\},$$

welches wieder unendlich viele der Folgenelemente enthält. Fortführung dieses Prozesses liefert eine Folge von in einander geschachtelten Teilintervallen

$$\dots \subset I_{n+1} \subset I_n \subset \dots \subset I_1 \subset I_0,$$

die jeweils unendlich viele der Folgenelemente enthalten. Zu den endlichen Dezimalbrüchen

$$z_k := z_0 + 0, d_1 \dots d_k \in \mathbb{Q}$$

gibt es folglich jeweils mindestens ein Folgenelement a_{n_k}, mit dem gilt:

$$|z_k - a_{n_k}| \le 10^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gehört also zur selben Äquivalenzklasse wie $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d. h. zu $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Hat der resultierende unendliche Dezimalbruch $z = z_0 + 0, d_1 \dots d_k \dots$ die Periode $\overline{9}$, so wird er nach der oben definierten Regel mit einem endlichen Dezimalbruch identifiziert. Damit haben wir eine bijektive Zuordnung zwischen den Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen und den Dezimalbrüchen konstruiert. Aufgrund der vorher schon abgeleiteten arithmetischen Regeln für Cauchy-Folgen, ist diese Zuordnung auch verträglich mit der Addition und der Multiplikation, d. h.: Für $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \approx z$ und $[(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] \approx z'$ ist

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + |(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(a_n + a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] \approx z + z',$$
$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot |(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(a_n \cdot a'_n)_{n\in\mathbb{N}}] \approx z \cdot z'.$$

Die konstruierte Zuordnung $\tilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathbb{R}$ ist also sogar ein Isomorphismus. Q.E.D.

Bemerkung 2.7: Das Beweisargument von Satz 2.1 lässt sich auf den Fall einer beliebigen „Basis“ $b \in \mathbb{N}$, $b \ge 2$ übertragen, d. h.: Eine reelle Zahl a besitzt eine sog. „b-adische Entwicklung“

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots) = \pm(a_0 + d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + d_3 \cdot b^{-3} + \dots)$$

mit einem

$$a_0 = g_0 + g_1 \cdot b + g_2 \cdot b^2 + g_3 \cdot b^3 + \dots \in \mathbb{N}_0$$

und „Ziffern“ $d_n, g_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Der Fall $b = 2$ der „dyadischen“ Entwicklung ist von besonderer Bedeutung in der digitalen Datenverarbeitung.

Bemerkung 2.8: Das „Cauchysche Konvergenzkriterium“ wurde von Cauchy 1828 für Folgen reeller Zahlen angegeben und als selbstverständlich angesehen. Bereits Bolzano[4] hatte es 1817 formuliert und als beweisbedürftig erkannt. Es besagt gerade die „Vollständigkeit“ des Körpers der reellen Zahlen, die ja erst aufgrund der obigen Konstruktion erreicht wird. Die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen mit Hilfe des Konzepts der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen geht auf Cantor zurück. Ein analoges Verfahren wird z.B. auch zur Vervollständigung metrischer Räume verwendet ($\rightarrow$ *Funktionalanalysis*). Wir betonen nochmals, dass eine irrationale Zahl wie z. B. $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ über

[4] Bernard Bolzano (1781–1848): Italienisch-Böhmischer Priester und Philosoph; lehrte an der Universität Prag Religionsphilosophie, bis er 1819 aus politischen Gründen entlassen wurde; leistete Grundlagenforschungen zur Analysis; seine zu Lebzeiten unbekannt gebliebenen mathematischen Schriften nehmen Ergebnisse von Weierstraß und Cantor vorweg.

(äquivalente) approximierende Folgen rationaler Zahlen definiert ist, wobei der zugehörige unendliche Dezimalbruch nur für eine ganz spezielle solcher Folgen steht. An den reellen Zahlen und ähnlichen infiniten Konstrukten hat sich im 19. Jahrhundert ein bis in die dreißiger Jahre des 20. Jahrhunderts andauernder Streit unter Mathematikern entfacht. Die Kontrahenten waren die sog. „Idealisten und Formalisten" repräsentiert durch Cantor und Hilbert und die sog. „Intuitionisten und Konstruktivisten" vertreten durch Kronecker und Brouwer[5] Die Streitfrage war und ist es noch, ob die Menge „aller" reeller Zahlen, d. h. der reelle Zahlkörper R, wirklich als ein real existierendes Objekt behandelt werden darf, oder ob nur solchen reellen Zahlen wie z. B. $\sqrt{2}$, e und π eine reale Existenz zukommt, welche über einen konkreten Approximationsprozess mit rationalen Zahlen definiert sind. Da dies im Grunde eine erkenntnistheoretische, d. h. philosophische und damit Glaubensfrage ist, kann sie innerhalb der Mathematik nicht beantwortet werden; es gibt also mehr als ein mathematisches Denkgebäude. Die radikale Ablehnung der Verwendung aller sich auf das „aktual Infinite" beziehenden Aussagen und Methoden führt aber zu einer sehr unhandlichen „Mathematik", so dass man heutzutage den idealistischen Standpunkt weitgehend akzeptiert hat. Durch das Auftauchen des Computers hat der konstruktivistische, d. h. algorithmische, Gesichtspunkt allerdings wieder an Bedeutung gewonnen.

2.2 Der Körper $\mathbb{R}$

Nachdem die reellen Zahlen über das Äquivalenzklassenprinzip konstruiert und mit den Dezimalbrüchen identifiziert sind, können nun alle Struktureigenschaften von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ übertragen werden. Dies geschieht auf dem Wege des Grenzübergangs. Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir den Absolutbetrag mit Hilfe einer approximierenden Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, durch

$$|a| := \lim_{n\to\infty} |a_n|.$$

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Folge, denn für jede zweite approximierende Folge $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\big||a_n| - |a'_n|\big| \le |a_n - a'_n| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit sind die Begriffe „Konvergenz" und „Cauchy-Folge" auch für Folgen reeller Zahlen erklärt.

Die arithmetischen Grundoperationen können analog definiert werden durch

$$a + b := \lim_{n\to\infty} \{a_n + b_n\}, \quad a \cdot b := \lim_{n\to\infty} \{a_n \cdot b_n\},$$

da nach dem oben Gesagten auch Summen und Produkte von Cauchy-Folgen wieder Cauchy-Folgen sind. Die Grundregeln der arithmetischen Operationen (Kommunativität,

[5] Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966): Niederländischer Mathematiker; Prof. in Amsterdam; leistete fundamentale Beiträge zur Mengenlehren und Topologie; seine Kritik an der Verwendung gewisser logischer Axiome wie des „Tertium non datur" und des „allgemeinen Auswahlprinzips" führte zum „Intuitionismus" im Gegensatz zum Hilbertschen „Formalismus".

Assoziativität und Distributivität) übertragen sich so von $\mathbb{Q}$ auch auf $\mathbb{R}$. Mit den Ordnungsrelationen verfährt man analog durch die Definition

$$a > b \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \{a_n - b_n\} > 0,$$

wobei Letzteres bedeutet, dass es ein $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ gibt, so dass $a_n - b_n \geq \alpha$ ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist $a \geq b \quad :\Leftrightarrow \quad \{a > b$ oder $a = b\}$, $a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b > a$ und $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b \geq a$. Wir werden im Folgenden die Bezeichnung $\mathbb{R}_+ := \{a \in \mathbb{R} | \, a > 0\}$ verwenden. Man beachte, dass i. Allg. auch im Fall $a_n < b_n$, für alle Folgenelemente, im Limes nur $a \leq b$ erwartet werden kann. Mit Hilfe der Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ lassen sich auf natürliche Weise die Begriffe „Maximum“ und „Minimum“ von Mengen $M \subset \mathbb{R}$ reeller Zahlen definieren:

$$\max M := b \in M: \quad b \geq x, \;\; x \in M, \qquad \min M := a \in M: \quad x \geq a, \;\; x \in M.$$

Nicht jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum oder Minimum; z. B. die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 2\}$. In diesem Fall nennt man $b = 2$ eine „(kleinste) obere“ und $a = 0$ eine „(größte) untere Schranke“ der Menge M.

Satz 2.2 (Der vollständige Körper $\mathbb{R}$): *Die reellen Zahlen bilden mit der Addition und Multiplikation einen Körper, genannt $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ als Unterkörper enthält. Der (bewertete) Körper $\mathbb{R}$ ist „vollständig“, d. h.: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes. Der Unterkörper $\mathbb{Q}$ ist „dicht“ in $\mathbb{R}$, d. h.: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $q_\varepsilon \in \mathbb{Q}$, so dass*

$$|a - q_\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Beweis: i) Die neutralen Elemente für Addition und Multiplikation sind wieder die $0 := 0,0\ldots$ bzw. $1 := 1,0\ldots$. Nach den obigen Vorüberlegungen zu den arithmetischen Grundoperationen bleibt die Lösbarkeit der Gleichungen

$$a + x = y, \qquad bx = y \;\; (b \neq 0)$$

mit beliebigen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Die erste Gleichung hat die offensichtliche Lösung $x = y - a$, welche sich als Limes einer beliebigen, die Differenz $y - a$ approximierenden Cauchy-Folge rationaler Zahlen ergibt. Analog erhält man $x = y/b$ als Lösung der zweiten Gleichung.

ii) Jede Zahl $a \in \mathbb{Q}$ kann mit der Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen $a_n = a$ identifiziert werden. Damit ist $\mathbb{Q}$ als Teilmenge (bzw. Teilkörper) von $\mathbb{R}$ auffassbar.

iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Zu jeder gibt es nun eine approximierende Folge $(a_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen, d. h.:

$$a_n = \lim_{m\to\infty} a_{n,m}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir nun ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge rationaler Zahlen $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \ge n_\varepsilon$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \qquad |a_n - a_{n,k_n}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

und folglich

$$\begin{aligned} |a_{n,k_n} - a_{m,k_m}| &\le |a_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a_{m,k_m}| \\ &\le \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\mathbb{R}$ gehört zu dieser Cauchy-Folge ein „Limes“ a, so dass

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \ge n_\varepsilon : \;\; |a_{n,k_n} - a| < \varepsilon.$$

Für die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{n,k_n}| + |a_{n,k_n} - a| \le \frac{1}{n} + |a_{n,k_n} - a| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dies impliziert die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

iv) Die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ folgt direkt aus der Konstruktion, da zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ja eine Cauchy-Folge von Zahlen in $\mathbb{Q}$ existiert, die gegen a konvergiert. Q.E.D.

Bemerkung 2.9: Eine weitere Möglichkeit, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren verwendet die auf auf $\mathbb{R}$ definierte Ordnungsrelation „$\ge$“: *Jede nichtleere, beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere sowie größte untere Schranke in $\mathbb{R}$, welche „Supremum“ bzw. „Infimum“ von M genannt werden.*

Zur Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$ äquivalent ist das sog. „Intervallschachtelungsprinzip“:

Satz 2.3 (Intervallschachtelungseigenschaft): *Eine „Intervallschachtelung“ ist eine Folge von (abgeschlossenen) Intervallen $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} |\ a_n \le x \le b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, mit den beiden Eigenschaften*

i) $I_{n+1} \subset I_n, \quad n \in \mathbb{N}.$

ii) Zu jedem beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit der Länge $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, welches allen ihren Intervallen angehört. Diese Eigenschaft ist äquivalent zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Beweis: i) Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Wir zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der linken Endpunkte a_n der Intervalle I_n eine Cauchy-Folge ist. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - a_n| < \varepsilon$ gilt für $n \ge n_\varepsilon$. Sind nun $n, m \ge n_\varepsilon$, so liegen die Punkte a_n und a_m wegen der Schachtelung der Intervalle im Intervall I_{n_ε}, d. h.: Es ist $|a_n - a_m| \le |b_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und hat somit einen Limes $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$a_1 \le \cdots \le a_n \le b_n \cdots \le b_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt für diesen Limes $a_n \le c \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h.: Er ist in allen Intervallen I_n enthalten. Da die Länge der Intervalle eine Nullfolge ist, kann es nicht mehr als einen solchen Punkt geben.

ii) Sei nun eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Wir wollen dazu eine Intervallschachtelung konstruieren, deren gemeinsamer Punkt a dann Limes der Folge ist. Nach Definition gibt es eine aufsteigende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ mit

$$|a_n - a_m| \le 2^{-k}, \quad n, m \ge n_k.$$

Wir definieren die abgeschlossenen Intervalle

$$I_k := \{x \in \mathbb{R} |\ |x - a_{n_k}| \le 2^{1-k}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Diese sind geschachtelt, d.h. $I_{k+1} \subset I_k$, denn für $x \in I_{k+1}$ ist $|x - a_{n_{k+1}}| \le 2^{-k}$ und

$$|x - a_{n_k}| \le |x - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \le 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{1-k},$$

d. h.: $x \in I_k$. Die Intervallfolge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also eine Intervallschachtelung und besitzt nach dem Intervallschachtelungsprinzip einen gemeinsamen Punkt $c \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Für diesen gilt dann konstruktionsgemäß $|c - a_{n_k}| \le 2^{1-k} \to 0$ $(k \to \infty)$, d. h.: Er ist Limes der Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Cauchy-Folge. Damit ist er aber aufgrund der Cauchy-Folgeneigenschaft auch Limes der ganzen Folge. Q.E.D.

Eine weitere zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ äquivalente Eigenschaft ist die „Trennungseigenschaft“ (verwandt zum sog. „Axiom vom Dedekindschen Schnitt“).

Satz 2.4 (Trennungseigenschaft): *Zu zwei nichtleeren Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit*

$$a < b \quad \forall\, a \in A,\ b \in B,$$

gibt es stets ein $s \in \mathbb{R}$, welches A und B „trennt“, d. h.: Für jedes $a \in A$ und $b \in B$ ist $a \le s \le b$.

Beweis: i) Es sei die Vollständigkeitseigenschaft angenommen. Dann gilt nach Satz 2.3 auch die Intervallschachtelungseigenschaft. Seien nun $A, B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen mit $a < b$ für $a \in A,\ b \in B$. Wir greifen zwei beliebige Zahlen $a_1 \in A$ und $b_1 \in B$ heraus und betrachten das Intervall $I_1 := [a_1, b_1]$. Gilt für dessen Mittelpunkt $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \notin A \cup B$ und gibt es keine Zahlen $a'_1 \in A$ oder $b'_1 \in B$ mit $c_1 < a'_1 < b_1$ bzw. $a_1 < b'_1 < c_1$, so ist mit $s = c_1$ eine trennende Zahl gefunden. Andernfalls setzen wir mit diesen $a'_1 \in A$ oder $b'_1 \in B$:

$$I_2 = [a_2, b_2] := \begin{cases} [a_1, c_1] & \text{für } c_1 \in B, \\ [c_1, b_1] & \text{für } c_1 \in A, \\ [a_1, b'_1] & \text{für } a_1 < b'_1 < c_1, \\ [a'_1, b_1] & \text{für } c_1 < a'_1 < b_1. \end{cases}$$

In allen vier Fällen gilt dann offenbar $|b_2 - a_2| \le \frac{1}{2}|b_1 - a_1|$. Durch Fortsetzung dieses Konstruktionsprozesses erhalten wir entweder nach n Schritten eine trennende Zahl

$s = c_{n+1}$, oder es ergibt sich eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, mit den Eigenschaften $a_n \in A$, $b_n \in B$ und

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad |b_n - a_n| \le 2^{1-n}|b_1 - a_1|.$$

Die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet also eine Intervallschachtelung und besitzt einen gemeinsamen Punkt $s \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Wegen $a_n \le s \le b_n$ und $|a_n - b_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ kann es dann keine Punkte $a \in A$ oder $b \in B$ geben mit $s < a$ oder $b < s$. Es gilt also $a \le s \le b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$, d. h.: s ist die gesuchte trennende Zahl.

ii) Sei nun die Trennungseigenschaft angenommen, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da die Cauchy-Folge beschränkt ist, sind die folgenden Mengen nicht leer:

$$A := \{a \in \mathbb{R}|\ a < a_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}, \quad B := \{b \in \mathbb{R}|\ b > a_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Offenbar ist dann $a < b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Gemäß der Trennungseigenschaft gibt es also ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \le s \le b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ muss dann für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten $|a_n - s| < \varepsilon$, d. h.: s ist Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Q.E.D.

Für beweistechnische Zwecke ist es manchmal bequem, die eine oder die andere der zur „Vollständigkeit“ von $\mathbb{R}$ äquivalenten Eigenschaften zu verwenden. Als erste Anwendung zeigen wir die Existenz der k-ten Wurzel einer positiven reellen Zahl.

Lemma 2.5: *Zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ existiert für $k \in \mathbb{N}$ genau eine positive „k-te Wurzel“, d. h. eine Lösung $x > 0$ der Gleichung $x^k = a$, welche mit $\sqrt[k]{a}$ bezeichnet wird. Damit sind allgemeine rationale Potenzen a^q, $q = r/s \in \mathbb{Q}$, positiver reeller Zahlen definiert durch*

$$a^q = a^{r/s} := (\sqrt[s]{a})^r, \quad a \in \mathbb{R}_+.$$

Für diese gelten die Regeln

$$(\sqrt[s]{a})^r = (a^{1/s})^r = a^{r/s} = (a^r)^{1/s} = \sqrt[s]{a^r}. \tag{2.2.6}$$

Beweis: i) Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit der k-ten Wurzel (sofern sie existiert). Seien $x_1, x_2 > 0$ zwei k-te Wurzeln eines positiven $a \in \mathbb{R}$, d. h.: $x_1^k = a = x_2^k$. Dann gilt

$$0 = x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2)\big(x_1^{k-1} + x_1^{k-2}x_2 + \ldots + x_1 x_2^{k-2} + x_2^{k-1}\big),$$

woraus wegen der Positivität von x_1 und x_2 notwendig $x_1 = x_2$ folgt.

ii) Für $a = 1$ ist die Existenz der k-ten Wurzel $\sqrt[k]{1} = 1$ klar.

iii) Ist die Existenz für $0 < a < 1$ bereits bewiesen, so erhält man die Existenz für $a > 1$ durch den Übergang zu $a' := 1/a$:

$$\sqrt[k]{a} := \frac{1}{\sqrt[k]{a'}} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[k]{a})^k = \Big(\frac{1}{\sqrt[k]{a'}}\Big)^k = \frac{1}{a'} = a.$$

iv) Es bleibt also, die Existenz der k-ten Wurzel für $0 < a < 1$ zu beweisen. Dazu werden wir nach dem Induktionsprinzip eine Folge von geschachtelten Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \le x \le b_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

konstruieren mit folgenden Eigenschaften:

$$I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1, \qquad a_n^k \le a \le b_n^k, \qquad |b_n - a_n| \le (\tfrac{1}{2})^{n-1}|b_1 - a_1|.$$

Der Prozess ist ähnlich wie bei der obigen Konstruktion der Dezimalbrucheinschließung von $\sqrt{2}$. Wir beginnen mit dem Intervall $I_1 = [a_1, b_1] = [0,1]$ mit $a_1^k \le a \le b_1^k$. Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ ein Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert. Dann setzen wir mit dem Mittelpunkt $x_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ von I_n:

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, x_n], & \text{falls } x_n^k \ge a, \\ [x_n, b_n], & \text{falls } x_n^k < a. \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt dann, wie verlangt:

$$I_{n+1} \subset I_n, \qquad a_{n+1}^k \le a \le b_{n+1}^k, \qquad |b_{n+1} - a_{n+1}| \le \tfrac{1}{2}|b_n - a_n| \le (\tfrac{1}{2})^n |b_1 - a_1|.$$

Die Intervalle I_n bilden also eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Für den gemeinsamen Punkt $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ gilt dann $x^k \le a \le x^k$ bzw. $x^k = a$, d. h.: x ist die gesuchte k-te Wurzel.

v) Zum Nachweis der Rechenregel für die rationale Potenz notieren wir:

$$\big((\sqrt[s]{a})^r\big)^s = (\sqrt[s]{a})^{rs} = \big((\sqrt[s]{a})^s\big)^r = a^r = \big(\sqrt[s]{a^r}\big)^s.$$

Wegen der Eindeutigkeit der s-ten Wurzel folgt $(\sqrt[s]{a})^r = \sqrt[s]{a^r}$. Q.E.D.

Bemerkung 2.10: Für ein $a \in \mathbb{R}_+$ wird unter $\sqrt[k]{a}$ stets die *positive* k-te Wurzel verstanden. Falsch ist z. B. die Aussage $\sqrt{a^2} = a$, vielmehr ist $\sqrt{a^2} = |a|$. Die Gleichung $x^2 = a$ hat demgemäß die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

Korollar 2.1: *Für jedes* $q \in \mathbb{Q}_+$ *konvergiert*

$$n^q \to \infty, \quad n^{-q} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2.2.7}$$

Beweis: Sei $q = r/s$ mit $r, s \in \mathbb{N}$. Zunächst gilt wegen $n < n+1$ (Übungsaufgabe): $\sqrt[s]{n} < \sqrt[s]{n+1}$. Die Folge $(\sqrt[s]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also ansteigend. Wäre sie beschränkt, d. h. $\sqrt[s]{n} \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, würde gelten $n = (\sqrt[s]{n})^s \le K^s$, was nicht sein kann. Also gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass (da die Folge ansteigend ist) $\sqrt[s]{n} > \sqrt[s]{n_\varepsilon} \ge 1/\varepsilon,\ n \ge n_\varepsilon$. Dann gilt wegen $\sqrt[s]{n} > 1$ auch

$$n^q = (\sqrt[s]{n})^r \ge \sqrt[s]{n} > 1/\varepsilon, \quad n \ge n_\varepsilon,$$

d. h.: Es konvergiert $n^q \to \infty$. In Konsequenz konvergiert dann $n^{-q} \to 0$. Q.E.D.

Die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ war zunächst motiviert durch den Wunsch, zu positivem Zahlen die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ bilden zu können. Dies ist offensichtlich durch die obige Konstruktion erreicht. Wir haben gezeigt, dass sich dies auf Wurzeln $\sqrt[k]{a}$ beliebiger ganzzahliger Ordnung k ausdehen lässt. Allgemein heißt eine reelle Zahl „algebraisch“, wenn sie Lösung einer „algebraischen“ Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$ ist. Offenbar sind alle rationalen Zahlen $q = r/s$ automatisch *algebraisch* (Man setze dazu $n = 1$ und $a_0 := r,\ a_1 := -s$.). Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, werden „transzendent“ genannt. Wir werden später noch sehen, dass die meisten reellen Zahlen in der Tat transzendent sind, obwohl nur wenige solche transzendenter Zahlen eine praktische Rolle spielen. Die bekanntesten Beispiele sind die Kreiszahl $\pi = 3,14159\ldots$ und die Eulersche[6] Zahl $e = 2,71828\ldots$. Die Symbole e (bereits von Euler (1728) zur Bezeichnung der Basis des natürlichen Logarithmus verwendet) und auch π (wohl abgeleitet vom griechischem $\pi\varepsilon\varrho\iota\varphi\varepsilon\varrho\acute{\varepsilon}\iota\alpha$ für *Kreislinie*) haben sich seit Eulers Arbeiten allgemein eingebürgert; früher wurde auch das Symbol p in Anlehnung an lateinisch *peripheria* benutzt.

i) Die Kreiszahl π war ursprünglich definiert über das Verhältnis $\pi = U/D$ zwischen Umfang $U = 2\pi R$ und Durchmesser $D = 2R$ eines Kreises mit Radius R. Diese wenig handliche Definition wird heutzutage meist ersetzt durch die äquivalente Charakterisierung über die kleinste positive Nullstelle der Cosinus-Funktion. Die Irrationalität von π, d. h. die Inkommensurabilität von Kreisdurchmesser und Kreisbogen war bereits von Archimedes[7] vermutet worden. Bewiesen wurde dies erstmals von Lambert[8] (1761). Dieser vermutete sogar die Tranzendenz von π, die aber erst 1882 von Lindemann[9] gezeigt wurde. Damit wird auch das über zweitausend Jahre alte Problem der „Quadratur des Kreises“ entschieden, und zwar negativ: *Es ist unmöglich, zu einem Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal.*“ Unten sind die ersten 1001 Dezimalstellen von π angegeben (Bekannt sind heutzutage bis zu 10^9 Stellen, die man natürlich nicht mehr auf bedrucktem Papier angibt.).

ii) Auf die sog. „Eulersche Zahl“ e stößt man bei der Untersuchung von kontinuierlichen Wachstumsprozessen. Ein bereits von Jacob Bernoulli[10] formuliertes Problem der Zinsrechnung lautet wie folgt: *Wird ein Kapital $K = 1$ jährlich mit 100% verzinst, so beträgt es nach einem Jahr $b_1 = 2$. Addiert man die Zinsen bereits nach einem halben Jahr, beträgt es nach einem Jahr $b_2 = (1 + \frac{1}{2})^2$ und bei dritteljähriger Verzinsung $b_3 = (1 + \frac{1}{3})^3$. Teilt man allgemein das Jahr in n gleiche Teile und verzinst nach jedem n-tel Jahr wächst das Kapital nach einem Jahr auf $b_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$. Zur Beschreibung einer*

[6] Leonhard Euler (1707–1783), geb. in Basel: Universeller Mathematiker und Physiker; bedeutendster und produktivster Mathematiker seiner Zeit; wirkte in Berlin und St. Petersburg; Arbeiten zu allen mathemischen Gebieten seiner Zeit.

[7] Archimedes (287(?)–212 v. Chr.): Griechischer Mathematiker und Physiker; wirkte in Syrakus.

[8] Johann Heinrich Lambert (1728–1777): Autodidakt; Oberbaurat in Berlin.

[9] Ferdinand Lindemann (1852–1939): Deutscher Mathematiker, Prof.in Königsberg und München.

[10] Bernoulli: Schweizer Mathematiker Familie; Jakob Bernoulli (1655–1705) lehrte in Basel; verwendete bereits die vollständige Induktion; Entdecker der „Bernoulli-Zahlen“ und Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung; sein jüngerer Bruder Johann Bernoulli (1667–1748) wirkte zuletzt in Basel und galt nach dem Tode seines Bruders Jakob als führender Mathematiker seiner Zeit; er leistete Beiträge über Reihen und Differential; sein Sohn Daniel Bernoulli (1700–1782) setzte diese Arbeiten fort; er wirkte in St. Petersburg und Basel und leistete wichtige Beiträge zur Hydromechanik und Gasdynamik.

kontinuierlichen Verzinsung um 100% *muss der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *gebildet werden.* Dieser Lösungsansatz geht auf Daniel Bernoulli zurück. Wir werden später beweisen, dass dieser Grenzwert tatsächlich existiert; er wird nach Euler mit dem Symbol e bezeichnet. Die Zahl e ist also gerade der jährlichen Zuwachsfaktor eines Grundkapitals bei kontinuierlicher Verzinsung um 100%. Unten sind die ersten 1001 Dezimalstellen von e angegeben.

$$
\begin{aligned}
\pi \;=\; & 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078\\
& 164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822\\
& 317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288\\
& 109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543\\
& 266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917\\
& 153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657\\
& 595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248\\
& 912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798\\
& 609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608\\
& 277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922\\
& 796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072\\
& 113499999983729780499510597317328160963185950244594553469083026425223\\
& 082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171776691\\
& 473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712\\
& 2680661300192787661119590921642019893\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e \;=\; & 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240\\
& 766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435\\
& 729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738\\
& 341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423\\
& 454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265\\
& 602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368190255\\
& 151086574637721112523897844250569536967707854499699679468644549059879\\
& 316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825\\
& 288693984964651058209392398294887933203625094431173012381970684161403\\
& 970198376793206832823764648042953118023287825098194558153017567173613\\
& 320698112509961818815930416903515988885193458072738667385894228792284\\
& 998920868058257492796104841984443634632449684875602336248270419786232\\
& 090021609902353043699418491463140934317381436405462531520961836908887\\
& 070167683964243781405927145635490613031072085103837505101157477041718\\
& 9861068739696552126715468895703503540\ldots
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.11 (Axiomatik des Körpers $\mathbb{R}$): Häufig wird der Zahlkörper $\mathbb{R}$ nicht wie hier konstruktiv aus dem Körper $\mathbb{Q}$ gewonnen, sondern über einen Satz von „Axiomen“ beschrieben. Diese stellen wir im Folgenden zusammen.

a) Körperaxiome: Auf $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen $a+b$ („Addition“) und $a \cdot b$ („Multiplikation“) gegeben mit den Eigenschaften:

A1. Assoziativgesetz: $(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

A2. Kommutativgesetz: $a+b = b+a, \quad a \cdot b = b \cdot a$.

A3. Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

A4. Existenz „neutraler“ Elemente 0 für die Addition und 1 für die Multiplikation ($1 \neq 0$):

$$a+0 = a, \quad a \cdot 1 = a \ \ (a \in \mathbb{R}).$$

A5. Lösbarkeit der Gleichungen (Existenz der „inversen Elemente“)

$$a+x = 0 \ \ (a \in \mathbb{R}), \qquad bx = 1 \quad (b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

b) Anordnungsaxiome: In $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge $\mathbb{R}_+$ „positiver“ Elemente (in Symbolen $a > 0$) ausgezeichnet, so dass gilt:

A6. Trichotomie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Eigenschaften $a > 0$, $a = 0$ oder $-a > 0$.

A7. Abgeschlossenheit gegenüber Addition und Multiplikation:

$$a, b \in \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad a+b, \ a \cdot b \in \mathbb{R}_+ .$$

A8. Archimedisches Prinzip: Zu jeden $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

Die Axiome (A1) - (A8) sind bereits für den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erfüllt. Das Spezifische des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird durch das folgende, letzte Axiom ausgedrückt.

A9. Vollständigkeitsaxiom: Der Körper $\mathbb{R}$ ist vollständig, d. h.: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes. (Alternativ kann auch das Intervallschachtelungsprinzip oder die Trennungseigenschaft gefordert werden.)

Unsere systematische Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ über das Konzept der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen ergibt, dass für $\mathbb{R}$ alle diese Axiome konstruktionsgemäß erfüllt sind, d. h.: Wir haben eine „Realisierung“ für das System der Axiome (A1) - (A9) gefunden. Es lässt sich in der Tat zeigen, dass jeder andere Zahlkörper mit diesen Eigenschaften „isomorph“ zu $\mathbb{R}$ ist, d. h. sich bijektiv und verträglich mit den arithmetischen Operationen auf $\mathbb{R}$ abbilden lässt. Insbesondere enthält jeder solche Körper isomorphe Bilder der Zahlmengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, welche man wie hier konstruktiv ausgehend von dem neutralen Element 1 gewinnt.

Aus dem Archimedischen Prinzip und der folgenden „Bernoullischen Ungleichung“ ergeben sich einige für Beweiszwecke nützliche Aussagen.

Lemma 2.6 (Bernoullische Ungleichung): *Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \ge -1$ gilt mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die sog. „Bernoullische Ungleichung“:*

$$(1+a)^n \ge 1 + na. \tag{2.2.8}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Sei sie nun richtig für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt wegen $1 + a \ge 0$:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \ge (1+a)(1+na) = 1 + (n+1)a + na^2 \ge 1 + (n+1)a,$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Lemma 2.7: *a) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

b) Zu $b \in \mathbb{R},\ b > 1$, gibt es für jedes $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$b^n > K.$$

c) Zu $b \in \mathbb{R},\ 0 < b < 1$, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$b^n < \varepsilon.$$

Beweis: a) Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es zu $1/\varepsilon \in \mathbb{R}$ eine $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > 1/\varepsilon$. Hieraus folgt dann $1/n < \varepsilon$.
b) Sei $a = b - 1$, so dass $a > 0$. Aufgrund der Bernoullischen Ungleichung ist

$$b^n = (1+a)^n \ge 1 + na.$$

Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > K - 1$. Für dieses n gilt dann $b^n > K$.
c) Es ist $1/b > 1$. Nach (b) gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(1/b)^n > 1/\varepsilon$ bzw. $b^n < \varepsilon$. Q.E.D.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wurde über das Äquivalenzklassenprinzip quasi als Menge unendlichen Teilmengen von $\mathbb{Q}$ erzeugt. Daher verwundert es nicht, dass ihre Mächtigkeit größer als die von $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{N}$ ist.

Satz 2.5: *Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, während $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.*

Beweis: i) Zum Nachweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}$ genügt es, eine bijektive Abbildung $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ anzugeben. Wir wählen die Zuordnung

$$f(n) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}n & \text{für gerades } n \\ \frac{1}{2}(1-n) & \text{für ungerades } n \end{array} \right\},$$

welche offenbar injektiv und auch surjektiv ist.

ii) Jede rationale Zahl ist darstellbar als ein Bruch $a = r/s$ mit teilerfremden $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$. Die Paare $\{r, s\}$ können den Punkten eines ebenen Punktgitters zugeordnet werden, wobei sich die Punkte vom Zentralpunkt $0/1$ ausgehend nach unten zu wachsenden Nennern $0/s$, sowie nach links zu abfallenden negativen Zählern $-r/s$ und nach rechts zu ansteigenden positiven Zählern r/s hin entwickeln. Diese Punkte werden nun spiralförmig beginnend bei $0/1$ durchnumeriert. Dies ergibt eine bijektive Zuordnung $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$.

iii) Mit der Menge $\mathbb{R}$ wäre auch die Teilmenge $M := \{a \in \mathbb{R} |\ 0 < a < 1\}$ abzählbar. Es genügt also, die Überabzählbarkeit von letzterer zu zeigen. Dazu verwenden wir ein auf Cantor zurückgehendes Argument. Angenommen, es gäbe eine bijektive Zuordnung $f:\mathbb{N}\to M$. Die Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ würde dann alle Elemente von M durchlaufen. Wir stellen die Zahlen $f(n)$ in ihrer Dezimalbruchentwicklung dar:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, d_{11}d_{12}d_{13}\dots \\ f(2) &= 0, d_{21}d_{22}d_{23}\dots \\ f(3) &= 0, d_{31}d_{32}d_{33}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann kommt der mit den Ziffern

$$d_n := \left\{ \begin{array}{ll} 2 & \text{für } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{für } d_{nn} \neq 1 \end{array} \right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gebildete Dezimalbruch $x = 0, d_1d_2d_3\dots$ in der Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht vor, im Widerspruch zur Annahme der Abzählbarkeit von M. Q.E.D.

Bemerkung 2.12 (Für Physiker): Häufig wird die Menge der reellen Zahlen mit der Menge der Punkte auf der „reellen Zahlengeraden“ (dem sog. $\mathbb{R}^1$) identifiziert. Damit soll eine größere Anschaulichkeit, d. h. Nähe zu vertrauten Vorstellungen, erreicht werden, da die Konstruktion der reellen Zahlen über Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen oder ihre rein axiomatische Einführung etwas „unhandlich“ erscheint. Man muss sich aber vergegenwärtigen, dass diese Anschaulichkeit nur scheinbar besteht, da das intuitive Verständnis einer „dichten“ Punktmenge sehr zweifelhaft ist. Eine Punktmenge, welche die nur abzählbar vielen, aber dennoch überall dicht liegenden „rationalen“ Punkte enthält, und dennoch zwischen diesen Raum für die überabzählbar vielen „irrationalen“ Punkte lässt, überfordert doch wohl jede Anschauung. Es handelt sich bei der „reellen Zahlengeraden“ also keineswegs um ein Konstrukt, welches einfacher zu „verstehen“ ist als die Menge der

Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen. Trotzdem werden wir der Gewohnheit folgend häufig das Bild der reellen Zahlengeraden zur Veranschaulichung von Mengen reeller Zahlen wie z. B. „Intervalle“ und „Intervallschachtelungen“ verwenden.

Bemerkung 2.13 (Für Informatiker): Es stellt sich die Frage, wie viele reelle Zahlen auf dem Computer berechnet werden können. Da hierzu Programme (z. B. in FORTRAN geschrieben) verwendet werden und jedes dieser Programme nur endlich viele Symbole enthalten kann, ist die Menge der überhaupt verfügbaren Programme wie die Menge $\mathbb{Q}$ abzählbar. Mit jedem dieser Programme wiederum kann man wegen der Endlichkeit ihrer Datensätze höchsten abzählbar viele reelle Zahlen berechnen. Folglich können insgesamt nur abzählbar viele der überabzählbar vielen reellen Zahlen näherungsweise berechnet werden. Dies illustriert die „Mächtigkeit“ von $\mathbb{R}$.

Bemerkung 2.14 (Für Philosophen): Da die reellen Zahlen direkt aus den rationalen konstruiert worden sind, stellt sich die Frage, ob es zwischen der Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{N}$ und der von $\mathbb{R}$ noch eine andere Mächtigkeit gibt. Von Cantor stammt die „Kontinuumshypothese“, die besagt, dass es eine solche „Zwischenmächtigkeit“ nicht gibt. Zu den verwirrendsten Aussagen der mathematischen Grundlagenforschung gehört es, dass die Kontinuumshypothese im Rahmen des heute üblichen mengentheoretischen Axiomensystems weder beweisbar (Cohen[11] 1963) noch widerlegbar (Gödel[12] 1938) ist.

2.2.1 Das Rechnen mit reellen Zahlen

Wir stellen im Folgenden einige häufig verwendeten Rechenregeln für reelle Zahlen auf, die sich aus den Grundaxiomen über arithmetische Operationen ergeben und intuitiv klar sind. Auf die Angabe der meist auf rekursiver Anwendung dieser Grundregeln basierenden Beweise wird verzichtet.

Arithmetische Operationen

1. Assoziativgesetz: Für beliebige Klammerung gilt

$$a_1 + \ldots + a_n = (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots) + a_n\,.$$

2. Kommutativgesetz: Für jede Permutation $\{k_1, \ldots, k_n\}$ der Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$ gilt

$$a_1 + \ldots + a_n = a_{k_1} + \ldots + a_{k_n}, \qquad a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = a_{k_1} \cdot \ldots \cdot a_{k_n}\,.$$

[11]Paul Joseph Cohen (1934–2007): US-amerikanischer Mathematiker; Prof. an der Stanford University (USA); fundamentale Beiträge zur Mathematischen Logik. aber auch zur Theorie partieller Differentialgleichungen und zur Maßtheorie; erhielt 1966 die Fields-Medaille („Nobel-Preis“ der Mathematik).

[12]Kurt Gödel (1906–1978): Östreichischer Mathematiker; seit 1953 Prof. in Princeton; Arbeiten zur Mengenlehre und Zahlenthorie.

3. Doppelsummen: Für reelle Zahlen a_{jk} $(j = 1,\dots,m,\ k = 1,\dots,n)$, gilt

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} := \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\Big).$$

4. Summenprodukt: Für reelle Zahlen a_j, b_k $(j = 1,\dots,m,\ k = 1,...,n)$ gilt

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k\,.$$

Potenzausdrücke

Man definiert für $a \in \mathbb{R}$ zunächst rekursiv

$$a^0 = 1, \quad n \in \mathbb{N}:\ a^n = aa^{n-1},$$

wobei $0^0 := 1$ gesetzt ist. Weiter gilt dann:

$$\begin{aligned} q \in \mathbb{Q}_+ : &\quad 0^q := 0,\\ n \in \mathbb{N},\ a \neq 0 : &\quad a^{-n} := (1/a)^n,\\ n \in \mathbb{N},\ a > 0 : &\quad a^{1/n} := \sqrt[n]{a},\\ q = r/s \in \mathbb{Q},\ a > 0 : &\quad a^{r/s} := (a^r)^{1/s} = (a^{1/s})^r. \end{aligned}$$

Aus diesen Definitionen folgen die üblichen Rechenregeln für Potenzen:

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}_+,\ p, q \in \mathbb{Q} : &\quad a^{p+q} = a^p a^q,\\ a \in \mathbb{R}_+,\ p, q \in \mathbb{Q} : &\quad (a^p)^q = a^{pq},\\ a, b \in \mathbb{R}_+,\ q \in \mathbb{Q} : &\quad (ab)^q = a^q b^q. \end{aligned}$$

Allgemeine reelle Potenzen für $a \in \mathbb{R}_+$ werden durch den Grenzprozess

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} q_n \quad \Rightarrow \quad a^\alpha := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}.$$

definiert. Dieser bedarf jedoch noch einer Rechtfertigung, d. h. die Begründung der Konvergenz der Folge $(a^{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 2.15: Das Rechnen mit Exponentialausdrücken $a^q,\ q \in \mathbb{Q}$, ist uns seit Schultagen wohl vertraut und man mag sich fragen, warum dies im Rahmen dieses Analysiskurses nochmals mit großem formalen Aufwand eingeführt werden muss. Der Grund ist die Gefahr mathematischer Trugschlüsse als Folge der Verwendung ungenau, oder gar nicht definierter Begriffe. Welche Bedeutung hat z. B. der Ausdruck

$$a := (-1)^{2/6}\ ?$$

Bei unbedachter Anwendung der vertrauten Rechenregel

$$x^{r/s} = (\sqrt[s]{x})^r = \sqrt[s]{x^r}$$

erhält man

$$a = (\sqrt[6]{-1})^2 = \sqrt[6]{(-1)^2} = (-1)^{1/3}.$$

Dies ist aber Unsinn, denn der erste Ausdruck ist in $\mathbb{R}$ nicht definiert, der zweite ergibt nach der Regel der Wurzelbildung $+1$, und der dritte ist -1. Also ist eine präzise Fassung der „erlaubten“ Regeln angesagt!

Anordnungsrelationen

Für die Ordnungsrelation „$>$“ gelten die Regeln

$$\begin{aligned}
a > b \quad &\Rightarrow \quad -b > -a\,,\\
a > b \quad &\Rightarrow \quad a+c > b+c\,,\\
a > b,\ c > 0 \quad &\Rightarrow \quad ac > bc\,,\\
a \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad a^2 > 0\,,\\
a > 0 \quad &\Rightarrow \quad a^{-1} > 0\,,\\
a > b > 0 \quad &\Rightarrow \quad b^{-1} > a^{-1} > 0\,,
\end{aligned}$$

und sinngemäß ebenso für „$<$“ sowie für „$\geq$“ und „$\leq$“.

Weitere wichtige Beziehungen

Für Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, wird das „arithmetische Mittel“ definiert durch

$$AM(a_1, \dots, a_n) := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

und im Fall, dass alle $a_k \geq 0$ sind, das „geometrische Mittel“ durch

$$GM(a_1, \dots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Lemma 2.8: *Für $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, ist das geometrische Mittel stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel:*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}. \tag{2.2.9}$$

Beweis: Die Behauptung ist offensichtlich richtig, wenn eins der a_k verschwindet. Wir können also o.B.d.A. $a_k > 0$ annehmen. Der Beweis ist per vollständiger Induktion. Die Behauptung ist offenbar richtig für $n = 1$ und ergibt sich für $n = 2$ aus

$$\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2}{2} - \left(\sqrt{\frac{a_1}{2}} - \sqrt{\frac{a_2}{2}} \right)^2 \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Sei die Behauptung nun richtig für ein $n \geq 2$, und seien $a_1, \dots, a_{n+1}$ positive Zahlen mit dem geometrischen Mittel

$$\gamma := GM(a_1, \dots, a_{n+1}) = \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}} > 0.$$

Es gibt nun sicher Elemente a_k und a_l mit $a_k \leq \gamma$ und $a_l \geq \gamma$. O.b.d.A. können wir annehmen (möglicherweise nach Umordnung der Zahlen), dass $a_n \leq \gamma \leq a_{n+1}$ ist. Damit folgt

$$a_n + a_{n+1} = \frac{1}{\gamma}\big\{a_n a_{n+1} + \gamma^2 + (\gamma - a_n)(a_{n+1} - \gamma)\big\} \geq \frac{a_n a_{n+1}}{\gamma} + \gamma.$$

Die Behauptung ergibt sich nun unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung als richtig für $n+1$ wie folgt:

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_{n+1} &\geq a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n a_{n+1}}{\gamma} + \gamma \\ &\geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \frac{a_n a_{n+1}}{\gamma}} + \gamma \\ &= n\gamma^{-1/n}\gamma^{(n+1)/n} + \gamma = (n+1)\gamma. \end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Lemma 2.9 (Schwarzsche Ungleichung): *Für Zahlen $a_1 \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt die sog. „Schwarzsche[13] Ungleichung“*

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}\,. \tag{2.2.10}$$

Beweis: Wir setzen

$$a := \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}, \quad b := \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $a \neq 0$ und $b \neq 0$, da andernfalls die Behauptung trivialerweise richtig ist. Sei nun $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}\left\{\Big(\frac{a_1}{a} - \frac{b_1}{b}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{a_n}{a} - \frac{b_n}{b}\Big)^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{a^2} - 2\frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{ab} + \frac{b_1^2 + \ldots + b_n^2}{b^2}\right\} \\ &= 1 - \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{ab} = 1 - \frac{|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n|}{ab}. \end{aligned}$$

Dies ergibt die behauptete Ungleichung. Im Fall $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leq 0$ argumentieren wir analog mit geändertem Vorzeichen. Q.E.D.

[13] Hermann Schwarz (1843–1921): Deutscher Mathematiker; wirkte in Halle, Göttingen und Berlin; leistete grundlegende Arbeiten zur Funktionentheorie, Differentialgeometrie und Variationsrechnung.

2.2.2 Der Umgang mit reellen Zahlen auf dem Computer

Auf digitalen Rechenanlagen werden aus technischen Gründen Zahlen meist „binär“ im Dualsystem, d. h. unter Verwendung eines auf der Zahl $b = 2$ basierenden Zahlsystems dargestellt. Eine „normalisierte Gleitkommazahl“ zur Basis 2 ist dabei eine reelle Zahl a in der Form

$$a = \pm\, M \cdot b^{\pm E}$$

mit der „Mantisse“ $M = 0.m_1 \dots m_r$, und dem „Exponenten“ $E \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wobei $m_i \in \{0, \dots, b-1\}$. Für $a \neq 0$ ist diese Darstellung durch die Normierungsvorschrift $m_1 \neq 0$ eindeutig bestimmt. Für $a = 0$ setzt man $M = 0$ und E beliebig. Die Verwendung der Gleitkommadarstellung im numerischen Rechnen ist wesentlich, um Zahlen sehr unterschiedlicher Größe verarbeiten zu können: z. B. Ruhemasse Elektron $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{g}$, Lichtgeschwindigkeit $c = 2.998 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm/sec}$.

Zur Darstellung solcher normalisierter Gleitkommazahlen auf dem Rechner sind offensichtlich

$$r \text{ Ziffern } + \ 1 \text{ Vorzeichen für die Mantisse}$$
$$s \text{ Ziffern } + \ 1 \text{ Vorzeichen für den Exponenten}$$

erforderlich. Die Speicherung einer Zahl

$$a = \pm\,[m_1 2^{-1} + \dots + m_r 2^{-r}] \cdot 2^{\pm[e_{s-1}2^{s-1} + \dots + e_0]}$$

erfolgt dann in der Form $a : (\pm)\,[m_1 \dots m_r](\pm)[e_{s-1} \dots e_0]$. Die in der obigen Form auf einem Rechner dargestellten (rationalen) Zahlen werden „Maschinenzahlen“ genannt; sie bilden das sog. „numerische Gleitkommagitter“ $A = A(r, s)$. Da A endlich ist, gibt es eine größte/kleinste darstellbare Zahl:

$$a_{\max/\min} = \pm\,\{2^{-1} + \dots + 2^{-r}\} \cdot 2^{\{2^{s-1} + \dots + 1\}} = \pm\,(1 - 2^{-r}) \cdot 2^{2^s - 1}$$

sowie eine kleinste positive/größte negative darstellbare Zahl:

$$a_{\mathrm{posmin/negmax}} = \pm\, 2^{-1} \cdot 2^{-\{2^{s-1} + \dots + 1\}} = \pm\, 2^{-2^s}.$$

Beispiel 2.1: Beim sog. IEEE-Format (üblich im UNIX-Betriebssystem) werden zur Darstellung von doppelt genauen Zahlen („REAL*8“ in FORTRAN, „double“ in C) 64 Bits (= 8 Bytes) verwendet:

$$a = \pm M \cdot 2^{C-1022}.$$

Dabei stehen 1 Bit für das Vorzeichen, 52 Bits für die Mantisse $M = 2^{-1} + m_2 2^{-2} + \dots + m_{53} 2^{-53}$ (die erste Mantissenstelle ist aus Normierungsgründen stets 1) und 11 Bits für die sog. Charakteristik $C = c_0 2^0 + \dots + c_{10} 2^{10} \in [1, 2046]$ zur Verfügung, wobei m_i, $c_i \in \{0, 1\}$ Dualzahlen sind. Durch die vorzeichenfreie Darstellung des Exponenten in der Form $E = C - 1022$ wird der Zahlbereich um eine 2er-Potenz erweitert. Für REAL*8-Zahlen gilt somit:

$$\begin{array}{rclcll} a_{\max} & \sim & 2^{1024} & \sim & 1.8 \cdot 10^{308}, & a_{\min} \sim -2^{1024} \sim -1.8 \cdot 10^{308}, \\ a_{\mathrm{posmin}} & = & 2^{-1022} & \sim & 2.2 \cdot 10^{-308}, & a_{\mathrm{negmax}} = -2^{-1022} \sim -2.2 \cdot 10^{-308}. \end{array}$$

Die ausgenommenen Werte $C = 0$ und $C = 2047$ der Charakteristik werden zur Darstellung der Null $(m_2 = \ldots = m_{53} = 0,\ c_0 = \ldots = c_{10} = 0)$ sowie einer Sondergröße „NaN" (Not a Number) verwendet.

Die Ausgangsdaten $x \in \mathbb{R}$ einer numerischen Aufgabe und die Zwischenergebnisse einer Rechnung müssen durch Maschinenzahlen dargestellt werden. Für Zahlen im „zulässigen Bereich"

$$D := [a_{\min}, a_{\mathrm{negmax}}] \cup \{0\} \cup [a_{\mathrm{posmin}}, a_{\max}]$$

wird eine „Rundungsoperation" $\mathrm{rd} : D \to A$ verwendet, an die man die natürliche Forderung stellt

$$|x - \mathrm{rd}(x)| = \min_{a \in A} |x - a| \qquad \forall x \in D\,. \tag{2.2.11}$$

Dies ist beim IEEE-Format z. B. realisiert durch „natürliche" Rundung:

$$\mathrm{rd}(x) = \mathrm{sign}(x) \cdot \begin{cases} 0.m_1 \cdots m_{53} \cdot 2^E\,, & \text{für } m_{54} = 0 \\ (0.m_1 \cdots m_{53} + 2^{-53}) \cdot 2^E\,, & \text{für } m_{54} = 1\,. \end{cases}$$

Für Zahlen außerhalb des zulässigen Bereiches D (z.B. als Resultat einer Division durch Null) wird von einigen Maschinen Exponentenüberlauf („overflow" oder „underflow") registriert und die Verarbeitung abgebrochen, während im IEEE-Format in diesem Fall mit der unbestimmten Variable „NaN" weitergearbeitet wird.

Der mit der Rundung verbundene sog. „absolute" Fehler

$$|x - \mathrm{rd}(x)| \le \tfrac{1}{2}\, 2^{-r} 2^E \tag{2.2.12}$$

hängt jeweils noch vom Exponenten E von x ab. Dagegen ist der sog. „relative" Fehler

$$\left| \frac{x - \mathrm{rd}(x)}{x} \right| \le \tfrac{1}{2}\, \frac{2^{-r} 2^E}{|M| 2^E} \le \tfrac{1}{2}\, 2^{-r+1}$$

für $x \in D,\ x \neq 0$, beschränkt durch die sog. „Maschinengenauigkeit"

$$\mathrm{eps} := \tfrac{1}{2}\, 2^{-r+1}\,.$$

Bei Anwendung des IEEE-Formats ist der maximale relative Rundungsfehler

$$\mathrm{eps}_{\mathrm{REAL*8}} \le \tfrac{1}{2} 2^{-52} \sim 10^{-16}\,.$$

Die arithmetischen Grundoperationen $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ werden auf der Rechenanlage durch entsprechende „Maschinenoperationen" $\circledast \in \{\oplus, \ominus, \odot, \oslash\}$ ersetzt, welche Maschinenzahlen wieder in Maschinenzahlen überführen. Dies ist meist für $a, b \in A$ im Falle $a * b \in D$ gemäß

$$a \circledast b = \mathrm{rd}(a * b) = (a * b)(1 + \varepsilon)\,, \quad |\varepsilon| \le \mathrm{eps}\,,$$

realisiert. Dazu werden die Operationen maschinenintern (meist unter Verwendung einer erhöhten Stellenzahl für die Mantisse) ausgeführt, in normalisierte Form gebracht und dann gerundet. Im Fall $a * b \notin D$ erscheint meist eine Fehlermeldung. Bei dem Gebrauch von „IF-Abfragen“ in Programmen ist zu berücksichtigen, dass die Maschinenoperationen $\oplus$ und $\odot$ dem Assoziativgesetz und dem Distributivgesetz nur näherungsweise genügen; i. Allg. ist für $a, b, c \in A$:

$$(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c), \quad (a \oplus b) \odot c \neq (a \odot c) \oplus (b \odot c).$$

2.3 Der Körper $\mathbb{C}$

Auch in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \tag{2.3.13}$$

mit Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$ oder auch $p, q \in \mathbb{Z}$ nicht immer lösbar. Die formale Lösungsformel lautet (sog. „p/q-Formel)

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{2.3.14}$$

Dies ergibt reelle Lösungen genau dann, wenn das Argument der Quadratwurzel nicht negativ ist, d. h.:

$$p^2 - 4q \geq 0.$$

Im Fall $p^2 - 4q < 0$ ist die Quadratwurzel und damit die Lösungsformel nicht definiert. Um diese Problematik aufzulösen, betrachten wir die Menge der Paare $\{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, auf denen die Addition und Multiplikation wie folgt definiert sind:

$$\{x, y\} + \{x', y'\} := \{x + x', y + y'\}, \tag{2.3.15}$$

$$\{x, y\} \cdot \{x', y'\} := \{xx' - yy', xy' + yx'\}. \tag{2.3.16}$$

Satz 2.6 (Komplexer Zahlkörper): *Die Menge der Paare $z = \{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der obigen Addition und Multiplikation bildet den Körper $\mathbb{C}$ der „komplexen“ Zahlen mit den neutralen Elementen $\{0, 0\}$ und $\{1, 0\}$. In ihm hat die Gleichung $z^2 + \{1, 0\} = \{0, 0\}$ zwei Lösungen, welche mit $\pm i := \{0, \pm 1\}$ bezeichnet werden. Der Körper $\mathbb{R}$ ist mit der Abbildung*

$$x \in \mathbb{R}: \quad x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$$

isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$.

Beweis: i) Die Gültigkeit des Kommutativitäts-, Assoziativitäts- und Distributivitätsgesetzes für die Addition und Multiplikation verifiziert man durch einfaches Nachrechnen.

ii) Als Nächstes ist die Lösbarkeit der Gleichungen

$$a + z = 0 = \{0, 0\}, \quad a \cdot z = \{1, 0\} \ (a \neq \{0, 0\})$$

für beliebig gegebenes $a \in \mathbb{C}$ zu zeigen. Mit $a = \{a_1, a_2\}$ hat die erste Gleichung die Lösung $z = \{-a_1, -a_2\}$. Zur Lösung der zweiten Gleichung machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{a} := \left\{\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right\}.$$

Offenbar gilt dann

$$a \cdot \frac{1}{a} = \{1, 0\},$$

so dass $z := 1/a$ die zweite Gleichung löst.

iii) Die komplexe Zahl $i := \{0, 1\}$ hat die Eigenschaften

$$(\pm i)^2 + 1 = \{0, \pm 1\} \cdot \{0, \pm 1\} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

iv) Die Zuordnung

$$x \in \mathbb{R}: \quad x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$$

bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf eine Untermenge von $\mathbb{C}$ ab, welche bzgl. der (komplexen) Addition und Multiplikation wieder ein Körper ist. Q.E.D.

In moderner Notation werden komplexe Zahlen in der Form

$$z = \{x, y\} = x + iy$$

mit der sog. „imaginären Einheit" i, sowie reellem „Realteil" x und „Imaginärteil" y geschrieben und mit ihnen gemäß $z + z'$, zz' wie mit normalen Zahlen gerechnet. Die *reellen* Zahlen sind dabei durch $\operatorname{Im} z = 0$ charakterisiert. Für eine komplexe Zahl sind Real- und Imaginärteil eindeutig bestimmt; d. h.: Für zwei $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:

$$z = z' \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z', \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'. \tag{2.3.17}$$

Ordnet man jeder komplexen Zahl $z = x+iy$ einen Punkt der Ebene mit den Koordinaten (x, y) zu, erhält man die sog. „komplexe Zahlenebene". Diese geometrische Interpretation der komplexen Zahlen ist manchmal sehr hilfreich zur Gewinnung von Beweisideen.

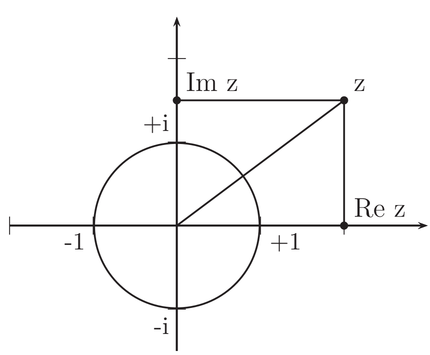

Abbildung 2.4: Die komplexe Zahlenebene (Das Symbol $\bullet$ markiert Punkte der Ebene (d. h. komplexe Zahlen), wogegen — bzw | *reelle* Achsenabschnitte sind).

Korollar 2.2: *Jede quadratische Gleichung*

$$z^2 + pz + q = 0 \tag{2.3.18}$$

mit Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$ *besitzt in* $\mathbb{C}$ *genau zwei Lösungen* $z_\pm$ *, welche gemäß der „p/q-Formel“ (2.3.14) gegeben sind durch:*

$$z_\pm = \begin{cases} -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}, & \text{für } p^2 - 4q \geq 0, \\ -\frac{1}{2}p \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}, & \text{für } p^2 - 4q < 0. \end{cases} \tag{2.3.19}$$

Beweis: Im Fall $p^2 - 4q \geq 0$ sind die durch die p/q-Formel gegebenen Zahlen reell und erfüllen nach Konstruktion die quadratische Gleichung (2.3.18). Im Fall $p^2 - 4q < 0$ ist

$$z_\pm = -\tfrac{1}{2}p \pm i\tfrac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$$

komplex und bei Beachtung von $i^2 = -1$ ergibt sich ebenfalls, daß (2.3.18) erfüllt ist. Die systematische Ableitung der Lösungsformel aus (2.3.18) impliziert, dass jede weitere Lösung dieselbe Gestalt haben muss . Q.E.D.

In $\mathbb{C}$ lassen sich auch Gleichungen höherer als zweiter Ordnung lösen. Als wichtiges Beispiel betrachten wir eine spezielle kubische Gleichung, welche später bei der Diskussion der trigonometrischen Funktionen noch eine Rolle spielen wird.

Korollar 2.3: *Die kubische Gleichung*

$$z^3 = 1 \tag{2.3.20}$$

besitzt in $\mathbb{C}$ *genau drei Lösungen* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *, welche „3-te Einheitswurzeln“ genannt werden, und gegeben sind durch:*

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \xi_3 = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{2.3.21}$$

Beweis: Die Zerlegung

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

zeigt, dass neben $\xi_1 = 1$ jede Lösung von $z^2 + z + 1 = 0$ ebenfalls 3-te Einheitswurzel ist. Weitere kann es dann wegen der Nullteilerfreiheit des Körpers $\mathbb{C}$ nicht geben. Die Lösungen von $z^2+z+1 = 0$ sind gemäß der p/q-Formel gerade $\xi_\pm = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Q.E.D.

Eine Verallgemeinerung des obigen Resultats ist der folgende fundamentale Satz der Algebra, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 2.7 (Fundamentalsatz der Algebra): *Jede algebraische Gleichung der Form*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ *hat in* $\mathbb{C}$ *mindestens eine Lösung.*

Bemerkung 2.16: Der Beweis dieses Satzes wird am einfachsten mit Hilfe von Resultaten aus der Theorie komplexer Funktionen geführt ($\to$ *Funktionentheorie*). Fast alle führenden Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts versuchten, diesen Satz zu beweisen. Die ersten vollständigen Beweise stammen von Laplace[14] (1795) und Gauß (1799). Ein besonders einfacher Beweis stammt von Argand[15] (1806). Die Bezeichnung i für die „imaginäre Einheit" geht auf Euler (1777) zurück. Erst Hamilton(1806). Heute kennt man mehr als ein Dutzend verschiedener Beweise. Alle benutzen nicht-algebraische Hilfsmittel, wobei die funktionentheoretischen Beweise am elegantesten sind.

Bemerkung 2.17: Rechnungen mit komplexen Zahlen finden sich schon vor 1800 bei Cardano[16] (1546), Euler, Argand[17] definiert komplexe Zahlen formal als geordnete Paare reeller Zahlen.

Für komplexe Zahlen $z = x + iy$ lässt sich ebenfalls ein „Absolutbetrag" definieren,

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zu einem $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $\overline{z} = x - iy$ die zu z „konjugiert komplexe" Zahl. Damit gilt:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z\overline{z}. \tag{2.3.22}$$

In der komplexen Zahlenebene entsteht $\overline{z}$ aus z durch Spiegelung an der reellen Achse. Aus der Definition ergeben sich für $x, y \in \mathbb{C}$ die folgenden Rechenregeln:

$$\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}, \quad \overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}, \tag{2.3.23}$$

sowie für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}. \tag{2.3.24}$$

Die Konvergenz von Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gegen ein $z \in \mathbb{C}$ wird erklärt durch:

$$z_n \to z \quad :\Leftrightarrow \quad |z_n - z| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Der Begriff der „Cauchy-Folge" ist dann erklärt analog wie für reelle Zahlen.

Satz 2.8 (Vollständigkeit): *Der komplexe Zahlenkörper $\mathbb{C}$ ist vollständig; d. h.: Jede Cauchy-Folge komplexer Zahlen hat in $\mathbb{C}$ einen Limes.*

---

[14] Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827): Französischer Mathematiker und Astronom; Prof. in Paris; begründete u.a. die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

[15] Jean-Robert Argand (1768–1822): Schweizer Amateurmathematiker; arbeitete als Buchhändler in Paris; Beiträge über komplexe Zahlen, den Fundamentalsatz der Algebra und Kombinationen.

[16] Geronimo Cardano (1501-1576): Italienischer Mathematiker, Arzt und Physiker.

[17] Sir William Hamilton (1805-1865): Irischer Mathematiker und Astronom; Prof. in Dublin; fundamentale Arbeiten u. a. zur Vektorrechnung und Theoretischen Mechanik.

Beweis: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind definitionsgemäß auch die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der zugehörigen Real- und Imaginärteile Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existieren also Limiten $x, y \in \mathbb{R}$, so dass

$$x_n \to x, \quad y_n \to y \quad (n \to \infty).$$

Dann konvergiert auch $z_n \to z := x + iy \; (n \to \infty)$. Q.E.D.

Bemerkung 2.18: Eine wesentliche Struktureigenschaft des Körpers $\mathbb{R}$ ist die Existenz einer Ordnungsrelation „>“ (d. h. seine Anordenbarkeit). Dies ist für den Körper $\mathbb{C}$ nicht möglich. Denn für jedes $z \in \mathbb{C},\, z \neq 0$, folgte notwendig $z^2 > 0$ und damit für $z = i$ der Widerspruch $0 < i^2 < i^2 + 1^2 = 0$.

Mit der Einführung des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist der übliche Aufbau der Zahlsysteme abgeschlossen. In diesem Rahmen lassen sich alle algebraischen Gleichungen vollständig lösen. Eine Erweiterung von $\mathbb{C}$ zum 4-dimensionalen System der Hamiltonschen „Quaternionen“ (hyperkomplexe Zahlen) erfordert die Aufgabe von Struktureigenschaften, in diesem Fall der Kommutativität der Multiplikation. Dies finden wir auch bei der Untersuchung von allgemeinen Matrizen in der Tensor-Algebra wieder (→ *Lineare Algebra*).

2.4 Übungen

Übung 2.1 (Aufgabe zu Potenzsummen):
a) Man begründe, dass die im Text zunächst nur für natürliche Zahlen $a \neq 1$ bewiesene geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

auch für allgemeine rationale Zahlen $a \in \mathbb{Q},\, a \neq 1$, gilt.

b) Man bestimme die Werte der Partialsummen

$$a) \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \qquad\qquad b) \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k},$$

und ihren jeweiligen Limes für $n \to \infty$.

Übung 2.2 (Aufgabe zur Ordnungsrelation):
a) Man verifiziere durch direkte Argumentation, dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq b$ und $n > 1$ die folgende Beziehung gilt:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

b) Man zeige für rationale Zahlen $a, b > 0$ und $q \in \mathbb{N}$ die folgenden Beziehungen:

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a^q < b^q, \qquad a \le b \quad \Rightarrow \quad a^q \le b^q.$$

(Hinweis: Man nutze die Beziehung (a).)

Übung 2.3 (Aufgabe zur „Quantoren-Sprache"):
a) Man formuliere mit Hilfe der Sprache der Quantoren $(\forall, \exists)$, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen eine Cauchy-Folge ist.

b) Man formuliere in derselben Sprache, dass die Folge den Limes $a \in \mathbb{Q}$ hat.

c) Man formuliere in derselben Sprache die Negationen dieser Aussagen.

Übung 2.4 (Aufgabe über Potenzfolgen):
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Zahlen $a_n \in \mathbb{Q}_+$ mit Limes $a \ge 0$. Man zeige:

a) Für beliebiges $r \in \mathbb{Z}$ ist auch die Folge $(a_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n^r = a^r.$$

b) Die Folge $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (i. Allg. reeller Zahlen) ist ebenfalls Cauchy-Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}\,.$$

Übung 2.5 (Aufgabe über Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$):
i) Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$$

und weiter die strikte Divergenz der Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$. (Hinweis: Binomische Formel)

ii) Man zeige, dass die Folge mit den Elementen

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Cauchy-Folge ist, und bestimme ihren Limes in $\mathbb{R}$.

iii) Man untersuche das Verhalten der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen

$$a_n := \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)$$

und bestimme im Falle ihrer Konvergenz den Limes.

Übung 2.6 (Aufgabe über die Arthmetik von Zahlenfolgen):
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten a, b, c und d. Man zeige, dass dann für beliebige Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ im Falle $\gamma c + \delta d \ne 0$ auch $\gamma c_n + \delta d_n \ne 0$ ist, für fast alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$\frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\gamma c_n + \delta d_n} \to \frac{\alpha a + \beta b}{\gamma c + \delta d} \quad (n \to \infty).$$

Übung 2.7 (Aufgabe über „exotische“ Zahlenfolgen):
i) Man untersuche, ob die folgenden Folgen konvergent sind und bestimme gegebenenfalls ihren Limes:

$$a)\quad a_n = \frac{2n^2 - n}{2n^2 + 1}, \qquad\qquad b)\quad b_n = \sqrt[n]{10}.$$

(Hinweis: Zu (b) mache man den Ansatz $b_n = 1 + h_n$ und beachte die Bernoullische Ungleichung $(1+a)^n \geq 1 + na$.)

ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die sog. „Fakultät“ rekursiv definiert durch $0! := 1$ und $n! := n\cdot(n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen

$$a_n = \frac{n^{10}}{n!}, \qquad b_n = \frac{10^n}{n!}$$

gegen Null konvergieren.

Übung 2.8 (Aufgabe zu reellen Ungleichungen):
a) Man zeige für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ den folgenden Spezialfall

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$$

der sog. „Youngschen[18] Ungleichung“ mit beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. (Hinweis: Binomische Formel)
b) Man zeige, dass für reelle Zahlen die folgende Implikationen richtig sind:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = y = 0, \\ x^3 + y^3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x + y = 0. \end{aligned}$$

Übung 2.9 (Aufgabe zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$):
a) Was bedeutet die Eigenschaft „vollständig“ des (mit dem Absolutbetrag $|\cdot|$) bewerteten Körpers $\mathbb{R}$?

b) Man rekapituliere mit eigenen Worten die Argumentation, dass diese Vollständigkeitseigenschaft äquivalent ist zur folgenden „Trennungseigenschaft“:
Zu zwei nichtleeren Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit

$$a < b \quad \forall\, a \in A,\, b \in B,$$

gibt es stets ein $s \in \mathbb{R}$, welches A und B „trennt“, d. h.: Für jedes $a \in A$ und $b \in B$ ist $a \leq s \leq b$. (Hinweis: Es darf verwendet werden, dass die „Vollständigkeitseigenschaft“ die „Intervallschachtelungseigenschaft“ impliziert.)

[18] William Henry Young (1863–1942): Englischer Mathematiker; Prof. an mehreren Universitäten: Calcutta University, University of Liverpool, University College von Wales in Aberystwyth; lebte am Schluss in Lausanne; Arbeiten zur Theorie reeller Funktionen und Fourierreihen.

Übung 2.10 (Aufgabe zum Umgang mit Potenzen):
a) Für $k \in \mathbb{N}$ zeige man die eindeutige Existenz der k-ten Wurzel von Zahlen in $\mathbb{R}_+$ mit Hilfe der Konstruktion eines approximierenden (unendlichen) Dezimalbruchs in Anlehnung an die entsprechende Konstruktion für $\sqrt{2}$ im Text.

b) Man zeige, dass für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_+$, $r, s \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ unter Verwendung der Notation $a^{-s} := (1/a)^s$ und $a^{1/s} := \sqrt[s]{a}$ die folgenden Rechenregeln für Potenzen gelten:

$$a^{r/s} := (a^{1/s})^r = (a^r)^{1/s}, \quad a^{p+q} = a^p \cdot a^q, \quad (a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q.$$

Übung 2.11 (Aufgabe zum Körper $\mathbb{C}$):
Man zeige durch Nachprüfen des Erfülltseins der entsprechenden Axiome, dass die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Paare $a = \{a_1, a_2\}$ reeller Zahlen mit der durch

$$\begin{aligned} a + b = \{a_1, a_2\} + \{b_1, b_2\} &:= \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}, \\ a \cdot b = \{a_1, a_2\} \cdot \{b_1, b_2\} &:= \{a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1\} \end{aligned}$$

definierten Addition und Multiplikation ein Körper ist; dieser wird als der Körper $\mathbb{C}$ der „komplexen“ Zahlen bezeichnet.

Übung 2.12 (Aufgabe zur Arithmetik in $\mathbb{C}$):
Man verifiziere, dass für komplexe Zahlen, gegeben als Paare $\{x, y\}$ reeller Zahlen mit der in der vorausgehenden Aufgabe definierten Arithmetik, die Schreibweise $z = x + iy$ mit der üblichen Arithmetik reeller Zahlen unter Verwendung von $i^2 := -1$ verträglich ist. Ferner zeige man, dass für zwei Zahlen $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ folgendes gilt:

$$\begin{array}{llll} a) & z = z' & \Rightarrow & x = x' \text{ und } y = y'; \\ b) & z \cdot z' = 0 & \Rightarrow & z = 0 \text{ oder } z' = 0. \end{array}$$

Übung 2.13 (Aufgabe zur Abzählbarkeit):
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Man zeige, dass dies auch für die Menge der „algebraischen“ reellen Zahlen, d. h. der Menge der Lösungen aller algebraischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, gilt. Dies zeigt, dass die Menge der „tranzendenten“ reellen Zahlen wir die des ganzen reellen Zahlkörpers $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. (Hinweis: Jedes nicht-triviale Polynom hat nur endlich viele Nullstellen.)