8 Aus der Theorie der Randwertaufgaben

8.1 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

8.1.1 Allgemeine Randwertaufgaben

Die in Kapitel 1 betrachteten Anfangswertaufgaben können als Spezialfall der allgemeinen „Randwertaufgabe“ (abgekürzt: „RWA“)

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I = [a, b], \qquad r(u(a), u(b)) = 0, \tag{8.1.1}$$

aufgefaßt werden. Dabei sind $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $r : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gegebene, i. Allg. vektorwertige Funktionen, welche im Folgenden stets als mindestens zweimal stetig differenzierbar bzgl. aller ihrer Argumente vorausgesetzt sind, und gesucht ist eine stetig differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$. In der Literatur findet sich für (8.1.1) auch die Bezeichnung „Zweipunkt-Randwertaufgabe“ zur Abgrenzung von allgemeineren Problemen mit mehrpunktigen Nebenbedingungen der Form $r(u(t_1), \dots, u(t_k)) = 0$. Im Gegensatz zu den AWA existiert für RWAn keine allgemeine Existenztheorie; nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen lässt sich für nichtlineare Probleme die Existenz von Lösungen a priori garantieren. Da diese Voraussetzungen bei den in der Praxis auftretenden Problemen meist nicht erfüllt sind, wird hier auf die Darstellung solcher Resultate verzichtet. Für das Folgende begnügen wir uns mit der Annahme, dass die Aufgabe (8.1.1) eine Lösung $u(t)$ besitzt, welche wenigstens *lokal* eindeutig (bzw. *isoliert*) ist, d. h.: Es existiert keine zweite Lösung $\tilde{u} \neq u$, welche u im Intervall I beliebig nahe kommt. Bezeichnen

$$f'_x(t, x) = (\partial_j f_i(t, x))_{i,j=1}^d,$$

$$r'_x(x, y) = (\partial_j r_i(x, y))_{i,j=1}^d, \qquad r'_y(x, y) = (\partial_j r_i(x, y))_{i,j=1}^d$$

wieder die Jacobi-Matrizen der Vektorfunktionen $f(t, \cdot)$ und $r(\cdot, \cdot)$, so haben wir für die lokale Eindeutigkeit einer Lösung u von (8.1.1) die folgende Charakterisierung:

Satz 8.1 (Lokale Eindeutigkeit): *Eine Lösung $u(t)$ von Problem (8.1.1) ist genau dann lokal eindeutig, wenn die lineare, homogene RWA*

$$\begin{aligned} v'(t) - f'_x(t, u(t))\, v(t) &= 0, \quad t \in I \\ r'_x(u(a), u(b))\, v(a) + r'_y(u(a), u(b))\, v(b) &= 0 \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

nur die triviale Lösung $v \equiv 0$ besitzt.

Zum Beweis von Satz 8.1 müssen wir uns zunächst mit der Lösbarkeit der linearen Aufgabe (8.1.2) beschäftigen; dafür existiert glücklicherweise eine vollständige Theorie. Wir betrachten die allgemeine inhomogene, lineare RWA

$$\begin{aligned} u'(t) - A(t)u(t) &= f(t), \quad t \in I, \\ B_a u(a) + B_b u(b) &= g \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

mit Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{d\times d}$, einer stetigen Matrix-Funktion $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ sowie einer stetigen Vektor-Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ und einem Vektor $g \in \mathbb{R}^d$. Der RWA (8.1.1) werden die $d+1$ AWA

$$\begin{aligned} y_0'(t) - A(t)y_0(t) = f(t)\,, \quad t \geq a\,, \quad y_0(a) = 0\,, \\ y_i'(t) - A(t)y_i(t) = 0\,, \quad t \geq a\,, \quad y_i(a) = e_i\,, \quad i = 1, \dots, d\,, \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

zugeordnet mit den kartesischen Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{R}^d$. Mit den eindeutigen Lösungen y_0 und $y_1, \dots, y_d$ von (8.1.4) wird dann die sog. „Fundamentalmatrix“

$$Y(t) := \begin{bmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{d1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1d}(t) & \dots & y_{dd}(t) \end{bmatrix}$$

des Systems (8.1.3) gebildet und der Lösungsansatz

$$u(t;s) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{d} s_i y_i(t) = y_0(t) + Y(t)s$$

gemacht. Offensichtlich genügt dieser Ansatz der Differentialgleichung

$$u'(t;s) - A(t)u(t;s) = f(t)\,, \quad t \geq a\,.$$

Es bleibt also, den Vektor $s \in \mathbb{R}^d$ so zu bestimmen, dass gilt:

$$B_a u(a;s) + B_b u(b;s) = g\,. \tag{8.1.5}$$

dass dies nicht immer möglich ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 8.1: Die Differentialgleichung

$$u''(t) + u(t) = 0, \ \ t \in [0,\pi] \quad \Leftrightarrow \quad u_1'(t) - u_2(t) = 0, \ \ u_2'(t) + u_1(t) = 0,$$

hat die allgemeine Lösung: $u(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$. Für verschiedene Randbedingungen ergibt sich ein qualitativ unterschiedliches Lösbarkeitsverhalten.

i) $u(0) = u(\pi),\ u'(0) = u'(\pi):$ $\quad u(t) = 0$ (eindeutig bestimmt),

ii) $u(0) = u(\pi) = 0:$ $\quad u(t) = c_1 \sin t$ (unendlich viele Lösungen),

iii) $u(0) = 0,\ u(\pi) = 1:$ keine Lösung.

Die Randbedingung (8.1.5) kann durch Einsetzen des Ansatzes für $u(t)$ umgeschrieben werden in ein lineares Gleichungssystem für s:

$$B_a \underbrace{y_0(a)}_{=0} + B_a \underbrace{Y(a)}_{=I} s + B_b y_0(b) + B_b Y(b) s = g\,,$$

d. h.

$$[B_a + B_b Y(b)]s = g - B_b y_0(b)\,. \tag{8.1.6}$$

Damit erhalten wir das folgende Resultat:

Satz 8.2 (Existenzsatz für lineare RWA): *Die lineare RWA (8.1.3) besitzt für beliebige Daten* $f(t)$ *und* g *genau dann eine eindeutige Lösung* $u(t)$ *, wenn die Matrix*

$$B_a + B_b Y(b) \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

regulär ist.

Beweis: Ist die Matrix $B_a + B_b Y(b)$ regulär, so ist das System (8.1.6) eindeutig lösbar, und die zugehörige Funktion $u(t;s)$ löst dann nach unserer Konstruktion die RWA (8.1.3). Umgekehrt lässt sich aber jede Lösung $u(t)$ von (8.1.3) in der Form

$$u(t) = y_0(t) + Y(t)s$$

mit einem $s \in \mathbb{R}^d$ darstellen, da die Lösungsmannigfaltigkeit von (8.1.3) die Dimension d hat. d. h.: Die Regularität von $B_a + B_b Y(b)$ ist notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit möglicher Lösungen von (8.1.3). Q.E.D.

Bemerkung 8.1: Die eigentliche Bedeutung von Satz 8.2 liegt darin, dass er eine starke Analogie zwischen *linearen* RWA und *linearen* (quadratischen) Gleichungssystemen aufzeigt. Bei beiden Problemtypen genügt es zum Nachweis der Existenz von Lösungen zu zeigen, dass eventuell existierende Lösungen notwendig eindeutig sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Beweis von Satz 8.1 führen.

Beweis von Satz 8.1:
Die Funktion $f(t,x)$ ist gleichmäßig L-stetig auf einer Umgebung U_R des Graphen von $u(t)$. Daher gibt es ein $\rho > 0$, so dass für jede Lösung $v(t)$ der AWA

$$v'(t) = f(t, v(t)), \quad t \in I, \quad v(t_0) = v_0\,,$$

mit $t_0 \in I,\ \|v_0 - u(t_0)\| \le \rho$, notwendig gilt (Folgerung aus dem Stabilitätssatz 1.4):

$$\max_{t\in I} \|u(t) - v(t)\| \le R\,.$$

d. h.: Jede zweite Lösung $v(t)$ der RWA, deren Graph dem von $u(t)$ um weniger als ρ nahekommt, verläuft ganz in U_R . Sei nun $v(t)$ eine zweite Lösung der RWA mit $\mathrm{Graph}(v) \subset U_R$. Dann gilt für $w := u - v$:

$$\begin{aligned} w'(t) = f(t,u) - f(t,v) &= \int_0^1 f_x'(t, v + s(u{-}v)w\,ds \\ &= f_x'(t,u)w + \underbrace{\Big(\int_0^1 \big\{ f_x'(t, v + sw) - f_x'(t,u)\big\}\,ds\Big)}_{=:\,\alpha(t)} w, \end{aligned}$$

und analog

$$
\begin{aligned}
0 &= r(u(a),u(b)) - r(v(a),v(b)) \\
&= r(u(a),u(b)) - r(v(a),u(b)) + r(v(a),u(b)) - r(v(a),v(b)) \\
&= \int_0^1 r'_x\big(v(a)+sw(a),u(b)\big)w(a)\,ds + \int_0^1 r'_y\big(v(a),v(b)+sw(b)\big)w(b)\,ds \\
&= r'_x(u(a),u(b))\,w(a) + r'_y(u(a),u(b))w(b) \\
&\quad + \underbrace{\Big(\int_0^1 r'_x\big(v(a)+sw(a),u(b)\big) - r'_x(u(a),u(b))\,ds\Big)}_{=:\,\beta_a} w(a) \\
&\quad + \underbrace{\Big(\int_0^1 \big(r'_y(v(a),v(b)+sw(b)\big) - r'_y(u(a),u(b))\,ds\Big)}_{=:\,\beta_b} w(b).
\end{aligned}
$$

Die Funktion w löst also die homogene lineare RWA

$$
\begin{aligned}
w' - [f'_x(t,u) + \alpha(t)]\,w = 0\,, \quad t \in I, \\
[r'_x(u(a),u(b)) + \beta_a]\,w(a) + \big[r'_y(u(a),u(b)) + \beta_b\big]\,w(b) = 0.
\end{aligned}
\tag{8.1.7}
$$

Wegen der angenommenen L-Stetigkeit von $f'_x(t,\cdot), r'_x(\cdot,y)$ und $r'_y(x,\cdot)$ kann man die Matrizen $\alpha(t), \beta_a$ und β_b normmäßig beliebig klein machen durch hineichend kleine Wahl von R:

$$
\begin{aligned}
\|\alpha(t)\| &= \Big\| \int_0^1 \big\{f'_x(t,v+sw) - f'_x(t,u)\big\}\,ds \Big\| \\
&\le L_{f'_x} \int_0^1 \|v + sw - u\|\,ds \le L_{f'_x} \max_{t\in I} \|w\| \le L_{f'_x} R,
\end{aligned}
$$

und analog

$$
\begin{aligned}
\|\beta_a\| &= \Big\| \int_0^1 r'_x\big(v(a)+sw(a),u(b)\big) - r'_x(u(a),u(b))\,ds \Big\| \\
&\le L_{r'_x} \int_0^1 \|v(a)+sw(a) - u(a)\|\,ds \le L_{r'_x}\|w(a)\| \le L_{r'_x} R,
\end{aligned}
$$

sowie $\|\beta_b\| \le L_{r'_y} R$. Im Hinblick auf den Stabilitätssatz 1.4 für AWAn kann damit auch die Abweichung der Matrix $\tilde B_a + \tilde B_b \tilde Y(b)$ von der zum System (8.1.2) gehörenden Matrix $B_a + B_b Y(b)$ klein gemacht werden. Da dieses System nur die triviale Lösung haben soll, ist nach Satz 8.2 notwendig $B_a + B_b Y(b)$ regulär. Für hinreichend kleines R ist dann auch $\tilde B_a + \tilde B_b \tilde Y(b)$ regulär und folglich wieder nach Satz 8.1 $w \equiv 0$ die einzige Lösung von (8.1.7).

Der Beweis der Umkehrung dieser Aussage kann hier nicht gebracht werden (siehe die angegebene Literatur zur Theorie von RWA).

Bemerkung 8.2: Hinsichtlich der Regularität von Lösungen von RWA gilr dasselbe wie bei AWA, denn allgemein ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$u'(u) = f(t, u(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R}^1,$$

mit r-mal stetig differenzierbarem $f(\cdot,\cdot)$ wegen des Fundamentalsatzes der Analysis automatisch in $C^{r+1}(I)$.

8.1.2 Sturm-Liouville-Probleme

Wir wollen nun Satz 8.2 anwenden auf die für die Praxis wichtige Klasse der sog. „(regulären) Sturm[1]-Liouville[2]-Probleme“:

$$\begin{aligned} &-[p\,u']'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t)\,, \quad t \in I = [a,b]\,, \\ &\alpha_1 u'(a) + \alpha_0 u(a) = g_a\,, \quad \beta_1 u'(b) + \beta_0 u(b) = g_b\,. \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

Dabei seien $p \in C^1(I)$, $q,r,f \in C(I)$ und $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1,g_a,g_b \in \mathbb{R}$. Die Bezeichnung „regulär“ bezieht sich auf die Tatsache, dass die Koeffizienten p,q,r nicht singulär und das Intervall I als beschränkt vorausgesetzt sind.

Die RWA (8.1.8) ist von zweiter Ordnung und muss zunächst in ein System erster Ordnung umgeschrieben werden. Wir setzen dazu $u_1 := u$ und $u_2 := u'$ und erhalten:

$$\begin{aligned} &u_1' = u_2, \quad -[pu_2]' + qu_2 + ru_1 = f,\,, \quad t \in I\,, \\ &\alpha_1 u_2(a) + \alpha_0 u_1(a) = g_a\,, \quad \beta_1 u_2(b) + \beta_0 u_1(b) = g_b\,. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $p(t) \ge \rho > 0$ ist dies äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r/p & (q-p')/p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f/p \end{bmatrix}, \quad t \in [a,b]\,, \\ &\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(a) \\ u_2(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(b) \\ u_2(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.1.9}$$

in der Standardform (8.1.3). Für diese RWA lassen sich sehr allgemeine Existenzsätze beweisen. Wir beschränken uns hier auf den Spezialfall sog. „Dirichlet[3]-Randbedingungen“

$$u(a) = g_a\,, \quad u(b) = g_b\,. \tag{8.1.10}$$

[1]Jacques Charles Franois Sturm (1803–1855): Französisch-Schweizer Mathematiker; Professor an der École Polytechnique in Paris seit 1840; Beiträge zur Mathematischen Physik, Differentialgleichungen, („Sturm-Liouville-Problem“) und Differentialgeometrie.

[2]Joseph Liouville (1809–1882): Französischer Mathematiker; Prof. an der École Polytechnique und später am Collége de France in Paris; Beiträge zur Zahlentheore, Funktionentheorie, Differentialgeometrie und Topologie, aber auch zur Mathematischen Physik.

[3]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859): Französisch-Deutscher Mathematiker; geb. in Düren (damals bei Frankreich); wirkte in Berlin und als Prof. in Göttingen (Nachfolger von Gauß); wichtige Beiträge zur Zahlentheorie, Analysis und Differentialgleichungen („Dirichletsches Prinzip“).

Satz 8.3 (Sturm-Liouville-Probleme): *Es sei* $p(t) \geq \rho > 0$. *Dann besitzt das Sturm-Liouville-Problem (8.1.8) mit Dirichletschen Randbedingungen (8.1.10) unter der Bedingung*

$$\rho + (b-a)^2 \min_{t\in I}\{r(t) - \tfrac{1}{2}q'(t)\} > 0 \tag{8.1.11}$$

eine eindeutige Lösung $u(t) \in C^2(I)$.

Beweis: Wegen der Äquivalenz des Sturm-Liouville-Problems (8.1.8) mit der RWA (8.1.9) genügt es, im Hinblick auf Satz (8.2) zu zeigen, dass das homogene Problem (8.1.8) mit $f(t) = 0,\ g_a = g_b = 0$ nur die triviale Lösung $u(t) = 0$ besitzt. Sei also $u(t)$ Lösung von

$$-[pu']' + qu' + ru = 0\,, \quad t \in I\,, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Multiplikation mit u und Integration über I ergibt

$$-\int_I [pu']'u\,dt + \tfrac{1}{2}\int_I q(u^2)'\,dt + \int_I ru^2\,dt = 0\,.$$

Durch partielle Integration folgt also bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\int_I p(u')^2\,dt - \underbrace{pu'u}_{=0}\Big|_a^b + \int_I \{r - \tfrac{1}{2}q'\}u^2\,dt + \underbrace{\tfrac{1}{2}qu^2}_{=0}\Big|_a^b = 0\,.$$

Also ist

$$\rho\int_I (u')^2\,dt + \min_{t\in I}\{r - \tfrac{q'}{2}\}\int_I u^2\,dt \leq 0\,.$$

Aus der Identität

$$u(t) = \underbrace{u(a)}_{=0} + \int_a^t u'(s)\,ds$$

erschließt man die sog. „Poincarésche[4] Ungleichung“

$$\int_I u^2\,dt \leq \int_I \Big(\int_a^t u'\,ds\Big)^2\,dt \leq (b-a)^2\int_I |u'|^2\,dt\,.$$

Damit erhalten wir

$$(b-a)^{-2}\rho\int_I u^2\,dt + \min_{a\leq t\leq b}\{r - \tfrac{1}{2}q'\}\int_I u^2\,dt \leq 0\,.$$

Unter der Voraussetzung (8.1.11) folgt

$$\int_I u^2\,dt \leq 0$$

bzw. $u \equiv 0$. Q.E.D.

[4] Jules Henri Poincaré (1854-1912): französischer Mathematiker; Prof. an der École Polytechnique und der Sorbonne in Paris; eins der letzten mathematischen Universalgenies; fundamentale Beiträge zu allen Bereichen der Mathematik, zur Himmelsmechanik, Strömungsmechanik und Wissenschaftsphilosophie.

8.2 Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1: Die lineare Differentialgleichung $u''(t) + u(t) = 1$ zweiter Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$u(t) = A\sin(t) + B\cos(t) + 1.$$

a) Man verifiziere, dass zu den Randbedingungen $u(0) = u(\pi/2) = 0$ genau eine, zu $u(0) = u(\pi) = 0$ keine und zu $u(0) = 1$, $u(\pi) = 1$ unendlich viele Lösungen dieser Gestalt existieren. Dies demonstriert die Schwierigkeiten einer einheitlichen Existenztheorie für RWA selbst im linearen Fall.

b) Man schreibe die obige Differentialgleichung zweiter Ordnung in Form eines Systems erster Ordnung und überprüfe anhand der drei zugehörigen Randwertaufgaben die Richtigkeit des Lösbarkeitskriteriums aus dem Text, d. h.: die Regularität der zugehörigen Matrix

Aufgabe 8.2: Man betrachte das (reguläre) Sturm-Liouville-Problem

$$-u''(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \quad t \in [a,b],$$

mit sog. „Neumann-Randbedingungen“

$$u'(a) = g_a, \quad u'(b) = g_b.$$

Man formuliere eine Bedingung an die Koeffizienten q und r, unter der diese RWA für beliebige stetige rechte Seite f und Randdaten g_a, g_b eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 8.3: a) Man beweise für Funktionen $v \in C^1([a,b])$, die *kontinuierliche* „Sobolewsche Ungleichung“

$$\max_{t\in[a,b]} |v(t)| \le \int_a^b |v'(t)|\,dt + |v(a)|.$$

b) Man beweise weiter die Ungleichung

$$\max_{t\in[a,b]} |v(t)| \le \int_a^b |v'(t)|\,dt + \frac{1}{b-a}\Big|\int_a^b v(t)\,dt\Big|.$$

(Hinweis: Fundamentalsatz und Mittelwertsatz der Differential- und Integralrechnung)