

**DIE
WELT**

**IN
SKALLEN**

DIE WELT IN SKALEN

ZERLEGEN UND ZUSAMMENFÜGEN

MANFRED SALMHOFER

Gibt es in der Natur wahrhaft unteilbare Objekte? Oder kleinste Längen und kürzeste Zeiten? Das sind grundsätzlich wichtige Fragen, die dem Reduktionismus ein Ende setzen. Ebenso grundsätzlich und wichtig ist es, zu fragen, wie sich die für uns unmittelbar sinnlich erfahrbare Welt aus der atomaren Welt zusammenfügt und was die wesentlichen Hypothesen sind, die es erlauben, unsere Erfahrungswelt gedanklich mit einer abstrakten Welt zu verbinden. Keine dieser Fragen lässt sich ohne die andere befriedigend beantworten – auf der Suche nach universellen Antworten ist der Heidelberger Forschungscluster STRUCTURES.



Zum Beweis, dass Bewegung unmöglich ist, betrachtet der Philosoph Zeno von Elea den Wettlauf von Achilles und der Schildkröte. Der griechische Held (A) läuft zehn Meter pro Sekunde, heute noch fast Weltrekord. Die Schildkröte (S), ein relativ rasantes Modell, schafft einen Meter pro Sekunde, und sie bekommt einen Vorsprung von zehn Metern. Der ist eine Sekunde nach dem Start bereits aufgebraucht, jedoch ist S inzwischen schon einen Meter weiter. Den wiederum hat A in $\frac{1}{10} = 0,1$ Sekunden zurückgelegt, doch da ist S wieder zehn Zentimeter weiter. Nach einer weiteren Hundertstelsekunde hat sie noch immer

einen Zentimeter Vorsprung, und so weiter, ad infinitum. Kann A jemals S einholen? Da unendlich viele Zeitintervalle aneinandergereiht werden, so Zeno, ist die gesamte Zeit unendlich lang. A holt S nie ein, im Widerspruch zum Augenschein einer Bewegung, der also täuschen muss.

Dieses Paradoxon beschäftigte viele große griechische Philosophen. Demokrit antwortete, es gebe unteilbare Atome, die Zenos Spalterei an irgendeiner Stelle ein Ende setzten, so dass nie unendlich viele Zeitintervalle auftraten.

Stellen wir die Hypothese auf, dass man mit Zeitintervallen so rechnen kann wie mit reellen Zahlen, so erweist sich Zenos Argument als Trugschluss: Nicht jede Summe unendlich vieler Zahlen ist unendlich groß. Konkret ergibt $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$ nicht etwa eine unendlich lange Zeit, sondern einfach $1,111\dots = 1\%$ Sekunden – also genau die Zeit, nach der Achilles die Schildkröte überholt (wenn man die beiden als Punkte idealisiert, was

man wohl tun muss, wenn man beliebig oft teilen möchte).

Die eben suggestiv mit Dezimalzahlen dargestellte Konvergenz der Zeno'schen Summe ist ein einfaches Standardresultat der heutigen Mathematik. Der größere und in der Tat nicht offensichtliche Schritt ist die Hypothese über die Existenz und Eigenschaften eines Raum-Zeit-Kontinuums, die die mathematische Theorie erst anwendbar macht. Diese Hypothese ist nicht direkt empirisch testbar, ihre Konsequenzen aber schon. Sie stimmen im gesamten Bereich, der uns durch Messung zugänglich ist, mit der Erfahrung überein. (Bei der Suche nach neuen physikalischen Gesetzen, zum Beispiel im Zusammenhang mit dem frühen Universum, wird diese Hypothese in manchen theoretischen Ansätzen hinterfragt.) Die Existenz dessen, was man heute unter Atomen, Atomkernen und subatomaren Teilchen versteht, wird aber ohne Bezug auf Zeno begründet, und ihre Eigenschaften werden mit ganz anderen Methoden festgestellt.

Der Exzellenzcluster STRUCTURES

Die Frage, wie in komplexen Systemen aus dem Zusammenspiel vieler Komponenten neue Phänomene entstehen können, ist das Thema des Exzellenzclusters „STRUKTUREN: Emergenz in Natur, Mathematik und komplexen Daten“ („STRUCTURES: A Unifying Approach to Emergent Phenomena in the Physical World, Mathematics, and Complex Data“). Das Themengebiet des von den Fakultäten für Physik und Mathematik gemeinsam getragenen Exzellenzclusters reicht von der subatomaren Teilchenphysik bis zur Kosmologie und von der fundamentalen Quantenphysik bis zur Neurowissenschaft. In sieben „Comprehensive Projects“ forschen rund 100 Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus Physik, Astronomie, Mathematik und Informatik. Anwendungsgebiete für ihre Fragestellungen sind beispielsweise Quanten- oder neuromorphe Computer, die Rechnungen ausführen können, welche traditionellen Computern nicht möglich sind, oder Strukturbildungsprozesse in der Astro- oder Biophysik, die ebenfalls auf dem Zusammenspiel vieler Bestandteile beruhen.

Der Exzellenzcluster wurde im Rahmen der Exzellenzstrategie des Bundes und der Länder an der Universität Heidelberg eingerichtet. Beteiligt sind neun Universitätsinstitute sowie die Max-Planck-Institute für Astronomie (MPIA) und Kernphysik (MPIK) in Heidelberg, das Heidelberger Institut für Theoretische Studien (HITS) und das Zentralinstitut für Seelische Gesundheit (ZI) in Mannheim. Sprecher sind Prof. Dr. Manfred Salmhofer (Institut für Theoretische Physik), Prof. Dr. Anna Wienhard (Mathematisches Institut) und Prof. Dr. Ralf S. Klessen (Zentrum für Astronomie).

www.structures.uni-heidelberg.de

Das Zeno'sche Argument berührt aber grundsätzlich wichtige Fragen – zum einen, ob es in der Natur wahrhaft unteilbare Objekte oder kleinste Längen und Zeiten gibt, die dem Reduktionismus ein Ende setzen, zum anderen, wie sich die für uns unmittelbar sinnlich erfahrbare Welt aus der atomaren Welt zusammenfügt, und schließlich, was die wesentlichen Hypothesen sind, die es uns erlauben, unsere Erfahrungswelt gedanklich mit einer abstrakten Welt zu verbinden. Alle drei Fragen sind gleich fundamental, weil wir keine ohne die anderen befriedigend beantworten können. Diese Fragen liegen auch der Arbeit in unserem Forschungscluster STRUCTURES zugrunde. Entsprechend dem Thema dieser Ausgabe und der gebotenen Kürze werden wir uns hier vor allem mit dem Zusammenhang der ersten und zweiten Frage beschäftigen.

Immer kleiner und kleiner

Die naive Vorstellung des physikalischen Atoms als eines beinahe strukturlosen Objekts wurde von Ernest Rutherford im Jahr 1911 empirisch widerlegt – das Atom hat einen elektrisch geladenen Kern, der 100.000 Mal kleiner ist als das Atom selbst und der selbst aus Protonen und Neutronen besteht. Nachdem in den 1950er-Jahren in Beschleunigerexperimenten ein „Zoo“ von weiteren subatomaren Teilchen entdeckt worden war, gab es Versuche, den Gedanken einer Zerlegung in noch kleinere Bestandteile aufzugeben und alle diese Teilchen auf der gleichen Ebene zu beschreiben. Diese sogenannte analytische S-Matrix-Theorie war konzeptionell klar formuliert, tiefgründig und sehr ästhetisch, aber bei der Erklärung der experimentellen Daten nicht erfolgreich. Weitere Streuexperimente an Protonen und Neutronen hatten dagegen als einfachste Interpretation, dass beide aus noch kleineren Objekten bestehen. Diese „Partonen“ sind die Quarks und Gluonen des heutigen Standardmodells der Elementarteilchenphysik, das in fast schon beängstigender Weise empirisch erfolgreich ist.

Wir wissen nicht, ob es noch weitere Ebenen solcher unterliegender Konstituenten gibt. Ihre Existenz ist aber derzeit nicht ausschließbar – in vielen Ansätzen wird sie auch als eine Hypothese angenommen.



PROF. DR. MANFRED SALMHOFER studierte Mathematik und Physik in Graz (Österreich) und wurde am Max-Planck-Institut für Physik in München promoviert. Nach Postdoc-Jahren in Vancouver (Kanada), Princeton (USA) und Leiden (Niederlande) war er ab dem Jahr 1995 Professor für Mathematik an der ETH Zürich (Schweiz) und ab 2001 Professor für theoretische Physik an der Universität Leipzig. Seit 2008 ist er Professor für theoretische Physik an der Universität Heidelberg und seit 2019 Sprecher des Heidelberger Exzellenzclusters STRUCTURES. Er forscht im Bereich Mathematische Physik und Physik komplexer Systeme, insbesondere interessiert er sich für Quantensysteme mit sehr vielen Freiheitsgraden.

Kontakt: salmhofer@uni-heidelberg.de

Die Aufspaltung in immer kleinere Konstituenten ist aber kein A-priori-Programm der Physik, sie hat sich lediglich mehrmals als die einfachste konsistente und quantitativ erfolgreiche Erklärung erwiesen. Einfachheit bedeutet hier Denkökonomie im Sinne von William of Ockham, und ebenso eine Verträglichkeit mit einheitlichen allgemeinen Prinzipien. Konsistenz ist für mathematisch formulierte Gesetze unerlässlich; der Vergleich mit dem Experiment ist in der Physik der entscheidende Test, an dem schon viele phantasievolle Ideen gescheitert sind.

Die umgekehrte Frage, wie man aus diesen Objekten (und ihrer mittlerweile gut erforschten Wechselwirkung) die Welt wieder „zusammenbauen“ kann, ist seit Rudolf Clausius, James Clerk Maxwell und Ludwig Boltzmann ein zentrales Thema der Physik. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Idee der Aufteilung in Skalen und der Begriff der skalenabhängigen effektiven Theorie, mit dem wir uns im Folgenden beschäftigen wollen.

In heutiger Terminologie ist Zenos Aufspaltung ein Beispiel einer (geometrischen) Skalenzerlegung. Jeder Schritt in dieser Zerlegung, gegeben durch eine Zehnerpotenz $1, 10^{-1}, 10^{-2}, \dots$, entspricht einer Zeitbeziehungsweise Längenskala. Wenn man für eine konkrete Fragestellung die Beiträge aller Skalen feststellen und dann korrekt aufsummieren kann, ist sie für die Beantwortung dieser Frage nützlich und damit zulässig.

Die Betrachtung in Skalen

Die Skalenabhängigkeit physikalischer Größen bestimmt entscheidend mit, welche Struktur materielle Objekte haben können. Eine Designer-Wasserkanne in Form eines Würfels von zehn Zentimeter Kantenlänge enthält gefüllt einen Liter Wasser mit einem Gewicht von einem Kilogramm. Ein kubischer Wassertank mit der zehnfachen Kantenlänge von einem Meter fasst 1.000 Liter und wiegt eine Tonne. Das Volumen, und somit das Gewicht, skaliert hier mit der dritten Potenz der Kantenlänge. Die Grundfläche skaliert mit der zweiten Potenz, ist also beim Wassertank nur 100 Mal so groß wie bei der Kanne. Somit ist der Druck auf die Grundfläche beim Wassertank zehn Mal

„Die Aufspaltung in immer kleinere Konstituenten ist kein A-priori-Programm der Physik, sie hat sich lediglich mehrmals als die einfachste konsistente und quantitativ erfolgreiche Erklärung erwiesen.“

so groß wie bei der Kanne. Ein auf zehnfache Größe hochskaliertes Objekt belastet das Material, auf dem es steht, also zehnfach. Soll es selbst stehen und stabil sein, dann setzt das seiner Größe und Form Grenzen. So kann eine Ameise feingliedriger gebaut sein als ein Elefant und ein langer Grashalm schlanker als eine große Eiche.

Dies ist nur eines von vielen Beispielen für Skalengesetze und ihre Folgen. Hier führt das Hochskalieren zu Einschränkungen; in anderen Fällen führt es umgekehrt zu mehr Möglichkeiten. Eine spezielle Rolle spielen Größen, die kaum oder gar nicht

von der Skala abhängen - ihr Einfluss auf Struktur und Dynamik ist auf benachbarten Skalen gering, kann aber über sehr lange Zeiten und Abstände bestehen und sehr viel verändern.

Eine Verfeinerung und weitgehende konzeptionelle Verallgemeinerung solcher Skalenbetrachtungen führt zum Begriff der skalenabhängigen effektiven Theorie. Man kann ihn sich anhand der Beobachtung eines physikalischen Objekts durch ein Mikroskop veranschaulichen. Die Skala ist die Auflösung des Mikroskops. Aus den Beobachtungen, die man damit auf dieser

Skala macht, kann man auf die Bausteine und die Gesetzmäßigkeiten der Beschreibung, also die Theorie, auf dieser Skala zurückschließen. Wenn man die Auflösung des Mikroskops verändert (die man nun kontinuierlich regelt, statt in den obigen Zehnerschritten), bekommt man auf diese Weise eine ganze Schar von Theorien, die alle dasselbe physikalische System beschreiben, aber auf unterschiedlicher räumlicher Auflösungsstufe. Ein allmähliches Verringern der Auflösung zieht eine stetige Verbindung zwischen der Beschreibung auf der kleinsten auflösbaren (beispielsweise nahe oberhalb der atomaren) Skala und jeder größeren Skala, bis hin zur „makroskopischen“ Skala, die uns auch ohne Mikroskop zugänglich ist.

Eine Bahn im Raum möglicher Theorien

Diese Veränderung lässt sich nun abstrakt gesehen als eine Bahn in einem Raum möglicher Theorien formulieren, und es ergeben sich folgende Merkmale: (1) Die Bestimmung der effektiven Theorie auf einer Skala aus der direkt darunterliegenden ist sowohl rein theoretisch möglich als auch im Wechselspiel von Theorie und Messung. (2) Da man in kleinen Schritten vorgeht, kann man genau mitverfolgen, wie sich Theorien verändern, und somit, wie Emergenz entsteht: Der Endpunkt einer solchen Bahn kann völlig anders aussehen als der Anfangspunkt, aber die ununterbrochene Entwicklung längs der Bahn stellt eine strikte Beziehung zwischen den beiden her. Skalenabhängigkeiten bestimmen (wie oben illustriert) die Entwicklung längs der Bahn wesentlich mit. (3) Die theoretische Betrachtung sehr vieler Bahnen mit verschiedenen Startpunkten führt zum Begriff eines Flusses auf einem ganzen Raum von möglichen Theorien (der aus historischen Gründen als Renormierungsgruppenfluss bezeichnet wird). Dies hebt die Untersuchung auf eine höhere Ebene, auf der man sich von speziellen Modellen und Gegebenheiten löst und allgemeine Prinzipien der Emergenz finden kann. Eines der wichtigsten ist die Universalität, die besagt: Einerseits besteht eine große Robustheit von Emergenzphänomenen – es kommt auf die meisten Details auf der kleinsten Skala gar nicht an –, andererseits ist die Abhängigkeit von einigen wenigen

„Die umgekehrte Frage ist, wie man aus diesen Objekten die Welt wieder ‚zusammenbauen‘ kann. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Idee der Aufteilung in Skalen.“

(den sogenannten relevanten) Parametern sehr stark. Man versteht dadurch besser, worauf es ankommt, wenn größere Strukturen aus kleineren entstehen und wie sie miteinander zusammenhängen, welche Strukturen und effektiven Gesetze möglich sind, und warum selbst winzige Änderungen von Kontrollparametern, makroskopisch gesehen, drastische Folgen haben können.

Konzeptionell liefert die Idee der skalenabhängigen effektiven Theorie auch einen neuen Blickwinkel auf die Unterscheidung zwischen einer „fundamentalen“ und einer daraus abgeleiteten Theorie: Zu jeder skalenabhängigen Theorie wird ein Gültigkeitsbereich angegeben, zum Beispiel die minimale Längen- und Zeitskala, oberhalb der sie gilt, und zwar nicht nur bezogen auf ihre quantitativen Vorhersagen, sondern auch auf die Konzepte beziehungsweise Objekte, die als Grund-

bestandteile dieser Theorie sinnvoll sind. Eine wahrhaft „fundamentale“ Theorie wäre dann eine, die auf allen Skalen gilt; eine solche ist heute nicht bekannt. Sie ist aber durch Skalenanalyse bereits eingeschränkt. Es gibt Theorien, die auf allen Skalen konsistent sind, aber die Naturvorgänge nur in einem begrenzten Bereich wiedergeben, beispielsweise die nichtrelativistische Quantenmechanik. In anderen Fällen bekommt man aus der Skalenabhängigkeit den Hinweis, dass eine bisher überall empirisch erfolgreiche Theorie dennoch nicht auf allen Skalen gelten kann, beispielsweise das Standardmodell der Elementarteilchenphysik.

Die Kraft der neuen Methode

Die Allgemeinheit dieser kurzen Skizze mag die Frage aufwerfen, ob es sich hier um ein Gedankengebäude der Art handelt,

THE WORLD IN SCALES

BREAKDOWN AND REASSEMBLY

MANFRED SALMHOFER

The scale dependence of physical quantities places strong restrictions on the structures and dynamics that can occur in the material world. By considering physical systems on increasing length and time scales, we can formulate the concept of a scale-dependent effective theory and use it as a tool to answer specific physical questions. Characteristically, this method involves first breaking down the system into scale intervals, followed by a careful analysis of interaction effects on successive scales and finally reassembling the parts to understand the system as a whole. If done correctly, the interplay of different scale dependencies can be studied systematically and the emergence of collective properties – that is, features of the whole system that are not present in its constituent parts – can be understood in detail.

Developed to a significant extent by scientists in Heidelberg, this theoretical method has provided us with a unified understanding of a variety of physical phenomena ranging from elementary particle physics to atomic and condensed-matter physics and even gravitation and cosmology. It plays a prominent role in our research on the origins of complexity and the mechanisms by which it can emerge from simple underlying laws of physics, a central theme of our STRUCTURES research cluster. ●

PROF. DR MANFRED SALMHOFER studied mathematics and physics in Graz (Austria) and earned his doctorate at the Max Planck Institute for Physics in Munich. After working as a post-doc in Vancouver (Canada), Princeton (USA) and Leiden (Netherlands), he held a professorship in mathematics at ETH Zurich (Switzerland) from 1995 and a professorship in theoretical physics at Leipzig University from 2001. In 2008 he accepted the Chair of Theoretical Physics at Heidelberg University; he has served as speaker of the Heidelberg Cluster of Excellence STRUCTURES since 2019. Manfred Salmhofer's field of research is mathematical physics and the physics of complex systems; he is particularly interested in quantum systems with many degrees of freedom.

Contact: salmhofer@
uni-heidelberg.de

“Breaking down a system into ever smaller constituents is not an a priori programme of physics; rather, it has repeatedly shown itself to be the simplest consistent and quantitatively successful explanation.”

das Friedrich Dürrenmatt in seinem Drama „Die Physiker“ als „System aller möglichen Erfindungen“ ironisiert hat. Dies ist nicht der Fall. Tatsächlich wurde die hier vorgestellte „Theorie von Theorien“ in der Physik an konkreten Fragestellungen entwickelt, und der Raum von Theorien ist zwar allgemein, doch präzise charakterisiert: Theorien entsprechen Wirkungsfunktionalen, wie sie von Matthias Bartelmann in seinem Beitrag zu diesem Heft (ab Seite 84) erklärt werden. Die Methode hat keineswegs alle Fragen beantwortet, aber sie hat die Lösung einer ganzen Klasse physikalischer Probleme geliefert, die keiner anderen Methode zugänglich waren. Ihre Konzepte werden laufend an weiteren solchen getestet und müssen sich so immer aufs Neue bewähren.

Die Kraft dieser Methode liegt an der Kombination ihrer Allgemeinheit und ihrer praktischen Vielseitigkeit. Sie wird mittlerweile in sehr vielen Gebieten der Physik angewendet, und zwar mit großem Erfolg: von der Physik der kondensierten Materie, wo sie wesentlich zum Verständnis inter-

essanter neuer Materialien, beispielsweise der Hochtemperatursupraleiter, beigetragen hat, über die Theorie der starken Wechselwirkung zwischen den Quarks bis hin zur Kosmologie. Parallel dazu, und unabhängig davon, werden Skalenzerlegungen seit Langem in der Mathematik dazu verwendet, um sehr subtile, grundlegende mathematische Fragen zu beantworten, etwa in der harmonischen Analysis die Frage der Regularität der Lösungen von Gleichungen, die Wellenphänomene beschreiben. Verwandte Multiskalenmethoden spielen auch in der modernen numerischen Mathematik eine zentrale Rolle. Tiefe neuronale Netzwerke, die das maschinelle Lernen revolutioniert haben, haben eine ähnliche rekursive Struktur wie die Renormierungsgruppe, und die Robustheit der Lernfähigkeit dieser Netzwerke könnte ein Universalitätsphänomen sein. Die Untersuchung solcher Zusammenhänge und der Austausch zwischen allen diesen verschiedenen Gebieten sind enorm fruchtbar für unser tieferes und breiteres Verständnis.

Heidelberg hat auf diesem Gebiet eine lange Tradition, und unsere Forschungsgruppen in Heidelberg haben Bedeutendes zu seinem Fortschritt beigetragen, sowohl auf konzeptioneller Ebene als auch in der Anwendung. Diese spannenden Themen, die nicht nur verschiedene Skalen, sondern auch ganz unterschiedliche Anwendungsgebiete verbinden, spielen im Forschungscluster STRUCTURES eine wichtige Rolle. ●

„Die Aufteilung in Skalen hat keineswegs alle Fragen beantwortet, aber sie hat die Lösung einer ganzen Klasse physikalischer Probleme geliefert, die keiner anderen Methode zugänglich waren.“