

**DURCH ZEIT**

**T UND RAUM**

DURCH ZEIT UND RAUM

# WAS MIKRO- UND MAKROKOSMOS VERBINDET

MATTHIAS BARTELMANN

Die Längenskalen der Teilchenphysik und der Kosmologie sind um mehr als 37 Zehnerpotenzen voneinander getrennt – ein unfassbar großer Unterschied. Dennoch gibt es Verbindendes: die „Wirkung“. Im allgemeinen Sprachgebrauch bezeichnet dieser Begriff die Auswirkung einer Ursache. In der theoretischen Physik ist die Wirkung ein Funktional, das die physikalisch durchlaufene Bahn in der Menge aller denkbaren Bahnen auszeichnet. Mit dem „Wirkungsprinzip“ lässt sich die Entwicklung sowohl mikro- als auch makrokosmischer Strukturen beschreiben.

# D

Die Physik ist in Teilgebiete gegliedert, von denen das älteste und grundlegendste die Mechanik ist. Nach ihrem Urheber wird sie oft „Newton'sche Mechanik“ genannt und zur Unterscheidung von der Quantenmechanik auch als „klassische Mechanik“ bezeichnet. Die klassische Mechanik beantwortet die Frage, wie sich Körper unter dem Einfluss von Kräften durch Raum und Zeit bewegen. Nach dem Ursprung der Kräfte fragt sie nicht – das ist Gegenstand der physikalischen Feldtheorien. Die Definition von Kräften ist eng mit dem Konzept von Raum und Zeit verflochten, aber das soll uns hier nicht weiter beschäftigen.

Ihre Antworten gibt die klassische Mechanik aufgrund der drei Newton'schen Axiome. Das erste Axiom stellt das Phänomen der Trägheit fest; das dritte besagt, dass jeder Kraft eine gleich große Kraft entgegengerichtet ist. Das zweite Axiom formuliert die Bewegungsgleichung: Die Beschleunigung eines Körpers ist gleich der Kraft, die auf ihn wirkt, geteilt durch seine Masse. Ein solches Gesetz gibt nicht an, wie eine Bewegung verläuft, sondern wie sich der Bewegungszustand eines Körpers unter dem Einfluss einer Kraft ändert. Wenn dieser Bewegungszustand, ausgedrückt durch Ort und Geschwindigkeit, zu Beginn der Bewegung anders war, wird sich ein Körper auch dann anders bewegen, wenn dieselbe Kraft auf ihn wirkt. Anschauliche Beispiele erleben wir täglich: Ein Schneeball, waagrecht geworfen, beschreibt eine andere Kurve als einer, der schräg nach oben geworfen wird, obwohl beide derselben Schwerkraft unterliegen.

Mathematisch werden solche Gesetze durch Differentialgleichungen formuliert. In jedem Punkt einer Bahn besagt die Differentialgleichung, wohin der nächste kleine Schritt zeigen und wie groß er sein wird. Die gesamte Bahn erhält man, wenn man sehr viele solcher kleinen Schritte aufsummiert oder, anders ausgedrückt, indem man die Differentialgleichung von einem vorgegebenen anfänglichen Bewegungszustand ausgehend integriert.

Oft bewegen sich Körper nicht frei im Raum, sondern unter Nebenbedingungen. Eine Murmel etwa, die über eine Tischplatte rollt, ist in ihrer Bewegung auf die zwei Dimensionen des Tisches eingeschränkt; ein Kind, das eine Rutschbahn hinunterrutscht, bewegt sich in nur einer

Dimension längs der Bahn. Wie man die Newton'sche Bewegungsgleichung unter solchen Nebenbedingungen möglichst einfach formulieren kann, zeigt ein Formalismus, der auf Joseph-Louis Lagrange zurückgeht. So elegant diese Formulierung auch ist, führt sie doch nichts konzeptionell Neues ein, denn sie formuliert das zweite Newton'sche Axiom lediglich auf andere Weise.

## Ein überraschender Schritt

Ein neuer und überraschender Schritt gelang William Rowan Hamilton, indem er die Ausgangsfrage anders stellte. Er fragte nicht mehr danach, wie sich der Bewegungszustand eines Körpers in jedem Punkt seiner Bahn ändern würde. Stattdessen fragte er: Zu einem Zeitpunkt befindet sich ein Körper an einem bestimmten Ort, zu einem späteren Zeitpunkt an einem anderen. Wenn diese beiden Orte und Zeitpunkte festgehalten werden – auf welcher der unendlich vielen denkbaren Bahnen bewegt sich der Körper dann tatsächlich vom Ausgangs- zum Endpunkt? Hamiltons Antwort war so einfach wie verblüffend: Der Körper bewegt sich entlang derjenigen Bahn, die eine bestimmte Größe – „Wirkung“ genannt – minimal werden lässt.

Diese Wirkung ergibt eine Zahl, die bei vorgegebenen Endpunkten sowie Abflugs- und Ankunftszeiten von der Bahnkurve abhängt. Solche Größen heißen Funktionale: Während mathematische Funktionen einem Zahlenwert einen anderen zuweisen, ordnen Funktionale ganzen Funktionen Zahlenwerte zu. Man kann also eine gesamte Bahnkurve in das Wirkungsfunktional einsetzen und bekommt einen Zahlenwert heraus. Wie das geschieht, ist für uns unerheblich. Wichtig ist hier nur, dass die wahre Bahnkurve des Körpers so verläuft, dass ihre Wirkung kleiner als diejenige aller anderen denkbaren Bahnen ist.

Verblüffend daran wirkt die Vorstellung, dass der Körper irgendwoher „weiß“, dass er mit seiner Bewegung unter allen möglichen Bahnen zwischen zwei vorgegebenen Punkten im Raum und in der Zeit gerade diejenige verfolgen muss, die die Wirkung minimiert. Wie auch immer das geschieht, wird damit das zweite Newton'sche Axiom durch eine tiefere Begründung ersetzt. Die Bahnkurve wird nicht mehr Schritt für Schritt bestimmt, sondern als Ganze. An die Stelle der Differentialgleichung tritt damit ein Extremalprinzip: Längs wirklicher Bahnen wird im Vergleich zu allen anderen denkbaren die Wirkung minimal. Die vorher bekannte Differentialgleichung folgt aus diesem Wirkungsprinzip.

## Das Wirkungsprinzip

Erst innerhalb der Quantenmechanik wurde es möglich, das Hamilton'sche Wirkungsprinzip tiefer zu begründen. Die Quantenmechanik beschreibt die Bewegung mikrophysikalischer Teilchen nicht mehr mithilfe vorgegebener Bahnen durch Raum und Zeit. Stattdessen gibt sie die

# „Das Wirkungsprinzip ist das verbindende Prinzip der gesamten Physik, von der klassischen Mechanik bis hin zur allgemeinen Relativitätstheorie einerseits oder den Quantenfeldtheorien andererseits.“

Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Teilchen innerhalb einer bestimmten Zeit von einem Ort zu einem anderen übergehen kann. Diese Wahrscheinlichkeit wird wesentlich durch dieselbe Größe bestimmt, die Hamilton als Wirkung in die Physik einführte: Die Übergangswahrscheinlichkeit wird entlang derjenigen Bahn am größten, deren Wirkung minimal wird. Gegenüber der klassischen Mechanik besteht eine der wichtigsten Einsichten der Quantenmechanik gerade darin, dass es zwischen zwei Punkten keine genau bestimmte Bahn mehr gibt, sondern einen ausgedehnten räumlichen Bereich, in dem das Teilchen beim Übergang zwischen den beiden Punkten angetroffen werden kann.

Ein quantenmechanisches Teilchen muss durchaus nicht dem Weg folgen, auf dem sich ein Körper gemäß der klassischen Mechanik bewegen würde. In der Nähe dieses klassischen Weges ist lediglich die Übergangswahrscheinlichkeit des quantenmechanischen Teilchens geringer, und zwar umso deutlicher, je weiter das Teilchen von der klassischen Bahn abweicht. Das Teilchen „weiß“ also nichts davon, auf welcher Bahn es sich bewegen soll – es wird nur mit größter Wahrscheinlichkeit längs der klassischen Bahn oder dicht daneben angetroffen.

In der klassischen Mechanik führt genau ein Weg von einem Ort zu einem anderen, Abweichungen sind nicht möglich. Aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation ersetzt die Quantenmechanik diesen Weg gewissermaßen durch einen Schlauch mit einer endlichen Dicke, die durch eine Naturkonstante, das Planck'sche Wirkungsquantum, bestimmt wird. Umgekehrt würde man heute ausgehend von der quantenmechanischen Einsicht sagen, dass ein Schlauch aus möglichen Wegen von einem Ort zu einem anderen führt, dessen Dicke endlich, aber mikroskopisch klein ist. Für makroskopische Teilchen tritt diese endliche Dicke nicht in Erscheinung, so dass deren Bahn als unendlich dünn und damit fest vorgegeben erscheint.

Aufbauend auf Überlegungen von Paul Dirac war es Richard Feynman, der diese Betrachtung der Quantenmechanik einführte und ihr durch geschickte Rechenverfahren zum Durchbruch verhalf. Die Begründung, die das Hamilton'sche Prinzip dadurch erfuhr, lässt sich so beschreiben: Makroskopische Körper bewegen sich auf bestimmten Bahnen nicht deswegen, weil diese Bahnen die einzig möglichen sind. Möglich sind auch eng benachbarte Bahnen. Die Wahrscheinlichkeit, mit der solche benachbarten Bahnen durchlaufen werden, nimmt allerdings mit dem Abstand zur klassischen Bahn sehr schnell ab. Das Wirkungsprinzip erweist sich damit als eine Wahrscheinlichkeitsaussage: Die Bewegung makroskopischer Körper wird längs solcher Bahnen beobachtet, entlang derer die Übergangswahrscheinlichkeit am größten ist. Da diese Wahrscheinlichkeit bereits in einem mikroskopischen



**PROF. DR. MATTHIAS BARTELMANN** ist seit 2003 Professor für theoretische Astrophysik an der Universität Heidelberg. Zuvor war er am Max-Planck-Institut für Astrophysik in Garching wissenschaftlicher Projektleiter des deutschen Anteils an der europäischen Satellitenmission „Planck“. Er forscht über Probleme der theoretischen Astrophysik, der Kosmologie und der statistischen Physik. Er hat mehrere Lehrbücher verfasst, war Dekan der Fakultät für Physik und Astronomie, Vorstandsmitglied der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und Sprecher der Forschungs- und Strategiekommission der Universität Heidelberg.

Kontakt: bartelmann@uni-heidelberg.de

Abstand daneben deutlich kleiner ist, erscheinen solche Bahnen in der klassischen Mechanik als die einzigen möglichen. Beobachtet man stattdessen quantenmechanische Teilchen auf ihrer mikroskopischen Skala, wird die endliche Breite des Schlauches aus möglichen Bahnen sichtbar.

#### **Pfade physikalischer Felder**

Das Wirkungsprinzip tauchte erstmals in der klassischen Mechanik auf. Heute wird jedoch die gesamte Physik, von den Quantenfeldtheorien bis zur allgemeinen Relativitätstheorie, durch das Wirkungsprinzip begründet. Dabei werden die zugrunde liegenden Konzepte abstrakter. Die fundamentalen Theorien der Physik sind Feldtheorien.

Ein Beispiel für ein Feld ist das elektrische Feld, das durch die Elektrodynamik beschrieben wird. Ein solches Feld ordnet jedem Punkt in einem gegebenen Raum zu jeder betrachteten Zeit eine Größe zu, beispielsweise die elektrische Feldstärke, die sich durch eine Kraft auf eine elektrische Ladung bemerkbar macht. Während die klassische Mechanik Bahnen durch Raum und Zeit beschreibt, beschreiben Feldtheorien Felder im Raum, die sich mit der Zeit ändern. Angelehnt an die Bahnen der klassischen Mechanik wird ein solches Feld samt seiner Entwicklung als „Pfad“ bezeichnet. Die Anfangs- und Endpunkte solcher Pfade sind vorgegebene Feldkonfigurationen; der Pfad besteht darin, die Anfangskonfiguration innerhalb der vorgegebenen Zeit in eine Endkonfiguration zu überführen.

Das Wirkungsfunktional wird so erweitert, dass es jede Feldkonfiguration samt ihrer Entwicklung – also jeden Pfad eines Feldes – mit einer Zahl bewertet. Diejenigen Feldkonfigurationen, die tatsächlich beobachtet werden, sind solche, deren Wirkung minimal ist. Auch die quantenphysikalische Einsicht in die Ursache des Wirkungsprinzips bleibt bestehen: Die Wirkung bewertet die Übergangswahrscheinlichkeit nicht nur quantenmechanischer Teilchen oder klassischer Körper von einem Zustand zu einem anderen, sondern auch die Übergangswahrscheinlichkeit klassischer oder quantenphysikalischer Felder von einer Konfiguration zu einer anderen. Und wieder unterscheiden sich die Quantenfeldtheorien von den klassischen Feldtheorien dadurch, dass in Ersteren ein endlich dicker Schlauch aus möglichen Pfaden von einer Anfangs- zu einer Endkonfiguration führt, während dieser Schlauch in Letzteren zu einem einzigen Pfad zusammengezogen erscheint.

Das Wirkungsprinzip – erweitert durch das Konzept solcher Pfade physikalischer Felder – ist das verbindende Prinzip der gesamten Physik, von der klassischen Mechanik bis hin zur allgemeinen Relativitätstheorie einerseits oder den Quantenfeldtheorien andererseits. Hat man das Wirkungsfunktional aufgestellt, liegt die Theorie fest. Neue Theorien werden konstruiert, indem man ein neues Wirkungsfunktional einführt und die Aussagen studiert, die sich nach einem wohlbekannten mathematischen Schema daraus ergeben.

**„Aus welchen fundamentalen Gründen sehen kosmische Strukturen so aus, wie wir sie beobachten? Was kann man daraus über die Entwicklung des Universums und über die Gravitation lernen?“**

THROUGH TIME AND SPACE

# THE LINKS BETWEEN MICROCOSM AND MACROCOSM

MATTHIAS BARTELMANN

From elementary particles to cosmology, physics covers a range of scales spanning more than 37 powers of ten. Yet all fundamental theories of physics are based on a common, unifying principle – the Hamiltonian principle of least action. It states that physical entities, from ordinary snowballs to elementary particles and quantum fields, on the one hand, and the vast space-time of the universe, on the other, move or evolve in such a way that a certain quantity, known as action, attains a minimum value. First introduced as a fundamental concept underlying classical mechanics, the principle of least action was later found in quantum theory to be a principle of highest transition probability: physical entities are observed to be most likely following those paths along which the transition probability is highest, which is the case for paths characterised by the least action. Fundamental physical theories are thus specified by their action, and a well-developed mathematical formalism allows us to derive dynamical equations from the action principle.

This action principle, unifying all of fundamental physics, is the reason why theories of cosmic structures can be formulated in exactly the same way as theories of microscopic physics. The rich and sophisticated mathematical toolbox that was developed for the quantum fields and describes elementary particles can thus be adapted and applied to studying the properties and evolution of cosmic structures. Theoretical physicists at Heidelberg University are well known for their contribution to methods that allow scientists to scan through theories as with a theoretical microscope covering a wide range of magnifications. In the STRUCTURES excellence cluster, we are extending these methods to cosmology, connecting the largest objects studied by physics to the smallest ones. ●

PROF. DR MATTHIAS BARTELMANN has held a Chair of Theoretical Astrophysics at Heidelberg University since 2003. He previously worked at the Max Planck Institute for Astrophysics in Garching, where he was the scientific project manager of the German contribution to the European satellite mission Planck. His research covers problems of theoretical astrophysics, cosmology and statistical physics. He has authored several textbooks and served as dean of the Faculty of Physics and Astronomy, board member of the German Physical Society and speaker of Heidelberg University's Commission for Research and Strategy.

Contact: bartelmann@uni-heidelberg.de

**“The principle of least action connects all of physics, from classical mechanics to the general theory of relativity, on the one hand, and the quantum field theories, on the other.”**

# „Trotz der mehr als 37 Zehnerpotenzen, die die Längenskalen in der Teilchenphysik und in der Kosmologie voneinander trennen, verbindet sie das Wirkungsprinzip.“

## Strukturen im Universum

Die theoretische Physik in Heidelberg ist unter anderem dafür bekannt, dass hier Methoden entwickelt wurden und werden, um auf geschickte Weise so mit dem Wirkungsfunktional umzugehen, dass Theorien an die Skala angepasst werden können, die gerade betrachtet werden soll. Darauf geht Manfred Salmhofer in seinem Beitrag „Die Welt in Skalen“ (ab Seite 92) ein. An den beiden Enden möglicher Längenskalen liegen die Teilchenphysik einerseits und die Kosmologie andererseits. Die Teilchenphysik handelt davon, wie mikroskopische, elementare oder aus wenigen Bestandteilen zusammengesetzte Teilchen miteinander wechselwirken und welche Phänomene dabei auftreten. Die Kosmologie behandelt die Frage, wie sich das Universum und die vielfältigen kosmischen Strukturen entwickeln, die wir beobachten, und wie sie zu ihren erstaunlichen Eigenschaften kamen. Typische Längenskalen liegen in der Teilchenphysik im Bereich von  $10^{-13}$  Zentimetern und darunter, in der Kosmologie im Bereich von  $10^{24}$  Zentimetern und darüber.

Trotz der mehr als 37 Zehnerpotenzen, die diese Skalen voneinander trennen, verbindet sie das Wirkungsprinzip. Innerhalb des STRUCTURES-Exzellenzclusters arbeiten wir am Institut für Theoretische Physik unter anderem

darin, die Entwicklung kosmischer Strukturen auf eine Weise physikalisch zu beschreiben, deren mathematischer Formalismus von demjenigen nicht zu unterscheiden ist, den wir auf Systeme mikroskopischer Teilchen anwenden. Eine Vielfalt ausgereifter Methoden, die im Rahmen der Quantenphysik entwickelt wurden, werden damit auch für die Kosmologie zugänglich und nutzbar.

Damit verfolgen wir zwei wesentliche Ziele: Wir möchten einerseits verstehen, aus welchen fundamentalen Gründen kosmische Strukturen so aussehen, wie wir sie beobachten, und was wir daraus über die Entwicklung des Universums und über die Gravitation lernen können. Dieses Verständnis möchten wir nutzen, um besser und genauer analysieren zu können, was wir beobachten, um wiederum mehr und zuverlässigere Informationen über das Universum zu gewinnen. Der STRUCTURES-Exzellenzcluster bietet dafür eine ideale Umgebung. ●