ANNÄHERUNG

ANNÄHERUNG

DUALITÄTEN IN MATHEMATIK UND PHYSIK

JOHANNES WALCHER

Ein wichtiger Aspekt der mathematischen Beschreibung der Natur ist die Einsicht, dass sie nur annähernd ist – auf der Ebene der Entdeckung grundlegender Gesetze, der Lösung von Gleichungen und der Beziehungen zwischen verschiedenen Theorien. Neue Entdeckungen sind zu erwarten, wenn höhere Ordnungen in den kleinen Parametern, welche die Annäherungen bestimmen, nicht länger vernachlässigt werden können.

I

„I am acutely aware of the fact that the marriage between mathematics and physics, which was so enormously fruitful in past centuries, has recently ended in divorce.“ So beschrieb der britisch-amerikanische Physiker und Mathematiker Freeman Dyson im Jahr 1972 das Verhältnis zwischen den beiden Disziplinen, zu denen er wie wenige andere seiner Zeitgenossen in vergleichbaren Teilen beigetragen hat. Er begründet seinen Scheidungsspruch mit einer Liste „verpasster Gelegenheiten“ für ein gegenseitiges Befruchten und mahnt sich selbst und nachfolgende Generationen, die Kommunikation wenigstens in einigen wichtigen Punkten gemeinsamer Leidenschaften nicht vollständig abbrechen zu lassen. Dyson schätzt, dass die Physik seiner Zeit, „verlottert und reizbar“, das schlechte Ende für sich behielt, während die Mathematik in „üppigem Wachstum“ davongeeilt ist.

Ironischerweise markieren gerade die frühen 1970er-Jahre den Beginn einer Periode, in der die Beziehung zwischen fundamentaler Physik und reiner Mathematik eine bemerkenswerte Verjüngung erfahren hat, die noch heute andauert. Im Zuge einer äußerst erfolgreichen experimentell getriebenen Phase der Entdeckung von elementaren Bausteinen der Natur und des Verständnisses ihrer Wechselwirkungen machten sich Physiker auf die Suche nach der nächsten Stufe der theoretischen Entwicklung, in der die gefundenen Zusammenhänge begründet und vervollständigt werden sollten. Sie fanden vielversprechende Ansätze wie die „Große Vereinheitlichung“, die „Supersymmetrie“ oder die „Stringtheorie“ und nutzten dazu eine Reihe moderner mathematischer Konstruktionen und Resultate. Überraschenderweise lieferte im Gegenzug die Anwendung physikalischer Methoden völlig unerwartete Antworten auf manche rein mathematischen Fragestellungen. Insbesondere haben die Entdeckung und das konsequente Ausnutzen von „Dualitäten“ – das sind verschiedene mathematische Approximationen ein und derselben physikalischen Theorie – zu tiefen strukturellen Einsichten in der Geometrie und Topologie geführt.

Und auch wenn die theoretische Physik aus dieser Wiederannäherung viele wichtige Erkenntnisse gewonnen und neue Prinzipien entdeckt hat, so scheint es wenigstens zurzeit doch wieder die Mathematik zu sein, die den größeren Nutzen hat. Die Vorstellungen zur Vereinheitlichung etwa sind experimentell noch nicht bestätigt worden. In unserer Arbeitsgruppe „Mathematische Physik“ am Mathematischen Institut untersuchen wir die in der Stringtheorie und der supersymmetrischen Quantenfeldtheorie auftretenden mathematischen Strukturen im Wechselspiel mit physikalisch motivierten Fragestellungen und halten Ausschau nach neuen, unerwarteten Anwendungen in der Mathematik. Diese Forschungen bilden auch den zentralen Teil des Anfang 2019 angelaufenen Exzellenzclusters „STRUKTUREN: Emergenz in Natur, Mathematik und komplexen Daten“ („STRUCTURES: A unifying approach to emergent phenomena in the physical world, mathematics, and complex data“).

Eine ehrwürdige Beziehung

Auch nüchtern betrachtet ist die quantitative und objektive Naturbeschreibung eine der bemerkenswertesten Kulturleistungen der Neuzeit. Das systematische Isolieren und Präparieren der experimentellen Situation einerseits und das Entwickeln abstrakter theoretischer Begriffe andererseits erlaubt den Naturwissenschaften ein grundlegendes Verständnis der Zusammenhänge zwischen verschiedenartigen Phänomenen. Dieses Verständnis ermöglicht auch oft eine meisterhafte Kontrolle über die Natur – mit einem erheblichen gesellschaftlichen Mehrwert (auch wenn diese Meisterschaft nicht eigentlich im Vordergrund der Forschung steht).

Diese Grundgedanken der modernen Naturwissenschaften sind vielleicht am deutlichsten in der Physik ausgeprägt. Um die ihrem Bereich zugeordneten Phänomene zu beschreiben, benutzt die Physik regelmäßig fortgeschrittene mathematische Konzepte und verlangt dabei die Lösung

„Die quantitative und objektive Naturbeschreibung ist eine der bemerkenswertesten Kulturleistungen der Neuzeit.“

PROF. DR. JOHANNES WALCHER ist seit dem Jahr 2015 Professor an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Heidelberg und kooptiertes Mitglied der Fakultät für Physik und Astronomie. Er wurde an der ETH Zürich (Schweiz) promoviert und forschte unter anderem am CERN in Genf (Schweiz), dem Kavli Institute for Theoretical Physics in Santa Barbara (USA) und dem Institute for Advanced Study in Princeton (USA). Vor seinem Ruf nach Heidelberg war er Professor für Physik und Mathematik an der McGill University in Montreal (Kanada). Er leitet die im Rahmen des Zukunftskonzepts der Universität Heidelberg eingerichtete Arbeitsgruppe „Mathematische Physik“ am Mathematischen Institut und ist Mitglied des neuen Exzellenzclusters STRUKTUREN.

Kontakt: walcher@ uni-heidelberg.de

komplizierter mathematischer Probleme sowie die Entwicklung und Anwendung effizienter Rechenmethoden. Manchmal sogar erfordern es die Bedürfnisse der Physik, vollkommen neue mathematische Begriffe einzuführen, so dass sich große Teile beider Gebiete tatsächlich lange Zeit Hand in Hand entwickelt haben.

Ein erstes Beispiel für dieses Wechselspiel ist sicherlich die gleichzeitige Erfindung der Infinitesimalrechnung und der Mechanik durch Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz. Die Erkenntnis, dass die Beschreibung von Naturvorgängen sich erheblich vereinfacht, wenn man die Änderung der Bewegungszustände mit der Zeit in den Vordergrund stellt, erfordert im mathematischen Bild die Einführung und den Umgang mit intuitiv schwer fassbaren „beliebig kleinen“ Größen.

Nicht weniger charakteristisch ist die Verallgemeinerung der „Riemannschen Geometrie“ in der Einsteinschen Relativitätstheorie. Die ursprüngliche Motivation des deutschen Mathematikers Bernhard Riemann war die zeitgemäße Frage, inwiefern die mathematischen Begriffe, die seit Euklid zur Formalisierung empirischer geometrischer Tatsachen benutzt wurden, logisch zwingend sind – oder ob sich nicht vielmehr auf andere Hypothesen genauso konsistente Theorien stützen ließen. Rein abstrakt ist dies der Fall. Einiges später bemerkte Albert Einstein, dass die Koordination physikalischer Ereignisse in Raum und Zeit zunächst tatsächlich ohne solche Hypothesen auskommt. Der Vergleich mit empirischen Kenntnissen über die Schwerkraft erlaubte ihm dann die Einführung dynamischer Prinzipien für das Gefüge der Raumzeit an sich.

Ein ausgeglichenes Verhältnis

Dass sich Naturphänomene überhaupt quantitativ erfassen lassen und Naturwissenschaften in der Sprache der Mathematik formuliert werden können, wird häufig als nicht selbstverständlich angesehen. Der ungarisch-amerikanische Physiker und Nobelpreisträger Eugene Wigner etwa spricht in seinem Essay „The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences“ von einem „Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen“. Er spielt dabei weniger auf die kultur- oder evolutionstheoretische Frage an, ob die Entwicklung unserer mathematischen Fähigkeiten nicht letztlich doch durch unsere natürliche Erfahrung bedingt ist. Er führt stattdessen zwei viel interessantere Beobachtungen an: Erstens, dass gewisse mathematische Begriffe immer wieder an Stellen auftauchen, die ganz weit weg von dem Gebiet liegen, das ihre Einführung ursprünglich motiviert hat. Warum zum Beispiel bestimmt die reelle Zahl π, geometrisch definiert als der Flächeninhalt des Einheitskreises, auch die Normierung der Gaussschen Glockenkurve aus der Statistik? Zweitens, dass von allen Kategorien des menschlichen Denkens ausgerechnet die abstrakteste Mathematik sich als so unmittelbar nützlich für die Beschreibung konkret gegebener Tatsachen eignet. Gibt es nicht vielleicht Konzepte einer anderen Art, die für die Naturwissenschaften (noch) viel nützlicher wären?

Ein Paradebeispiel für die „unvernünftige“ Nützlichkeit mathematischer Konzepte an unerwarteter Stelle sind die komplexen Zahlen. Sie wurden ursprünglich eingeführt als rein „imaginäre“ Größen zur Lösung algebraischer Gleichungen wie $x^2 = -1$ und erwiesen sich im Kontext der Infinitesimalrechnung als äußerst mächtiges Werkzeug zur Lösung einer ganzen Fülle von Problemen der angewandten Mathematik. Die Theorie der analytischen Funktionen erklärt zum Beispiel, warum $\int e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, und ist auch heute noch ein wesentliches Hilfsmittel der theoretischen Physik. In der Quantenmechanik aber, deren Entwicklung beispielsweise für Eugene Wigner prägend war, wird das

Verwenden komplexer Zahlen prinzipiell unumgänglich. Um die Heisenbergschen Postulate an den Messprozess zu erfüllen und die Symmetrieprinzipien darzustellen, muss der Raum der physikalischen Zustände auf die komplexen Zahlen aufbauen. Diese Aussage lässt sich zwar mathematisch begründen, intuitiv aber praktisch nicht erfassen.

Wie eingangs erwähnt, ist gerade die Entwicklung der letzten 40 Jahre voll von Beispielen mathematischer Konzepte, die sich in unerwarteter Weise als nützlich erwiesen haben, um physikalische Theorien zu entwickeln. Dies gilt insbesondere für die Theorien, die auf der Quantenmechanik und der Speziellen Relativitätstheorie aufbauen und die Wechselwirkungen zwischen den bekannten elementaren Bausteinen der Materie beschreiben: Elektronen und ihre Verwandten sowie Protonen und Neutronen beziehungsweise deren Konstituenten Quarks und Gluonen. Die hierfür relevanten „nicht-abelschen Eichtheorien" der starken und schwachen Kernkraft lassen sich in invarianter Weise mithilfe von „Zusammenhängen in Hauptfaserbündeln" formulieren. Solche mathematischen Strukturen spielen eine wichtige Rolle bei der differentialgeometrischen Untersuchung von topologischen Räumen und erlauben ein elegantes Verständnis von quantenmechanischen Effekten in den entsprechenden physikalischen Theorien.

Der Ausbau des mathematischen Apparats zur Beschreibung physikalischer Symmetrieprinzipien, insbesondere graduierte und unendlich-dimensionale Lie-Algebren oder die Klassifikation topologischer Phasen in Festkörpern, gehört sicherlich auch zu den „nicht verpassten Gelegenheiten" im Sinne Dysons, Letztere sogar von ihm vorweggenommen. Eine besondere Würdigung verdient hier die sogenannte Supersymmetrie. Sie wurde ursprünglich eingeführt als natürliche quantenmechanische Erweiterung der Poincaré-Symmetrie, die der Relativitätstheorie zugrunde liegt. Ihre Implementierung in der Quantenfeldtheorie zur Lösung einiger Unzulänglichkeiten des Standardmodells führt einerseits zur Vorhersage neuer Elementarteilchen, deren experimenteller Nachweis allerdings bis heute aussteht. Andererseits eröffnet die Supersymmetrie aber auch eine Fülle neuer Methoden zur Untersuchung von Quantenfeldtheorien allgemein. Dies liegt unter anderem daran, dass die Erfüllung der Supersymmetrie eine enge Verbindung mit der Theorie der analytischen Funktionen herstellt und dass sich damit gewisse analytische Probleme rein algebraisch lösen lassen. Dadurch bietet die Supersymmetrie auch neue mathematische Zugänge zur Quantenfeldtheorie. Ein aktuelles Forschungsprojekt in unserer Arbeitsgruppe betrifft zum Beispiel die algebraisch-geometrischen Strukturen des Feldraumes in supersymmetrischen Feldtheorien in verschiedenen Dimensionen. Um weitere Querverbindungen zur reinen Mathematik zu illustrieren, müssen wir noch einmal etwas ausholen.

„Ein häufig unterschätzter Aspekt unserer mathematischen Beschreibung der Natur ist die Tatsache, dass sich relevante Teile der Welt als relativ stabil und wohlgeordnet darstellen."

„Am spektakulärsten offenbaren sich die Grenzen unseres Verständnisses in der Konkurrenz zwischen unserer besten Theorie von Raum, Zeit und Gravitation – der Allgemeinen Relativitätstheorie – und den Regeln der Quantenmechanik."

Näherungen

Ein häufig unterschätzter Aspekt unserer mathematischen Beschreibung der Natur ist die Tatsache, dass sich relevante Teile der Welt als relativ stabil und wohlgeordnet darstellen. Denn nur diese prinzipielle Ordnung ermöglicht es uns, gewisse Phänomene zu isolieren und als „kleine Fluktuationen" eines ungestörten Zustands zu erkennen und getrennt von anderen Komplikationen zu beschreiben, gleichsam kleinen Wellen auf einer sonst ungetrübten Wasserfläche. So war es etwa nur aufgrund der großen Regelmäßigkeit der Planetenbahnen überhaupt möglich (wenn auch keinesfalls trivial!), daraus die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten der Gravitation abzuleiten. Auch die modernen kosmologischen Modelle beschreiben ein Universum, das im Großen und Ganzen oder wenigstens im Ursprung hochgradig homogen ist und aus dem erst nach und nach komplexere – ihrerseits ebenfalls wieder stabile – Strukturen auf kleineren Skalen entstanden sind.

„Kleine Parameter" sind nicht nur verantwortlich dafür, dass wir prinzipiell in der Lage sind, Gesetzmäßigkeiten in der Natur zu erkennen (wodurch sich die Physik von vielen anderen Wissenschaften unterscheidet). Sie ermöglichen auch überhaupt erst das Lösen – durch „Näherung" – von komplizierten Modellen in ausgewählten Grenzfällen. Die „Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung" lässt sich auf die mathematische Tatsache zurückführen, dass das Quadrat (und erst recht höhere Potenzen) einer positiven Zahl kleiner als 1 kleiner als die Zahl selbst ist (das heißt $x^2 < x$ falls $0 < x < 1$). Je kleiner die Zahl, desto besser die Näherung. Die fragliche Zahl stellt manchmal ein Größenverhältnis dar, das man zum Beispiel experimentell kontrollieren kann, manchmal auch eine dimensionslose sogenannte Kopplungskonstante, deren Größe und Ursprung man häufig nicht versteht. Das Prinzip gilt in gewissem Sinn auch für physikalische Theorien selbst, die immer nur eine Approximation an die tatsächlichen Gegebenheiten bleiben, und sicherlich für die Entwicklung neuer Theorien, die etablierte Theorien stets als Näherung umfassen müssen.

Diese Einsicht bedingt aber auch, dass Physik sich genau dort weiterentwickelt, wo die bisherigen Theorien und Modelle keine guten Näherungen mehr darstellen. Auf solche Bedingungen trifft man insbesondere, wenn viele der Konstituenten, Atome und Elementarteilchen, deren Verhalten man einzeln gut versteht, zusammentreten und stark miteinander wechselwirken. Häufig gelingt es, im tatsächlichen Verhalten des Gesamtsystems neue Gesetzmäßigkeiten zu identifizieren. Dann stellt sich das mathematische Problem, diese neuen „effektiven" Gesetze als Näherung aus den fundamentalen Wechselwirkungen herzuleiten. Als besonders hartnäckig haben sich etwa die oben erwähnten nicht-abelschen Eichtheorien erwiesen. Der mathematisch strenge Nachweis einer „Massenlücke" in diesen Theorien ist eines der ungelösten „Millenium Prize Problems“ der Clay Foundation.

Am spektakulärsten aber offenbaren sich die Grenzen unseres Verständnisses in der Konkurrenz zwischen unserer besten Theorie von Raum, Zeit und Gravitation – der Allgemeinen Relativitätstheorie – und den Regeln der Quantenmechanik, die uneingeschränkt für die mikroskopischen Bestandteile der Materie und deren Wechselwirkungen gelten. Denn während beide Theorien die Phänomene in ihren jeweiligen Wirklichkeitsbereichen mit fast unvorstellbarer Präzision hervorragend beschreiben, liegt dies unter anderem daran, dass diese Bereiche durch eines der größten Skalenverhältnisse getrennt sind, das uns in der Natur bekannt ist: Die Anziehung zwischen zwei Elektronen aufgrund der Schwerkraft ist $2 \cdot 10^{-43}$ Mal kleiner als die Abstoßung aufgrund ihrer elektrischen Ladung. Bei der Extrapolation in physikalische Situationen aber, in denen dieser kleine Parameter durch große Energien, hohe Temperaturen oder äquivalent kleine Zeit- und Längenskalen kompensiert wird, werden die Näherungen in beiden Theorien unzuverlässig und sie verlieren ihre Vorhersagekraft. Dies ist insbesondere der Fall im sehr frühen Universum, im Inneren von Schwarzen Löchern oder auch bei (hypothetischen) Teilchenkollisionen mit transplanckschen Energien.

Vereinheitlichung und Dualität

Zur Fruchtbarkeit der Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik gehört – trotz mancher charakterlichen Unterschiede – als gemeinsame Leidenschaft das Streben nach Einfachheit der Prinzipien. Besondere Genugtuung bereitet es, wenn sich a priori unterschiedlich eingeführte Konzepte oder ganze Theorien als eng verwandt oder gar identisch herausstellen. Die in der Mathematik allgegenwärtigen komplexen Zahlen und analytischen Funktionen hatten wir oben schon erwähnt. Das vielleicht schönste Beispiel aus der Physik ist die Vereinheitlichung der elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen in der Maxwellschen Elektrodynamik. Die Vereinigung mit der schwachen Kernkraft zur elektroschwachen Theorie erfuhr mit der Entdeckung des Higgs-Bosons am Europäischen Teilchenlabor CERN in Genf im Jahr 2012 ihre abschließende experimentelle Bestätigung.

In ähnlicher Weise gibt es Anhaltspunkte, dass die mathematischen Probleme der Quantengravitation letztlich eng mit den Unzulänglichkeiten der quantenfeldtheoretischen Modelle der Elementarteilchen verflochten sind. Diese Vorstellung lässt sich insbesondere in der Stringtheorie realisieren: Aus der Annahme, dass die fundamentalen quantenmechanischen Bausteine der Materie eine intrinsische Ausdehnung von etwa der obigen Planckschen Größenordnung haben, folgt nicht nur mathematisch zwingend, dass diese Bausteine auch der Einsteinschen Gravitation unterworfen sind. Schon in den einfachsten Lösungen der Stringtheorie erhält man eine erste grobe Skizze für die Vereinheitlichung aller Wechselwirkungen. Die Verfeinerung dieser Modelle, und insbesondere die Frage nach dem Zusammenhang zur Stärke der Gravitationswechselwirkung, ist Gegenstand aktueller Forschungen, gerade auch am Institut für Theoretische Physik hier in Heidelberg.

Entstehung, Rolle und Aufdeckung von Struktur

Warum gibt es in der Nähe von Sternen Planeten und nicht nur Staub? Wie können wir neuronale Aktivitätsmuster im Gehirn besser verstehen? Welche fundamentalen Zusammenhänge bestehen zwischen mathematischen und physischen Strukturen? Mit solchen Fragen zur Entstehung, Rolle und Aufdeckung von Struktur in einem weiten Feld von Naturphänomenen, die von der subatomaren Teilchenphysik zur Kosmologie und von der fundamentalen Quantenphysik zur Neurowissenschaft reichen, beschäftigt sich seit Januar 2019 das Exzellenzcluster „STRUKTUREN: Emergenz in Natur, Mathematik und komplexen Daten“.

Die rund 100 beteiligten Wissenschaftler aus Physik, Mathematik und Informatik untersuchen in sieben „Comprehensive Projects“, wie Struktur, kollektive Phänomene und Komplexität durch das Zusammenspiel vieler Freiheitsgrade aus den grundlegenden Gesetzen der Physik entstehen. Sie untersuchen dabei Modellsysteme mit einer Kombination von mathematischer Theorie, numerischer Simulation und neuartigen analogen Rechnern. Dabei werden moderne Methoden der Datenanalyse angewandt und weiterentwickelt sowie neue Resultate und Ideen aus Geometrie und Topologie in Anwendungen übertragen. Die Konzepte und Methoden sind auch von zentraler Bedeutung, um relevante Strukturen in großen Datenmengen zu finden und innovative analoge Rechner zu entwickeln.

Das Exzellenzcluster wurde im Rahmen der Exzellenzstrategie des Bundes und der Länder an der Universität Heidelberg eingerichtet. Beteiligt sind neun Universitätsinstitute sowie die Max-Planck-Institute für Astronomie (MPIA) und Kernphysik (MPIK) in Heidelberg, das Heidelberger Institut für Theoretische Studien (HITS) und das Zentralinstitut für seelische Gesundheit (ZI) in Mannheim. Sprecher sind Prof. Dr. Manfred Salmhofer (Institut für Theoretische Physik), Prof. Dr. Anna Wienhard (Mathematisches Institut) und Prof. Dr. Ralf S. Klessen (Zentrum für Astronomie).

www.thphys.uni-heidelberg.de/~structures

Zur Erforschung dieser physikalisch motivierten Fragen ist die Stringtheorie wieder auf die Zusammenarbeit mit der Mathematik angewiesen. Die Supersymmetrie, die für die Stringtheorie unabdingbar ist, erfordert zum Beispiel, dass die von Riemann und Einstein konzipierte Raumzeit mit einer ganzen Reihe weiterer Strukturen ausgestattet ist, sie muss nämlich mindestens eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer Ricci-flachen Kähler-Metrik sein. Der amerikanisch-chinesische Mathematiker und Träger der Fields-Medaille Shing-Tung Yau hatte im Jahr 1977 gezeigt, dass diese Forderungen erfüllbar sind, ohne dass es möglich war, die komplizierten Gleichungen auch nur näherungsweise explizit zu lösen. Dank der Supersymmetrie können dann die zugehörigen Lösungen der Stringtheorie aber mit physikalischen Methoden näherungsweise untersucht werden.

Dabei stellte sich ab Anfang der 1990er-Jahre in höchst überraschender Weise heraus, dass paarweise verschiedene (nämlich topologisch inäquivalente) Mannigfaltigkeiten als Ausgangspunkte zu ein und derselben Lösung der Stringtheorie führen können. Umgekehrt gesagt lassen sich in der quantenmechanischen Theorie verschiedene „kleine Parameter“ identifizieren, und die zugehörigen Approximationen gehören zu verschiedenen geometrischen Modellen. Diese Aussage der „Mirror-Symmetrie“ war mathematisch vollkommen unerwartet und stieß anfangs auch auf einige Skepsis. Die Mächtigkeit solcher „Dualitäten“ (oder auch „Korrespondenzen“) genannten Beziehungen liegt dann üblicherweise darin, dass Rechnungen, die in der einen Näherung auf ein hochgradig komplexes mathematisches Problem führen, sich in der anderen Formulierung auf ganz elementare Weise lösen lassen – und umgekehrt. Dadurch stärken Dualitäten das Vertrauen in die Stichhaltigkeit der physikalischen Theorie, machen strukturelle mathematische Vorhersagen und geben auch der Beziehung zwischen beiden Disziplinen eine neue Qualität.

Im Zuge der von dem Physiker und Träger der Fields-Medaille Edward Witten initiierten „zweiten Stringrevolution“ wurden Dualitäten zu einem engmaschigen Netz geknüpft, das, so wird vermutet, alle theoretisch möglichen (mathematisch konsistenten) fundamentalen Theorien umspannt, die mit allen bekannten physikalischen Prinzipien verträglich sind. Die von dem argentinischen Physiker Juan Maldacena eingeführte sogenannte holographische „AdS/CFT-Korrespondenz“ sieht sogar vor, dass stark gekoppelte nicht-abelsche Eichtheorien dual sind zu gravitationellen Quantentheorien auf speziellen „negativ gekrümmten“ Raumzeiten.

Ein strenger Nachweis solcher Aussagen scheint derzeit außer Reichweite. Die meisten Anstrengungen konzentrieren sich daher darauf, die beiden Seiten einer Dualität auf identische mathematische Strukturen zurückzuführen, die zwar nicht die volle Äquivalenz der physikalischen Theorien implizieren, aber wenigstens in der geeigneten Näherung die bekannten Aussagen ergeben. Aufbauend auf Entdeckungen der letzten Jahre ist ein Ziel unserer Forschungen, zu beschreiben, wie sich aus der von dem französisch-russischen Mathematiker Maxim Kontsevich postulierten „Homologischen Mirror-Symmetrie“ die oben erwähnten quantitativen Vorhersagen reproduzieren lassen.

Es bleibt die interessante Frage nach der tieferen Bedeutung von Dualitäten. Einerseits bestätigen sie, dass die gleichen Tatsachen zwar konzeptionell verschiedene Beschreibungen zulassen können, diese aber immer noch in mathematischer Sprache ausgedrückt werden. Andererseits wird aber nur die jeweils schwach gekoppelte Version tatsächlich relevant werden für die Beschreibung der Natur. Jedenfalls ist das Teilen der Dualitätsidee der vielleicht größte kulturelle Beitrag der neuen Wechselwirkung zwischen Physik und Mathematik. ●

APPROXIMATION

DUALITIES IN MATHEMATICS AND PHYSICS

JOHANNES WALCHER

The quantitative and objective description of nature is one of the greatest cultural achievements of modern times. The experimental method and the development of abstract concepts allow for a fundamental understanding of connections between different phenomena. Physics in particular uses advanced mathematical concepts and requires the solution of complicated mathematical problems, and sometimes even the development of entirely new mathematical notions.

An important aspect of our mathematical description of nature is the idea that such a description is only an “approximation”. New discoveries are expected when higher orders in the small parameters that govern these approximations can no longer be neglected: the gravitational pull between two electrons is $2 \cdot 10^{-43}$ times smaller than their electric repulsion, but quantum gravitational effects do become relevant in extreme situations, such as the early universe or trans-Planckian scattering.

Physics and mathematics share a passion for simple principles. For instance, complex numbers and analytic functions are ubiquitous in both pure and applied mathematics. The unification of Maxwell’s electrodynamics with the weak nuclear force was conclusively established with the discovery of the Higgs boson. String theory shows that the difficulties of quantum gravity are intertwined with the shortcomings of the Standard Model of particle physics. Its use of supersymmetry implies a close connection with modern algebraic and differential geometry, and topology. We know that certain solutions of string theory can admit different approximation schemes based on distinct classical geometries. These “dualities” have led to predictions about ties between different mathematical theories. As part of the Cluster of Excellence STRUCTURES, our research group studies mathematical structures in string theory and supersymmetric field theory, and their implications for geometry and topology. ●

PROF. DR JOHANNES WALCHER joined the staff of Heidelberg University's Faculty of Mathematics and Computer Science in 2015 and is also a co-opted member of the Faculty of Physics and Astronomy. He earned his PhD at ETH Zurich (Switzerland) and conducted research at CERN in Geneva (Switzerland), the Kavli Institute for Theoretical Physics in Santa Barbara (USA) and the Institute for Advanced Study in Princeton (USA). Before transferring to Heidelberg, he was a professor of physics and mathematics at McGill University in Montreal (Canada). He heads the research group "Mathematical Physics" (established in the context of Heidelberg University's Institutional Strategy) at the Mathematical Institute and is a member of the new Cluster of Excellence STRUCTURES.

Contact: walcher@uni-heidelberg.de

"The quantitative and objective description of nature is one of the most remarkable cultural achievements of the modern age."

„Das Teilen der Dualitätsidee ist vielleicht der größte kulturelle Beitrag der neuen Wechselwirkung zwischen Physik und Mathematik.“