

JENSEITS UNSERER

VORSTELLUNG

JENSEITS UNSERER VORSTELLUNG

DIE GEOMETRIE DER SCHEIBE

ANNA WIENHARD

Die Entdeckung der „hyperbolischen Geometrie“ hat die Mathematik revolutioniert, eine neue Welt tat sich auf. Die Forscher führten dabei neue Geometrien ein, die so wie die hyperbolische Geometrie selbst fern von Anschauung sind. Am mathematischen Institut der Universität Heidelberg beschäftigen sich Wissenschaftler mit Räumen beliebiger Dimension und deren Eigenschaften, wobei sich die geometrischen Eigenschaften dieser Räume gehörig von den Eigenschaften des „Euklidischen Raums“ unterscheiden, den wir aus der Schulmathematik kennen.

V

Viele Jahrtausende lang glaubten die Menschen, sie lebten auf einer flachen Scheibe und an deren Rand sei das Ende der Welt. Dass wir auf der Oberfläche einer Kugel existieren könnten, war jenseits ihrer Vorstellungskraft. Heute wissen wir, dass wir auf einem Erdball leben – obwohl die Welt um uns herum flach erscheint. Unser Dasein auf einer zweidimensionalen Fläche in einem dreidimensionalen Raum erscheint uns ganz normal. Die „Stringtheorie“, ein Teilgebiet der theoretischen Physik, vermutet sogar noch weitere Dimensionen: Die Theorie besagt, dass wir nicht in einer vierdimensionalen Raum-Zeit leben – also in drei Dimensionen des Raumes und einer weiteren Dimension für die Zeit –, sondern in einem zehndimensionalen Universum mit neun Dimensionen im Raum und einer Dimension für die Zeit, wobei sechs der Raumdimensionen so klein sind, dass wir sie im Alltag nicht bemerken. Die Modelle für eine solch unvorstellbare zehndimensionale Raum-Zeit sind in der Mathematik entstanden. Unsere Forschungsarbeiten in der Arbeitsgruppe „Differentialgeometrie“ des Mathematischen Instituts der Universität Heidelberg beschäftigen sich mit Räumen beliebiger Dimension und deren Eigenschaften.

„Viele Jahrtausende lang glaubten die Menschen, sie würden auf einer flachen Scheibe leben. Dass wir tatsächlich auf der Oberfläche einer Kugel leben, lag jenseits ihrer Vorstellungskraft.“

wobei sich die geometrischen Eigenschaften dieser Räume gehörig von den Eigenschaften des „Euklidischen Raums“ unterscheiden, den wir aus der Schulmathematik kennen.

Die Geometrie der flachen Welt

Die Geometrie der Euklidischen Ebene ist die Geometrie der flachen Welt. Die Vorstellung geht zurück auf den griechischen Mathematiker Euklid, der wahrscheinlich im dritten Jahrhundert vor Christus lebte. Euklid prägte die Geometrie bis in das 19. Jahrhundert hinein. Er führte beispielsweise die Begriffe „Punkt“ und „Gerade“ ein, und er formulierte fünf Postulate (Axiome), die die euklidische Geometrie charakterisieren. Das fünfte Axiom – das Parallelenaxiom – ist das interessanteste von allen. Es besagt: Zu einer gegebenen Gerade und einem gegebenen Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, existiert eine parallele Gerade, die durch den Punkt geht.

Für Jahrhunderte war es eine offene Frage, ob das Parallelenaxiom als fünftes Axiom gefordert werden muss, oder ob es bereits aus den ersten vier Axiomen gefolgert werden kann. Viele Mathematiker haben versucht, diese Frage zu beantworten. Sie nahmen zum Beispiel einen Raum an, in dem das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist, und versuchten zu zeigen, dass dann auch eines der ersten vier Axiome nicht gelten kann. Das gelang den Wissenschaftlern nicht – aber sie fanden zahlreiche Eigenschaften, die ein Raum

Mathematische Methoden für andere Disziplinen erschließen

Das traditionell starke Fach Mathematik an der Universität Heidelberg hat aufgrund seiner engen Querverbindungen zur Physik und Chemie, zu den Biowissenschaften und der Informatik ein hohes Potenzial für interdisziplinäre Zusammenarbeit. Im Rahmen der Exzellenzinitiative wurden daher fünf mathematische Forschungsschwerpunkte als MATHematics Center Heidelberg (MATCH) ausgebaut: „Algebra und Arithmetik“, „Topologie und Geometrie“, „Angewandte Analysis und Mathematische Modellierung“, „Numerik und Optimierung“ sowie „Statistik und Stochastik“.

MATCH soll die Internationalität in der Mathematik und die interdisziplinäre Zusammenarbeit stärken. Dabei besteht auch eine enge Zusammenarbeit mit dem anwendungsorientierten Interdisziplinären Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (IWR) an der Universität Heidelberg, in dem Fragestellungen aus Natur-, Technik- und Geisteswissenschaften mit dem Methodenrepertoire des Wissenschaftlichen Rechnens bearbeitet werden.

www.match.uni-heidelberg.de

hätte, in dem das Parallelenaxiom nicht gelten würde. Im 19. Jahrhundert entdeckten die Mathematiker Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski und János Bolyai schließlich einen Raum, in dem die ersten vier Axiome Euklids erfüllt sind – das Parallelenaxiom aber nicht gilt: die „hyperbolische Ebene“. Dies war die Geburtsstunde der hyperbolischen Geometrie – eine Revolution, der Beginn eines neuen Verständnisses der Geometrie.

Das Gegenstück der hyperbolischen Geometrie ist die zweidimensionale sphärische Geometrie. „Sphäre“ ist der mathematische Begriff für die Oberfläche einer Kugel. Die „Geraden“ in der sphärischen Geometrie sind Großkreise. Sie bilden die kürzesten Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten. In der sphärischen Geometrie lässt sich das Parallelenaxiom niemals erfüllen, da sich zwei Großkreise immer schneiden. Dies wirkt sich auch auf andere geometrische Eigenschaften aus, die uns aus der euklidischen Geometrie unumstößlich erscheinen. So ist auf der Sphäre die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks niemals 180 Grad, sondern immer größer. In der hyperbolischen Geometrie ist die Summe der Innenwinkel im Unterschied zur sphärischen Geometrie immer kleiner als 180 Grad. Das Parallelenaxiom wird auf diese Weise verletzt: Zu einer gegebenen Gerade und einem gegebenen Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, gibt es nun nicht nur eine parallele Gerade, sondern unendlich viele parallele Geraden, die durch den Punkt gehen. Dies ist schwer vorstellbar, wenn man an die Sichtweise der Euklidischen Geometrie gewöhnt ist.

Der hyperbolische Fußball

Um die Geometrie auf der Sphäre zu verstehen, hilft es uns, dass sie als Kugeloberfläche auf natürliche Weise in den dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet ist. Die hyperbolische Ebene hingegen lässt sich nicht in den dreidimensionalen euklidischen Raum einbetten. Mathematiker betrachten daher verschiedene Modelle der hyperbolischen Ebene, die mit der euklidischen Geometrie beschrieben werden können. Jedes Modell stellt nur einige Größen der hyperbolischen Ebene richtig dar; weitere erscheinen anders, als sie es in der Realität der hyperbolischen Ebene sind.

Das bekannteste Modell der hyperbolischen Ebene ist das Kreisscheiben-Modell des französischen Mathematikers Henri Poincaré. Viele haben dieses Modell schon einmal gesehen, ohne es zu wissen: Die berühmten „Kreislimit-Bilder“ des niederländischen Künstlers Maurits Cornelis Escher illustrieren das Modell von Poincaré. Die Punkte der hyperbolischen Ebene sind die Punkte im Inneren einer Kreisscheibe von Radius eins. Die Geraden sind hier Kreissegmente oder Geraden, die senkrecht auf dem Rand der Kreisscheibe stehen. Der euklidische Winkel, den wir mit dem Geodreieck zwischen zwei Kreissegmenten messen würden, ist der hyperbolische Winkel zwischen den Geraden.

„Unsere Forschungsarbeiten beschäftigen sich mit Räumen beliebiger Dimension und deren Eigenschaften.“

Aber die Abstände werden in diesem Modell verzerrt. Der euklidische Abstand, den wir mit dem Lineal messen, ist nicht der Abstand der Punkte in der hyperbolischen Ebene. Je näher wir an den Rand der Kreisscheibe kommen, desto weiter liegen die Punkte in der hyperbolischen Ebene auseinander – selbst, wenn es für unser euklidisches Auge so aussieht, als würden sie nah beieinanderliegen. Der Kreis von Radius eins am Rand der Kreisscheibe ist nicht mehr Teil unseres Raumes: Er ist unendlich weit von jedem Punkt im Innern der Kreisscheibe entfernt. Die zum Rand der Kreisscheibe immer kleiner werdenden Formen in den Escher-Bildern sind in der hyperbolischen Geometrie der Kreisscheibe alle gleich groß.

Es hilft, mit der hyperbolischen Ebene zu spielen, um ein Verständnis dafür zu entwickeln, wie sie „aussieht“ und was es bedeutet, in einer hyperbolischen Ebene zu leben. Der US-amerikanische Mathematiker Jeff Weeks hat dafür einige Computerspiele programmiert. Man kann sich aber auch einfach aus Papier einen hyperbolischen Fußball basteln, der die hyperbolische Ebene annäherungsweise beschreibt: Die euklidische Ebene kann mit regelmäßigen Sechsecken gepflastert werden. In diesem Bienenwabemuster ist jedes regelmäßige Sechseck von sechs weiteren Sechsecken umgeben. Wenn wir nun immer wieder ein Sechseck durch ein regelmäßiges Fünfeck ersetzen, das dann von fünf regelmäßigen Sechsecken umgeben ist, biegt sich das Papier nach oben. Wenn wir dies fortsetzen,

„Von besonderem Interesse ist es, alle Möglichkeiten zu finden, wie eine gegebene Form mit einer gegebenen geometrischen Struktur versehen werden kann.“

erhalten wir einen Fußball, der aus flachen Fünf- und Sechsecken zusammengeklebt ist. Dieser klassische Fußball entspricht annäherungsweise der Sphäre.

Was aber passiert, wenn wir immer wieder ein Sechseck durch ein regelmäßiges Siebeneck ersetzen, das dann von sieben regelmäßigen Sechsecken umgeben ist? Bastelt man dies aus Papier, sieht man, dass sich das Papier immer wieder nach oben und unten biegen muss. Um jedes Siebeneck herum entsteht mehr Fläche als in der euklidischen Ebene. Je größer man den hyperbolischen Fußball baut, desto schwieriger wird es, die zusätzliche Fläche unterzubringen: Der hyperbolische Fußball zeigt sehr anschaulich, dass in der hyperbolischen Ebene in einem Kreis viel mehr Fläche enthalten ist als in einem Kreis des gleichen Radius in der euklidischen Ebene.

Neue Geometrien

Die Entdeckung der hyperbolischen Geometrie hat die Geometrie revolutioniert. Es tat sich eine neue Welt auf. Man führte neue Geometrien ein, die so wie die hyperbolische Geometrie selbst fern unserer Anschauung sind.

Makroskopische Eigenschaften von geometrischen Räumen

Mit speziellen Forschungsfragen der Geometrie beschäftigt sich das Graduiertenkolleg „Asymptotische Invarianten und Limiten von Gruppen und Räumen“, das von Mathematikern der Universität Heidelberg gemeinsam mit Fachkollegen des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) getragen wird. Im Mittelpunkt steht die sogenannte asymptotische Geometrie, die makroskopische Eigenschaften von geometrischen Räumen erforscht. Indem diese gleichsam aus weiter Ferne betrachtet werden, verschwindet der Unterschied zwischen einem kontinuierlichen Raum und seiner diskreten Annäherung. So ermöglicht die asymptotische Geometrie eine einheitliche Untersuchung kontinuierlicher und diskreter geometrischer Strukturen. Dem Wechselspiel verschiedener Methoden der Mathematik kommt dabei eine wichtige Bedeutung zu.

Mit dem im Oktober 2016 gestarteten Kolleg soll national und international die erste systematische und institutionalisierte Doktorandenausbildung auf dem Gebiet der asymptotischen Geometrie etabliert werden. Sprecher des Graduiertenkollegs, das die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) über einen Zeitraum von viereinhalb Jahren mit rund vier Millionen Euro fördert, sind Prof. Dr. Anna Wienhard (Heidelberg) und Prof. Dr. Roman Sauer (Karlsruhe).

www.groups-and-spaces.kit.edu

Die euklidische, die sphärische und die hyperbolische Geometrie basieren darauf, dass man den Abstand zwischen zwei Punkten messen und bestimmen kann. Die „projektive“ oder „affine“ Geometrie aber basiert jeweils auf anderen Größen. In der affinen Geometrie existieren eine Längen mehr, es gibt nur noch den Begriff der Parallelität. Die projektive Geometrie, die Geometrie des perspektivischen Zeichnens, ist allein durch sogenannte Inzidenzrelationen bestimmt: Man kann keine Längen messen, es gibt keinen Begriff der Parallelität, man kann nur sagen, ob sich zwei Geraden schneiden oder nicht.

Der deutsche Mathematiker Felix Klein versuchte im Jahr 1872, all diese neuen Geometrien in ein einheitliches Konzept zu fassen. Er veränderte dazu den Blickwinkel und stellte nicht die geometrischen Eigenschaften, sondern die Symmetrien eines Raumes in den Vordergrund. Statt geometrische Begriffe wie Abstand, Winkel, Flächeninhalt oder Parallelität zu definieren, richtete er das Augenmerk auf alle Bewegungen, die gegebene Größen nicht verändern. Was das bedeutet, lässt sich gut an der zweidimensionalen Ebene beschreiben. Alle Symmetrien der euklidischen Ebene sind Bewegungen, die Abstände, Winkel, Flächeninhalte oder Parallelen nicht verändern; jede Bewegung ist ein Produkt von Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen. Um die affine Geometrie zu beschreiben, betrachtet man den gleichen Raum und alle Punkte der euklidischen Ebene – aber man lässt mehr Bewegungen des Raumes als Symmetrien zu. Ein Beispiel sind Streckungen, die zwar Längen verändern, aber die Parallelität von Objekten erhalten. Felix Kleins neuer Zugang über die Symmetrien ist der moderne Zugang, den Mathematiker und theoretische Physiker heute nehmen, um hochdimensionale Objekte und deren Geometrie zu untersuchen.

Geometrie und Form

Unsere Arbeitsgruppe beschäftigt sich mit den abstrakten Strukturen, die in diesem modernen Zugang eine Rolle spielen. Insbesondere sind das die sogenannten Lie-Gruppen, die als Symmetriegruppen der Geometrien auftreten. Ein weiterer Schwerpunkt unserer Forschung gilt der Frage, wie die sehr abstrakt beschriebenen Geometrien konkret Form annehmen können. Die sphärische Geometrie ist auf einer endlich ausgedehnten Form – einer Fläche – realisiert. Euklidische und hyperbolische Ebenen sind unendlich ausgedehnte Räume. Aber auch endlich ausgedehnte Flächen können mit diesen beiden Geometrien versehen werden. Mit anderen Worten: Es gibt endlich ausgedehnte Flächen, in denen die Umgebung eines jeden Punktes so aussieht wie eine Umgebung in der euklidischen oder hyperbolischen Ebene. Für eine Person, die auf dieser Fläche lebt, scheint es also so, als würde sie in der euklidischen Ebene oder hyperbolischen Ebene leben. Wir sagen dann, dass die Fläche eine euklidische oder eine hyperbolische Struktur trägt.



PROF. DR. ANNA WIENHARD leitet seit dem Jahr 2012 die Arbeitsgruppe Differentialgeometrie am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg und seit 2015 die Arbeitsgruppe „Gruppen und Geometrie“ am Heidelberger Institut für Theoretische Studien (HITS). Sie ist geschäftsführende Direktorin des Mathematischen Instituts und Mitglied des Direktoriums des MAThematics Center Heidelberg (MATCH) sowie Mitglied des Interdisziplinären Zentrums für Wissenschaftliches Rechnen (IWR). Nach ihrer Promotion an der Universität Bonn und Aufenthalt an der ETH Zürich und der Universität Basel in der Schweiz verbrachte sie prägende Jahre in den USA, am Institute for Advanced Study in Princeton, an der University of Chicago sowie an der Princeton University. Für ein Forschungsprojekt an der Universität Heidelberg zu Symmetrien und sogenannten Deformationsräumen geometrischer Strukturen erhielt Anna Wienhard einen Consolidator Grant des Europäischen Forschungsrats (ERC) mit Fördermitteln in Höhe von knapp 1,6 Millionen Euro.

Kontakt: wienhard@uni-heidelberg.de

Die euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie sind die Modellgeometrien in Dimension 2, da jede Fläche entweder eine sphärische, euklidische oder hyperbolische Struktur tragen kann. Mathematiker klassifizieren Flächen durch ihr Geschlecht. Das Geschlecht einer Fläche ist die Anzahl von Henkeln, die man auf eine Kugel kleben muss, sodass die Oberfläche der Kugel mit Henkeln die gegebene Fläche ergibt. Flächen von Geschlecht null sind Sphären; Flächen von Geschlecht eins sind Oberflächen eines Donuts, sie werden Tori genannt; die Oberfläche einer Brezel ist eine Fläche vom Geschlecht drei. Ein Torus kann mit einer euklidischen Struktur versehen werden. Dies lässt sich veranschaulichen, klebt man einen Torus aus einem rechteckigen Stück Papier zusammen: Erst verklebt man zwei gegenüberliegende Seiten des Rechtecks und erhält einen Zylinder, dann verklebt man die Enden des Zylinders und erhält einen Torus. Die Umgebung eines Punktes auf dem Torus sieht dann so aus wie die Umgebung eines Punktes im Rechteck. Global ist die Struktur aber verschieden.

Alle Flächen von Geschlecht zwei und größer können mit einer hyperbolischen Struktur versehen werden – die meisten Flächen sind also hyperbolisch. In Dimension 3 stellte der US-amerikanische Mathematiker William Thurston die „Geometrisierungsvermutung“ auf: Jeder dreidimensionale Körper kann in einfachere Stücke zerschnitten werden, sodass jedes dieser einfacheren Stücke in Dimension 3

Grundlagenforschung zur Interpretation großer Datenmengen

Das Heidelberger Institut für Theoretische Studien (HITS gGmbH) wurde 2010 von SAP-Mitgründer Klaus Tschira und der Klaus Tschira Stiftung als private, gemeinnützige Forschungseinrichtung ins Leben gerufen. Das HITS betreibt mit mittlerweile zwölf Forschungsgruppen Grundlagenforschung in den Naturwissenschaften, der Mathematik und der Informatik, dabei werden große Datenmengen verarbeitet, strukturiert und analysiert. Die Forschungsfelder reichen von der Molekularbiologie bis zur Astrophysik.

Die Gesellschafter der HITS gGmbH sind die HITS-Stiftung, die Universität Heidelberg und das Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Das HITS arbeitet außerdem mit weiteren Universitäten und Forschungsinstituten sowie mit industriellen Partnern zusammen. Die größte Unterstützung erhält das HITS über die HITS-Stiftung von der Klaus Tschira Stiftung, die wichtigsten externen Mittelgeber sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF), die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) und die Europäische Union.

www.h-its.org

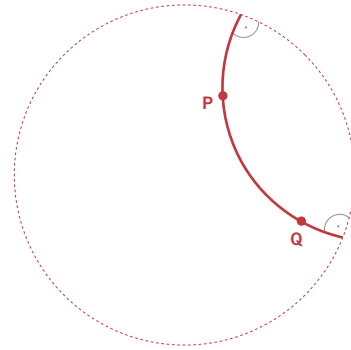


Abbildung 1
Hyperbolische Geometrie: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist ein Kreis senkrecht zum Rand

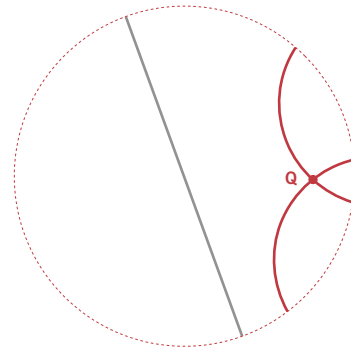


Abbildung 2
Hyperbolische Geometrie: Gegeben ein Kreissegment und einen Punkt Q, existieren unendlich viele parallele Kreissegmente durch Q

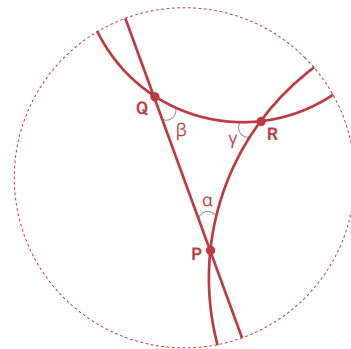


Abbildung 3
Hyperbolische Geometrie: Dreiecksbeziehungen. Die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner als 180°
 $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$

mit genau einer von acht Modellgeometrien versehen werden kann. Die Geometrisierungsvermutung war eines der Millenniumsprobleme, für deren Lösung die amerikanische „Clay Foundation“ eine Million Dollar ausgelobt hat. Die Vermutung Thurstons wurde im Jahr 2003 auf spektakuläre und unerwartete Weise von Grigory Perelman bewiesen, einem russischen Mathematiker. Es ist bis heute das einzige Millenniumsproblem, das gelöst wurde. Von William Thurston, von dem die Idee der Geometrisierung stammt, wird übrigens erzählt, dass er aufgrund eines Sehfehlers nicht imstande war, räumlich zu sehen. Er musste sich die dritte Dimension also vorstellen. Warum sollte er bei drei Dimensionen haltmachen und sich nicht auch höhere Dimensionen vorstellen? Vielleicht ist das der Grund für Thurstons einzigartige geometrische Intuition und Vorstellungskraft.

In höheren Dimensionen ist die Situation viel komplexer: Verallgemeinerungen der Geometrisierungsvermutung gibt es hier nicht. In unserer Arbeitsgruppe in Heidelberg beschäftigen wir uns mit Geometrisierungsfragen in höheren Dimensionen und mit allgemeinen Geometrien im Sinne Felix Kleins. Von besonderem Interesse ist es für uns, alle Möglichkeiten zu finden, wie eine gegebene Form mit einer gegebenen geometrischen Struktur versehen werden kann. Anschließend untersuchen wir, wie diese geometrische Struktur kontinuierlich verändert werden kann. Diese kontinuierlichen Veränderungen beschreiben sogenannte Deformations- oder Modulräume. Ein Modulraum von zentraler Bedeutung für Mathematik und Physik ist der „Teichmüllerraum“. Er beschreibt alle Möglichkeiten, eine Fläche von Geschlecht größer gleich zwei mit einer hyperbolischen Struktur zu versehen.

Vor etwa fünfzehn Jahren entdeckten wir gemeinsam mit anderen Forschern, die sich mit Verallgemeinerungen des Teichmüllerraumes beschäftigten, die „höheren Teichmüllerräume“. Dies war sehr unerwartet und hat ein gänzlich neues Forschungsgebiet erschlossen. In jüngerer Zeit haben wir neue geometrische Strukturen gefunden, mit denen wir neue Beispiele diskreter Untergruppen von Lie-Gruppen definieren können. Alle unsere bisherigen Erkenntnisse sind aber nur die „Spitze des Eisbergs“ der Struktur und der Eigenschaften höherer Teichmüllerräume: Es gibt in ihnen noch viel zu entdecken. ●

„Ein Modulraum von zentraler Bedeutung für Mathematik und Physik ist der Teichmüllerraum. Vor etwa 15 Jahren haben wir ‚höhere Teichmüllerräume‘ entdeckt.“

BEYOND IMAGINATION

THE GEOMETRY OF THE DISC

ANNA WIENHARD

For centuries, people believed that they lived on a two-dimensional flat disc that ended at the rim, with nothing beyond. It was unbelievable to them that they might live on the surface of a sphere. Today we are comfortable with the idea of living on the surface of our round earth. However, string theorists now predict that our universe is not four-dimensional (three dimensions for space and one dimension for time), but actually ten-dimensional, with six dimensions being so small that we cannot perceive them in daily life. This is unimaginable for most of us. As mathematicians, we investigate the space of arbitrarily high dimensions, whose geometric properties are often quite different from the properties of the Euclidean space we learned about in school.

In the 19th century, mathematicians discovered that there is another geometry besides Euclidean geometry, which they named hyperbolic geometry. Hyperbolic geometry satisfies all the axioms that define Euclidean geometry except the postulate of parallelism, which states that for a given line and a given point not on the line, there is a unique parallel line through that point. In hyperbolic geometry, there are infinitely many parallel lines. This leads to other intriguing geometric properties, such as the fact that the sum of the inside angles of a triangle in hyperbolic space is strictly less than 180 degrees.

The discovery of hyperbolic geometry was a mathematical revolution that led to other new geometries and a completely new understanding of what geometry actually is. The modern view, based on concepts developed by Felix Klein, defines geometry through the symmetries of a space, not through its geometric quantities.

In our research, we investigate geometries in the sense of Felix Klein. In particular, we want to find out if a given topological shape can be endowed with a specific geometry, and then describe all the ways in which this might be possible. The result is a phenomenon known as moduli spaces. Through our cooperation with other researchers over the past 15 years, we were able to identify a new family of moduli spaces, the “higher Teichmüller spaces”. ●

PROF. DR ANNA WIENHARD has been heading the “Differential Geometry” research group at Heidelberg University’s Mathematical Institute since 2012 and the “Groups and Geometry” research group at the Heidelberg Institute for Theoretical Studies (HITS) since 2015. She is Managing Director of the Mathematical Institute, a member of the directorate of MATCH – the MAThematics Center Heidelberg – and a member of the Interdisciplinary Center for Scientific Computing (IWR). After earning her doctorate at the University of Bonn and working at both ETH in Zurich and the University of Basel in Switzerland, she spent defining years in the USA, at the Institute for Advanced Study in Princeton, the University of Chicago and Princeton University. Anna Wienhard received a European Research Council (ERC) Consolidator Grant in the amount of nearly 1.6 million euros for a research project at Heidelberg University that deals with symmetries and so-called deformation spaces of geometric structures.

Contact: wienhard@uni-heidelberg.de

“For many thousands of years, people believed that they lived on a flat disc. To them, the fact that we live on the surface of a sphere was simply beyond imagination.”