A Lösungen der Übungsaufgaben

Im Folgenden sind Lösungen für einige der am Ende der einzelnen Kapitel formulierten Aufgaben zusammengestellt. Es handelt sich dabei nur um Lösungsvorschäge ohne Anspruch auf Vollständigkeit zur Anregung weiterer eigener Überlegungen.

A.1 Kapitel 1

Lösung A.1.1: Es ist:

1. $\operatorname{Kern} A := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = 0\}$, $\operatorname{Bild} A := \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, \exists x \in \mathbb{R}^n, \text{ s. d. } Ax = y\}$,
   $\operatorname{Rang} A := \dim(\operatorname{Bild} A)$.
2. $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A^T := (a^T_{ij})$, $a^T_{ij} = a_{ji} \,\forall\, i,\ j$.
3. $\operatorname{Bild} A \oplus \operatorname{Kern} A^T \ = \ R^m$.
4. $\operatorname{Kern} A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Bild} A = \mathbb{R}^n$.

Lösung A.1.2: Eine lineare Optimierungsaufgbe in kanonischer Form hat die Gestalt: Suche $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} &Q(x) = c^T \cdot x \longrightarrow \min!, \\ &x \geq 0,\ Ax = b, \end{aligned}$$

mit vorgegebenen $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die zugehörige duale Aufgabe lautet: Suche $y \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{aligned} &b^T \cdot y \longrightarrow \max!, \\ &A^T y \leq c. \end{aligned}$$

a) 1. Version: Aufspalten von x_3 in einen positiven und negativen Anteil $x_3^+ - x_3^-$ mit $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$ und Einführen dreier Schlupfvariablen x_4, x_5 und x_6 werden die Ungleichungen in Gleichungen überführt:

$$Q(x) = x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^- \to \min!, \quad x \geq 0,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_4 & & & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & x_3^+ & - & x_3^- & & & + & x_5 & & & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 4x_3^+ & + & 4x_3^- & & & & & + & x_6 & = & 1 \end{array}$$

2.Version: Die Ungleichungen $x_2 \geq 0$ und $x_2 + x_3 \leq 0$ implizieren $x_3 \leq 0$. Durch Substitution $x_3 \to -x_3$ erhält man die Bedingung $x \geq 0$. Durch Einführen von Schlupfvariablen

x_4, x_5, x_6 erhält man das äquivalente System

$$Q(x) = x_1 + x_2 - x_3 \to \text{min!}, \quad x \geq 0,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 4x_3 & & & & & + & x_6 & = & 1 \end{array}$$

b) Aufspalten von x_i in $x_i^+ - x_i^-$ mit der Bedingung $x_i^{\pm} \geq 0$, sowie Einführen zweier Schlupfvariablen für die Ungleichungen liefert:

$$Q(x) = x_1^+ + x_1^- + x_2^+ + x_2^- + x_3^+ + x_3^- \to \text{min!}, \quad x \geq 0,$$

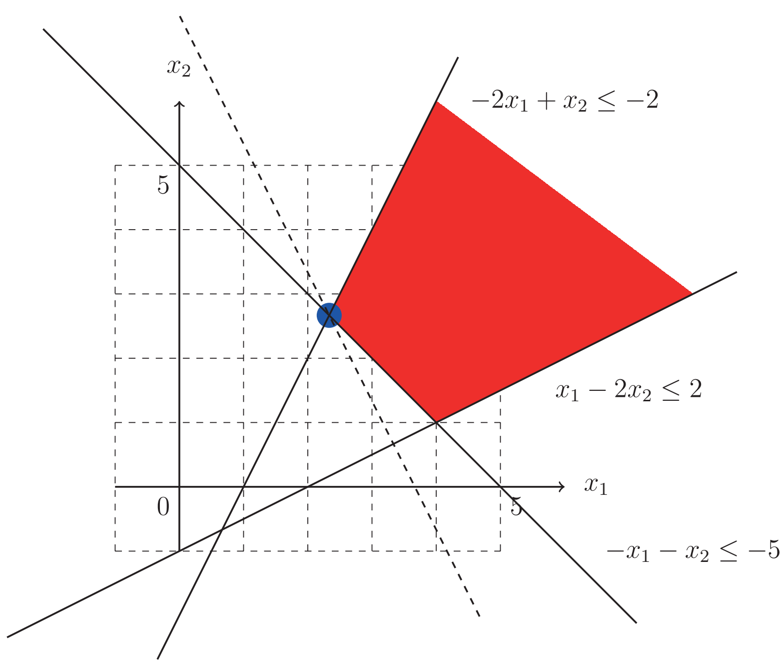
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl} x_1^+ & - & x_1^- & + & x_2^+ & - & x_2^- & & & & & + & x_4 & & & = & 1, \\ 2x_1^+ & - & 2x_1^- & & & & & + & x_3^+ & - & x_3^- & & & + & x_5 & = & 3. \end{array}$$

Lösung A.1.3: Lösung ist der Schnittpunkt der Geraden

$$-2x_1 + x_2 = -2,$$
$$-x_1 - x_2 = -5.$$

Dies ist $(x_1^*, x_2^*) = (7/3, 8/3)$ mit $Q_{\min} = 22/3$.

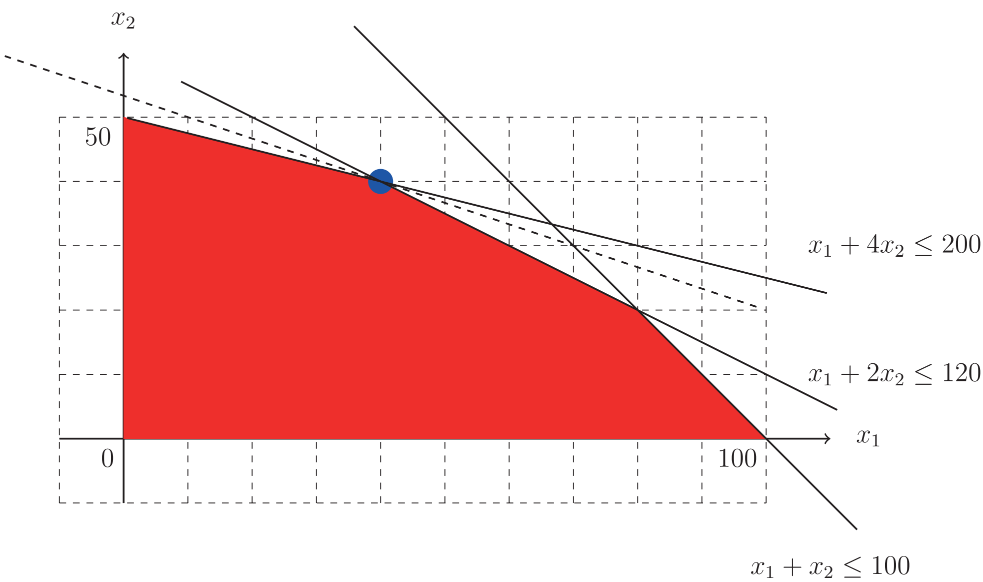
Die Aufgabe ist für $Q(x) \to$ max! offensichtlich nicht lösbar.



Lösung A.1.4: Es bezeichne x_1 die Anzahl der Morgen Weizen und x_2 die Anzahl der angebauten Morgen Gemüse. Das zugehörige lineare Programm lautet:

$$40x_1 + 120x_2 \to \max!$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 &\leq 100, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 200, \\ 100x_1 + 200x_2 &\leq 12000. \end{aligned}$$



Lösung ist der Schnittpunkt der Geraden

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 200, \\ x_1 + 2x_2 &= 120. \end{aligned}$$

Dies ist $(x_1^*, x_2^*) = (40, 40)$ mit $Q_{\max} = 6400$.

Lösung A.1.5: Man argumentiert völlig analog zu Satz 1.1:
i) Es folgt

$$b^T \cdot y \geq (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T y \geq x^T \cdot c = c^T \cdot x.$$

ii) Sei nun $b^T \cdot y = c^T \cdot x$. Angenommen x ist keine Lösung von (II). Dann gibt es ein $\tilde{x}$ mit

$$b^T \cdot y = c^T \cdot x > c^T \cdot \tilde{x},$$

im Widerspruch zu (i). Die Argumentation für das duale Problem verläuft analog.

Lösung A.1.6: Nach Lemma 1.2 gelten die Alternativen:

i) Die Aufgabe $\begin{pmatrix} A \\ c^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ ist lösbar.

ii) Die Aufgabe $\begin{pmatrix} A^T & c \end{pmatrix} \tilde{y} \geq 0$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{y} < 0$, ist lösbar.

Mit $\tilde{y} = (y, y_N)$ gilt $y_N < 0$. Damit überführt man (ii) in die gewünschte Form:

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} A^T & c \end{pmatrix} \tilde{y} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{y} < 0 \quad \text{ist lösbar} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} A^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_N \end{pmatrix} \geq 0, \quad y_N < 0 \quad \text{ist lösbar} \\
\Leftrightarrow \quad & A^T \frac{y}{-y_N} \geq c \quad \text{ist lösbar} \\
\Leftrightarrow \quad & A^T y \geq c \quad \text{ist lösbar}
\end{aligned}
$$

Lösung A.1.7: Nach Lemma 1.2 gelten die Alternativen:

i) Die Aufgabe $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ ist lösbar.

ii) Die Aufgabe $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} y \geq 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot y < 0$, ist lösbar.

Letztere hat die Lösung $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Damit kann (i) nicht lösbar sein.

Lösung A.1.8: Wir zeigen die Unlösbarkeit der Optimierungsaufgabe durch den Nachweis, dass die zulässige Menge des dualen Problem M^* leer ist. Die Optimierungsaufgabe lautet in Normalform (man beachte, dass $b \geq 0$ gelten muss):

$$
c^t \cdot y \to \min!, \quad y \geq 0, \quad Ay = b,
$$

$$
c = (-1, -2, 3), \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}.
$$

Die zulässige, duale Menge ist $M^* = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ A^T x \leq c\}$, d. h. alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$
4x_1 + 5x_2 \leq -1, \qquad 4x_1 + 7x_2 \leq -2, \qquad -2x_1 - 1x_2 \leq 3.
$$

Man überzeugt sich graphisch, dass dieses System keine Lösung hat.

Lösung A.1.9: Sei (x^*, y^*) ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion $L(x,y)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & L(x,y^*) \le L(x^*,y^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0 \\ \Leftrightarrow \quad & c^T \cdot x - {y^*}^T Ax \le c^T \cdot x^* - {y^*}^T Ax^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \le (Ay^* - c)\,(x - x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $Ay^* - c \ge 0$. Denn andernfalls gäbe es eine Komponente i mit $(Ay^* - c)_i < 0$ und die Wahl $x_i = x_i^* + 1,\ x_j = 0,\ j \ne i$, führte zu einem Widerspruch. Analog folgert man für die zweite Ungleichung

$$0 \le (b - Ax^*)\,(y - y^*) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \ge 0,$$

und damit $b - Ax^* \ge 0$. Aus den Ungleichungen $Ay^* \ge c$ und $b \ge Ax^*$ folgt nun bekannterweise

$$b^T \cdot y^* \ge c^T \cdot x^*.$$

Weiterhin ist der Punkt $(x,y) = 0$ zulässig in der Sattelpunktsdefinition und es folgt somit durch Einsetzen in die Ungleichungskette

$$b^T \cdot y^* \le c^T \cdot x^*,$$

d. h.: $b^T \cdot y^* = c^T \cdot x^*$. Damit sind (x^*, y^*) Lösung des primalen und dualen Problems.

Lösung A.1.10: a) Die Optimierungsaufgabe liegt in Standardform vor:

$$c^t \cdot y \to \max!, \quad y \ge 0, \quad Ay \le b,$$

$$c = (2, -2, -6), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige dualisierte Aufgabe,

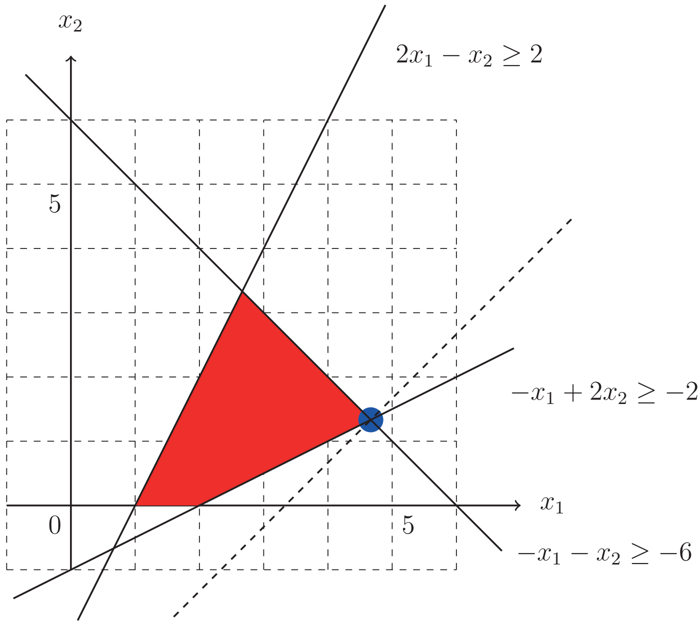
$$b^t \cdot x \to \min!, \quad x \ge 0, \quad A^t x \ge c,$$

wird nun grafisch gelöst. Lösung ist der Schnittpunkt der Geraden

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Dies ist $(x_1^*, x_2^*) = (14/3, 4/3)$ mit $Q_{\min} = -10/3$. Nach dem Dualitätssatz ist das ursprüngliche Problem somit ebenfalls lösbar und es gilt

$$2y_1^* - 2y_2 * -6y_3^* = -\frac{10}{3}.$$



Weiterhin folgt nach dem Gleichgewichtssatz aus $x^* > 0$ die strikte Gleichheit in der Nebenbedingung, d. h. $Ay^* = b$. Zusammen erhält man das LGS

$$\begin{aligned} 3y_1^* - 3y_2^* - 9y_3^* &= -5, \\ 2y_1^* - y_2^* - y_3^* &= -1, \\ -1y_1^* + 2y_2^* - y_3^* &= 1. \end{aligned}$$

Dieses hat die Lösung $y^* = (0, 2/3, 1/3)$. Dies ist die Lösung des ursprünglichen Problems.

b) Überführt in Standardform lautet die Optmierungsaufgabe

$$c^t \cdot y \to \max!, \quad y \geq 0, \quad Ay \leq b,$$

$$c = (-2, 2, 6), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die zulässige, duale Menge ist $M^* = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ A^T x \geq c\}$, d. h. alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ 2x_1 - x_2 &\geq -2, \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\ -x_1 - x_2 &\geq 6. \end{aligned}$$

Aufgrund der ersten und vierten Bedingung ist $M^* = \emptyset$. Damit ist das primale Problem nicht lösbar.

Lösung A.1.11: Nach Satz 1.1 genügt es, ein $y \in M^*$ zu finden, so dass $b^t \cdot y = c^t \cdot x$. Denn dann sind x und y simultan Lösungen des primalen und des dualen Problems. Die duale Aufgabe lautet

$$3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 3y_5 \to \min!, \quad y \geq 0,$$

$$\begin{aligned} y_1 + y_4 &\geq 1, \\ y_1 + y_3 &\geq 1, \\ y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &\geq 1, \\ y_2 + y_5 &\geq 1. \end{aligned}$$

Wenn x Lösung des primalen Problems sein soll, dann muss nach dem Gleichgewichtssatz in den Zeilen $1, 2$ und 4 bereits Gleichheit gelten. Zusammen mit der Forderung $b^t \cdot y = c^t \cdot x$ führt dies auf das (unterbestimmte) Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 3y_5 &= 3, \\ y_1 + y_4 &= 1, \\ y_1 + y_3 &= 1, \\ y_2 + y_5 &= 1. \end{aligned}$$

Dieses hat eine Lösung $y = (0, 1, 1, 1, 0)$. Nach obiger Überlegung ist die Existenz eines solchen y bereits hinreichend dafür, dass x Lösung des dualen Problems ist.

A.2 Kapitel 2

Lösung A.2.1: Normalform:

$$\eta \to \min!, \qquad \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} \geq 0, \qquad \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -b^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die hierzu duale Aufgabe (II*) ist:

$$\xi \to \max!, \qquad \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0_m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist offensichtlich $(0_m, 1) \in M$ und $0 \in M^*$. Damit besitzt nach dem Dualitätssatz beide Aufgaben mindestens eine Lösung $(\hat{y}, \hat{\eta})$ und $(\hat{z}, \hat{\xi})$. Es gilt dann $\hat{\eta} = \hat{\xi}$.

b) Sei $\hat{x}$ eine Lösung von (U) und $(\hat{y}, \hat{\xi})$ eine Lösung von (II). Dann gilt

$$-b^T \cdot \hat{y} + \hat{\eta} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^T \cdot \hat{y} = \hat{\eta} - 1 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{(A\hat{x})}_{=0} \cdot y \leq \hat{\eta} - 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \hat{\eta}.$$

Umgekehrt gilt aufgrund des Dualitätssatzes mit einer Lösung $(\hat{z}, \hat{\xi})$ des dualen Problems $\hat{\eta} = \hat{\xi} \leq 1$.

c) Sei nun $\hat{\eta} > 0$. Dann folgt aufgrund des Dualitätssatzes für eine Lösung $(\hat{z}, \hat{\xi})$ des dualen Problems $\hat{\xi} = \hat{\eta} > 0$ und damit

$$A\hat{z} - b \cdot \hat{\xi} \le 0 \quad \Rightarrow \quad A\hat{z} - b \cdot \hat{\xi} \le 0 \quad \Rightarrow \quad A(\hat{z}/\hat{\xi}) \le b.$$

Somit ist $\hat{x} = \hat{z}/\hat{\xi}$ eine Lösung von (U).

Lösung A.2.2: a) Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & -1 & y_1 \\ \mathbf{2} & 2 & 0 & y_2 \\ 1 & 2 & 1 & y_3 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{cccc} y_2 & x_2 & x_3 & \\ 1/2 & -1 & -1 & y_1 \\ 1/2 & -1 & 0 & x_1 \\ 1/2 & \mathbf{1} & 1 & y_3 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{cccc} y_2 & y_3 & x_3 & \\ 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 1 & -1 & 1 & x_1 \\ -1/2 & 1 & -1 & x_2 \end{array}$$

Die Matrix A hat Rang 2, da der Algorithmus nach dem zweiten Schritt abbricht. Aus der ersten Zeile erschließt man, dass das Gleichungssystem $Ax = y$ genau dann lösbar ist, wenn $y_2 + y_3 = y_1$ gilt. Aus den beiden übrigen Zeilen ergibt sich, dass dann $(y_2 - y_3, 1/2 y_2 + y_3, 0)$ eine Lösung ist und der Kern von $(1, -1, 1)$ erzeugt wird.

Lösung A.2.3: Aufgabe ist es, ein Element in

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;:\; x \ge 0,\; Ax = b \right\}$$

zu finden. Durch Einführen zweier zusätzlicher Freiheitsgrade $v = (x_6, x_7)$ kann die Aufgabe in ein äquivalentes Optimierungsproblem überführt werden:

$$Q(x) = x_6 + x_7 \to \text{min!}, \quad x \ge 0, \quad \begin{pmatrix} A & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = b.$$

Falls im Optimum $Q(\hat{x}) = 0$ gilt, so ist die ursprüngliche Aufgabe lösbar mit $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_5) \in M$. Dank des Hilfsvektors ist das Raten einer Startecke einfach: $x^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 2, 5)^T$ mit Basis $\hat{B}(x^0) = \{a_4, a_5\}$. (Es ist $x^0 \ge 0$ und $Ax = b$. Weiterhin ist $\hat{B}(x^0)$ linear unabhängig.) Das Starttableau ist

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ x_6 & \mathbf{-5} & -1 & -6 & 0 & 5 & x_6^0 = 2 \\ x_7 & -7 & -1 & -2 & 1 & 2 & x_7^0 = 5 \\ & \gamma_1 = -12 & \gamma_2 = -2 & \gamma_3 = -8 & \gamma_4 = 1 & \gamma_5 = 7 & c^T \cdot x^0 = 7 \end{array}$$

Es liegt Fall 2b vor. Wir wählen $q = 1$ und nach der Auswahlregel (R) $r = 6$.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_6 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ x_1 & -1/5 & -1/5 & -6/5 & 0 & 1 & x_1^1 = 2/5 \\ x_7 & 7/5 & 2/5 & 32/5 & 1 & -5 & x_7^1 = 11/5 \\ & \gamma_1 = 12/5 & \gamma_2 = 2/5 & \gamma_3 = 32/5 & \gamma_4 = 1 & \gamma_5 = -5 & c^T \cdot x^0 = 11/5 \end{array}$$

Es liegt Fall 2b vor. Einzige mögliche Wahl ist $q = 5$ und nach der Auswahlregel (R) $r = 7$.

$$\begin{array}{c|ccccc|l}
 & x_6 & x_2 & x_3 & x_4 & x_7 & \\
x_1 & & & * & & & x_1^2 = 21/25 \\
x_5 & & & & & & x_7^2 = 11/25 \\
 & \gamma_1 = 1 & \gamma_2 = 0 & \gamma_3 = 0 & \gamma_4 = 0 & \gamma_5 = 1 & c^T \cdot x^0 = 0
\end{array}$$

Hier bricht der Simplex-Algorithmus notwendigerweise ab. Das Ergebnis ist

$$x^2 = (21/25, 0, 0, 0, 11/25, 0, 0)$$

mit $Q(x^2) = 0$, d. h.: Nach obiger Überlegung ist damit $(x_1^2, \ldots, x_5^2) \in M$.

Lösung A.2.4: Durch Einführen zweier Schlupfvariablen x_4 und x_5 überführt man das Optimierungsproblem in Normalform:

$$Q(x) = c^T \cdot x \to \min!, \quad x \geq 0, \quad Ax = b, \qquad \text{mit}$$

$$c = (-1, -3, -1, 0, 0)^T, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = (3, 4)^T.$$

Dank der beiden Schlupfvariablen ist das Raten einer Startecke einfach: $x^0 = (0, 0, 0, 3, 4)^T$ mit Basis $\hat{B}(x^0) = \{a_4, a_5\}$. (Es ist $x^0 \geq 0$ und $Ax = b$. Weiterhin ist $\hat{B}(x^0)$ linear unabhängig.) Das Starttableau ist

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
x_4 & -5 & -3 & 0 & x_4^0 = 3 \\
x_5 & -1 & -2 & -4 & x_5^0 = 4 \\
 & \gamma_1 = -1 & \gamma_2 = -3 & \gamma_3 = -1 & c^T \cdot x^0 = 0
\end{array}$$

Es liegt Fall 2b vor. Wir wählen $q = 2$ und nach der Auswahlregel (R) $p = 4$:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_4 & x_3 & \\
x_2 & -5/3 & -1/3 & 0 & x_2^1 = 1 \\
x_5 & 7/3 & 2/3 & -4 & x_5^1 = -2 \\
 & \gamma_1 = 4 & \gamma_2 = 1 & \gamma_3 = -1 & c^T \cdot x^1 = -3
\end{array}$$

Es liegt Fall 2b vor. Wir wählen $q = 3$ (da γ_3 negativ) und nach Auswahlregel (R) $p = 5$.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_4 & x_5 & \\
x_2 & & * & & x_2^2 = 1 \\
x_3 & & & & x_3^2 = 1/2 \\
 & \gamma_1 = 41/12 & \gamma_2 = 5/6 & \gamma_3 = 1/4 & c^T \cdot x^1 = -7/2
\end{array}$$

Hier bricht nun der Simplex-Algorithmus ab. Als Eckenlösung ergibt sich also $x^3 = (0,1,1/2,0,0)^T$ mit $Q(x^3) = -7/2$.

Lösung A.2.5: Das lineare Programm liegt in Normalform vor:

$$Q(x) = c^T \cdot x \to \min!, \quad x \geq 0, \quad Ax = b,$$

mit

$$c = (4,1,1)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (4,3)^T.$$

Da keine Startecke ersichtlich ist löst man zunächst das Hilfsproblem: *Durch Einführen zweier zusätzlicher Freiheitsgrade* $v = (x_4, x_5)$ *wird die Starteckensuche in ein äquivalentes Optimierungsproblem überführt:*

$$x_4 + x_5 \to \min!, \quad x \geq 0, \quad \begin{pmatrix} A & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = b.$$

Dank der beiden Schlupfvariablen ist das Raten einer Startecke einfach: $x^0 = (0,0,0,4,3)^T$ mit Basis $\hat{B}(x^0) = \{a_4, a_5\}$. (Es ist $x^0 \geq 0$ und $Ax = b$. Weiterhin ist $\hat{B}(x^0)$ linear unabhängig.) Das Starttableau ist

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
x_4 & -2 & -1 & -2 & x_4^0 = 4 \\
x_5 & [\mathbf{-3}] & -3 & -1 & x_5^0 = 3 \\
 & \gamma_1 = -5 & \gamma_2 = -4 & \gamma_3 = -3 & \tilde{c}^T \cdot x^0 = 7
\end{array}$$

Es liegt Fall 2b vor. Wir wählen $q = 1$ und nach der Auswahlregel (R) $p = 5$:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_5 & x_4 & x_3 & \\
x_4 & 2/3 & 1 & [\mathbf{-4/3}] & x_4^1 = 2 \\
x_1 & -1/3 & -1 & -1/3 & x_1^1 = 1 \\
 & \gamma_1 = 5/3 & \gamma_2 = 1 & \gamma_3 = -4/3 & \tilde{c}^T \cdot x^1 = 2
\end{array}$$

Es liegt Fall 2b vor. Wir wählen $q = 3$ (da γ_3 negativ) und nach Auswahlregel (R) $p = 4$.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_5 & x_2 & x_4 & \\
x_3 & 1/2 & 3/4 & -3/4 & x_3^2 = 3/2 \\
x_1 & -1/2 & -5/4 & 1/4 & x_1^2 = 1/2 \\
 & \gamma_1 = 1 & \gamma_2 = 0 & \gamma_3 = 1 & \tilde{c}^T \cdot x^1 = 0
\end{array}$$

Eine Startecke des ursprünglichen Problems ist demnach

$$x^0 = (1/2, 0, 3/2).$$

Das zugehörige Starttableau ergibt sich direkt aus obigem finalen Tableau durch Streichen der Spalten für x_4 und x_5:

$$\begin{array}{c|c|c} & x_2 & \\ x_3 & 3/4 & x_3^0 = 3/2 \\ x_1 & [\mathbf{-5/4}] & x_1^0 = 1/2 \\ & \gamma = -13/4 & c^T \cdot x^1 = 7/2 \end{array}$$

Fall 2b mit $q = 2$ und nach Auswahlregel (R) $p = 1$:

$$\begin{array}{c|c|c} & x_1 & \\ x_3 & -3/5 & x_3^1 = 9/5 \\ x_2 & -4/5 & x_2^1 = 2/5 \\ & \gamma = 13/5 & c^T \cdot x^1 = 11/5 \end{array}$$

Die Optimierungsaufgabe wird durch die Eckenlösung $x^* = (0, 2/5, 9/5)$ mit dem Wert $Q(x^*) = -11/5$ gelöst.

Lösung A.2.6: Die duale Aufgabe lautet in Normalform:

$$Q(x) = b^T \cdot x \to \max!, \quad A^T x \le c, \qquad \text{mit}$$
$$c = (-1, -3, -1, 0, 0)^T, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = (3, 4)^T.$$

In Aufgabe 2.4 haben wir als Ergebnis $x^* = (0, 1, 1/2, 0, 0)^T$ mit $Q(x^3) = -7/2$ und aktiver Indexmenge $I^0 = \{2, 3\}$ erhalten. Nach Satz 2.3 des Textes ist eine Lösung y^* der dualen Aufgabe gegeben durch:

$$A_0^T y^* = c_0$$
$$A_0 := \big[a^i | i \in I^0\big] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c_0 := (c_i)_{i \in I^0} = (-3, -1)^T.$$

Dieses hat die Lösung $y = (-5/6, -1/4)^T$.

Lösung A.2.7: Überführt auf Normalform lautet die Optimierungsaufgabe: Suche $x \in \mathbb{R}^7$, so dass

$$c^T \cdot x \to \min!, \quad x \ge 0, \quad Ax = b$$

mit

$$c = (-3/4, 20, -1/2, 6, 0, 0, 0)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Ausgangsecke ist (vgl. vorangegangene Aufgaben) $x^0 = (0_4, b)^T \in \mathbb{R}^7$.

a) Löse mit Simplexverfahren mittels Regel (R) + minimales $p \in I^0$. Das q sei so bestimmt, dass γ_q minimal ist.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_5	$[\mathbf{-1/4}]$	8	1	-9	$x_5^0 = 0$
x_6	$-1/2$	12	$1/2$	-3	$x_6^0 = 0$
x_7	0	0	-1	0	$x_7^0 = 1$
γ	$-3/4$	20	$-1/2$	6	$c^T \cdot x^0 = 0$

(I) Auswahl: $q = 1$, $p = 5$

	x_5	x_2	x_3	x_4	
x_1	-4	32	4	-36	$x_1^1 = 0$
x_6	2	$[\mathbf{-4}]$	$-3/2$	15	$x_6^1 = 0$
x_7	0	0	-1	0	$x_7^1 = 1$
γ	3	-4	$-7/2$	33	$c^T \cdot x^0 = 0$

(II) Auswahl: $q = 2$, $p = 6$

	x_5	x_6	x_3	x_4	
x_1	12	-8	$[\mathbf{-8}]$	84	$x_1^2 = 0$
x_2	$1/2$	$-1/4$	$-3/8$	$15/4$	$x_2^2 = 0$
x_7	0	0	-1	0	$x_7^2 = 1$
γ	1	1	-2	18	$c^T \cdot x^0 = 0$

(III) Auswahl: $q = 3$, $p = 1$

	x_5	x_6	x_1	x_4	
x_3	$3/2$	-1	$-1/8$	$21/2$	$x_3^3 = 0$
x_2	$-1/16$	$1/8$	$3/64$	$[\mathbf{-3/16}]$	$x_2^3 = 0$
x_7	$-3/2$	1	$1/8$	$-21/2$	$x_7^3 = 1$
γ	-2	3	$1/4$	-3	$c^T \cdot x^0 = 0$

(IV) Auswahl: $q = 4$, $p = 2$

	x_5	x_6	x_1	x_2	
x_3	$[\mathbf{-2}]$	6	$5/2$	-56	$x_3^3 = 0$
x_4	$-1/3$	$2/3$	$1/4$	$-16/3$	$x_4^3 = 0$
x_7	2	-6	$-5/2$	56	$x_7^3 = 1$
γ	-1	1	$-1/2$	16	$c^T \cdot x^0 = 0$

(V) Auswahl: $q = 4$, $p = 2$

	x_3	x_6	x_1	x_2	
x_5	$-1/2$	3	$5/4$	-28	$x_5^3 = 0$
x_4	$1/6$	$[\mathbf{-1/3}]$	$1/6$	4	$x_4^3 = 0$
x_7	-1	0	0	0	$x_7^3 = 1$
γ	$1/2$	-2	$-7/4$	44	$c^T \cdot x^0 = 0$

(VI) Auswahl: $q = 6$, $p = 4$

	x_3	x_4	x_1	x_2	
x_5	1	-9	$-1/4$	8	$x_5^0 = 0$
x_6	$1/2$	-3	$-1/2$	12	$x_6^0 = 0$
x_7	-1	0	0	0	$x_7^0 = 1$
γ	$-1/2$	6	$-3/4$	20	$c^T \cdot x^0 = 0$

Endlosschleife!

b) Löse mit Simplexverfahren mittels Regel $(\tilde{R})$. Das q sei so bestimmt, dass γ_q minimal ist.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_5	$-1/4$	8	1	-9	$x_5^0 = 0$
x_6	$[\mathbf{-1/2}]$	12	$1/2$	-3	$x_6^0 = 0$
x_7	0	0	-1	0	$x_7^0 = 1$
γ	$-3/4$	20	$-1/2$	6	$c^T \cdot x^0 = 0$

(I) Auswahl: $q = 1,\ r = 6$

	x_6	x_2	x_3	x_4	
x_5	$1/2$	2	$3/4$	$-15/2$	$x_5^1 = 0$
x_1	-2	24	1	-6	$x_1^1 = 0$
x_7	0	0	$[\mathbf{-1}]$	0	$x_7^1 = 1$
γ	$3/2$	2	$-5/4$	$21/2$	$c^T \cdot x^0 = 0$

(II) Auswahl: $q = 3,\ r = 7$

	x_3	x_4	x_1	x_2	
x_5	$1/2$	2	$-3/4$	$-15/2$	$x_5^2 = 3/4$
x_1	-2	24	-1	-6	$x_1^2 = 1$
x_3	0	0	-1	0	$x_3^2 = 1$
γ	$3/2$	2	$5/4$	$21/2$	$c^T \cdot x^0 = \mathbf{-5/4}$

Optimales Tableau!

Wir haben die Eckenlösung $x^2 = (1, 0, 1, 0, 3/4, 0, 0)^T$ mit $Q(x^2) = -5/4$ gefunden.

Lösung A.2.8: i) Seien x_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \cdots n)$ die Menge Öl in Barrel, die von Quelle Q_i zu Raffinerie R_j transportiert wird. Die lineare Optimierungsaufgabe zur Bestimmung minimaler Transportkosten z lautet:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} nk_{ij}x_{ij} \to \min!,$$

$$\begin{aligned} x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq q_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq r_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Bemerkung: O.b.d.A. können wir annehmen, dass $q_i > 0,\ r_j > 0$, sonst wird die entsprechende Quelle oder Raffinerie gestrichen. Dies kann durch die Einführen folgender Vektoren in die übliche Form überführt werden:

$$\begin{aligned} c &:= \big(- k_{11}, \ldots, -k_{1n}, -k_{21}, \ldots, -k_{m1}, \ldots, k_{mn}\big)^T, \\ x &:= \big(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}\big)^T, \\ b &:= \big(q_1, q_2, \ldots, q_m, -r_1, -r_2, \ldots, -r_n\big). \end{aligned}$$

Das Optimierungsproblem in Standardform lautet dann

$$Q(x) = c^T \cdot x \to \max!, \quad x \geq 0, \quad Ax \leq b,$$

mit der Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m\cdot n)}$,

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \ldots & B_m \\ -I_n & -I_n & -I_n & \ldots & -I_n \end{pmatrix},$$

mit Blöcken $B_k \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B_k = (\delta_{ik})_{ij}$.

ii) Die Bedingung $\sum_i q_i \geq \sum_j r_j$ ist notwendig und hinreichend für die Existenz zulässiger Vektoren. Die Notwendigkeit ist durch Aufsummieren der beiden Nebenbedingungen sofort ersichtlich. Umgekehrt sieht man, dass der Vektor

$$\hat{x}_{ij} := \frac{q_i r_j}{\sum_k r_k} \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$$

zulässig ist, d. h.: $M \neq \emptyset$. Weiterhin ist M abgeschlossen, und mit $0 \leq x_{ij} \leq q_i,\ x \in M$, beschränkt, also kompakt. Damit ist das Transportproblem lösbar.

bi) Das Optimierungsproblem für die Reederei ist v_j und u_i so zu bestimmen, dass der Gewinn maximal ist, aber die Nebenbedingung $v_j - u_i \leq k_{ij}$ stets erfüllt bleibt, d. h.:

$$\begin{aligned} \sum_j r_j v_j - \sum_i q_i u_i \to \max!, \\ u_i \geq 0, \\ v_j \geq 0, \\ v_j - u_i \leq k_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Mit dem Vektor

$$y := \big(u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n\big),$$

lautet das Optimierungsproblem der Reederei:

$$b^T \cdot y \to \min!, \quad y \geq 0, \quad A^T y \geq c.$$

Die Programmieraufgabe der Reederei ist gerade dual zum Programm der Ölgesellschaft.

bii) Da beide Programmieraufgaben dual zueinander sind, sind die Optimalwerte des Problems der Reederei und der des Problems der Ölgesellschaft gerade gleich. D. h.: Die Ölgesellschaft macht keinen Gewinn.

Lösung A.2.9: Es gelte o.B.d.A. $a_i = e_i,\ i = 1, \ldots, m$. Mit

$$A_0 = [a_i \,:\, i \in I^0], \quad c^0 = (c_i)_{i \in I^0}$$

ist nach Satz 2.3 damit $y_0 = (A_0^T)^{-1} \cdot c^0$ eine Lösung der dualen Aufgabe. Weiterhin werden im Beweis von Satz 2.3 bereits die Identitäten (noch einmal rekapitulieren!)

$$\begin{aligned} (A^T y^0)_i &= c_i && \forall i \in I^0, \\ (A^T y^0)_i &= c_i - \gamma_i && \forall i \notin I^0 \end{aligned}$$

hergeleitet. Mit der Definition $\gamma_i = 0$ für $i \in I^0$ folgt also unmittelbar

$$y_i^0 = c_i - \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Lösung A.2.10: Es gilt nach Definition

$$(\tilde{\sigma}_{ik})_{i \in \tilde{I}^0, k=1,\ldots,m} \cdot [a_i \;:\; i \in \tilde{I}^0] = I = (\sigma_{ik})_{i \in I^0, k=1,\ldots,m} \cdot [a_i \;:\; i \in I^0],$$

bzw.

$$\sum_{i \in \tilde{I}^0} \tilde{\sigma}_{ik}\, a_i = \sum_{i \in I^0} \sigma_{ik}\, a_i, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Weiterhin gilt nach Lemma 2.2 $a_q = -\sum_{i \in I^0} \alpha_{iq} a_i$ und somit:

$$\sum_{i \in \tilde{I}^0 \cap \tilde{I}^0} \tilde{\sigma}_{ik}\, a_i - \sum_{i \in I^0} \tilde{\sigma}_{qk} \alpha_{iq} a_i = \sum_{i \in I^0 \cap \tilde{I}^0} \sigma_{ik}\, a_i + \sigma_{pk} a_p, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Umstellen:

$$\sum_{i \in \tilde{I}^0 \cap \tilde{I}^0} (\tilde{\sigma}_{ik} - \tilde{\sigma}_{qk} \alpha_{iq})\, a_i - \tilde{\sigma}_{qk} \alpha_{pq} a_p = \sum_{i \in I^0 \cap \tilde{I}^0} \sigma_{ik}\, a_i + \sigma_{pk} a_p, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\{a_i, i \in I^0 \cap \tilde{I}^0, a_p\}$ folgt schließlich

$$\tilde{\sigma}_{qk} = -\frac{\sigma_{qk}}{\alpha_{pq}}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

und

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} + \tilde{\sigma}_{qk} \alpha_{iq} = \sigma_{ik} - \frac{\sigma_{pk}\, \alpha_{iq}}{\alpha_{pq}}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad i \in I^0 \cap \tilde{I}^0.$$

Lösung A.2.11: Die Aufgabe lautet in Normalform:

$$Q(x) = c^T \cdot x \to \min!, \quad x \geq 0, \quad Ax = b,$$

$$c = (-2, -1, -3, -1, -2, 0_3)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & 1 & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (100, 80, 50)^T.$$

Der revidierte Simplexalgorithmus liefert: Start mit

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$x^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 100, 80, 50)^T.$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_6 & & & -1 & & & 100 \\ x_7 & & & -1 & & & 80 \\ x_8 & & & [\mathbf{-1}] & & & 50 \\ \gamma & -2 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

(I) Auswahl: $q = 3,\ p = 8,$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x^1 = (0, 0, 50, 0, 0, 50, 30, 0)^T.$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_8 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_6 & & & & & -1 & 50 \\ x_7 & & & & & [\mathbf{-1}] & 30 \\ x_3 & & & & & 0 & 50 \\ \gamma & 1 & 2 & 3 & 2 & -2 & -150 \end{array}$$

(II) Auswahl: $q = 5,\ p = 7,$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = (0, 0, 50, 0, 30, 20, 0, 0)^T.$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_8 & x_4 & x_7 & \\ \hline x_6 & [\mathbf{-1}] & & & & & 20 \\ x_5 & 1 & & & & & 30 \\ x_3 & -1 & & & & & 50 \\ \gamma & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -210 \end{array}$$

(III) Auswahl: $q = 1,\ p = 6,$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x^3 = (20, 0, 30, 0, 50, 0, 0, 0)^T.$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_6 & x_2 & x_8 & x_4 & x_7 & \\ \hline x_1 & & & & & & 20 \\ x_5 & & & & & & 50 \\ x_3 & & & & & & 30 \\ \gamma & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -230 \end{array}$$

(IV) Ende

Lösung A.2.12: Lemma 2.6 besagt, dass es unter der Haarschen Bedingung keine entartete Ecke des zulässigen Bereiches der Optimierungsaufgabe $(\tilde{A})$ gibt. Nun ist weiterhin o.B.d.A. $b \notin \text{Bild}A^T$ und damit der Rang der erweiterten Matrix, welche in $(\tilde{A}^*)$ und $(\tilde{A})$ betrachtet wird $m+1$. Daraus folgt, dass eine Eckenlösung des Problems $(\tilde{A})$ $m+1$ aktive Indizes aufweisen muss.

Nach dem Gleichgewichtssatz für das kanonische Problem (Satz 1.4) muss nun in $m+1$ Nebenbedingungen des dualen Problems $(\tilde{A}^*)$ Gleichheit herrschen. Die Behauptung folgt nun aufgrund der Äquivalenz von $(\tilde{A}^*)$ und (A).

Lösung A.2.13: Die Auszahlungsmatrix ist

$P_1 \setminus P_2$	0	1	2	3	4	5
0	1	−1	1	−1	1	−1
1	−1	1	−1	1	−1	1
2	1	−1	1	−1	1	−1
3	−1	1	−1	1	−1	1
4	1	−1	1	−1	1	−1
5	−1	1	−1	1	−1	1

oder in verkürzter Form (da gerade und ungerade gleich häufig vorkommt):

$P_1 \setminus P_2$	gerade	ungerade
gerade	1	−1
ungerade	−1	1

b+c) Das Spiel ist fair. Man kann z. B. über die vorangegangene Aufgabe argumentieren, dass die Auszahlungsmatrix nach Substitution von gerade $\leftrightarrow$ ungerade für einen der Spieler schiefsymmetrisch ist.

Alternativ stellt man die Hypothese $\mu_A = 0$ auf und rechnet nach, dass mit $x^0 = y^0 = (1/2, 1/2)^T$ gerade gilt

$$x^T \cdot Ay^0 \leq 0 \leq x^{0T} \cdot Ay, \quad x \in D_1, \, y \in D_2.$$

Dies sind dann nach Satz 2.6 ebenfalls optimale Strategien.

Lösung A.2.14: Analog zum Vorgehen aus dem Text wird das Optimierungsproblem $(\bar{P}^*)$ gelöst, d. h.:

$$\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \quad -\sum_{k=1}^{n} \bar{y}_n \to \min!, \; \bar{y} \geq 0, \; A\bar{y} \leq 1_m.$$

Nach Einführen von Schlupfvariablen $\bar{y}_5, \; \bar{y}_6, \; \bar{y}_7$ löst man mit Hilfe des Simplexalgorithmus:

I	$\bar y_1$	$\bar y_2$	$\bar y_3$	$\bar y_4$	
$\bar y_5$	-1	1	-3	0	1
$\bar y_6$	1	$[\mathbf{-2}]$	0	1	1
$\bar y_7$	3	0	1	-1	1
	-1	-1	-1	-1	0

II	$\bar y_1$	$\bar y_6$	$\bar y_3$	$\bar y_4$	
$\bar y_5$	$-1/2$	$-1/2$	-3	$1/2$	$3/2$
$\bar y_2$	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$
$\bar y_7$	-3	0	1	$[\mathbf{-1}]$	1
	$-3/2$	$1/2$	-1	$-3/2$	$-1/2$

III	$\bar y_1$	$\bar y_6$	$\bar y_3$	$\bar y_7$	
$\bar y_5$	-2	$-1/2$	$-5/2$	$-1/2$	2
$\bar y_2$	-1	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	1
$\bar y_4$	-3	0	1	1	1
	3	$1/2$	$-5/2$	$3/2$	-2

IV	$\bar y_1$	$\bar y_6$	$\bar y_5$	$\bar y_7$	
$\bar y_3$					$4/5$
$\bar y_2$		$*$			$7/5$
$\bar y_4$					$9/5$
	5	1	1	2	-4

Rücktransformation und Benutzung der vorangegangenen Übungsaufgabe liefert dann die optimalen Strategien

$$\hat y = \frac{1}{4}(0, 7/5, 4/5, 9/5)^T, \quad \hat x = \frac{1}{4}(1, 1, 2)^T.$$

Der Wert des Spiels beträgt 4; es ist also nicht fair.

Lösung A.2.15: Bemerkung: Für schiefsymmetrische Matrizen A gilt nach Definition $A = -A^T$ und damit stets $x^T \cdot Ay = y^T \cdot Ax = -y^T \cdot Ax$ für beliebige x, y. Insbesondere ist $x^T \cdot Ax = 0$ für beliebige x.

Das Spiel ist fair, d. h.: Es gilt $\mu_A = 0$: Zunächst gilt aufgrund $\Sigma_1 = \Sigma_2$, dass $D_1 = D_2 =: D$. Nach dem Hauptsatz der Spieltheorie gibt es μ_A, x^0 und y^0 mit

$$x^{0T} \cdot Ay \le \mu_A \le x^T \cdot Ay^0, \quad x, y \in D.$$

Testen mit $y = x^0$ und $x = y^0$ liefert gerade:

$$0 = x^{0T} \cdot Ax^T \le \mu_A \le y^{0T} \cdot Ay^0 = 0,$$

d. h. $\mu_A = 0$. Weiterhin gilt für beliebiges $y \in D$:

$$x^{0T} \cdot Ay \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^T \cdot A^T x^0 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le y^T \cdot Ax^0.$$

Somit ist x^0 auch zwingend eine optimale Strategie für y^0.

Lösung A.2.16: Wir wollen analog zum Beispiel 2.4 aus dem Text das Optimierungsproblem $(\bar P^*)$ lösen, d. h.:

$$\bar y \in \mathbb{R}^n : \quad -\sum_{k=1}^{n} \bar y_n \to \min!, \ \bar y \ge 0, \ A\bar y \le 1_m.$$

Wir vermuten, dass das Skin-Spiel ohne Zusatzregel fair ist, d. h. $\mu_A = 0$. Damit ist aber $(\bar{P}^*)$ direkt nicht aufstellbar. Deshalb shiften wir die Auszahlungsmatrix um $+1$:

$P_1 \setminus P_2$	KA	PA	$P2$
KA	2	0	−1
PA	0	2	2
$P2$	3	0	−1

Mit Einführen von Schlupfvariablen $\bar{y}_4,\ \bar{y}_5,\ \bar{y}_6$ löst man mit Hilfe des Simplexalgorithmus:

I	x_1	x_2	x_3	
x_4	-2	0	1	1
x_5	0	$[\mathbf{-2}]$	-2	1
x_6	-3	0	1	1
	-1	-1	-1	0

II	x_1	x_4	x_3	
x_4	-2	0	1	1
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
x_6	$[\mathbf{-3}]$	0	1	1
	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$

III	x_6	x_4	x_3	
x_4	-2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	$[\mathbf{-1}]$	$\frac{1}{2}$
x_1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$

IV	x_1	x_2	x_3	
x_4	2	0	-1	$\frac{1}{2}$
x_3	0	2	2	$\frac{1}{2}$
x_1	3	0	-1	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1

Das geshiftete Spiel hat also $\mu_A = 1$; das Skinspiel ohne Zusatzregel also $\mu_A = 0$. Die optimale Strategie für Spieler P_2 ist also $\hat{y} = (1/2, 0, 1/2)^T$. Für Spieler P_1 erhält man $\hat{x} = (0, 1/2, 1/2)^T$.

A.3 Kapitel 3

Lösung A.3.1: Es gilt nach Definition der α_{ik} für beliebige Vektoren x mit $Ax = b$:

$$x_i = \sum_{k \notin I^0} \alpha_{ik} x_k + x_i \quad i \in I^0.$$

Insbesondere ist also für alle x mit $I(x) \subset I^0 \cup \{q\}$ und $Ax = b$ die Identität $x_p - x_p^0 = \alpha_{pq} x_q$; bzw. da $\alpha_{pq} \neq 0$,

$$x_q = \frac{1}{\alpha_{pq}}(x_p - x_p^0).$$

Einsetzen in $Ax = Ax^0$ liefert:

$$\sum_{i \in I^0, i \neq p} \{x_i - x_i^0\} a_i + \{x_p - x_p^0\} a_p = -\frac{1}{\alpha_{pq}} \{x_i - x_i^0\} a_q$$

für alle x mit $Ax = b$ und $I(x) \subset I^0 \cup \{q\}$. Abschließend ist noch festzustellen, dass man durch Variation von x^0 in der p-ten Komponente ein solches x konstruieren mit $x_p - x_p^0 \neq 0$. Dann ist obige Gleichung aber eine Linearkombination von a_p in Termen von $\tilde{B} = \{a_i,\ i \in \tilde{I}^0 = (I^0 \setminus \{p\}) \cup \{q\}\}$. Insbesondere ist damit $\tilde{B}$ also eine Basis.

Lösung A.3.2: (Duales Simplex-Verfahren)

Nicht verfügbar.

Lösung A.3.3: Addition der ersten m Zeilen ergibt einen Vektor der Länge mn mit lauter Einsen und analog bei Addition der letzten n Zeilen. Folglich existiert ein $c \in \mathbb{R}^{m+n}, c \neq 0$ mit $cA = 0$, d. h.: $\mathrm{Rang}(A) \leq m + n - 1$. Zum Nachweis der Gleichheit $\mathrm{Rang}(A) = m + n - 1$ genügt es, eine reguläre Teilmatrix der Größe $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$ zu identifizieren. Wir streichen die m-te Zeile. Dann enthalten die letzten n Zeilen die Einheitsmatrix I_n in den n letzten Spalten. Bei Wahl der zu den Variablen $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1,n-1}$ gehörenden Spalten erhalten wir eine untere Dreiecksteilmatrix der Größe $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$ mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonale.

Lösung A.3.4: Nach Einführen von Schlupfvariablen $x_3,\ x_4,\ x_5$ lautet die Aufgabe in Normalform wie folgt:

$$Q(x) = c^T \cdot x \to \min!, \quad x \geq 0, \quad Ax = b,$$

mit

$$c = (-3, 1, 0, 0, 0)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (3, -10, 5)^T.$$

Löse zunächst die Aufgabe ohne Restriktion auf ganzahlige Werte. Billiger Trick hier: $x^0 = (0, 0, b)^T$ erfüllt zwar $Ax = b$. ist aber nicht zulässig. Wir starten trotzdem direkt in Phase II des primalen Simplex-Algorithmus und hoffen auf das Beste!

I	x_1	x_2	
x_3	$[\mathbf{-3}]$	2	3
x_4	5	4	-10
x_5	-2	-1	5
	-3	1	0

II	x_3	x_2	
x_1	$-1/3$	$2/3$	1
x_4	$5/3$	$22/3$	-5
x_5	$-2/3$	$-7/3$	3
	1	-1	-3

III	x_3	x_5	
x_1	$-1/7$	$-2/7$	$13/7$
x_4	$3/7$	$-22/7$	$31/7$
x_2	$2/7$	$-3/7$	$9/7$
	$5/3$	$3/7$	$-30/7$

Glück gehabt! Wir erhalten das nicht ganzzahlige Optimum $\hat{x} = (13/7, 9/7)$.

Aufstellen des Starttableaus für den ersten Gomory-Schnitt: Selektiere $p = 1$ nach Faustregel:

	x_3	x_5		gebr. A.
x_1	$-1/7$	$-2/7$	$13/7$	$[\mathbf{6/7}]$
x_4	$3/7$	$-22/7$	$31/7$	$4/7$
x_2	$2/7$	$-3/7$	$9/7$	$2/7$
$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{1/7}$	$\mathbf{2/7}$	$\mathbf{-6/7}$	
	$5/3$	$3/7$	$-30/7$	

Durchführen des dualen Simplexalgorithmus:

I	x_3	x_5	
x_1	$-1/7$	$-2/7$	$13/7$
x_4	$3/7$	$-22/7$	$31/7$
x_2	$2/7$	$-3/7$	$9/7$
s_1	$1/7$	$[\mathbf{2/7}]$	$-6/7$
	$5/3$	$3/7$	$-30/7$

II	x_3	s_1	
x_1	0	-1	1
x_4	$[\mathbf{2}]$	-11	-5
x_2	$1/2$	$-3/2$	0
x_5	$-1/2$	$7/2$	3
	$1/2$	$3/2$	-3

III	x_4	s_1	
x_1	0	-1	1
x_3	$1/2$	$11/2$	$5/2$
x_2	$1/4$	$5/4$	$5/4$
x_5	$-1/4$	$3/4$	$7/4$
	$1/4$	$17/4$	$-7/4$

Zweiter Gomory-Schnitt: $p = 5$:

III	x_4	s_1		gebr. A.
x_1	0	-1	1	$--$
x_3	$1/2$	$11/2$	$5/2$	$1/2$
x_2	$1/4$	$5/4$	$5/4$	$1/4$
x_5	$-1/4$	$3/4$	$7/4$	$[\mathbf{3/4}]$
$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{1/4}$	$\mathbf{-3/4}$	
	$1/4$	$17/4$	$-7/4$	

Durchführen des dualen Simplexalgorithmus:

I	x_4	s_1	
x_1	0	-1	1
x_3	$1/2$	$11/2$	$5/2$
x_2	$1/4$	$5/4$	$5/4$
x_5	$-1/4$	$3/4$	$7/4$
s_2	$[\mathbf{1/4}]$	$1/4$	$-3/4$
	$1/4$	$17/4$	$-7/4$

II	s_2	s_1	
x_1			1
x_3			4
x_2	$*$		2
x_5			1
x_4			3
	1	4	-1

Die Lösung des ganzzahligen Problems ist also $\hat{x} = (1,2)^T$. Im Gegensatz zur „abgeschnittenen“ Lösung $(1,1)^T$, die sich aus der „kontinuierlichen“ Lösung ergibt. Letztere hat zwar Maximum 2 ist aber *nicht* zulässig.

A.4 Kapitel 4

Lösung A.4.1: Die Hessematrix von $\Phi(\cdot)$ ist durch

$$H_\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_i^T}{(c_i - a_i^T \cdot y)^2}$$

gegeben. Sie ist positiv definit, weil es wegen der Beschränktheit von D zu jedem $\Delta y \neq 0$ mindestens einen Index i mit $a_i^T \cdot \Delta y \neq 0$ gibt. Folglich ist $\Phi(\cdot)$ streng konvex. Am Rand von D sterbt mindestens einer der Terme $c_i - a_i^T \cdot y$ gegen Null und der Logarithmus davon gegen $-\infty$.

Lösung A.4.2: Die Abbildung $\Psi_0 \;:\; M_0 \times M_0^* \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist, da komponentenweise beliebig differenzierbar von der Klasse $C^\infty(M_0 \times M_0^*)^{n\times m\times n}$. Damit ist die Jakobi-Matrix

$$D\Psi_0 \;:\; M_0 \times M_0^* \to (M_0 \times M_0^* \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$$

wohldefiniert und kann komponentenweise mit Hilfe der Gâteauxableitung

$$D\Psi_0(x,y,z)[\delta x, \delta y, \delta z] := \lim_{s\to 0} \frac{\Psi_0\big((x,y,z) + s(\delta x, \delta y, \delta z)\big) - \Psi_0(x,y,z)}{s}$$

berechnet werden. Hierbei hilft, dass Ψ_0 in fast allen Komponenten linear ist. Es folgt durch einfaches Nachrechnen

$$D\Psi_0(x,y,z)[\delta x, \delta y, \delta z] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \Big(\delta x, \delta y, \delta z\Big)$$

und damit die Behauptung.

Lösung A.4.3: Anwenden des mehrdimensionalen Mittelwertsatzes auf g liefert:

$$g(z) = g(x^k) + g'(\xi^k)\cdot(z - x^k), \quad \xi^k \in \overline{x^k z}.$$

Umformen und $g(z) = 0$ ausnutzen ergibt:

$$0 = g(x^k) + g'(x^k)\cdot(z - x^k) + \big(g'(\xi^k) - g'(x^k)\big)\cdot(z - x^k).$$

Umstellen:

$$g'(x^k)^{-1} g(x^k) + z - x^k = -g'(x^k)^{-1}\big(g'(\xi^k) - g'(x^k)\big)\cdot(z - x^k).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} z - x^{k+1} &= z - x^k + g'(x^k)^{-1} g(x^k) \\ &= -g'(x^k)^{-1}\big(g'(\xi^k) - g'(x^k)\big) \cdot (z - x^k). \end{aligned}$$

Also

$$\frac{\|z - x^{k+1}\|}{\|z - x^k\|} \le \|g'(x^k)^{-1}\| \|g'(\xi^k) - g'(x^k)\|. \tag{I}$$

Hieraus folgert man, dass es ein δ gibt, so dass mit einer Wahl $x^0 \in K_\delta(z)$ das Newton-Verfahren stets superlinear konvergiert:

$\|g'(x^k)^{-1}\|$ ist auf $K_\delta(z)$ (für δ klein genug) nach Annahme beschränkt. Weiterhin folgt aufgrund der Stetigkeit von g', dass für hinreichend kleines δ stets gilt:

$$\Big[\max_{\mu \in K_\delta(z)} \|g'(\mu)^{-1}\|\Big] \|g'(x) - g'(u)\| \le \kappa < 1, \quad x,\, y\, \in K_\delta(z)$$

Mit $x_0 \in K_\delta(z)$ liegt also induktiv durch (I) auch jedes x^k und damit auch jedes $\xi^k \in \overline{x^k z}$ in $K_\delta(z)$. (I) liefert schließlich

$$\frac{\|z - x^{k+1}\|}{\|z - x^k\|} \le \kappa < 1.$$

Das Verfahren ist also kontraktiv. Die Superlinearität folgt dann sofort aus

$$\|g'(\xi^k) - g'(x^K)\| \to 0 \quad \text{für } x^k \to z.$$

Lösung A.4.4: a) Die Abbildung

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \|x\|_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

hat die Jacobi-Matrix

$$Df(x, \lambda) = \begin{pmatrix} A - \lambda I & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Das Newton-Verfahren lautet damit: Ausgehend von gegebenen (x^0, λ^0) iteriere:

$$\begin{cases} Df(x^i, \lambda^i) \cdot \begin{pmatrix} \delta x^i \\ \delta \lambda^i \end{pmatrix} = -f(x^i, \lambda^i), \\ \begin{pmatrix} x^{i+1} \\ \lambda^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ \lambda^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x^i \\ \delta \lambda^i \end{pmatrix}. \end{cases}$$

b) —

Lösung A.4.5: Die Abbildung Ψ_μ unterscheidet sich von Ψ_0 nur um einen konstanten Faktor in der letzten (Block-)Komponente. Damit haben beide Abbildungen dieselbe Ableitung

$$D\Psi_\mu(x,y,z) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{pmatrix}$$

. Das Newton-Verfahren lautet damit: Ausgehend von gegebenen (x^0, y^0, z^0) iteriere:

$$\begin{cases} D\Psi_\mu(x^i, y^i, z^i) \cdot \begin{pmatrix} \delta x^i \\ \delta y^i \\ \delta z^i \end{pmatrix} = -\Psi_\mu(x^i, y^i, z^i), \\ \begin{pmatrix} x^{i+1} \\ y^{i+1} \\ z^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x^i \\ \delta y^i \\ \delta z^i \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Unter den Voraussetzungen $(x^i, z^i) > 0$ und $\operatorname{rang}(A) = m$ ist die Jacobi-Matrix $D\Psi_\mu$ stets regulär (Lemma 4.1). Damit ist das lineare Teilproblem, das in jedem Newton-Schritt auftritt lösbar. Die Matrix ist allerdings weder symmetrisch, noch definit. Weiterhin kann auch der Spektralradius der Matrix, ihrer Jacobi-Iterations-Matrix, oder Gauß-Seidel-Iterationsmatrix aufgrund fehlender Struktur in A nicht abgeschätzt werden. D. h.: Bis auf sehr robuste Iterationsverfahren, wie z. B. GMRES, muss a priori keines der bekannten Iterationsverfahren konvergieren.

Lösung A.4.6: a) Der Lagrange-Formalismus besteht in der Aufstellung der Lagrange-Funktion $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ und der Bestimmung stationärer Punkte von L als möglicher Extremalpunkte, d. h.: $\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \nabla_\lambda L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$.

b) Zur Bestimmung der Extrema von $f(x, y) = x - y$ auf K, d. h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$, wird der Lagrange-Ansatz verwendet. Die Lagrange-Funktion ist

$$L(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ihre stationären Punkte $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\lambda})$ erhält man durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_x L(x, y, \lambda) &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ \partial_y L(x, y, \lambda) &= -1 + 2\lambda y = 0, \\ \partial_\lambda L(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Offenbar muss $\hat{\lambda} \neq 0$ sein. Addition der ersten beiden Gleichungen ergibt also $\hat{x} = -\hat{y}$ und somit mit Hilfe der dritten Gleichung $(\hat{x}, \hat{y}) = (\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$. Für die beiden stationären Punkte ist

$$f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \qquad f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

Da K kompakt ist, nimmt f auf K sein Maximum und Minimum an. Da die beiden Punkte die einzigen Kandidaten für Extrema auf K sind, ist also der erste eine Maximal- und der zweite eine Minimalstelle.

Lösung A.4.7: Es seien definiert

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x \cdot y \cdot z, \\ g \ &: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x + y + z - a. \end{aligned}$$

Die Optimierungsaufgabe lautet dann

$$\begin{gathered} f(x) \to \max!, \\ (x,y,z) \geq 0, \quad g(x) = 0. \end{gathered}$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda(g(x,y,z)).$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen

$$\nabla_{(x,y,z)} L(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} yz - \lambda \\ xz - \lambda \\ xy - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \nabla_\lambda L(x,y,z,\lambda) = x + y + z - a = 0,$$

haben die Lösungen $\lambda = 0$ mit $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ oder $(0,0,a)$, welche offensichtlich Minima sind. Für $\lambda \neq 0$ müssen notwendigerweise $x,y,z \neq 0$ sein. Dann folgt mit $yz = xz = xy = \lambda$ aber bereits Gleichheit $x = y = z$ und damit aufgrund der Nebenbedingung $x = y = z = a/3$. Da die Menge der zulässigen Punkte kompakt und f stetig ist, werden Minima und Maxima angenommen. Damit ist der letzte Punkte das gesuchte Maximum.

Lösung A.4.8: Für eine strikt konvexe Funktion f gilt mit $t \in (0,1)$ beliebig:

$$tf(x) + (1-t)f(x') > f(tx + (1-t)x').$$

Dies impliziert für eine stetig differenzierbare Funktion f, dass für alle $x \neq x'$ stets

$$f(x') > f(x) + \nabla f(x)^T \cdot (x' - x)$$

gilt. (Die Ungleichung ist sogar äquivalent; wir brauchen aber nur die Hinrichtung.)

Beweis: Für eine stetig differenzierbare und strikt konvexe Funktion f gilt mit $\xi := (x' - x)/\|x' - x\|$ stets, dass die Abbildung

$$s \to \frac{f(x + s\xi) - f(x)}{s}$$

strikt monoton wachsend ist. Damit ist insbesondere aber für den Grenzwert $s \to 0$ und ansonstem festgehaltenen $s = \|x' - x\|$:

$$f'(x)^T \cdot \xi < \frac{f(x') - f(x)}{\|x' - x\|}.$$

$\square$

Es gilt also für beliebige x, x' mit $x \neq x'$:

$$f(x') > f(x) + \nabla f(x)^T \cdot (x' - x), \text{ oder mit Vertauschen,}$$
$$f(x) > f(x') + \nabla f(x')^T \cdot (x - x').$$

Addition dieser beiden Ungleichungen und Umordnung von Termen ergibt

$$(\nabla f(x') - \nabla f(x))^T \cdot (x' - x) > 0.$$

Lösung A.4.9: Man argumentiert analog zum Text: Die Zielfunktion $Q_\mu(y, z)$ in (II_μ^*) ist strikt konkav. (Dies ergibt sich ebenfalls aus einer früheren Übungsaufgabe.) Damit liefert das zur dualen Aufgabe (II_μ^*) zugehörige KKT-System nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedinungen für ein Optimum. Bestimmen wir diese:

Die Lagrange-Funktion ist

$$L(y, z, x) = Q_\mu(y, z) - x^T \cdot g(y, z)$$

mit

$$Q_\mu(y, z) = b^T \cdot y + \mu \sum \log(z_i),$$
$$g(y, z) = A^T y + z - c.$$

Das KKT-System lautet:

$$\nabla_y L = \nabla_y Q_\mu(y, z) - x^T \nabla_y g(y, z) = b - (x^T A^T)^T = 0,$$
$$\nabla_z L = \nabla_z Q_\mu(y, z) - x^T \nabla_z g(y, z) = \mu Z^{-1} e - X e = 0,$$
$$\nabla_x L = -g(y, z) = -A^T y - z + c = 0.$$

Insgesamt also

$$\Psi_\mu(x, y, z) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe - \mu e \end{pmatrix} = 0.$$

Somit ist die eindeutige Lösbarkeit von (II_μ^*) äquivalent zur Existenz einer eindeutigen Nullstelle von Ψ_μ, d. h. $\Psi_\mu(x, y, z) = 0$.

Lösung A.4.10: $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)$ is Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} A\hat{x}_\mu &= b, \\ A^T\hat{y}_\mu + \hat{z}_\mu &= c, \\ \hat{X}_\mu \cdot \hat{Y}_\mu e - \mu e &= 0. \end{aligned}$$

Man argumentiert nun:

Stetigkeit: Die Abbildung $\mu \to (\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)$ ist wohldefiniert und aufgrund des Satzes von der impliziten Funktion stetig (sogar stetig differenzierbar).

Beschränktheit: Die $\hat{x}_\mu$ und $\hat{z}_\mu$ sind aufgrund von $\hat{x}_\mu > 0$, $\hat{z}_\mu > 0$ und der dritten Gleichung beschränkt. Mit der 2. Gleichung, $\hat{z}_\mu = c - A^T\hat{y}_\mu$ folgt dann die Existenz einer Konstanten $C_0 > 0$, so dass

$$\big\|(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)\big\| \le C \quad \forall \mu_0 \ge \mu > 0.$$

Konvergenz: Damit konvergiert nach Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(\hat{x}_{\mu_k}, \hat{y}_{\mu_k}, \hat{z}_{\mu_k})$ mit Indizes $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$, d. h.

$$(\hat{x}_{\mu_k}, \hat{y}_{\mu_k}, \hat{z}_{\mu_k}) \to (\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0).$$

Der Grenzwert erfüllt aufgrund der Stetigkeit aller Konstituenten in obiger Gleichung ebenfalls die drei Gleichungen (mit $\mu = 0$).

Bemerkung: Ist die Lösung $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$ des ursprünglichen Problems eindeutig bestimmt, so konvergiert bereits die ganze Folge mit Index $\mu > 0$ (d. h. jede abzählbare Teilfolge ist konvergent.

Lösung A.4.11: Die Matrix ADA^T is symmetrisch:

$$(ADA^T)^T = A\big(AD\big)^T = AD^TA^T = ADA^T.$$

Weiterhin ist A^T aufgrund des maximalen Ranges injektiv. Damit folgt notwendigerweise für $x \in \mathbb{R}^m$ beliebig:

$$\big(ADA^Tx, x\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big(D(A^Tx), (A^Tx)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^Tx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,$$

d. h.: ADA^T ist definit. Die Positivdefinitheit von ADA^T folgt unmittelbar aus der Positivdefinitheität von D.

Lösung A.4.12: Der erste Newton-Schritt ausgehend von einem zulässigen (x^0, y^0, z^0) ist von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x^0 \\ \delta y^0 \\ \delta z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax^0 - b \\ A^Ty^0 + z^0 - c \\ Z^0X^0e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^0Z^0e. \end{pmatrix}$$

Damit folgt insbesondere $A\delta x^0 = 0$ und $A^T\delta y^0 + \delta z^0 = 0$. Für die nächste Iterierte,

$$(x^1, y^1, z^1) = (x^0, y^0, z^0) + (\delta x^0, \delta y^0, \delta z^0),$$

folgt somit

$$Ax^1 = b, \quad A^T y^1 + z^1 = c.$$

Abschließend kann mit einem Dämpfungsparameter $s \in (0, 1]$ stets erreicht werden, dass

$$x^1 = x^0 + s\delta x^0 > 0, \quad z^1 = z^0 + s\delta z^0 > 0.$$

Bei ausreichender Dämpfung bleiben die Newton-Iterierten also stets zulässig.

Lösung A.4.13: Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ergibt sich für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ab \ge 0$:

$$\sqrt{|ab|} \le \tfrac{1}{2}|a + b|. \tag{1.4.1}$$

Aus $u^T \cdot v = 0$ folgt

$$0 = u^T \cdot v = \sum_{u_iv_i \ge 0} u_iv_i + \sum_{u_iv_i < e0} u_iv_i = \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_iv_i| - \sum_{i \in \mathcal{M}} |u_iv_i|, \tag{1.4.2}$$

mit der (disjunkten) Zerlegung $\mathcal{P} := \{i \in I_n |\, u_iv_i \ge 0\}$, $\mathcal{M} := \{i \in I_n |\, u_iv_i < 0\}$ der Indexmenge $I_n := \{1, \dots, n\}$. Damit ergibt sich dann die Abschätzungskette

$$\begin{aligned}
\|UVe\|_2 &= \Big(\sum_{i=1}^n |u_iv_i|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i \in \mathcal{P}} |u_iv_i|^2 + \sum_{i \in \mathcal{M}} |u_iv_i|^2\Big)^{1/2} \\
&\le \Big(\Big(\sum_{i \in \mathcal{P}} |u_iv_i|\Big)^2 + \Big(\sum_{i \in \mathcal{M}} |u_iv_i|\Big)^2\Big)^{1/2} \\
&\le \Big(2\Big(\sum_{i \in \mathcal{P}} |u_iv_i|\Big)^2\Big)^{1/2} = \sqrt{2} \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_iv_i| \qquad \text{(wegen (4.5.48))} \\
&\le \sqrt{2} \sum_{i \in \mathcal{P}} \frac{1}{4}|u_i + v_i|^2 = 2^{-3/2} \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i + v_i|^2 \qquad \text{(wegen (4.5.47))} \\
&\le 2^{-3/2} \sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^2 = 2^{-3/2}\, \|u + v\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung.

Lösung A.4.14: Die Abbildung $x \to 1/2\, x^T \cdot x$ ist strikt konvex und die Nebenbedingung $Ax = b$ ist linear. Die Optimierungsaufgabe ist also eindeutig lösbar. Insbesondere besitzt f ein globales Minimum und hat keine anderen lokalen Extrema. Damit hat auch das KKT-System notwendigerweise eine eindeutige Lösung. Aus der Lagrange-Funktion $L(x, \lambda) := 1/2x^T \cdot x - \lambda^T \cdot (Ax - b)$ letiet man das KKT-System her:

$$\begin{aligned}
x - A^T\lambda &= 0, \\
Ax - b &= 0.
\end{aligned}$$

Dieses wird von $A^T(AA^T)^{-1}b$ gelöst: Aufgrund des maximalen Rangs ist AA^T regulär und die Inverse existiert. Es liegt $A^T\big((AA^T)^{-1}b\big)$ im Bild von A^T (erste Gleichung), weiterhin ist $A\big(A^T(AA^T)^{-1} = I$.

A.5 Kapitel 5

Lösung A.5.1: a) Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex/strikt konvex/konkav/strikt konkav, falls zu gegebener Strecke $\overline{xy} \subset D$ mit $x \neq y$ stets gilt

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \,\Box\, f(\alpha x + (1-\alpha)y) \quad \forall \alpha \in (0,1),$$

mit $\Box \in \{\geq, >, \leq, <\}$. Beispiele sind $f(x) = \pm\|x\|^2$ für eine strikt konvexe/konkave Funktion und mit $n \geq 2$ die Abbildung $(f)x = \pm|x_1|^2$ für eine konvexe/konkave, aber nicht strikt konvexe/konkave Funktion.

b) Wir zeigen, dass f lokal Lipschitz-stetig ist. Sei $z \in D$ fest gewählt und zunächst $\overline{xy} \subset D$ beliebig mit $z \in (xy)$ betrachtet. Aufgrund der Konvexität von f ist der Differenzenquotient monoton steigend, d. h.: Mit $\xi := (y-x)/\|y-x\|$ und $\tilde{z} \in (xy)$ beliebig gilt stets:

$$s \to \frac{f(\tilde{z} + s\xi) - f(\tilde{z})}{s}, \text{ bzw. } s \to \frac{f(\tilde{z}) - f(\tilde{z} - s\xi)}{s}$$

sind monoton steigende Funktionen. Damit gilt für eine beliebige Wahl $w \in (zy)$, stets

$$\frac{f(w) - f(z)}{\|w - z\|} \leq \frac{f(y) - f(z)}{\|y - z\|} \leq \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|}$$

und durch Richtungswechsel $\xi \to -\xi$:

$$\frac{f(z) - f(w)}{\|z - w\|} \leq \frac{f(x) - f(w)}{\|x - w\|} \leq \frac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|}.$$

Mit $L := |f(y) - f(x)|/\|y - x\|$ gilt dann stets

$$\big|f(w) - f(z)\big| \leq L\big\|w - z\big\| \quad \forall w \in (x,y).$$

Damit ist aber f in $z \in D$ bereits lokal Lipschitz-stetig, da dieselbe Argumentation für ein beliebiges w für jede Komponente $e_i^T \cdot w$ unabhängig durchgeführt werden kann. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus der Dreiecksungleichung.

c) Anwenden der definierenden Eigenschaft auf jeden Summanden liefert die Behauptung unmittelbar.

d) Diese Behauptung folgt unmittelbar aus (e) durch Wahl von $a = \min_{x \in D} f(x)$.

e) Bezeichne $N := \{x \in D : f(x) \leq a\}$. Sei $\overline{xy} \subset N$ beliebig. Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \leq a,$$

also $\alpha x + (1-\alpha)y \in N$

Lösung A.5.2: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt. Dann gilt für $t \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
&f(tx{+}(1-t)y) \\
&\qquad = tc^T \cdot x + (1-t)c^T \cdot y + t^2 x^T C x + (1-t)^2 y^T C y + 2t(1-t) x^t C y \\
&\qquad \leq tc^T \cdot x + (1-t)c^T \cdot y + t^2 x^T C x + (1-t)^2 y^T C y + t(1-t)\big\{x^t C x + y^T y\big\} \\
&\qquad = tf(x) + (1-t) f(y).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Beziehung

$$2x^T \cdot Cy \leq x^T \cdot Cx + y^T \cdot Cy$$

ausgenutzt. Ist C sogar positiv definit, so folgt die strikte Ungleichung für $x \neq y$.

Lösung A.5.3: Sei x^0 Lösung von (P). Aufgrund der linearen Nebenbedingung sind alle $x \in M$ regulär. Nach dem lokalen Satz von Karush-Kuhn-Tucker gibt es also $y^0 \in \mathbb{R}^m_+$ mit

$$\begin{aligned} {y^0}^T \cdot g(x^0) &= 0, \\ \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^m y_i^0 \nabla g_i(x^0) &= 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall also:

$$\begin{aligned} {y^0}^T \cdot (Ax^0 - b) &= 0, \\ c - A^T y^0 &= 0. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$b^T \cdot y^0 = (Ax^0)^T \cdot y^0 = (A^T y^0)^T \cdot x^0 = c^T \cdot x^0.$$

Somit ist nach Satz 1.1 (Dualtitätstheorie) y^0 bereits eine Lösung von (P^*).

Seien nun x, y zwei zulässige Punkte, die das KKT-System erfüllen. Dann gilt $Ab \geq b$ (Zulässigkeit), sowie $A^T y = c$ (zweite Gleichung), und die erste Gleichung wird äquivalent zum Gleichgewichtssatz:

$$\begin{aligned} y^T \cdot (Ax - b) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \Big[y_i > 0 \;\Rightarrow\; (Ax)_i = b_i \,\forall\, i \Big] \\ &\Leftrightarrow \quad x, y \text{ sind Lösung von } (P) \text{ und } (P^*). \end{aligned}$$

Lösung A.5.4: (Kovexitätskriterium)

Nicht verfügbar.

Lösung A.5.5: (Sattelpunktskriterium)

Nicht verfügbar.

Lösung A.5.6: (Anwendung Dualitätstheorie)

Nicht verfügbar.

Lösung A.5.7: a) Mit

$$f(x) = -c^T \cdot x, \quad g(x) = \begin{bmatrix} A \\ -I_n \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ 0_n \end{bmatrix}$$

lautet die Optimierungsaufgabe in Standardform für nichtlineare Programme:

$$f(x) \to \min!, \quad g(x) \le 0. \tag{P}$$

b) Die Aufgabe (P^*) wird über die Lagrange-Funktion hergeleitet:

$$\begin{aligned} L \ &: \ \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \\ L(x, \tilde{y}) &= -c^T \cdot x + y^T \cdot \big(Ax - b\big) - z^T \cdot x \\ &= -x^T \cdot \big(A^T y - c\big) - b^T \cdot y - x^T \cdot z \end{aligned}$$

mit der Notation $\tilde{y} = (y, z)$. Es folgt

$$L_*(\tilde{y}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \tilde{y}) = \begin{cases} -\infty, \text{ falls } A^T y - c \ne z, \\ -b^T \cdot y, \text{ falls } A^T y - c = z. \end{cases}$$

Somit hat die duale Aufgabe

$$\tilde{y} \in \mathbb{R}_+^{m+n} \ : \ L_*(\tilde{y}) \to \max! \tag{P^*}$$

die konkrete Gestalt

$$y \in \mathbb{R}^m \ : \ b^T \cdot y \to \min!, \quad A^T y \ge c, \ y \ge 0.$$

c) Man rechnet nach, dass für das primale Problem (P) mit

$$f(x) = b^T \cdot y, \quad g(y) = \begin{bmatrix} -A^T \\ -I_m \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} c \\ 0_m \end{bmatrix}$$

und Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L \ &: \ \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \\ L(y, \tilde{x}) &= b^T \cdot y + x^T \cdot \big(- A^T y + c\big) - z^T \cdot y \\ &= y^T \cdot \big(- Ax + b\big) + c^T \cdot x - y^T \cdot z \end{aligned}$$

mit der Notation $\tilde{x} = (x, z)$. Analog ergibt sich

$$L_*(\tilde{x}) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} L(y, \tilde{x}) = \begin{cases} -\infty, \text{ falls } - Ax + b \ne z, \\ c^T \cdot x, \text{ falls } - A^T x + b = z. \end{cases}$$

Somit hat die duale Aufgabe (P^*) die konkrete Gestalt

$$x \in \mathbb{R}^n \ : \ c^T \cdot x \to \max!, \quad Ax \le b, \ x \ge 0.$$

Dies ist gerade (I*).

d) Nach dem globalen Karush-Kuhn-Tucker-Satz folgt für eine Lösung x^0 von (I) die Existenz von $\tilde{y}^0 \in \mathbb{R}_+^{m+n}$, so dass $x^0, \tilde{y}^0$ Sattelpunkt von $L(x, \tilde{y})$ ist (und umgekehrt). Dabei gilt nach (c) und der Sattelpunktseigenschaft

$$L^*(x^0) = L_*(\tilde{y}^0) = -b^T \cdot y^0.$$

Somit ist y^0 Lösung von (I*).

Lösung A.5.8: (lokaler KKT-Satz)

Nicht verfügbar.

Lösung A.5.9: Aufstellen der Lagrange-Funktion

$$L(x, y) = f(x) + y^T \cdot g(x), \text{ mit}$$
$$f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2, \quad g(x) = \begin{pmatrix} -1 - x_1 \\ 1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $f(x)$ hat die Hessematrix $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und ist strikt konvex, $g(x)$ ist linear. Der lokale Karush-Kuhn-Tucker-Satz ist damit anwendbar. Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten:

$$\begin{cases} (y^0)^T \cdot g(x^0) = 0, \\ \nabla f(x^0) + \sum_i y_i^0 \nabla g_i(x^0) = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y_1^0(1 + x_1) + y_2^0(1 + x_2^0) = 0, \\ \begin{pmatrix} 2x_1^0 + x_2^0 - 1 \\ x_1^0 + 2x_2^0 - 1 \end{pmatrix} + y_1^0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Ansatz: $y_1^0 = 0$, $y_2^0 > 0$. Dies führt sofort auf $x_2^0 = -1$ (erste Gleichung), $x_1^0 = 1$ (zweite Gleichung) und $y_2^0 = 2$ (dritte Gleichung).

Der Vektor $x^0 = (1, -1)^T$ genügt also den Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen und ist zulässig. Damit ist x^0 die gewünschte (eindeutige) Lösung aufgrund der strikten Konvexität.

Lösung A.5.10: Setze

$$\tilde{g}(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}.$$

Dann existiert nach dem lokalen Karush-Kuhn-Tucker-Satz ein $\tilde{y}^0 \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ mit

$$\tilde{y}_0^T \cdot \tilde{g}(x^0) = 0, \tag{α}$$

$$\nabla f(x^0) + \sum_1^{m+n} \tilde{y}_i^0 \nabla \tilde{g}_i(x^0) = 0. \tag{β}$$

Mit der Zerlegung $\tilde{y}^0 = (y^0, z^0)^T$, $y^0 \in \mathbb{R}_+^m$ und $z^0 \in \mathbb{R}_+^n$ überführt man die erste Gleichung in:

$$\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{y^{0T} \cdot g(x^0)}_{\leq 0} - \underbrace{z^{0T} \cdot x^0}_{\geq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^{0T} \cdot g(x^0) = 0.$$

Und die zweite Gleichung in:

$$\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} y_i^\nabla g_i(x^0)}_{\nabla_x L(x^0, y^0)} - \underbrace{z^{0T} \cdot 1_n}_{\geq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_x L(x^0, y^0) \geq 0.$$

Lösung A.5.11: (Regulariätskriterium)

Nicht verfügbar.

Lösung A.5.12: Zunächst formt man die Aufgabe in Standardform um. Für die Nebenbedingung gilt hierbei:

$$Ax = b, x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \\ -x \leq 0 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) := \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0.$$

Aufgrund der strikten Konvexität von $f(x) = x^T \cdot Cx + c^T \cdot x$ und der Linearität von $g(x)$ untersucht man analog zu einer früheren Aufgabe die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen. Seien $(\hat{y}, \hat{z}, \hat{u})^T \in \mathbb{R}_+^{m+m+n}$ die Lagrange-Multpiplikatoren zu obigen Ungleichungsnebenbedingungen. Dann ist die Existenz eines Sattelpunktes äquivalent zu:

$$i) \quad \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$ii) \quad (\hat{y}^T, \hat{z}^T, \hat{u}^T) \cdot \left(\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \right)$$

$$= \hat{y}^T \cdot (A\hat{x} - b) - \hat{z}^T \cdot (A\hat{x} - b) - \hat{u}^T \cdot \hat{x} = 0$$

$$iii) \quad 2C\hat{x} + c + \begin{bmatrix} A^T & -A^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = 0.$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} i) &\quad A\hat{x} = b, \quad \hat{x} \geq 0, \\ ii) &\quad \hat{u}^T \cdot \hat{x} = 0, \\ iii) &\quad -2C\hat{x} + \hat{u} - A^T \underbrace{(\hat{z} - \hat{y})}_{\in \mathbb{R}^m} = C. \end{aligned}$$

Lösung A.5.13: Die Argumentation ist analog zu frheren Aufgaben. Die Funktion $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 48x_1 - 40x_2$ ist strikt konvex, die Darstellung der Nebenbedingungen,

$$g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 8 - x_1 - x_2 \\ 6 - x_1 \\ 18 - x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

(affin) linear. Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen reduzieren mit der Wahl $x_1 = 4$, $x_2 = 4$ auf die folgenden Gleichungen für den Lagrange-Multiplikator $y \in \mathbb{R}^5, y \geq 0$:

$$\begin{aligned} i) &\quad 4y_1 + 4y_2 + 2y_4 + 2y_5 = 0 \\ ii) &\quad \begin{aligned} -32 + y_1 + y_3 + y_4 + y_5 &= 0 \\ -32 + y_2 + y_3 + 3y_5 &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

In der Ungleichungsnebenbedingung $g(x) \geq 0$ ist die Gleichheit in der 1., 2., 4. und 5. Gleichung verletzt. Dies motiviert den Ansatz $y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0$. Und damit nach Gleichung (ii): $y_3 = 32$. Wir haben also einen Sattelpunkt $(x, y)^T$ mit $x = (4, 4)^T$ und $y = (0, 0, 32, 0, 0)^T$ gefunden.

Lösung A.5.14: (Quadrat. Optimierungsaufgabe)

Nicht verfügbar.

A.6 Kapitel 6

Lösung A.6.1: Wir haben im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 5, \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \\ g_2(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 3, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix}, \\ g_3(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 2, \quad \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ 2x_2 + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Konstruktion von S_0: Es soll gelten $g_i(\bar{x}) + (x - \bar{x})^T \cdot \nabla g_i(\bar{x}) \leq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ mit $\bar{x} = (0, 0)^T$. Dies liefert die Ungleichungen

$$x_1 \geq -\frac{5}{4}, \quad x_2 \geq -\frac{3}{2}, \quad x_1 + x_2 \leq 1.$$

Offenbar ist S_0 beschränkt.

Das Startproblem lautet nun

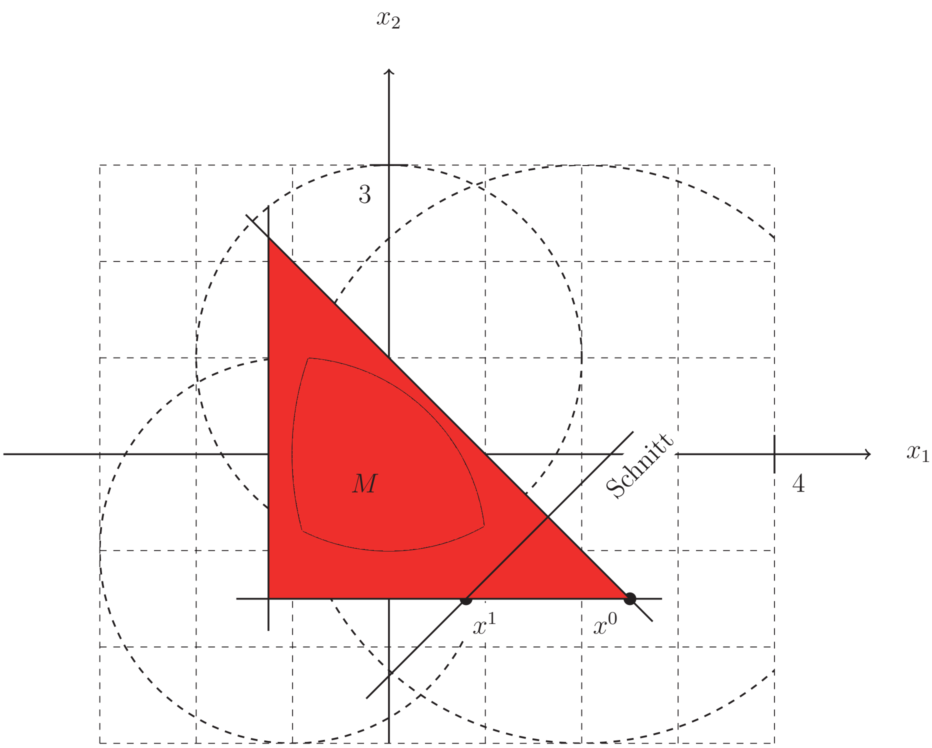
$$-x_1 + x_2 = \min!, \quad -x_1 \leq \frac{5}{4}, \quad -x_2 \leq \frac{3}{2}, \quad x_1 + x_2 \leq 1. \qquad (P_0)$$

Grafisches Ablesen liefert die Lösung $x^0 = (5/2, -3/2)^T$. Damit ist

$$g_1(x^0) = -\frac{13}{2}, \quad g_2(x^0) = \frac{17}{2}, \quad g_3(x^0) = \frac{17}{2}$$

und man selektiert $k = 2$. Der erste Schnitt ist also

$$g_2(x^0) + (x - x^0)^T \cdot \nabla g_2(x^0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 - \frac{23}{10} \leq 0.$$



Lösung A.6.2: Das Endtableau hat die Gestalt

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & x_k & x_{k_0} & & \\
\hline
x_i & \alpha_{ik} & \vdots & & x_i^0 \\
\hline
 & \gamma_k & \gamma_{k_0} & & \\
\end{array}
\qquad i \in I^0
$$

$$k \notin I^0$$

mit $\gamma_{k_0} < 0$ und $\gamma_k \geq 0$ für $k \neq k_0$. Es gilt aufgrund der Konstruktion des Simplextableaus:

$$x_i = \sum_{k \notin I^0} \alpha_{ik} x_k + x_i^0 \quad (i \in I^0),$$

$$Q(x) = \sum_{k \notin I^0} \gamma_k x_k + Q(x^0).$$

Wegen $x_{k_0} = 0$ ist x^0 auch zulässige Ecke des reduzierten Problems. Die Ecke x^0 ist nach der zweiten Gleichung unter der Nebenbedingung $x_{k_0} = 0$ bereits optimal, da durch einen Basiswechsel $Q(x)$ nicht mehr verringert werden kann (die einzige Abstiegsrichtung mit $\gamma_k < 0$ wird gerade festgehalten).

Es gilt weiterhin

$$x_i = \sum_{k \notin I^0, k \neq k_0} \alpha_{ik} x_k + x_i^0 \quad (i \in I^0),$$

$$Q(x) = \sum_{k \notin I^0, k \neq k_0} \gamma_k x_k + Q(x^0).$$

Damit ist x^0 ein Optimum des reduzierten Problems

$$\tilde{c}^T \cdot \tilde{x} = \min!, \quad \tilde{A}\tilde{x} = b, \quad \tilde{x} \geq 0,$$

wobei $\tilde{c}$ aus c, $\tilde{x}$ aus x und $\tilde{A}$ aus A durch Streichung der k_0-ten Spalte entstehen. Das zu der entsprechend verkürzten Ecke $\tilde{x}^0$ gehörende Tableau entsteht offenbar aus dem obigen durch Streichung der Spalte zum Index k_0. Es ist „optimal".

Lösung A.6.3: (Dualitätsverfahren von Wolfe 1)

Nicht verfügbar.

Lösung A.6.4: (Dualitätsverfahren von Wolfe 2)

Nicht verfügbar.

Lösung A.6.5: (Abstiegsverfahren von Frank und Wolfe)

Nicht verfügbar.

Lösung A.6.6:

1. Mit $c \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ b \geq 0$ lautet ein lineares Programm in Normalform
$$x \in \mathbb{R}^n \ :\ c^T \cdot x \to \min!, \quad x \geq 0, \quad Ax = b.$$
Die hierzu duale Aufgabe lautet
$$y \in \mathbb{R}^m \ :\ b^T \cdot y \to \max!, \quad A^T y \leq c.$$

2. Eine Schlupfvariable z ist ein künstlich eingeführter Freiheitsgrad um eine Ungleichungsnebenbedinung, z. B. $Ac \leq b$ in eine Gleichungsnebenbedingung
$$Ax + z = b, \quad z \geq 0,$$
zu überühren. Dies ist notwendig zur Überführung von allgemeinen linearen Programmen auf Normalform.

3. Im Endtableau zu einer zulässigen und optimalen Ecke sind alle $\gamma_k \geq 0$ (Optimalität) und alle $x_i^0 \geq 0$ (Zulässigkeit). Die primale Auswahlregel (R) sichert die Zulässigkeit der neuen Ecke nach einem Auswahlschritt.

4. Das primale Simplexverfahren optimiert den Funktionalwert durch Eckenwechsel unter Beibehaltung der Zulässigkeit. Der duale Simplexalgorithmus überführt sukzessive auf eine zulässige Ecke unter Beibehaltung der Optimalität. Letzteres wird beim Gomory-Schnittverfahren benötigt.

5. Ein Matrixspiel A heißt fair, falls für die zugeordnete Wertigkeit μ_A des Spiels gilt: $\mu_A = 0$. Die Wertigkeit μ_A kann über das Lösen der Optimierungsaufgaben
$$x_0 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n : \quad x_0 \to \max!, \quad x \geq 0,\ \sum_{i=1}^m x_i = 1,\ \sum_{i=1}^m x_i a_{ik} \geq x_0, \tag{P}$$
oder
$$y_0 \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^n : \quad y_0 \to \min!, \quad y \geq 0,\ \sum_{k=1}^n y_k = 1,\ \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \leq y_0, \tag{P*}$$
bestimmt werden. Es ist dann $\mu_A = \hat{x}_0 = \hat{y}_0$.

6. Die Lagrange-Funktion zu
$$c^T \cdot x \to \max!, \quad x \geq 0, \quad Ax \leq b$$
hat die Gestalt
$$L(x, y, z) = -c^T \cdot x + y^T \cdot (Ax - b) + z^T \cdot x.$$
Ein Sattelpunkt $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T$ erfüllt
$$L(\hat{x}, y, z) \leq L(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \leq L(x, \hat{y}, \hat{z}) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^m\ \forall\, z \in \mathbb{R}^n.$$

7. Der Ausgangspunkt des Innere-Punkte-Verfahrens ist die äquivalente Darstellung einer Lösung $(x, y, z)^T$ des primalen und dualen Problems (mit z als Schlupfvariable) als Nullstele von $\Psi_0 = 0$ mit

$$\Psi_\mu(x, y, z) := \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe - \mu e \end{bmatrix}.$$

Hierbei heißt die Größe

$$n_\mu := x_\mu^T \cdot z_\mu = c^T \cdot x_\mu - b^T \cdot y_\mu$$

Dualtitätslücke.

8. Das Sattelpunktskriterium zu einer Lagrange-Funktion $L(x, y)$ lautet

$$L^*(\hat{x}) = L_*(\hat{y}),$$

mit

$$L^*(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}_+^m} \{L(x, y)\}, \quad L_*(x) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x, y)\}.$$

Korrekt ist auch die äquivalente Formulierung:

$$L(\hat{x}, y) \leq L(\hat{x}, \hat{y}) \leq L(x, \hat{y}) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+^m.$$

Für einen Sattelpunkt $(\hat{x}, \hat{y})^T$ gilt stets, dass $\hat{x}$ Lösung des primalen Problems (P) und $\hat{y}$ Lösung des dualen Problems (P*) ist.

9. Seien die Funktion f und die Nebenbedingungen g_i konvex sind und $M^0 \neq \emptyset$. Dann besagt der globale KKT-Satze, dass zu einer Lösung $\hat{x}$ von

$$x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) \to \min!, \quad g(x) \leq 0,$$

stets ein $y \in \mathbb{R}_+^m$ gibt, so dass $(\hat{x}, \hat{y})^T$ ein Sattelpunkt von $L(x, y) = f(x) + y^T \cdot g(x)$ ist. Hierbei ist

$$M^0 := \{x \in M \ : \ g(x) < 0\} \neq \emptyset$$

die sogenannte *Slater-Bedingung*.

10. Die Idee des Schnittebenenverfahrens besteht aus der Approximation der zulässigen Menge M durch ein Polyeder S_0 mit $M \subset S_0$ und der Lösung des linearen Programms (o.B.d.A. ist f linear)

$$f(x) \to \min!, \quad x \in S_0.$$

Es werden nun, so lange $x_t \notin M$, zuksessive kleinere Polyeder $S_1, \ldots$ durch „Schnitte" erzeugt, so dass $M \subset S_t$, aber $x_{t-1} \notin S_t$ (x_t sei stets Lösung des linearen Programms zu S_t).

Lösung A.6.7:

1. Mit $c \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ b \geq 0$ lautet ein lineares Programm in Standardform:

$$x \in \mathbb{R}^n \ :\ c^T \cdot x \to \max!, \quad x \geq 0, \quad Ax \leq b.$$

Überführung in Normalform duch Einführen einer Schlupfvariablen $z \in \mathbb{R}^m_+$:

$$x \in \mathbb{R}^n \ :\ \begin{pmatrix} -c^T & 0_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \to \min!, \quad x \geq 0, \quad \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b.$$

2. Die Normalform liegt dem Simplexverfahren zugrunde. Liegt für x_i keine Vorzeichenbedingung vor, zerlegt man x_i in einen positiven und negativen Anteil mit Vorzeichenbedingung:

$$x_i = x_i^+ - x_i^- \quad \text{mit } x_i^\pm \geq 0.$$

(Bemerkung: Es kann gezeigt werden, dass es stets ein Optimum mit entweder $x_i^+ = 0$ oder $x_i^- = 0$ gibt.)

3. Im Endtableau zu einer zulässigen und optimalen Ecke sind alle $\gamma_k \geq 0$ (Optimalität) und alle $x_i^0 \geq 0$ (Zulässigkeit).

Eine Basis der Ecke $\hat{x}$ is gegeben durch die Menge $B(\hat{x}) := \{a_k \mid k \in I(\hat{x})\} = \{a_k \mid k \text{ aktiver Index}\}$. (Bzw. im Fall einer entarteten Ecke durch eine Vervollständigung von $B(x)$ mit Spaltenvektoren von A.)

4. Eine Ecke $\hat{x}$ ist entartet, falls $\dim B(\hat{x}) < m$.

Das Simplexverfahren mit einfacher Auswahlregel (R) muss beim Auftreten entarteter Ecken nicht notwendigerweise terminieren, ein Zyklus kann auftreten.

5. Ein Matrixspiel ist ein Zweiparteienspiel bestehend aus dem gleichzeitigen Ziehen beider Parteien aus einer fixen Menge an Zugmöglichkeiten und anschließender Gewinnfeststellung mit Hilfe einer Auszahlungsmatrix. Diese gibt hierbei den Gewinn bzw. Verlust der ersten Partei in Abhängigkeit von der Zugwahl beider Parteien an. Die Wertigkeit des Matrixspiels ist die mittlere Gewinnerwartung des ersten Spielers bei optimaler Strategie beider Parteien. Einem Matrixspiel kann stets eine Wertigkeit mit optimalen Strategien zugeordnet werden.

6. Der Alternativsatz für das Standardproblem der linearen Optimierung besagt, dass genau einer der beiden Alterantiven gilt:
i) $M \neq \emptyset$ und $M^* \neq \emptyset$ und primales und duales Problem sind lösbar mit $\max_I = \min_{I^*}$.

ii) $M = \emptyset$ oder $M^* = \emptyset$ und beide Aufgaben sind unlösbar.

Eine analoge Aussage gilt auch für das kanonische Problem.

7. Unter dem zentralen Pfad versteht man die wohldefinierte Abbildung $\mu \to (x_\mu, y_\mu, z_\mu)$ mit $\mu > 0$, wobei x_μ Lösung des primalen und $(y_\mu, z_\mu)^T$ Lösung des dualen Problems ist.

   Die Regularisierung dient dazu, das ursprüngliche Problem $\Psi_0(x, y, z) = 0$ in ein modifiertes Problem $\Psi_\mu(x, y, z) = 0$ zu überführen, dessen Optimum im Inneren der zulässigen Menge liegt. Dies sichert eine eindeutige Lösung und Regularität der zugeh. Jakobi-Matrix für das Newton-Verfahren.

8. Zur konvexen Optimierungsaufgabe (f, g_i konvex)

$$x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \to \min, \quad g(x) \leq 0$$

   lauten die KKT-Bedingungen (lokaler KKT-Satz): $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ erfüllen

$$\begin{aligned} \hat{y}^T \cdot g(\hat{x}) &= 0, \\ \nabla f(\hat{x}) + \hat{y}^T \cdot \nabla g(\hat{x}) &= 0. \end{aligned}$$

   Ist $M^0 \neq \emptyset$ (Slater-Bedingung), so sind die KKT-Bedingungen hinreichend und notwendig für die Existenz einer Lösung $\hat{x}$ obiger Optimierungsaufgabe. (Alternative Antwort: Optimallösungen sind auch Lösungen des KKT-Systems, aber nicht notwendig umgekehrt; die Umkehrung erfordert $M^0 \neq \emptyset$.)

9. Eine effiziente Bestimmung ist mit Hilfe des Gleichgewichtssates möglich: Zunächst ist notwendig $y_j = 0$ für alle j mit $(Ax)_j \neq b_j$. Weiterhin ergibt sich ein LGS

$$\begin{aligned} (A^T y)_i &= c_i \quad \forall i \text{ mit } x_i^0 > 0 \\ b^T \cdot y &= c^T \cdot x. \end{aligned}$$

10. Seien $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^m$ nichtleer, konvex und disjunkt. Weiterhin sei B_2 offen. Dann exisitert eine Hyperebene, die beide Mengen trennt. Formal: $\exists a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, so dass

$$a^T \cdot y > a^T \cdot x, \quad x \in B_1,\, y \in B_2.$$