

# 6 Verfahren für nichtlineare Optimierungsaufgaben

## 6.1 Ein Überblick

Die numerischen Verfahren zur Lösung nichtlinearer Optimierungsaufgaben lassen sich grob in die folgenden Klassen einteilen:

1. Schnittebenenverfahren
2. Dualitätsmethoden
3. Abstiegsmethoden
4. Strafkostenmethoden

### 1. Schnittebenenverfahren

Die Zielfunktion  $f$  sei linear und der zulässige Bereich  $M$  beschränkt. Dann lässt sich ein Polyeder  $S_0$  bestimmen mit  $M \subset S_0$ . Die erste Näherungslösung  $x^0$  wird berechnet als Lösung von

$$f(x) \rightarrow \min!, \quad x \in S_0.$$

Im Falle  $x^0 \in M$  ist  $x^0$  bereits Lösung der Ausgangsaufgabe. Andernfalls wird die Menge  $S_0$  durch eine zusätzliche affin-lineare Restriktion („Schnittebene“) so zu einem Polyeder  $S_1$  eingeschränkt, dass  $M \subset S_1$  ist, aber  $x^0 \notin S_1$ . Die nächste Näherung  $x^1$  wird dann wieder als Lösung von

$$f(x) \rightarrow \min!, \quad x \in S_1$$

bestimmt. Dieser Prozess erzeugt sukzessive Lösung linearer Probleme (etwa mit Hilfe des Simplex-Verfahrens) eine Folge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  von Punkten, welche unter gewissen Voraussetzungen gegen eine Lösung des Ausgangsproblems konvergieren.

### 2. Dualitätsmethoden

Es wird direkt über die Karush-Kuhn-Tucker-(KKT)-Bedingungen ein Sattelpunkt der Euler-Lagrange-Funktion  $L(x, y) = f(x) + y^T \cdot g(x)$  bestimmt. Dazu gehören z.B. das modifizierte „Simplex-Verfahren von Wolfe“ für quadratische Aufgaben und der sog. „Lagrange-Algorithmus“.

### 3. Abstiegsmethoden

Ausgehend von einem zulässigen Startvektor  $x^0 \in M$  wird eine Folge von Iterierten  $x^t \in M$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , erzeugt durch folgende Vorschrift:

- i)  $d^t \in D(x^t)$  zulässige Richtung;
- ii)  $\lambda_t > 0$  :  $x^t + \lambda_t d^t \in M$ ,  $f(x^t + \lambda_t d^t) < f(x^t)$ ;
- iii)  $x^{t+1} := x^t + \lambda_t d^t$ .

Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich durch die Vorschriften zur Wahl der Abstiegsrichtungen  $d^t$  und der Schrittlängen  $\lambda_t$ . Sie erweisen sich als besonders geeignet im Falle linear-affiner Restriktionen. Dazu gehören die sog. „Koordinatenrelaxation“, das klassische „Gradientenverfahren“ und die verschiedenen Varianten des „CG-Verfahrens“.

#### 4. Strafkostenmethoden

Das restringierte Problem wird durch unrestringierte Probleme approximiert (ähnlich der Barrieretechnik beim „zentralen Pfad“ zur Behandlung der Bedingung  $x > 0$ ). Dazu gehören das „Penalty-Verfahren“, die „Barriere-Methode“ und in gewissem Sinne auch die „Methode der Zentren“. Die approximierenden unrestringierten Probleme müssen dann wieder mit den dafür geeigneten Methoden gelöst werden. Das Problem ist dabei deren i. Allg. sehr schlechten, parameterabhängige Konditionierung.

### 6.2 Die Methode der Schnittebenen

Die sog. „Methode der Schnittebenen“ löst *konvexe* Programmierungsaufgaben der Form

$$(P) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad c^T \cdot x \rightarrow \min!, \quad g(x) \leq 0,$$

mit *linearer* Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  durch Reduzierung auf eine (i. Allg. unendliche) Folge von *linearen* Programmierungsaufgaben.

**Lemma 6.1:** *Die folgenden beiden nichtlinearen Optimierungsaufgaben sind äquivalent:*

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) \rightarrow \min!, \quad g(x) \leq 0, \\ (P_2) \quad & (x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad \xi \rightarrow \min!, \quad g(x) \leq 0, \quad f(x) - \xi \leq 0. \end{aligned}$$

**Beweis:** Für eine Lösung  $(x, \xi)$  von  $(P_2)$  gilt  $g(x) \leq 0$ , und  $\xi \geq f(x)$  ist minimal. Also ist  $\xi = f(x)$ , d. h.:  $x$  ist Lösung von  $(P_1)$ . Umgekehrt gilt für eine Lösung  $x$  von  $(P_1)$  mit  $\xi := f(x)$ :

$$g(x) \leq 0, \quad f(x) \leq \xi.$$

Wäre nun  $(x, \xi)$  nicht Lösung von  $(P_2)$ , so gäbe es ein Paar  $(x', \xi')$  mit den Eigenschaften  $g(x') \leq 0$ ,  $f(x') \leq \xi'$  und  $\xi' < \xi$ . Dies ergäbe den Widerspruch ( $x$  Lösung von  $(P_1)$ )

$$\xi > \xi' \geq f(x') \geq f(x),$$

was den Beweis vervollständigt.

Q.E.D.

Die Annahme einer linearen Zielfunktion in der Aufgabe  $(P)$  bedeutet also keine Einschränkung der Allgemeinheit. Von jetzt an nehmen wir an, dass die folgenden Bedingungen (A) und (B) erfüllt sind.

(A) *Die zulässige Menge  $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$  der Aufgabe  $(P)$  ist beschränkt und in einem Polyeder*

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

*enthalten, mit  $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^q$ ,  $q > n$ . Ein Polyeder ist (nach Definition) beschränkt und abgeschlossen, d. h. kompakt.*

(B) *Die Funktionen  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sind konvex und stetig differenzierbar.*

Die Methode der Schnittebenen erzeugt, ausgehend von dem Polyeder  $S_0$ , eine Folge von Polyedern  $S_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , sowie eine zugehörige Folge von Punkten  $x^t \in S_t$  durch folgende Vorschrift:

i) Für  $t = 0, 1, 2, \dots$  sei  $x^t$  Minimallösung der Aufgabe

$$(P_t) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad c^T \cdot x \rightarrow \min! \quad x \in S_t.$$

ii) Sei  $k \in \{1, \dots, m\}$  mit  $g_k(x^t) = \max_{i=1, \dots, m} g_i(x^t)$ . Dann wird gesetzt

$$S_{t+1} := S_t \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x^t) + (x - x^t)^T \cdot \nabla g_k(x^t) \leq 0\}.$$

Offenbar ist  $S_{t+1}$  wieder ein Polyeder, das aus  $S_t$  durch „Abschneiden“ der Punkte mit der Eigenschaft

$$g_k(x^t) + (x - x^t)^T \cdot \nabla g_k(x^t) > 0$$

hervorgeht. Die Gleichung

$$g_k(x^t) + (x - x^t)^T \cdot \nabla g_k(x^t) = 0$$

beschreibt eine Hyperebene im  $\mathbb{R}^n$ , die man erhält als Schnitt der Tangentialebene an die Fläche  $z = g_k(x)$  im  $\mathbb{R}^{n+1}$  im Punkt  $x^t$  mit der Hyperebene  $z = 0$  (s. Abb. 6.1)

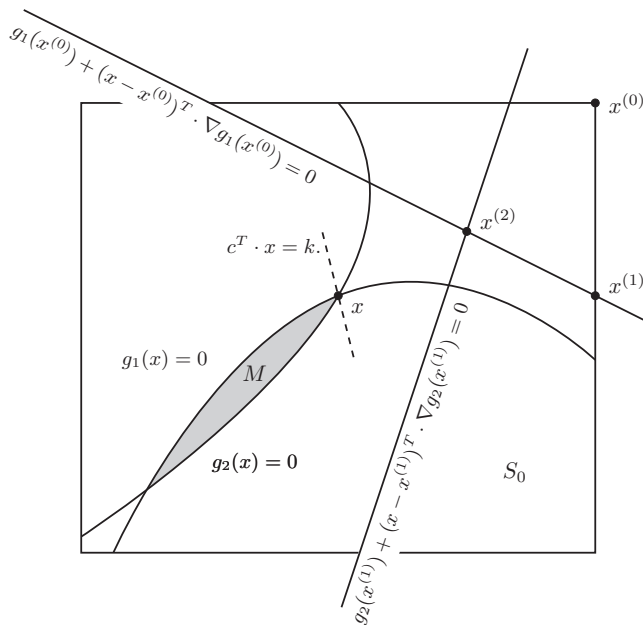


Abbildung 6.1: Schema des Schnittebenenverfahrens

**Lemma 6.2:** Für alle  $t = 0, 1, 2, \dots$  ist  $M \subset S_t$ . Ist weiter  $x^t$  nicht bereits Lösung von Problem (P), so gilt  $S_{t+1} \subset S_t$ ,  $S_{t+1} \neq S_t$ .

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist  $M \subset S_0$ . Sei  $M \subset S_t$ . Wegen der Konvexität von  $g$  gilt

$$g_k(x) \geq g_k(x^t) + (x - x^t)^T \cdot \nabla g_k(x^t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Für  $x \in M$  gilt  $g_k(x) \leq 0$  und somit  $x \in S_{t+1}$ , da  $x \in S_t$ . Im Falle  $x^t \in M$  wäre  $x^t$  Lösung von  $(P)$ , da  $M \subset S_t$ . Ist nun  $x^t \notin M$ , so gibt es ein  $k \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$g_k(x^t) = \max_{i=1, \dots, m} g_i(x^t) > 0.$$

Also ist

$$g_k(x^t) + \underbrace{(x^t - x^t)^T}_{=0} \cdot \nabla g_k(x^t) > 0,$$

was  $x^t \notin S_{t+1}$  bedeutet.

Q.E.D.

Aufgrund von Lemma 6.2 können im Verlaufe der Iteration der Schnittebenenmethode die folgenden drei Fälle eintreten:

- i)  $S_t = \emptyset$  für ein  $t \Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow (P)$  unlösbar.
- ii)  $x^t \in M$  für ein  $t \Rightarrow x^t$  Lösung von  $(P)$ .
- iii)  $S_t \neq \emptyset$ ,  $x^t \notin M$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$

**Satz 6.1:** *Es sei  $S_t \neq \emptyset$  und  $x^t \notin M$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Dann ist jeder Häufungspunkt der (beschränkten) Folge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  notwendig Lösung der Optimierungsaufgabe  $(P)$ .*

**Beweis:** Nach Lemma 6.2 ist  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}_0} \subset S_0$  und somit beschränkt. Sei  $\hat{x}$  Häufungspunkt der Folge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$ , d. h.:  $x^{t_j} \rightarrow \hat{x}$  ( $t_j \rightarrow \infty$ ) für eine Teilfolge. Im Falle  $\hat{x} \notin M$  wäre

$$\eta := \max_{i=1, \dots, m} g_i(\hat{x}) > 0.$$

Sei  $k \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\eta = g_k(\hat{x})$ . Wegen der Stetigkeit von  $g_k$  existiert ein  $t_j$  mit

$$\|x^{t_j} - \hat{x}\| < \frac{\eta}{2\kappa}, \quad g_k(x^{t_j}) > \frac{\eta}{2},$$

wobei  $\kappa := \max_{x \in S_0} \|\nabla g_k(x)\|$ . Für den Index  $l \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$g_l(x^{t_j}) = \max_{i=1, \dots, m} g_i(x^{t_j})$$

folgt dann  $g_l(x^{t_j}) > \eta/2$  und somit

$$g_l(x^{t_j}) + (\hat{x} - x^{t_j})^T \cdot \nabla g_l(x^{t_j}) > \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2\kappa} \kappa = 0.$$

Also ist  $\hat{x} \notin S_{t+1}$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_t \supset S_{t+1} \supset \dots$ , was  $\hat{x} \in S := \bigcap_{t=0}^{\infty} S_t$  bedingt. Folglich muss  $\hat{x} \in M$  sein. Nach Konstruktion ist  $c^T \cdot x^{t_j} \leq c^T \cdot x$  für  $x \in S_t$ . Also ist auch  $c^T \cdot \hat{x} \leq c^T \cdot x$  für  $x \in S$ . Wegen  $M \subset S$  muss also  $\hat{x}$  Lösung von  $(P)$  sein. Q.E.D.

Ein Startpolyeder  $S_0$  mit  $M \subset S_0$  erhält man z. B. durch Linearisierung der Restriktionen in einem beliebigen Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$S_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\bar{x}) + (x - \bar{x})^T \cdot \nabla g_i(\bar{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m\}. \quad (6.2.1)$$

Diese Konstruktion muss aber so angelegt sein, dass  $S_0$  beschränkt ist.

### 6.2.1 Numerische Realisierung der Schnittebenenmethode

In jedem Schritt der Methode der Schnittebenen ist ein lineares Programmierungsproblem zu lösen, wobei die Anzahl der Nebenbedingungen bei jedem Schritt um eine anwächst. Wir schreiben die Probleme  $(P_t)$  in der folgenden Form

$$(P_t^*) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad -c^T \cdot x \rightarrow \max! \\ Ax \leq b, \quad G^t x \leq d^t,$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^q$ ,  $q > n$ , das Ausgangspolyeder  $S_0$  bestimmen und  $G^t \in \mathbb{R}^{t \times n}$  und  $d^t \in \mathbb{R}^t$  gegeben sind durch

$$G^t := \begin{bmatrix} \nabla g_{k_0}(x^0)^T \\ \vdots \\ \nabla g_{k_{t-1}}(x^{t-1})^T \end{bmatrix}, \quad d^t := \begin{bmatrix} x^{0T} \cdot \nabla g_{k_0}(x^0) - g_{k_0}(x^0) \\ \vdots \\ x^{(t-1)T} \cdot \nabla g_{k_{t-1}}(x^{t-1}) - g_{k_{t-1}}(x^{t-1}) \end{bmatrix}.$$

Diese Aufgaben (ohne Vorzeichenbedingung) sind gerade dual zu den folgenden Problemen:

$$(P_t) \quad (y, z) \in \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}_+^t : \quad b^T \cdot y + d^{tT} \cdot z \rightarrow \min! \\ A^T y + G^{tT} z = -c,$$

wobei  $x = (y_1, \dots, y_q)^T$ ,  $z = (z_0, \dots, z_{t-1})^T$ . Dies ist eine Aufgabe des Typs, für den das übliche Simplex-Verfahren formuliert wurde. Die Anzahl der Nebenbedingungen ist  $n$  für alle  $t = 0, 1, 2, \dots$ ; es tritt nur in jedem Schritt  $t \rightarrow t + 1$  eine neue Variable  $z_t$  hinzu. Dieser Umstand gestattet eine besonders effiziente Realisierung des Simplex-Algorithmus.

#### Zwischenbetrachtung:

Gegeben sei die lineare Programmierungsaufgabe

$$(II) \quad x \in \mathbb{R}_+^n : \quad c^T \cdot x \rightarrow \min! \quad Ax = b.$$

Durch Anwendung des Simplex-Algorithmus sei eine Ecke  $x^0$  mit zugehörigem Endtableau erreicht, welches dem Optimalitätskriterium  $\gamma_k \geq 0$  ( $k \notin I^0$ ),  $x_i^0 \geq 0$  ( $i \in I^0$ ) genügt. Anschließend sei die folgende erweiterte Aufgabe zu lösen:

$$(\tilde{II}) \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \quad \tilde{c}^T \cdot \tilde{x} \rightarrow \min! \quad \tilde{A}\tilde{x} = b,$$

wobei  $\tilde{c} := (c, c_{n+1})^T$  und  $\tilde{A} := [A, a_{n+1}]$ ,  $a_{n+1} \in \mathbb{R}^m$ . Die Frage ist, inwieweit sich das Endtableau der Ausgangsaufgabe zur Lösung der erweiterten Aufgabe verwenden lässt.

Sei  $x^0 \in M$  eine Eckenlösung des Ausgangsproblems. Dann ist sicher  $\tilde{x}^0 := (x^0, 0)^T \in \tilde{M}$  eine Ecke für die erweiterte Aufgabe, mit der man den Simplex-Algorithmus beginnen kann (Übungsaufgabe). Man behält die Basis  $\{a_i, i \in I^0\}$  aus dem Endschema bei und fügt den neuen Vektor  $a_{n+1}$  zu den Vektoren  $a_k$  ( $k \notin I^0$ ) hinzu. Zum Endtableau ist

dementsprechend eine neue Spalte hinzuzufügen, deren Elemente  $\alpha_{i,n+1}$  ( $i \in I^0$ ) und  $\gamma_{n+1}$  sich wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= \sum_{i \in I^0} c_{n+1,i} a_i, & \alpha_{i,n+1} &:= -c_{n+1,i}, \\ \gamma_{n+1} &:= \sum_{i \in I^0} \alpha_{i,n+1} c_i + c_{n+1}. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

(reguläres  $(m \times m)$ -System). Ist zufällig  $\gamma_{n+1} \geq 0$ , so ist bereits  $\tilde{x}^0$  Lösung der erweiterten Aufgabe. Andernfalls müssen noch einige Austauschschritte durchgeführt werden.

Seien nun speziell unter den Spaltenvektoren  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) der Matrix  $A$  die  $m$  Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^m$ , etwa  $[a_1, \dots, a_m] = I_m$ . Dann lässt sich das System (6.2.2) direkt lösen. Aus

$$a_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{m,n+1} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^m a_{j,n+1} a_j$$

folgt unter Berücksichtigung von

$$a_j = \sum_{i \in I^0} c_{ji} a_i$$

die Beziehung

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^m a_{j,n+1} \sum_{i \in I^0} c_{ji} a_i = \sum_{i \in I^0} \left( \sum_{j=1}^m c_{ji} a_{j,n+1} \right) a_i.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (6.2.2) ergibt sich hieraus

$$\alpha_{i,n+1} = -c_{n+1,i} = - \sum_{j=1}^m c_{ji} a_{j,n+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} a_{j,n+1},$$

wobei üblicherweise  $\alpha_{ij} := \delta_{ij}$  ( $j \in I^0$ ) gesetzt ist. Die neue Tableauspalte ergibt sich also mehr oder weniger direkt aus dem gegebenen Endtableau.

Um die obigen Überlegungen für die Durchführung der Schnittebenenmethode nutzbar zu machen, wählt man zweckmäßigerweise das Ausgangspolyeder  $S_0$  als Quader, welcher durch die Retriktionen

$$\tilde{c} \leq x \leq c$$

beschrieben wird. In diesem Fall enthält die Matrix  $A$  automatisch eine Einheitsmatrix. Außerdem lassen sich dann aus dem Endtableau der Aufgabe ( $P_t$ ) direkt die Lösungen  $x^t$  der dualen Aufgabe ( $P_t^*$ ) ablesen. Nach Satz 2.3 gilt:

Im Simplex-Tableau gelte  $\gamma_k \geq 0$  ( $k \notin I^0$ ). Mit  $A_0 := [a_i, i \in I^0] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $c^0 := (c_i)_{i \in I^0} \in \mathbb{R}^m$  ist dann durch

$$y^0 := (A_0^T)^{-1} c^0 \tag{6.2.3}$$

eine Lösung des dualen Problems ( $II^*$ ) gegeben.

### 6.2.2 Sonderfall „quadratische“ Optimierungsaufgaben

Zur Anwendung der Methode der Schnittebenen auf quadratische Optimierungsaufgaben

$$(P) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad Q(x) := x^T \cdot Cx + c^T \cdot x \rightarrow \min! \quad Ax \leq b,$$

(mit den üblichen Eigenschaften) werden diese zunächst (gemäß Lemma 6.1) in die äquivalente Form

$$(\tilde{P}) \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad \xi \rightarrow \min! \quad Ax \leq b, \quad g(x, \xi) := x^T \cdot Cx + c^T \cdot x - \xi \leq 0,$$

überführt. Die zulässige Menge dieser Aufgabe ist i. Allg. nicht beschränkt. Im Falle, dass die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

beschränkt ist, was im Folgenden stets angenommen sei, wird das Zielfunktional  $Q(\cdot)$  auf  $M$  beschränkt. Der Transformierten Aufgabe kann dann, ohne ihr Lösungsverhalten zu beeinflussen, die Restriktion

$$\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$$

mit  $\underline{\xi}$  hinreichend klein und  $\bar{\xi}$  hinreichend groß hinzugefügt werden. Da diese Restriktion nicht wirksam wird, kann sie bei der Durchführung der Methode der Schnittebenen auch unberücksichtigt bleiben. Die obige Konvergenzaussagen bleiben trotzdem gültig. Als Startpunkt wählt man etwa ein  $x^0 \in M$  und setzt  $\xi^0 := Q(x^0)$ . Das Polyeder  $S_1$  ist dann bestimmt durch die Regeln:

$$x \in S_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ax \leq b, \\ g(x^0, \xi^0) + (x - x^0)^T \cdot (2Cx^0 + c) - (\xi - \xi^0) \leq 0. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

Die zweite Ungleichungsbedingung ist äquivalent zu

$$(2Cx^0 + c)^T \cdot x - \xi - x^{0T} \cdot Cx^0 \leq 0. \quad (6.2.5)$$

Wird einmal  $g(x^t, \xi^t) \leq 0$  für ein  $t$ , so ist (nach Lemma 6.2)  $x^t$  Lösung der Ausgangsaufgabe. Andernfalls konvergiert (nach Satz 6.1) jede konvergente Teilfolge der  $x^t$  gegen eine Lösung. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen lässt sich sogar beweisen, dass die Methode der Schnittebenen bei quadratischen Optimierungsaufgaben stets in *endlich vielen* Schritten die Lösung liefert.

## 6.3 Dualitätsmethoden (Verfahren von Wolfe)

Das „Verfahren von Wolfe“<sup>1</sup> (1959) ist eine sog. „Dualitätsmethode“ zur Lösung von *quadratischen* Programmierungsaufgabe der Form

$$(P) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad Q(x) = x^T \cdot Cx + c^T \cdot x \rightarrow \min! \\ Ax = b, \quad x \geq 0.$$

---

<sup>1</sup>Philip Wolfe (1927–2016): US-amerikanischer Mathematiker; Beiträge zu Mathematischer Optimierung und Operations Research, Instructor an der Princeton University und am Institute for Advanced Study, ab 1957 mit George Dantzig bei der Rand Corporation in Santa Monica (Dantzig-Wolfe-Zerlegung), ab 1966 am IBM Thomas J. Watson Research Center, 1968-1977 Prof. an der Columbia University, USA.

Die Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist dabei als positiv-definit angenommen und die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m < n$ ) habe maximalen Rang  $m$ . Unter Ausnutzung der KKT-Bedingungen für Problem  $(P)$  wird mit Hilfe einer modifizierten Version des Simplex-Verfahrens ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion und damit eine Lösung von  $(P)$  bestimmt.

**Lemma 6.3:** *Ein Punkt  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  ist genau dann Minimallösung der Aufgabe  $(P)$ , wenn es Vektoren  $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$  und  $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$  gibt, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & A\hat{x} = b, \quad \hat{x} \geq 0, \quad \hat{u} \geq 0, \\ \text{ii)} \quad & \hat{u}^T \cdot \hat{x} = 0, \\ \text{iii)} \quad & -2C\hat{x} + \hat{u} - A^T\hat{y} = 0. \end{aligned}$$

**Beweis:** Übungsaufgabe

Q.E.D.

Für das Folgende nehmen wir an, dass der zulässige Bereich der Aufgabe  $(P)$  nicht leer ist:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset.$$

Aufgrund der Definitheit von  $C$  ist die Zielfunktion strikt konvex und „koerzitiv“, d. h.:  $Q(x) \rightarrow \infty$  ( $\|x\|_2 \rightarrow \infty$ ). Nach Satz 5.1 besitzt die Aufgabe  $(P)$  dann eine eindeutige Minimallösung.

i) Im ersten Schritt des Frank-Wolfe-Verfahrens wird zunächst mit Hilfe der beim Simplex-Verfahren üblichen Vorlaufrechnung (Phase I) eine Ausgangsecke  $x^0$  des Polyeders  $M$  berechnet. Die zugehörige Basis von Spaltenvektoren der Matrix  $A$  sei  $\{a^i, i \in I^0\}$ , wobei  $I^0 \subset I_n := \{1, \dots, n\}$  wieder die zugehörige Indexmenge der inaktiven Restriktionen ist. Das zur Ecke  $x^0$  gehörende Simplex-Tableau enthält die Einträge  $\alpha_{ik}$  und  $\gamma_k$ .

ii) Im nächsten Schritt wird eine Lösung des Systems (i) - (iii) der KKT-Bedingungen bestimmt. Dazu löst man die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} (Q) \quad & (x, u, y, \xi)^T \in \mathbb{R}^{2n+m+1} : \quad \xi \rightarrow \min! \quad x \geq 0, \quad u \geq 0, \\ & Ax = b, \\ & -2Cx + u - A^Ty + \xi(c + 2Cx^0) = c, \\ & u^T \cdot x = 0. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe ist offenbar *nichtlinear*. Es ist jedoch möglich, das Simplex-Verfahren durch eine Zusatzvorschrift so zu ergänzen, dass damit die Aufgabe  $(Q)$  gelöst werden kann. Zunächst rechtfertigen wir jedoch die Betrachtung von  $(Q)$  als Ansatz zur Lösung von Problem  $(P)$ .

**Lemma 6.4:** *Die Optimierungsaufgabe  $(Q)$  hat die eindeutige Lösung  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}, 0)^T$ , wobei  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y})^T$  die Lösung der KKT-Bedingungen (i) - (iii) bzw.  $\hat{x}$  die Lösung der Aufgabe  $(P)$  ist.*



**Beweis:** Sei  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^m$  die (eindeutige) Lösung der Bedingungen (i) - (iii). Dann ist automatisch  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}, 0)$  Lösung von  $(Q)$ . Umgekehrt muss dann jede Lösung von  $(Q)$  die Form  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}, 0)$  haben und somit auch Lösung von (i) - (iii) sein. Dies impliziert auch die Eindeutigkeit der Lösung. Q.E.D.

Bei der Optimierungsaufgabe  $(Q)$  unterliegt die Variable  $y \in \mathbb{R}^m$  keiner Vorzeichenbedingung. Zur Anwendung des üblichen Simplex-Verfahrens müsste man sie aufspalten,  $y = y^+ - y^-$ , in zwei vorzeichenbeschränkte Variablen  $y^+, y^- \in \mathbb{R}_+^m$ , was zu einer Erhöhung des Rechenaufwands führen könnte. Stattdessen wollen wir eine Variante des Simplex-Verfahrens verwenden, die auch auf Probleme anwendbar ist, bei denen einige der Variablen keiner Vorzeichenbedingung unterliegen.

### Zwischenbetrachtung:

Gegeben sei die lineare Programmierungsaufgabe

$$(\tilde{II}) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad c^T \cdot x \rightarrow \min! \quad Ax = b, \quad x_i \geq 0 \quad (i \in J),$$

mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m < n$ ) mit maximalem Rang  $m$ , Vektoren  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  und einer Indexmenge  $J \subset I_n := \{1, \dots, n\}$ ,  $J \neq I_n$ . Das Simplex-Verfahren wird zur Lösung von  $(\tilde{II})$  analog zur kanonischen Aufgabe  $(II)$  angelegt. Bei den Austauschschritten müssen nur einige Zusatzvorschriften beachtet werden:

1. Für ein  $q \notin J$  sei  $q \in I^0$ . d. h.:  $x_q = 0$ . Ist  $\gamma_q \neq 0$  so kann die zugehörige Spalte als Pivotspalte verwendet werden:

- a) Im Fall  $\gamma_q < 0$  kann  $Q(x^0)$  verkleinert werden, wenn  $x_q$  vergrößert wird.
- b) Im Fall  $\gamma_q > 0$  kann  $Q(x^0)$  verkleinert werden, wenn  $x_q$  verkleinert wird.

2. Zur Bestimmung der zugehörigen Pivotzeile verfährt man dann wie folgt:

- a) Fall  $\gamma_q < 0$ :

$$p \in J \cap I^0 : \quad \frac{x_p}{\alpha_{pq}} = \max_{\alpha_{iq} < 0, i \in J \cap I^0} \frac{x_i}{\alpha_{iq}}.$$

- b) Fall  $\gamma_q > 0$ :

$$p \in J \cap I^0 : \quad \frac{x_p}{\alpha_{pq}} = \max_{\alpha_{iq} > 0, i \in J \cap I^0} \frac{x_i}{\alpha_{iq}}.$$

3. Die Transformationsregeln des Austauschschrittes bleiben unverändert.

4. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

- a) Für  $k \notin I^0$  ist  $\gamma_k \geq 0$  ( $k \in J$ ) und  $\gamma_k = 0$  ( $k \notin J$ ). Es liegt eine Minimallösung vor.
- b) Für alle  $k \notin I^0$  mit  $\gamma_k < 0$  sind  $\alpha_{ik} \geq 0$  ( $i \in I^0 \cap J$ ) und für alle  $k \notin I^0$  mit  $k \notin J$  und  $\gamma_k > 0$  sind  $\alpha_{ik} \leq 0$  ( $i \in I^0 \cap J$ ). Das Zielfunktional ist auf der zulässigen Menge nicht nach unten beschränkt.

Zur begrifflichen Klarstellung sei bemerkt, dass die in diesem Fall auftretenden Punkte  $x^0$  nicht notwendig Ecken des zulässigen Bereichs sind.

Durch  $x = x^0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $u = 0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $y = 0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $\xi = 1 \in \mathbb{R}_+^1$  ist offensichtlich ein zulässiger Punkt für Aufgabe (Q) gegeben. Wir werden eine zugehörige Basis des  $\mathbb{R}^{2n+m+1}$  von Spaltenvektoren der Matrix

$$A := \begin{bmatrix} A & 0_{m,n} & 0_m & 0 \\ -2C & I_n & -A^T & h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (2n+m+1)},$$

mit  $h := c + Cx^0$  bestimmen. Dazu wählen wir zunächst folgendes System von  $n + m$  Spaltenvektoren:

1. die durch die entsprechenden Spalten von  $-2C$  ergänzten  $m$  Basisvektoren  $a^1$  ( $i \in I^0$ ) von  $A$ ;
2. die  $n - m$  Spaltenvektoren von  $[0, I_n]^T$  zu Komponenten  $u_i$  ( $i \notin I^0$ );
3. die  $m$  Spaltenvektoren von  $[0, -A^T]^T$ .

Dieses System ist sicher eine Basis des  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Die gesuchte Basis muss aber den zur Komponente  $\xi = 1 \neq 0$  gehörenden Spaltenvektor  $[0, h]^T$ , enthalten. O. B. d. A. kann  $h \neq 0$  angenommen werden; andernfalls wäre der gewählte zulässige Punkt bereits Lösung der Beziehungen (i) - (iii) und das Verfahren könnte abbrechen. Der Vektor  $[0, h]^T$  kann also gegen einen geeigneten der unter (2) oder (3) genannten Vektoren ausgetauscht werden und man erhält so die gesuchte Basis zu dem gewählten Punkt, der aber nicht Ecke sein muss. Mit Hilfe dieser Basis wird nun das Ausgangstableau des Simplex-Algorithmus zur Lösung von Aufgabe (Q) erstellt. Bei der anschließenden Durchführung der Austauschschritte ist zur Gewährleistung der nichtlinearen Nebenbedingung  $u^T \cdot x = 0$  aber folgende Zusatzregel zu beachten:

**(Z)** Die Komponenten  $x_i, u_i$  ( $i \in I_n$ ) dürfen nie gleichzeitig Basisvariablen sein.

**Satz 6.2:** *Ist die Matrix  $C$  positiv definit, so führt das durch die Zusatzregel (Z) ergänzte übliche Simplex-Verfahren in endlich vielen Schritten zu einer Lösung der Aufgabe (Q) mit Minimalwert  $\xi = 0$ .*

**Beweis:** Angenommen, dass Verfahren bricht an einem Punkt  $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}, \hat{\xi})$  ab. Das Endtableau kann dann nicht das Optimalitätskriterium erfüllen, da ja ein Lösungspunkt mit  $\xi = 0$  existiert. Jeder weitere Austauschschritt zur Verkleinerung von  $\hat{\xi}$  würde aber die Bedingung  $u^T \cdot x = 0$  verletzen. Das Tableau kann nun als ein „optimales“ Tableau der um die Zusatzregel ergänzten (linearen) Aufgabe aufgefasst werden (Übungsaufgabe).

Wir haben also damit eine Minimalösung der folgenden linearen Programmierungsaufgabe vorliegen:

$$(II) \quad (x, u, y, \xi) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ : \quad \xi \rightarrow \min!$$

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ -2Cx + u - A^T y + h\xi &= c, \\ \hat{u}^T \cdot x + \hat{x}^T \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

Die dazu duale Aufgabe

$$(II^*) \quad (z, w, \eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \quad b^T \cdot z + c^T \cdot w \rightarrow \max!$$

$$\begin{aligned} A^T z - 2Cw + \hat{u}\eta &\leq 0, \\ w + \hat{x}\eta &\leq 0, \\ Aw &= 0, \\ h^T \cdot w &\leq 1, \end{aligned}$$

(Die Gleichungsbeziehung  $Aw = 0$  entsteht aufgrund der Aufspaltung  $y = y^+ - y^-$ ,  $y^+, y^- \in \mathbb{R}_+^m$ , der nicht vorzeichenbeschränkten Variable  $y$  vor der formalen Dualisierung.) hat dann ebenfalls eine Lösung  $(\hat{z}, \hat{w}, \hat{\eta})$  mit

$$b^T \cdot \hat{z} + c^T \cdot \hat{w} = \hat{\xi} > 0.$$

Nach dem Gleichgewichtssatz für das kanonische Problem (Satz 1.4) sind die Ungleichungen in  $(II^*)$ , die positiven Komponenten der Lösung von  $(II)$  entsprechen, mit dem Gleichheitszeichen erfüllt. Wegen  $\hat{\xi} > 0$  gilt also  $h^T \cdot \hat{w} = 1$ . Weiter tritt für jedes  $i \in I_n$  genau einer der folgenden drei Fälle ein:

$$\begin{aligned} i) \quad \hat{x}_i > 0, \hat{u}_i = 0 &\Rightarrow (A^T \hat{z} - 2C\hat{w})_i = 0, \\ ii) \quad \hat{x}_i = 0, \hat{u}_i > 0 &\Rightarrow \hat{w}_i = 0, \\ iii) \quad \hat{x}_i = 0, \hat{u}_i = 0 &\Rightarrow (A^T \hat{z} - 2C\hat{w})_i \leq 0, \quad \hat{w}_i \leq 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass  $\hat{w}^T \cdot (A^T \hat{z} - 2C\hat{w}) \geq 0$ . Wegen  $A\hat{w} = 0$  folgt  $\hat{w}^T \cdot C\hat{w} \leq 0$  und hiermit  $\hat{w} = 0$  (wegen der Definitheit von  $C$ ). Dies ist aber ein Widerspruch zu  $h^T \cdot \hat{w} = 1$ , was den Beweis vervollständigt Q.E.D.

## 6.4 Abstiegsverfahren

Wir betrachten zunächst wieder die allgemeine nichtlineare Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) \rightarrow \min! \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen  $f$  und  $g_i$ . Für ein zulässiges  $x \in M$ ,

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

sei  $D(x)$  wieder die Menge der „zulässigen“ Richtungen, d. h.:

$$d \in D(x) \Rightarrow x + \lambda d \in M, \quad 0 < \lambda \leq \lambda(x, d). \quad (6.4.6)$$

Aufgrund der Taylor-Formel gilt für festes  $d \neq 0$ ;

$$f(x + \lambda d) = f(x) + \lambda d^T \cdot \nabla f(x) + o(\lambda).$$

Im Falle  $d^T \cdot \nabla f(x) < 0$  ist also für kleines  $\lambda > 0$ :

$$f(x + \lambda d) < f(x). \quad (6.4.7)$$

Die „Abstiegsverfahren“ konstruieren ausgehend von einem Startpunkt  $x^0 \in M$  eine Folge von Iterierten  $x^t \in M$ , die unter geeigneten Bedingungen gegen eine Minimallösung  $\hat{x}$  von Aufgabe (P) konvergiert. Der Übergang  $x^t \rightarrow x^{t+1}$  geschieht dabei in zwei Schritten:

i) Wahl der „Abstiegsrichtung“  $d^t \in D(x^t)$  mit

$$d^T \cdot \nabla f(x^t) < 0. \quad (6.4.8)$$

ii) Wahl der „Schrittweite“  $\lambda_t \in [0, \lambda(x^t, d^t)]$  mit

$$f(x^t + \lambda_t d^t) < f(x^t), \quad x^{t+1} := x^t + \lambda_t d^t. \quad (6.4.9)$$

Die naheliegende Wahl der Schrittweite  $\lambda_t$  ist gemäß (sog. „Line Search“):

$$f(x^t + \lambda_t d^t) = \min_{0 \leq \lambda \leq \lambda(x^t, d^t)} f(x^t + \lambda d^t). \quad (6.4.10)$$

Die Lösung des  $n$ -dimensionalen Problems (P) wird also auf eine (i. Allg. unendliche) Folge von 1-dimensionalen Minimierungen zurückgeführt.

Für  $x \in M$  sei wieder  $I(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid g_i(x) = 0\}$  die Indexmenge der „aktiven“ Restriktionen. Ist  $x$  „regulär“ im Sinne, dass

$$\overline{D(x)} = D_1(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid d^T \cdot \nabla g_i(x) \leq 0, \quad i \in I(x)\},$$

so kann die Wahl der „lokal“ optimalen Abstiegsrichtung durch Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$(D) \quad d \in \mathbb{R}^n : \quad d^T \cdot \nabla f(x) \rightarrow \min! \quad d^T \cdot \nabla g_i(x) \leq 0, \quad i \in I(x),$$

erfolgen. Dabei wird noch einer der folgenden Normierungsbedingungen verwendet:

$$\alpha) \quad \|d\|_2 \leq 1 \quad (\text{nichtlinear});$$

$$\beta) \quad -1 \leq d_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{linear});$$

$$\gamma) \quad d_i \leq 1 \quad \text{für} \quad \partial_{x_i} f(x) \leq 0, \quad -d_i \leq 1 \quad \text{für} \quad \partial_{x_i} f(x) > 0 \quad (\text{linear}).$$

Die *linearen* Aufgaben ( $D_\beta$ ) oder ( $D_\gamma$ ) können nach Dualisierung mit dem üblichen Simplex-Verfahren gelöst werden. Dies muss in jedem Iterationsschritt  $x^t \rightarrow x^{t+1}$  erfolgen. Da dies i. Allg. viel zu aufwendig wäre, begnügen sich viele Verfahren mit einer nur „fast“ optimalen Wahl der Abstiegsrichtungen. Hierauf wird später noch zurückgekommen. Im Folgenden betrachten wir nur den Fall, dass in der Aufgabe (P) die Restriktionen affin-linear sind:

$$g_i(x) = a^{iT} \cdot x - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.4.11)$$

### 6.4.1 Das Verfahren von Frank und Wolfe (1956)

Nach Lemma 5.9 sind im Fall *linearer* Restriktionen alle Punkte  $x \in M$  regulär. Bei der Bestimmung der Abstiegsrichtungen werden hier in Aufgabe (D) nicht nur die aktiven Restriktionen berücksichtigt. Man löst vielmehr die lineare Programmierungsaufgabe

$$(D) \quad y \in \mathbb{R}^n : \quad r^T \cdot y \rightarrow \min!, \quad Ay \leq b,$$

wobei

$$r := \nabla f(x), \quad A := [a^{1T}, \dots, a^{nT}] \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Ist  $M \neq \emptyset$  und beschränkt, so existiert eine Lösung  $\hat{y}$  von (D). Dann ist  $\hat{d} := \hat{y} - x$  wegen

$$A(x + \lambda \hat{d}) = A(\lambda \hat{y} + (1 - \lambda)x) = \lambda A\hat{y} + (1 - \lambda)Ax \leq b, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

automatisch zulässige Richtung. Im Falle

$$r^T \cdot \hat{y} < r^T \cdot x \quad \text{bzw.} \quad r^T \cdot \hat{d} < 0$$

ist  $\hat{y}$  echte Abstiegsrichtung. Im Falle  $r^T \cdot \hat{y} = r^T \cdot x$  wird nach Konstruktion  $r^T \cdot (y - x) \geq 0$ ,  $y \in M$ , d. h.:  $x$  erfüllt die notwendige Optimalitätsbedingung

$$d^T \cdot \nabla f(x) \geq 0, \quad d \in D(x) \tag{6.4.12}$$

und folglich (nach Korollar 5.2) auch die KKT-Bedingungen. Üblicherweise wird die lineare Programmierungsaufgabe (D) mit dem Simplex-Verfahren gelöst. Der Minimalpunkt  $\hat{y}$  ist dann ein Randpunkt von  $M$ , so dass das „Line Search“ entlang  $x + \lambda \hat{d}$  genau über das Intervall  $0 \leq \lambda \leq 1$  zu erstrecken ist. Das „Verfahren von Frank<sup>2</sup> und Wolfe“ arbeitet also wie folgt:

- (0) Bestimme  $x^0 \in M$  und setze  $t = 0$ .  
Für  $t = 0, 1, \dots$ :
- (1) Berechne  $r^t := \nabla f(x^t)$ .
- (2) Bestimme  $y^t \in \mathbb{R}^n$  als Lösung der linearen Programme

$$y^t \cdot x^t \rightarrow \min! \quad Ay \leq b.$$

- (3) Teste:

$$\begin{aligned} (r^t, y^t)_2 = (x^t, x^t)_2 &\Rightarrow \text{Abbruch, da } x^t \text{ Lösung;} \\ (r^t, y^t)_2 < (x^t, x^t)_2 &\Rightarrow \text{Setze } d^t := x^t - y^t. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Marguerite Straus Frank (1927–): US-amerikanisch-französische Mathematikerin; Pionier der konvexen Optimierung und der Mathematischen Programmierung, entwickelte zusammen mit Philip Wolfe 1956 in Princeton den Frank/Wolfe-Algorithmus, seit 1977 Assoc. Prof. an der Columbia University, dann Prof. an der Rider University, New Jersey.

(4) Bestimme  $\lambda_t \in \mathbb{R}_+$  gemäß

$$f(x^t + \lambda_t d^t) = \min_{0 \leq \lambda \leq 1} f(x^t + \lambda d^t).$$

(5) Setze  $x^{t+1} := x^t + \lambda_t d^t$  und  $t := t + 1$  und gehe zu (1).

**Bemerkung 6.1:** Im unrestringierten Fall, d. h.:  $g \equiv 0$ , entspricht das Verfahren von Frank und Wolfe gerade dem klassischen Gradientenverfahren, welches weiter unten in Verbindung mit den Strafterm-Verfahren noch genauer diskutiert wird.

**Satz 6.3 (Konvergenz des Verfahrens von Frank und Wolfe):** *Es sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  und  $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$  und beschränkt. Dann bricht das Verfahren von Franke und Wolfe entweder in einem Punkt  $x^t$  ab, in dem die KKT-Bedingungen erfüllt sind, oder es erzeugt eine (unendliche) Folge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}} \subset M$ , in deren Häufungspunkten die KKT-Bedingungen erfüllt sind.*

**Beweis:** i) Das Verfahren bricht in  $x^t$  genau dann ab, wenn  $(r^t, y^t)_2 = (r^t, x^t)_2$  ist. Dies besagt, wie oben gezeigt:

$$(r^t, t - xt)_2 \geq 0, \quad y \in M,$$

d. h.:  $x^t$  genügt den KKT-Bedingungen.

ii) Das Verfahren breche nun nicht ab. Nach Konstruktion ist die Folge  $(f(x^t))_{t \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und (wegen der Kompaktheit von  $M$ ) nach unten beschränkt. Folglich existiert  $\eta := \lim_{t \rightarrow \infty} f(x^t)$ . Sei  $\hat{x} \in M$  ein Häufungspunkt von  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  und  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$  die zugehörige Teilindexfolge mit

$$\hat{x} = \lim_{t \in \mathbb{N}'} x^t, \quad f(\hat{x}) = \lim_{t \in \mathbb{N}'} f(x^t) = \eta.$$

Da auch die Folgen  $(y^t)_{t \in \mathbb{N}} \subset M$  und  $(\lambda_t)_{t \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$  beschränkt sind, kann o.B.d.A. angenommen werden, dass sie für  $t \in \mathbb{N}'$  konvergieren:

$$\hat{y} := \lim_{t \in \mathbb{N}'} y^t \in M, \quad \hat{\lambda}_t := \lim_{t \in \mathbb{N}'} \lambda_t \in [0, 1].$$

Nach Konstruktion von  $y^t$  ist

$$(r^t, y^t - x^t)_2 \leq (r^t, y - x^t)_2, \quad y \in M,$$

und folglich im Limes für  $t \in \mathbb{N}'$ :

$$(\nabla f(\hat{x}), \hat{y} - \hat{x})_2 \leq (\nabla f(\hat{x}), y - \hat{x})_2, \quad y \in M.$$

Für den Vektor  $\hat{d} := \hat{y} - \hat{x}$  gilt also insbesondere

$$(\nabla f(\hat{x}), \hat{d})_2 \leq (\nabla f(\hat{x}), d)_2, \quad d \in \overline{D(\hat{x})}.$$

Wir nehmen nun an, dass im Häufungspunkt  $\hat{x}$  die KKT-Bedingungen *nicht* erfüllt sind. Dann gibt es (nach Satz 5.4) ein  $d \in D(\hat{x})$  mit  $(\nabla f(\hat{x}), d)_2 < 0$ , d. h.: Es muss gelten:

$$(\nabla f(\hat{x}), \hat{d})_2 < 0. \quad (6.4.13)$$

Nach Konstruktion der  $\lambda_t$  ist mit  $d^t := y^t - x^t$ :

$$f(x^t + \lambda_t d^t) \leq f(x^t + \lambda d^t), \quad \lambda \in [0, 1],$$

und somit im Limes  $t \in \mathbb{N}'$ :

$$f(\hat{x} + \hat{\lambda} \hat{d}) \leq f(\hat{x} + \lambda \hat{d}), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Dies bedingt dann aber wegen (5.4):

$$f(\hat{x} + \hat{\lambda} \hat{d}) < f(\hat{x}). \quad (6.4.14)$$

Zu der Folge  $(x^{t+1})_{t \in \mathbb{N}'} \subset M$  gibt es eine weitere Teilfolge  $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ , so dass  $\tilde{x} := \lim_{t \in \mathbb{N}''} x^{t+1} \in M$  existiert. Damit ist dann

$$\tilde{x} = \lim_{t \in \mathbb{N}''} x^{t+1} = \lim_{t \in \mathbb{N}''} (x^t + \lambda_t d^t) = \hat{x} + \hat{\lambda} \hat{d},$$

bzw.

$$f(\hat{x}) = \lim_{t \in \mathbb{N}''} f(x^t) = \lim_{t \in \mathbb{N}''} f(x^{t+1}) = f(\tilde{x}) = f(\hat{x} + \hat{\lambda} \hat{d})$$

im Widerspruch zu (6.4.14). Q.E.D.

Wir wenden uns nun wieder der Minimierungsaufgabe  $(D)$  zur Bestimmung lokal optimaler, zulässiger Abstiegsrichtungen zu:

$$(D_\alpha) \quad d \in \mathbb{R}^n : \quad r^T \cdot d \rightarrow \min! \quad a^{iT} \cdot d \leq 0, \quad i \in I(x), \quad \|d\|_2 \leq 1,$$

wobei wieder  $r := \nabla f(x)$  und  $I(x)$  die Indexmenge der im Punkt  $x \in M$  aktiven Restriktionen bezeichnen. Zur Abkürzung wird die Teilmatrix  $A_0 := [a^i, i \in I(x)] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $p := \#I(x)$ , der Zeilen  $a^i$ ,  $i \in I(x)$ , von  $A$  eingeführt. Die Aufgabe  $(D_\alpha)$  kann auch als eine „Projektionsaufgabe“ interpretiert werden.

**Definition 6.1:** *Es sei  $K \neq \emptyset$  eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Die Lösung  $\hat{x} \in K$  der Optimierungsaufgabe*

$$x \in K : \quad \|x - x^0\|_2 \rightarrow \min! \quad (6.4.15)$$

heißt „Projektion“ von  $x^0$  auf  $K$  (oder auch „beste Approximation“ in  $K$  zu  $x^0$ ).

**Lemma 6.5:** *Ein  $\hat{d} \in \mathbb{R}^n$  ist genau dann Lösung der Aufgabe  $(D_\alpha)$ , wenn es eine Lösung gleicher Richtung der Projektionsaufgabe*

$$(\tilde{D}) \quad \|d + r\|_2 \rightarrow \min! \quad d \in D_1(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_0 z \leq 0\},$$

gibt.

**Beweis:** Beide Aufgaben ( $D$ ) und ( $\tilde{D}$ ) haben konvexe Zielfunktionen und konvexe (bzw. lineare) Restriktionen. Man überzeugt sich leicht davon, dass alle zulässigen Punkte regulär sind, so dass die KKT-Bedingungen für beide notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium sind. Sie lauten für ( $D$ ) wie folgt:

$$\begin{aligned} d \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}_+^p, \eta \in \mathbb{R}_+ : \quad & A_0 d \leq 0, \quad \|d\|_2 \leq 1, \\ & r + A_0^T y + 2\eta d = 0, \\ & y^T \cdot A_0 d + \eta(d^T \cdot d - 1) = 0. \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

Ersetzt man in ( $\tilde{D}$ ) den Term  $\|d + r\|_2$  durch die äquivalente Zielfunktion  $\frac{1}{2}\|d + r\|_2^2$ , so erhält man die Bedingungen

$$\begin{aligned} d \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}_+^p : \quad & Ad \leq 0, \\ & d + r + A_0^T y = 0, \\ & y^T \cdot A_0 d = 0. \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

Erfüllen nun  $d \neq 0$  und  $y$  die Gleichungen (6.4.17), so erfüllen  $\bar{d} := d/\|d\|_2$ ,  $y$  und  $\eta := \frac{1}{2}\|d\|$  offenbar die Gleichungen (6.4.16). Ist  $d = 0$  so erfüllen  $\bar{d} = 0$ ,  $y$  und  $\eta = 0$  auch (6.4.16). Die Umkehrung dieser Aussage ergibt sich analog. Q.E.D.

## 6.4.2 Das Verfahren der „projizierten Gradienten“

Das allgemeine „Projektionsverfahren“ zur Bestimmung lokal optimaler Abstiegsrichtungen löst das quadratische Optimierungsproblem ( $\tilde{D}$ ) etwa mit Hilfe des Verfahrens von Wolfe. Eine klassische Variante, welche das Lösen von ( $\tilde{D}$ ) vermeidet ist das sog. „Verfahren der projizierten Gradienten“ nach Rosen<sup>3</sup> (1960). Hier wird der negative Gradient  $r = -\nabla f(x)$  nicht auf den Kegel  $D_1(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_0 z \leq 0\}$  sondern auf dem linearen Teilraum

$$L = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_0 z = 0\} \subset D_1(x)$$

projiziert. Wir nehmen dazu an, dass  $n > m$  ist, d. h.:  $L \neq \{0\}$ .

**Lemma 6.6:** *Die Matrix  $A_0$  habe maximalen Rang  $p$ . Dann ist die Lösung der Projektionsaufgabe*

$$(\tilde{D}) \quad d \in L : \quad \|d + r\|_2 \rightarrow \min!,$$

gegeben durch  $d = -Pr$  mit der „Projektionsmatrix“

$$P := I - A_0^T(A_0 A_0^T)^{-1} A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

---

<sup>3</sup>Judah Benjamin Rosen (1922–2009): US-amerikanischer Mathematiker und Informatiker; Prof. an der University of Minnesota (Minneapolis, USA); Arbeiten zur algorithmischen Optimierung, insbesondere paralleler Algorithmen; J.B. Rosen: *The gradient projection method for nonlinear programming. Part I. Linear constraints. J. Soc. Ind. Appl. Math 8, 181–217 (1960).*



**Beweis:** Nach Übergang zu der äquivalenten Zielfunktion  $\frac{1}{2}\|d+r\|_2^2$  lauten die KKT-Bedingungen zur Aufgabe ( $\tilde{D}$ ):

$$\begin{aligned} d \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m : \quad & A_0 d = 0, \\ & d + A_0^T y = -r, \\ & (y^T \cdot A_0 d = 0). \end{aligned} \tag{6.4.18}$$

Wegen  $\text{Rang} A_0 = p$  ist  $A_0 A_0^T$  regulär und es wird

$$\underbrace{A_0 d}_{=0} + A_0 A_0^T y = -A_0 r, \quad y = -(A_0 A_0^T)^{-1} A_0 r.$$

Dies ergibt  $d = -r + A_0^T (A_0 A_0^T)^{-1} A_0 r = -Pr$ . Q.E.D.

i) Der Fall  $d \neq 0$ : Wegen  $r + d = -A_0^T y \perp d$  ist

$$r^T \cdot d = (r + d - d)^T \cdot \hat{d} = -\|d\|_2^2 < 0,$$

d. h.:  $d$  ist echte Abstiegsrichtung.

ii) Der Fall  $d = 0$ : In diesem Fall ist  $r + A_0^T y = 0$ . Hieraus folgt, dass in dem zulässigen Punkt  $y \in M$  die KKT-Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, \\ \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \tilde{y}_i \nabla g_i(x) &= r + A_0^T y = 0, \\ \tilde{y}^T \cdot y &= 0, \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

mit  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$  :  $\tilde{y}_i := y_i, i \in I(x), \tilde{y}_i = 0, i \notin I(x)$ , wenn

$$y \geq 0.$$

Gilt für ein  $y_i < 0$ , so ist  $x$  noch nicht optimal, aber  $d = 0$  ist auch keine Abstiegsrichtung. In diesem Fall verfährt man wie folgt:

$$\begin{aligned} j \in I(x) : \quad y_j &:= \min_{i \in I(x)} y_i, \quad \bar{I}(x) := I(x) \setminus \{j\}, \\ \bar{A}_0 &= [a^j, u \in \bar{I}(x)], \quad \bar{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{A}_0 x = 0\}. \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

**Lemma 6.7:** *Der durch Projektion von  $-r$  auf  $\bar{L}$  definierte Vektor  $\bar{d}$  ist zulässige, echte Abstiegsrichtung.*

**Beweis:** Wegen  $d = 0$  gilt  $-r = A_0^T y$ . Die analogen KKT-Bedingungen für das reduzierte Projektionsproblem ergeben  $-r = \bar{d} + \bar{A}_0^T \bar{y}$ . Hieraus folgt  $\bar{d} \neq 0$ , denn andernfalls wäre  $A_0^T y = \bar{A}_0^T \bar{y}$  im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Zeilen  $\{a^i, i \in I(x)\}$  von  $A_0$ . Aus  $\bar{s} \neq 0$  erschließt man wieder  $r^T \cdot \bar{d} < 0$ , d. h.:  $\bar{d}$  ist echte Abstiegsrichtung. Weiter gilt:

$$0 > r^T \cdot \bar{d} = -(A_0^T y)^T \cdot \bar{y} = -y^T \cdot A_0 \bar{d} = -y_j a^j \cdot \bar{d}.$$

Mit  $y_j < 0$  folgt hieraus  $a^j \cdot \bar{d} < 0$ . Zusammen mit  $\bar{A}_0 \bar{d} = 0$  ergibt dies, dass für  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$   $\bar{d} \in D(x)$  ist:

$$\begin{aligned} i \in I(x) \setminus \{j\} : \quad & a^i \cdot (x + \lambda d) = \underbrace{a^i \cdot x}_{= b_i} + \lambda \underbrace{a^i \cdot \bar{d}}_{= 0} = b_i, \\ i = j : \quad & a^j \cdot (x + \lambda \bar{d}) = \underbrace{a^j \cdot x}_{= b_j} + \lambda \underbrace{a^j \cdot \bar{d}}_{< 0} \leq b_j, \\ i \notin I(x) : \quad & a^i \cdot (x + \lambda \bar{d}) = \underbrace{a^i \cdot x}_{< b_i} + \lambda a^i \cdot \bar{d} \leq b_i. \end{aligned}$$

Das vervollständigt den Beweis.

Q.E.D.

**Schrittweitenbestimmung:** Es sei  $D \in D(x)$  eine Abstiegsrichtung. Wir wollen das Intervall  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$  bestimmen, auf dem der „Line Search“ durchgeführt werden muss:

$$x + \lambda d \in M \quad \Leftrightarrow \quad \lambda a^i \cdot d \leq b_i - a^i \cdot x, \quad i = 1, \dots, m.$$

Wegen  $Ax \leq b$  und  $a^i \cdot d \leq 0$ ,  $i \in I(x)$ , ist dies wiederum äquivalent zu

$$\lambda \leq \lambda_0 := \min \left\{ \frac{b_i - a^i \cdot x}{a^i \cdot d} \mid a^i \cdot d > 0 \right\}. \quad (6.4.21)$$

Das „Projektionsverfahren von Rosen“ läuft nun wie folgt ab:

0) Bestimme einen Startpunkt  $x^0 \in M$  und setze  $t = 0$ .

Für  $t = 0, 1, 2, \dots$ :

1) Bestimme  $r^t = \nabla f(x^t)$ , die Indexmenge  $I(x^t)$  der aktiven Restriktionen und die zugehörige Matrix  $A_0 = [a^i, i \in I(x^t)]$ .

2) Berechne  $y^t = -(A_0 A_0^T)^{-1} A_0 r^t$  und damit die Abstiegsrichtung

$$d^t = -P r^t = -r^t + A_0^T y^t.$$

a) Fall  $d^t \neq 0$ :  $d^t$  ist zulässige (echte) Abstiegsrichtung. Fahre fort mit (4).

b) Fall  $d^t = 0$ : Fahre fort mit (3).

3) a) Fall  $y^t \geq 0$ : In  $x^t$  sind die KKT-Bedingungen erfüllt; Abbruch.

b) Fall  $y_i^t < 0$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ :  $y_j^t := \min\{y_i^t \mid y_i < 0\}$ .

Streiche die Zeile zum Index  $j$  in der Matrix  $A_0$  und fahre mit der reduzierten Matrix  $\bar{A}_0$  mit (2) fort.

4) Berechne

$$\lambda_0 = \min \left\{ \frac{b_i - a^i \cdot x^t}{a^i \cdot d^t} \mid a^i \cdot d^t > 0 \right\},$$

und bestimme  $\lambda_t \in [0, \lambda_0]$  aus

$$f(x^t + \lambda_t d^t) = \min_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} f(x^t + \lambda d^t).$$

5) Setze  $x^{t+1} := x^t + \lambda_t d^t$  und fahre mit (1) fort.

**Beispiel 6.1:** Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - 2x_2 \rightarrow \min!, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \leq 5, \\ -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0. \end{aligned} \tag{6.4.22}$$

Startpunkt  $x = (9/5, 4/5)^T$  mit  $r = \nabla f(x) = (4/5, -6/5)^T$  und Indexmenge  $I(x) = \{1, 2\}$  der aktiven Restriktionen. Die zugehörige Matrix ist

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{Rang } A_0 = 2.$$

Weiter ist

$$L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid A_0 x = 0\} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad d = -P_L r = 0,$$

und

$$\begin{aligned} A_0 A_0^T &= \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 17 \end{bmatrix}, \quad (A_0 A_0^T)^{-1} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 17 & -14 \\ -14 & 13 \end{bmatrix} \\ (A_0 A_0^T)^{-1} A_0 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = -(A_0 A_0^T)^{-1} A_0 r = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -22 \\ 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen  $y_1 < 0$  wird die erste Zeile von  $A_0$  gestrichen:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= [1, 4], \quad \bar{A}_0 \bar{A}_0^T = 17, \quad (\bar{A}_0 \bar{A}_0^T)^{-1} = \frac{1}{17}, \\ \bar{A}_0^T (\bar{A}_0 \bar{A}_0^T)^{-1} \bar{A}_0 &= \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_L = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$d = -\bar{P}_L r = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} -88 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Durch „Line Search“ finden wir

$$\begin{aligned} a^1 \cdot d &= -\frac{176}{85} + \frac{66}{85} < 0, \quad a^2 \cdot d = -\frac{88}{85} + \frac{88}{85} = 0, \\ a^3 \cdot d &= \frac{88}{85} > 0, \quad a^4 \cdot d = -\frac{22}{85} < 0, \end{aligned}$$

was ergibt:

$$\lambda_0 = \frac{b_3 - a^3 \cdot x}{a^3 \cdot d} = \frac{9 \cdot 8}{5 \cdot 88} = \frac{153}{88}.$$

Die Abstiegsverfahren, welche die Abstiegsrichtungen durch Lösung der (linearen) Optimierungsaufgabe

$$(D_\alpha) \quad d \in \mathbb{R}^n : \quad r^T \cdot d \rightarrow \min! \quad A_0 d \leq 0, \quad \|d\|_2 \leq 1,$$

oder, wie beim Verfahren von Rosen,

$$(\tilde{D}_\alpha) \quad d \in \mathbb{R}^n : \quad \|d + r\|_2 \rightarrow \min! \quad A_0 d = 0,$$

gewinnen, sind nicht generell konvergent. Die von ihnen erzeugten Iteriertenfolgen  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  können unter Umständen auch Häufungspunkte haben, in denen die KKT-Bedingungen nicht erfüllt sind. Doch selbst, wenn Konvergenz gegen eine Minimallösung vorliegt, kann die Konvergenz sehr langsam sein. Wir wollen diese Effekte anhand zweier Beispiele diskutieren.

**Beispiel 6.2:** Wir betrachten die quadratisch/lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min! \\ -x_1 + 4x_2 \leq 0, \\ -x_1 - 4x_2 \leq 0, \end{aligned} \tag{6.4.23}$$

mit der (globalen) Minimallösung  $\hat{x} = (0, 0)^T$ . Im Rahmen des „normalen“ Projektionsverfahrens wird der zulässige Startpunkt  $x^0 = (4, 1)^T$  verwendet. Die resultierenden Iterierten haben die Gestalt

$$x^t = \begin{pmatrix} 4/3^t \\ (-1/3)^t \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** Die Behauptung ist offensichtlich richtig für  $t = 0$ . Sei sie richtig für ein  $t \geq 0$ . Wir zeigen, dass in der betrachteten Situation  $d^t = -r^t$ .

$$r^t = \begin{pmatrix} 8/3^t \\ 4(-1/3)^t \end{pmatrix}, \quad x^t - \lambda r^t = \begin{pmatrix} 4/3^t - \lambda 8/3^t \\ (-1/3)^t - 4\lambda(-1/3)^t \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} -(x_1^t - \lambda r_1^t) + 4(x_2^t - \lambda r_2^t) &= \frac{1}{3^t} \{ -4(1 - (-1)^t) + (8 - 16(-1)^t)\lambda \}, \\ -(x_1^t - \lambda r_1^t) - 4(x_2^t - \lambda r_2^t) &= \frac{1}{3^t} \{ -4(1 + (-1)^t) + (8 + 16(-1)^t)\lambda \}. \end{aligned}$$

a) Im Fall  $t$  gerade ist  $(-1)^t = 1$  und folglich:

$$\begin{aligned} -(x_1^t - \lambda r_1^t) + 4(x_2^t - \lambda r_2^t) &= -\frac{8\lambda}{3^t} \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \\ -(x_1^t - \lambda r_1^t) - 4(x_2^t - \lambda r_2^t) &= \frac{1}{3^t} \{-8 + 24\lambda\} \leq 0, \quad \lambda \in [0, 1/3]. \end{aligned}$$

b) Im Fall  $t$  ungerade ist  $(-1)^t = -1$  und folglich:

$$\begin{aligned} -(x_1^t - \lambda r_1^t) + 4(x_2^t - \lambda r_2^t) &= -\frac{8\lambda}{3^t} \{-8 + 24\lambda\} \leq 0, \quad \lambda \in [0, 1/3], \\ -(x_1^t - \lambda r_1^t) - 4(x_2^t - \lambda r_2^t) &= -\frac{8\lambda}{3^t} \leq 0, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist  $-r^t \in D(x)$ , und wir können die lokal optimale Wahl  $d^t = -r^t$  treffen. Der „Line Search“ muss offensichtlich über das Intervall  $[0, 1/3]$  erstreckt werden. Wir zeigen  $\lambda_t = 1/3$ . Dies wird impliziert durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f(x^t + \lambda d^t)|_{\lambda=\lambda_t} &\leq 0, \\ \frac{d}{d\lambda} f(x^t + \lambda d^t)|_{\lambda=1/3} &= \frac{d}{d\lambda} \{(x_1^t + \lambda d_1^t)^2 + 2(x_2^t + \lambda d_2^t)^2\}|_{\lambda=1/3} \\ &= 2d_1^t(x_1^t + \lambda d_1^t) + 4d_2^t(x_2^t + \lambda d_2^t)|_{\lambda=1/3} \\ &= -2\frac{8}{3^t} \left( \frac{4}{3^t} - \frac{1}{3} \frac{8}{3^t} \right) - 16 \left( -\frac{1}{3} \right)^t \left( \left( -\frac{1}{3} \right)^t - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^t \right) \\ &= \frac{1}{3^{t+1}} (-64 + 16 + 16) < 0. \end{aligned}$$

Also wird

$$x^{t+1} = x^t + \lambda_t d^t = \left( \frac{4}{3^t} - \frac{1}{3} \frac{8}{3^t}, \left( -\frac{1}{3} \right)^t - \frac{4}{3} \left( -\frac{1}{3} \right)^t \right)^T = \left( \frac{4}{3^{t+1}}, \left( -\frac{1}{3} \right)^{t+1} \right)^T,$$

was zu zeigen war

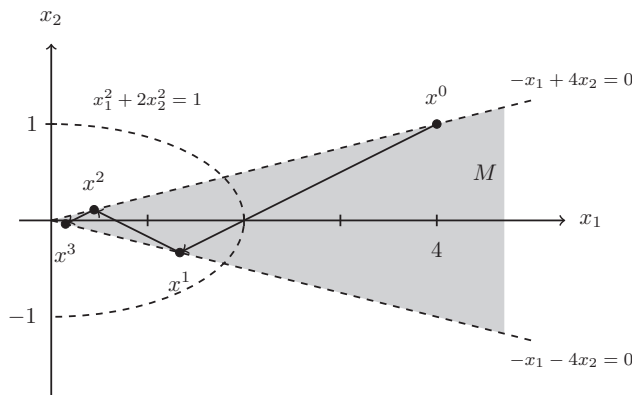


Abbildung 6.2: Konvergenzverhalten des projizierten Gradientenverfahrens

Eine „global“ optimale Wahl der Abstiegsrichtung  $d^0$  wäre  $d^0 = -(1, 1/4)^T$  gewesen, da in diesem Fall schon im ersten Schritt die Lösung  $x^1 = x^0 + \lambda_0 d^0 = \hat{x}$  erreicht worden wäre. Das „Zickzacklaufen“ zwischen den Rändern des zulässigen Bereichs ist eine typische, unliebsame Eigenart der Projektionsmethode. Im Extremfall kann dies sogar Konvergenz verhindern.

**Beispiel 6.3:** Wir betrachten die konvexe/lineare Optimierungsaufgabe

$$x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = \frac{4}{3}(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)^{3/4} + x_3 \rightarrow \min!, \quad x \geq 0, \quad (6.4.24)$$

mit der globalen Minimallösung  $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$ . Der Startpunkt im „normalen“ Projektionsverfahren ist  $x^0 = (a, 0, c)^T$  mit  $0 < a < \sqrt{2}/4$  und  $c > (1 + \sqrt{2}/2)\sqrt{a}$ . Die resultierenden Iterierten haben die Gestalt

$$x^t = \begin{cases} \left( \frac{a}{2^t}, 0, c - \frac{\sqrt{a}}{2} \sum_{k=0}^{t-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \right)^T, & t \geq 0 \text{ gerade,} \\ \left( 0, \frac{a}{2^t}, c - \frac{\sqrt{a}}{2} \sum_{k=0}^{t-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \right)^T, & t \geq 1 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wegen der Voraussetzungen an  $a$  und  $c$  ist

$$c - \frac{\sqrt{a}}{2} \sum_{k=0}^{t-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k > 0.$$

Ferner ist

$$c - \frac{\sqrt{a}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k = c \frac{\sqrt{a}}{2} \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} = c - \frac{\sqrt{a}}{2}(2 + \sqrt{2})$$

und somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^t = (0, 0, c - \sqrt{a}(1 + \sqrt{2}/2))^T \neq 0.$$

Da  $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$  eindeutiges Minimum ist, können im obigen Limes die KKZ-Bedingungen nicht erfüllt sein.

**Beweis:** Die o. a. Lösungsdarstellung ist offensichtlich richtig für  $t = 0$ . Sei sie richtig für ein  $t \geq 0$ . Wir haben

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)^{-1/4}(2x_1 - x_2) \\ (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)^{-1/4}(2x_2 - x_1) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Im Fall  $t$  ungerade gilt:

$$r^T = \begin{pmatrix} -\left(\frac{a}{2^t}\right)^{-1/2} \frac{a}{2^t} \\ \left(\frac{a}{2^t}\right)^{-1/2} \frac{2a}{2^t} \\ 1 \end{pmatrix},$$

und somit

$$x^t - \lambda r^t \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2}.$$

Also ist in diesem Fall  $-r^t \in D(x^t)$  und die Abstiegsrichtung kann als  $d^t = -r^t$  gewählt werden.

b) Im Fall  $t$  gerade ergibt sich analog zum Fall (a), dass ebenfalls  $d^t = -r^t$  ist.

Wir zeigen jetzt noch, dass

$$\lambda_t = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2}.$$

Dazu betrachten wir wieder

$$\frac{d}{d\lambda} f(x^t + \lambda d^t) |_{\lambda=\lambda_t} \leq 0.$$

a) Im Fall  $t$  ungerade gilt

$$x^t + \lambda_t d^t = \begin{pmatrix} \lambda_t \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2} \\ \frac{a}{2^t} - 2\lambda_t \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2} \\ c - \frac{\sqrt{a}}{2} \sum_{k=0}^{t-1} \dots - \lambda_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2^{t+1}} \\ 0 \\ c - \frac{\sqrt{a}}{2} \sum_{k=0}^{t+1} \dots \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f(x^t + \lambda d^t) |_{\lambda=\lambda_t} &= \nabla f(x^t + \lambda_t d^t)^T \cdot d^t \\ &= \left( 2 \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2}, - \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2}, 1 \right) \begin{pmatrix} \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2} \\ 2 \left( \frac{a}{2^t} \right)^{1/2} \\ -1 \end{pmatrix} = -1 < 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\lambda_t$  Lösung des „Line Search“.

b) Im Fall  $t$  gerade ist die Argumentation analog zum Fall (a).

Das erste Beispiel legt zur Vermeidung des „Zickzacklaufens“ der Iterierten folgende Strategie nahe:

Wird im Verlaufe des Verfahrens die Ungleichungsrestriktion  $a^i \cdot x \leq b_i$  aktiv, dann wird in der Aufgabe  $(D_\alpha)$   $a^i \cdot d = 0$  statt  $a^i \cdot d \leq 0$  gefordert. Man versucht also, einmal aktiv gewordene Restriktionen aktiv zu halten, bis sich keine zulässige Abstiegsrichtung mehr finden lässt. Dann werden alle Gleichungsrestriktionen wieder gelockert. Dieses Vorgehen ist eng verwandt mit dem oben besprochenen Verfahren von Rosen. Auch für diese stabilisierte Variante der Projektionsverfahren existiert kein allgemeiner Konvergenzbeweis, obwohl keine Versagensbeispiele bekannt sind.

## 6.5 Strafterm-Verfahren

Im Folgenden betrachten wir sog. „Straftermmethoden“ zur approximativen Lösung restringierter Optimierungsaufgaben. Dabei unterscheiden wir wie bei den Innere-Punkte-Verfahren grob zwischen „zulässigen“ und „unzulässigen“ Verfahren. Die *zulässigen* Approximationen sind solche, bei denen die Restriktionen in jedem Teilschritt eingehalten werden, während bei den *unzulässigen* die Restriktionen nur im Limes exakt, sonst aber nur näherungsweise erfüllt werden.

### 6.5.1 Penalty-Methode

Die „Penalty-Methoden“ gehören zu den *unzulässige* Verfahren. Wir betrachten die allgemeine restringierte Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad f(x) \rightarrow \min!, \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n,$$

mit einer stetigen Zielfunktion  $f$  und einem nicht leeren zulässigen Bereich  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Mit Hilfe der sog. „Indikatorfunktion“ von  $M$ ,

$$\delta_M := \begin{cases} 0, & x \in M, \\ \infty, & x \notin M, \end{cases}$$

lässt sich Aufgabe (P) formal als unrestringiertes Minimierungsproblem formulieren:

$$f(x) + \delta_M(x) \rightarrow \min!, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.5.25)$$

Anschaulich gesprochen wird durch Hinzufügung von  $\delta_M(\cdot)$  zur Zielfunktion  $f(\cdot)$  das Verlassen des zulässigen Bereichs  $M$  mit einer unendlich großen Strafe („penalty“) geahndet. Numerisch ist dieses Vorgehen wegen der extremen Unstetigkeit von  $\delta_M(\cdot)$  am Rande von  $M$  natürlich nicht brauchbar, auch dann nicht, wenn „ $\infty$ “ durch eine große Zahl ersetzt wird. Man versucht daher  $\delta_M$  zu approximieren mit Hilfe einer mindestens stetigen, möglichst auch stetig differenzierbaren Funktion  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; diese heißt dann „Strafterm“ bzgl.  $M$ , wenn gilt

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & p \in C(\mathbb{R}^n), \\ \beta) \quad & p \equiv 0 \text{ auf } M, \\ \gamma) \quad & p > 0 \text{ auf } M^c. \end{aligned}$$

Die Funktion  $p_\varepsilon := \varepsilon^{-1}p$  ist dann für  $\varepsilon \rightarrow 0$  eine immer besser werdende Approximation von  $\delta_M$ . Das „Penalty-Verfahren“ wählt nun einen solchen Strafterm  $p$  sowie ein ausreichend kleines  $\varepsilon > 0$  und löst die unrestringierte Optimierungsaufgabe

$$(P_\varepsilon) \quad f_\varepsilon(x) := f(x) + \frac{1}{\varepsilon}p(x) \rightarrow \min!, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Deren Lösung  $x^\varepsilon$  wird als Approximation der gesuchten Lösung  $\hat{x} \in M$  der Aufgabe (P) betrachtet. Dies ist zunächst nur ein Lösungsansatz für (P). Zu einem numerischen Verfahren wird die Penalty-Methode in Verbindung mit einem geeigneten Lösungsverfahren für  $(P_\varepsilon)$ .

**Beispiel 6.4:** Wir betrachten den Fall gemischter (Ungleichungs- und Gleichungs-) Restriktionen mit der zulässigen Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \dots, p), \ h_j(x) = 0 \ (j = 1, \dots, q)\},$$

mit Funktionen  $g_i, h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Die gebräuchliche Wahl eines Strafterms hierfür ist

$$p(x) := \sum_{i=1}^p g_i^+(x)^2 + \sum_{j=1}^q h_j(x)^2,$$



wobei  $g_i^+(x) := \max\{0, g_i(x)\}$  gesetzt wird. Offenbar erfüllt  $p(\cdot)$  die Bedingungen  $(\alpha) - (\gamma)$  und ist stetig differenzierbar. Sind die Funktionen  $g_i$  und  $h_j$  konvex, so ist es auch  $p$ . Alternativ könnte man auch den Strafterm

$$p(x) := \sum_{i=1}^p |g_i^+(x)| + \sum_{j=1}^q |h_j(x)|$$

verwenden; dieser besitzt auch die Eigenschaften  $(\alpha) - (\gamma)$ , ist aber nicht stetig differenzierbar.

**Beispiel 6.5:** Wir betrachten die konkrete (konvexe) Optimierungsaufgabe

$$f(x) := x^2 - 10x \rightarrow \min!, \quad x \leq 1,$$

mit dem globalen Minimum  $\hat{x} \equiv 1$ . Der Strafterm wird gewählt als

$$p(x) := \max\{0, x - 1\}^2.$$

Die zugehörige penalisierte Aufgabe

$$(P_\varepsilon) \quad f_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} p(x) \rightarrow \min!, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

hat dann eine konvexe, stetig differenzierbare Zielfunktion und kann mit den üblichen Mitteln der Analysis gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_\varepsilon(x) &= 2x - 10 + \frac{2}{\varepsilon} \max\{0, x - 1\} \\ &= \begin{cases} 2x - 10, & x \leq 1, \\ 2x - 10 + \frac{2}{\varepsilon}(x - 1), & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nullsetzen der Ableitung ergibt dann

$$\hat{x}^\varepsilon = \frac{1 + 5\varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1 + 4\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergieren also die Lösungen der penalisierten Probleme gegen die des Ausgangsproblems mit der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  sind diese Approximationen unzulässig.

**Lemma 6.8:** Seien  $x^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  Lösungen der Penalty-Aufgaben  $(P_\varepsilon)$ . Für  $\varepsilon > \varepsilon'$  gilt dann:

- i)  $f_\varepsilon(x^\varepsilon) \leq f_{\varepsilon'}(x^{\varepsilon'})$ ,
- ii)  $p(x^\varepsilon) \geq p(x^{\varepsilon'})$ ,
- iii)  $f(x^\varepsilon) \leq f(x^{\varepsilon'})$ .

**Beweis:** Für  $\varepsilon > \varepsilon'$  gilt  $1/\varepsilon < 1/\varepsilon'$ .

i) Für  $\varepsilon > \varepsilon'$  gilt:

$$f_{\varepsilon'}(x^{\varepsilon'}) = f(x^{\varepsilon'}) + \frac{1}{\varepsilon'} p(x^{\varepsilon'}) \geq f(x^{\varepsilon'}) + \frac{1}{\varepsilon} p(x^{\varepsilon'}) = f_{\varepsilon}(x^{\varepsilon'}) \geq f_{\varepsilon}(x^{\varepsilon}).$$

ii) Wegen der Minimalität von  $x^{\varepsilon}$  und  $x^{\varepsilon'}$  gilt:

$$\begin{aligned} f(x^{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} p(x^{\varepsilon}) &\leq f(x^{\varepsilon'}) + \frac{1}{\varepsilon} p(x^{\varepsilon'}), \\ f(x^{\varepsilon'}) + \frac{1}{\varepsilon'} p(x^{\varepsilon'}) &\leq f(x^{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon'} p(x^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon'}\right) p(x^{\varepsilon}) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon'}\right)}_{< 0} p(x^{\varepsilon'})$$

und folglich  $p(x^{\varepsilon}) \geq p(x^{\varepsilon'})$ .

iii) Es gilt:

$$f(x^{\varepsilon'}) + \frac{1}{\varepsilon} p(x^{\varepsilon'}) \geq f(x^{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} p(x^{\varepsilon}) \geq f(x^{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} p(x^{\varepsilon'})$$

Dies impliziert  $f(x^{\varepsilon'}) \geq f(x^{\varepsilon})$ , was den Beweis vervollständigt.

Q.E.D.

**Satz 6.4:** *Der zulässige Bereich  $M$  der Aufgabe  $(P)$  sein beschränkt. oder andernfalls sei die Zielfunktion  $f$  koerzitiv:*

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \|x\|_2 \rightarrow \infty. \quad (6.5.26)$$

Dann besitzen die Probleme  $(P)$  und  $(P_{\varepsilon})$  Lösungen  $\hat{x} \in M$  bzw.  $\hat{x}^{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$ . Für jede (monotone) Nullfolge  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  ist die zugehörige Folge  $(\hat{x}^{\varepsilon_t})_{t \in \mathbb{N}}$  beschränkt und jeder ihrer Häufungspunkte ist globales Minimum von  $(P)$ .

**Beweis:** Die Existenzaussage folgt wieder mit Hilfe eines Minimalfolgenatzguments analog zum Beweis von Satz 5.1. Sei  $\mu := \inf_{x \in M} f(x)$ . Für eine (monotone) Nullfolge  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  seien  $x^t := x^{\varepsilon_t}$  zugehörige Lösungen von  $(P_t) := (P_{\varepsilon_t})$ . Wir setzen entsprechend  $f_t := f_{\varepsilon_t}$ . Wegen

$$f(x^t) \leq f_t(x^t) \leq f(x), \quad x \in M,$$

und der Koerzitivität von  $f$  ist die Folge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Sei  $\bar{x}$  ein Häufungspunkt:  $\bar{x} = \lim_{t \in \mathbb{N}'} x^t$  ( $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ ). Dann ist

$$f(\bar{x}) = \lim_{t \in \mathbb{N}'} f_t(x^t),$$

und, da  $(f_t(x^t))_{t \in \mathbb{N}}$  nach Lemma 6.8 monoton wachsend (und beschränkt) ist, folgt

$$\sigma := \lim_{t \in \mathbb{N}'} f_t(x^t) \leq \inf_{x \in M} f(x) = \mu.$$

Also gilt

$$\lim_{t \in \mathbb{N}'} \frac{1}{\varepsilon_t} p(x^t) = \sigma - f(\bar{x})$$

und somit

$$\lim_{t \in \mathbb{N}'} p(x^t) = p(\bar{x}) = 0.$$

Dies bedeutet, dass  $\bar{x} \in M$  und wegen

$$f(\bar{x}) = \lim_{t \in \mathbb{N}'} f(x^t) \leq \limsup_{t \in \mathbb{N}'} f_t(x^t) \leq \mu$$

auch globales Minimum von  $f$  auf  $M$  ist.

Q.E.D.

### 6.5.2 Barriere-Methode

Die „Barriere-Methoden“ gehören zu den *zulässigen* Verfahren. Wir betrachten wieder die allgemeine Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad f(x) \rightarrow \min!, \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n,$$

mit stetiger Zielfunktion  $f(\cdot)$  und nicht leerer zulässiger Menge  $M$ . Zusätzlich wird angenommen, dass  $M$  „robust“ ist, d. h.:

$$M^\circ \neq \emptyset, \quad M = \overline{M^\circ}. \quad (6.5.27)$$

Statt wie bei der Penalty-Methode einen Lösungspunkt  $\hat{x}$  von außerhalb des zulässigen Bereichs  $M$  anzunähern, startet man jetzt in einem inneren Punkt von  $M$  und verhindert ein Verlassen von  $M$  mit Hilfe eines sog. „Barriere-Terms“  $b: M^\circ \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $\alpha)$   $b \in C(M^\circ)$ ,
- $\beta)$   $b \geq 0$  auf  $M^\circ$ ,
- $\gamma)$   $b(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \partial M$ .

Das „Barriere-Verfahren“ wählt nun eine Barriere-Funktion  $b$  sowie einen ausreichend kleines  $\varepsilon > 0$  und löst die unrestringierte Aufgabe

$$(P_\varepsilon) \quad f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon b(x) \rightarrow \min!, \quad x \in M^\circ.$$

Deren Lösung  $x^\varepsilon \in M^\circ$  wird dann wieder als Approximation der gesuchten Lösung  $\hat{x} \in M$  von  $(P)$  betrachtet.

**Beispiel 6.6:** Barriere-Methoden sind naturgemäß nur auf Probleme mit Ungleichungsrestriktionen, d. h.: mit zulässigen Bereichen der Art

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

anwendbar. Gebräuchliche Barrierefunktionen sind

$$b(x) := -\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}, \quad b(x) := -\sum_{i=1}^m \ln(-g_i(x)).$$

Zur Lösung der Aufgabe

$$(P) \quad f(x) := x^2 - 10x \rightarrow \min!, \quad x \leq 1,$$

mit dem (globalen) Minimum  $\hat{x} \equiv 1$  verwende man die Barriere-Funktion  $b(x) := -\ln(1-x)$  und den zugehörigen Barriere-Ansatz

$$f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon b(x) = x^2 - 10x - \varepsilon \ln(1-x) \rightarrow \min! \quad x < 1.$$

Die Zielfunktion  $f_\varepsilon(\cdot)$  ist auf  $M^\circ := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$  stetig differenzierbar. Obwohl das Barriere-Problem eigentlich eine restringierte Optimierungsaufgabe ist, kann es wegen  $f_\varepsilon(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 1$  mit den Methoden der unrestringierten Optimierung gelöst werden:

$$\frac{d}{dx} f_\varepsilon(x) = 2x - 10 + \frac{\varepsilon}{1-x} = \frac{(1-x)(2x-10) + \varepsilon}{1-x} = 0$$

liefert

$$\hat{x}^\varepsilon = 3 - 2\sqrt{1 + \varepsilon/8} = 1 - \frac{\varepsilon}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  sind die Approximationen  $\hat{x}^\varepsilon$  zulässig und konvergieren gegen die Lösung  $\hat{x}$  des Ausgangsproblems mit der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ .

**Satz 6.5:** *Der zulässige Bereich  $M$  erfülle die Voraussetzung (6.5.27) und sei beschränkt; andernfalls sei die Zielfunktion  $f$  wieder koerzitiv. Dann besitzen die Aufgaben (P) und  $(P_\varepsilon)$  Lösungen  $\hat{x} \in M$  bzw.  $\hat{x}^\varepsilon \in M^\circ$ . Für jede (monotone) Nullfolge  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  ist die zugehörige Folge  $(\hat{x}^{\varepsilon_t})_{t \in \mathbb{N}}$  beschränkt und jeder ihrer Häufungspunkte ist globales Minimum von (P).*

**Beweis:** Die Existenzaussage folgt wieder mit Hilfe eines Minimalfolgenatzguments analog zum Beweis von Satz 5.1. Sei  $x^0 \in M^\circ$  fest gewählt. Zur Vereinfachung setzen wir  $x^t := x^{\varepsilon^t}$  und  $f_t := f_{\varepsilon^t}$ . Dann gilt

$$f(x^t) \leq f_t(x^t) \leq f_t(x^0) \leq f_1(x^0),$$

d. h.: Die Folge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  ist wegen der Koerzitivität von  $f$  beschränkt. Sei  $\tilde{x}$  ein Häufungspunkt, der o.B.d.A. Limes der ganzen Folge ist:  $\tilde{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} x^t$ . Für  $\varepsilon' > \varepsilon$  gilt beim Barriere-Verfahren

$$f_\varepsilon(x^\varepsilon) = f(x^\varepsilon) + \varepsilon b(x^\varepsilon) > f(x^\varepsilon) + \varepsilon' b(x^\varepsilon) \geq f_{\varepsilon'}(x^{\varepsilon'}).$$

Die Folge der Werte  $f_t(x^t)$  ist also monoton fallend und durch  $\mu := \inf_{x \in M} f(x)$  nach unten beschränkt. Sei nun  $\hat{x} \in M$  ein Minimum von Aufgabe (P). Wegen  $M = \overline{M^\circ}$  lässt sich eine Folge  $(\bar{x}^t)_{t \in \mathbb{N}}$  konstruieren mit den Eigenschaften

$$\bar{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}^t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t b(\bar{x}^t) = 0.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(x^t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(x^t) \\ &\leq \liminf_{t \in \mathbb{N}} f_t(\tilde{x}^t) = f(\tilde{x}) = \mu. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\tilde{x} \in M$  globales Minimum von  $(P)$ .

Q.E.D.

### 6.5.3 Das Gradientenverfahren zur Lösung der Penalty-Probleme

Die Penalty- oder Barriere-Methoden erzeugen unrestringierte Optimierungsaufgaben, mit  $(P_\varepsilon)$  bezeichnet, welche in der Regel mit Hilfe von Abstiegsverfahren gelöst werden. Dabei treten aber aufgrund der „singulären“ Struktur der Aufgaben  $(P_\varepsilon)$  für  $0 < \varepsilon \ll 1$  typische Schwierigkeiten auf, die wir im Folgenden für das „klassische“ Gradientenverfahren diskutieren wollen. Es sei allerdings betont, dass dieses Abstiegsverfahren heute keine praktische Bedeutung mehr hat und hier nur als ein noch verhältnismäßig einfach zu analysierender Modellfall herangezogen wird.

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  als stetig differenzierbar und (der Einfachheit halber) als koerzitiv angenommen, so dass ein Minimum  $\hat{x}$  von  $f$  existiert. Das Gradientenverfahren erzeugt ausgehend von einem (beliebigen) Startpunkt  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  eine Folge von Iterierten  $x^t$  durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} (i) \quad & r^t := \nabla f(x^t), \\ (ii) \quad & \lambda_t \in \mathbb{R}_+ : \quad f(x^t - \lambda_t r^t) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^t - \lambda r^t), \\ (iii) \quad & x^{t+1} := x^t - \lambda_t r^t. \end{aligned}$$

**Satz 6.6:** *Unter den obigen Voraussetzungen ist die Folge der Iterierten  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  beschränkt und in jedem ihrer Häufungspunkte  $\hat{x}$  gilt  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ .*

**Beweis:** Nach Konstruktion ist die Folge  $f(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und wegen der Koerzitivität von  $f$  ist folglich die Folge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Sei  $\hat{x}$  ein Häufungspunkt,  $\hat{x} = \lim_{t \in \mathbb{N}'} x^t$  ( $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $\lim_{t \in \mathbb{N}'} x^t = f(\hat{x})$ , und  $\lim_{t \in \mathbb{N}'} r^t = \nabla f(\hat{x}) =: \hat{r}$ . Im Fall  $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$  ist auch die Folge  $(\lambda_t)_{t \in \mathbb{N}'}$  beschränkt, und o.B.d.A. kann  $\lim_{t \in \mathbb{N}'} \lambda_t = \hat{\lambda}$  angenommen werden. Nach Konstruktion gilt

$$f(x^t - \lambda_t r^t) \leq f(x^t - \lambda r^t), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

und somit im Limes für  $t \in \mathbb{N}'$ :

$$f(\hat{x} - \hat{\lambda} \hat{r}) \leq f(\hat{x} - \lambda \hat{r}), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Wegen

$$f(\hat{x} - \lambda \hat{r}) = f(\hat{x}) - \underbrace{\lambda \|\nabla f(\hat{x})\|_2^2}_{\neq 0} + o(\lambda)$$

folgt

$$f(\hat{x} - \bar{\lambda}\bar{r}) < f(\hat{x}).$$

Zu der Folge  $(x^{t+1})_{t \in \mathbb{N}'}$  gibt es nun wieder eine Teilfolge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}''}$  ( $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ ) mit Limes  $\tilde{x} = \lim_{t \in \mathbb{N}''} x^{t+1}$ . Damit ist dann

$$\tilde{x} = \lim_{t \in \mathbb{N}''} x^{t+1} = \lim_{t \in \mathbb{N}''} (x^t - \lambda_t r^t) = \bar{x} - \bar{\lambda}\bar{r},$$

woraus sich wieder der Widerspruch

$$f(\hat{x}) = \lim_{t \in \mathbb{N}''} f(x^t) = \lim_{t \in \mathbb{N}''} f(x^{t+1}) = f(\tilde{x}) = f(\hat{x} - \hat{\lambda}\hat{r})$$

ergibt.

Q.E.D.

Zur Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit des Gradientenverfahrens nehmen wir an, dass  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, so dass die Hesse-Matrix

$$H_f(x) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) \right)_{i,k=1}^n$$

existiert und symmetrisch ist. Ist in einem Häufungspunkt  $\hat{x}$  der Iteriertenfolge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  die Hesse-Matrix positiv definit, d. h.: die Funktion  $f$  bei  $\hat{x}$  (lokal) strikt konvex, so muss zwangsläufig die gesamte Folge gegen  $\hat{x}$  konvergieren.

**Satz 6.7:** *[Gradientenverfahren für strikt konvexe Probleme] Die Iteriertenfolge  $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  des Gradientenverfahrens konvergieren gegen ein lokales Minimum  $\hat{x}$  von  $f$ . Ist die Hesse-Matrix  $H_f := H_f(\hat{x})$  positiv definit so konvergiert  $f(x^t) \rightarrow f(\hat{x})$  linear,*

$$|f(x^t) - f(\hat{x})| \leq \rho^{2t} |f(x^0) - f(\hat{x})|, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (6.5.28)$$

mit einer Konvergenzrate

$$0 \leq \rho := \frac{1 - 1/\kappa_f}{1 + 1/\kappa_f} < 1, \quad \kappa_f := \text{cond}_2(H_f) = \frac{\Lambda}{\lambda}, \quad (6.5.29)$$

mit den maximalen und minimalen Eigenwerten  $\Lambda := \lambda_{\max}(H_f)$  bzw.  $\lambda_{\min}(H_f) > 0$  von  $H_f$ . Die Größe  $\kappa_f$  ist die „Spektralkondition“ der Matrix  $H_f$ .

**Beweis:** Zum Beweis des Satzes benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

**Lemma 6.9:** *[Ungleichung von Kantorowitsch] Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, positiv-definite Matrix mit kleinstem und größtem Eigenwert  $0 < \lambda \leq \Lambda$ . Dann gilt die folgende Ungleichung von Kantorowitsch*

$$\frac{\|x\|_2^2}{(x, Ax)_2 (x, A^{-1}x)_2} \geq \frac{4\lambda\Lambda}{(\lambda + \Lambda)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.5.30)$$

**Beweis:** Die Eigenwerte der positiv-definiten Matrix  $A$  seien  $0 < \lambda := \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n =: \Lambda$ . Dazu existiert ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren  $\{w^1, \dots, w^n\}$ . Für ein  $x \in \mathbb{R}^n$  seien  $\xi_i$  die Koordinaten bzgl. dieses Systems:  $x = \sum_{i=1}^m \xi_i w^i$ . Dann gilt mit der Setzung  $\bar{\xi}_i := \xi_i^2 / \|x\|_2^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\|x\|_2^2}{(x, Ax)_2 (x, A^{-1}x)_2} &= \frac{(\sum_{i=1}^m \xi_i^2)^2}{(\sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i^2) (\sum_{i=1}^m \lambda_i^{-1} \xi_i^2)} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i \lambda_i)^{-1}}{\sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i \lambda_i^{-1}} =: \frac{\Phi(\bar{\xi})}{\Psi(\bar{\xi})}. \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\Phi(\bar{\xi})$  und  $\Psi(\bar{\xi})$  sind gebildet mit den konvexen Linearkombinationen  $\sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i \lambda_i$  bzw.  $\sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i \lambda_i^{-1}$  der  $\lambda_i$  bzw. ihrer Reziproken  $\lambda_i^{-1}$ . Da  $\sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i \lambda_i$  zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_n$  liegt, ist  $\Phi(\bar{\xi})$  auf der Kurve  $\chi(\lambda) = \lambda^{-1}$  im schraffierten Bereich in Abb. 6.3:

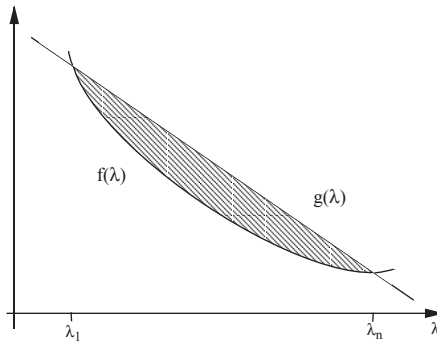


Abbildung 6.3: Skizze zum Beweis der Ungleichung von Kantorowitsch

Der Wert  $\Psi(\bar{\xi})$  ist eine konvexe Linearkombination von Werten auf der Kurve und gehört daher zu einem Punkt im schraffierten Bereich. Für denselben Vektor  $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$  sind  $\Phi(\bar{\xi})$  und  $\Psi(\bar{\xi})$  Werte von Punkten auf derselben Vertikalen. Folglich gilt:

$$\frac{\Phi(\bar{\xi})}{\Psi(\bar{\xi})} \geq \min_{\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n} \frac{1/\lambda}{(\lambda_1 + \lambda_n - \lambda)/(\lambda_1 \lambda_n)}.$$

Das Minimum wird angenommen für  $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_n)/2$ , so dass folgt:

$$\frac{\Phi(\bar{\xi})}{\Psi(\bar{\xi})} \geq \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}.$$

Dies vervollständigt den Beweis.

Q.E.D.

Wir fahren mit dem Beweis von Satz 6.7 fort. Wir geben das Argument nur für den Spezialfall einer quadratischen Zielfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot Cx + c^T \cdot x$$

mit einer symmetrischen, positiv-definiten Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und einem Vektor  $c \in \mathbb{R}^n$ . In diesem Fall ist  $H_f(\cdot) \equiv C$ , und das Minimum  $\hat{x}$  ist gegeben als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$C\hat{x} = -c. \quad (6.5.31)$$

Der Gradient von  $f$  ist gerade  $\nabla f(x) = Cx + c$ . In diesem Fall kann die optimale Schrittweite  $\lambda_t$  beim Gradientenverfahren explizit angegeben werden. Für die Funktion

$$f(x^t - \lambda r^t) = \frac{1}{2}(x^t - \lambda r^t)^T \cdot C(x^t - \lambda r^t) - c^T \cdot (x^t - \lambda r^t) = 0$$

ergibt sich durch Ableiten

$$\frac{d}{d\lambda} f(x^t - \lambda r^t) = -r^{tT} \cdot C(x^t - \lambda r^t) - c^T \cdot r^t = 0$$

die Formel

$$\lambda_t = \frac{\|r^t\|_2^2}{(r^t, Cr^t)_2}.$$

Ein Gradientenschritt hat also die Gestalt

$$x^{t+1} = x^t - \frac{\|r^t\|_2^2}{(r^t, Cr^t)_2} r^t, \quad r^t = Cx^t - c.$$

Durch Taylor-Entwicklung finden wir

$$\begin{aligned} f(x^{t+1}) &= f(x^t - \lambda_t r^t) \\ &= f(x^t) - \lambda_t r^{tT} \cdot r^t + \frac{1}{2} \lambda_t^2 r^{tT} \cdot H_f(\hat{x}) r^t (x^t - \hat{x}), \\ &= f(x^t) - \frac{1}{2} \frac{\|r^t\|_2^2}{(x^t, Cx^t)_2} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f(x^t) - f(\hat{x}) &= \nabla f(\hat{x})(x^t - \hat{x}) + \frac{1}{2}(x^t - \hat{x})^T \cdot H_f(\hat{x})(x^t - \hat{x}) \\ &= \frac{1}{2}(x^t - \hat{x})^T \cdot C(x^t - \hat{x}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$r^t = \nabla f(x^t) = \nabla f(x^t) - \nabla f(\hat{x}) = H_f(\hat{x})(x^t - \hat{x})$$

und somit

$$x^t - \hat{x} = C^{-1}r^t.$$

Also:

$$f(x^t) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(r^t, C^{-1}r^t)_2.$$

Division ergibt dann mit Hilfe von Lemma 6.9;

$$\frac{f(x^{t+1}) - f(x^t)}{f(x^t) - f(\hat{x})} = -\frac{\|r^t\|_2^2}{(r^t, Cr^t)_2 (r^t, C^{-1}r^t)_2} \leq -\frac{4\lambda\Lambda}{(\lambda + \Lambda)^2}.$$

Hieraus folgt schließlich

$$f(x^{t+1}) - f(\hat{x}) \leq \left\{ 1 - \frac{4\lambda\Lambda}{(\lambda + \Lambda)^2} \right\} (f(x^t) - f(\hat{x})) = \left( \frac{1 - \lambda/\Lambda}{1 + \lambda/\Lambda} \right)^2 (f(x^t) - f(\hat{x})),$$

was zu beweisen war.

Q.E.D.



**Bemerkung 6.2:** Aus der Fehlerabschätzung (6.7) für die Zielfunktionswerte gewinnt man auch eine Fehlerabschätzung für die Näherungspunkte selbst. Taylor-Entwicklung ergibt

$$f(x^t) = f(\hat{x}) + (x^t - \hat{x})^T \cdot \nabla f(\hat{x}) + \frac{1}{2}(x^t - \hat{x})^T \cdot \nabla^2 f(\xi)(x^t - \hat{x}), \quad \xi \in \overline{(x^t, \hat{x})},$$

und weiter wegen  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ :

$$\frac{1}{2}(x^t - \hat{x})^T \cdot \nabla^2 f(\xi)(x^t - \hat{x}) = f(x^t) - f(\hat{x}) \leq \rho^{2t} |f(x^0) - f(\hat{x})|.$$

Für die strikt konvexe Funktion  $f(\cdot)$  folgt damit auch

$$\|x^t - \hat{x}\|_2 \leq \kappa \rho^t, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (6.5.32)$$

Die Effizienz des Gradientenverfahrens bei der Lösung der Penalty- oder Barriere-Aufgaben ( $P_\varepsilon$ ) wird also durch die Verteilung der Eigenwerte der Hesse-Matrix der Funktionen

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon^{-1}p(x), \quad f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon b(x)$$

bestimmt. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung der Penalty-Methode mit der Penalty-Funktion,

$$p(x) = \sum_{i=1}^m g_i^+(x)^2, \quad g_i \in C^2(\mathbb{R}^n),$$

für Probleme mit Ungleichungsnebenbedingungen  $g_i(x) \leq 0$ . Für andere Penalty-Funktionen und für die verschiedenen Barriere-Funktionen gelten ganz analoge Resultate.

Die Funktion  $p(\cdot)$  ist zwar stetig differenzierbar, doch ihre zweiten Ableitungen sind unstetig am Rand des zulässigen Bereichs:

$$\frac{\partial^2 g_i^+}{\partial x_k \partial x_l}(x) = \begin{cases} \frac{\partial^2 g_i^+}{\partial x_k \partial x_l}(x) & \text{für } g_i(x) > 0, \\ 0 & \text{für } g_i(x) < 0. \end{cases}$$

Da die Lösungen der Penalty-Probleme ( $P_\varepsilon$ ) die Lösung von ( $P$ ) von außerhalb des zulässigen Bereichs approximieren, ist (bis auf gewisse Ausnahmefälle) die Hesse-Matrix in einer Umgebung von  $x^\varepsilon$  wohl definiert. Die Lösung  $x^\varepsilon$  des Penalty-Problems ( $P_\varepsilon$ ) sind charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\nabla f_\varepsilon(x^\varepsilon) = \nabla f(x^\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m g_i^+(x^\varepsilon) \nabla g_i(x^\varepsilon) = 0.$$

Mit der Abkürzung

$$y_i^\varepsilon := \frac{2}{\varepsilon} g_i^+(x^\varepsilon), \quad i = 1, \dots, m,$$

kann dies in der Form

$$\nabla_x L(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = \nabla f(x^\varepsilon) + \sum_{i=1}^m y_i^\varepsilon \nabla g_i(x^\varepsilon) = 0$$

geschrieben werden. Wir wollen zeigen, dass die Punkte  $y^\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen Lagrange-Multiplikatoren konvergieren. Betrachtet wird die Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad f(x) \rightarrow \min!, \quad g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

mit  $f, g_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$  streng konvex. Dann ist das Minimum  $\hat{x}$  von (P) eindeutig bestimmt und es gilt  $x^\varepsilon \rightarrow \hat{x}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

**Satz 6.8:** *Ist das Minimum  $\hat{x}$  von Problem (P) in dem Sinne regulär, dass die Vektoren  $\{\nabla g_i(\hat{x}), i \in I(\hat{x})\}$  linear unabhängig sind, so konvergiert  $y^\varepsilon \rightarrow \hat{y} \in \mathbb{R}_+^m$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , und im Punkt  $(\hat{x}, \hat{y})$  sind die KKT-Bedingungen erfüllt.*

**Beweis:** ohne

Q.E.D.

Wir bezeichnen mit  $H_\varepsilon(x)$  die Hesse-Matrix der Penalty-Funktion  $f_\varepsilon(x)$ :

$$H_\varepsilon(x) = H_f(x) + \varepsilon^{-1}H_p(x).$$

In den uns interessierenden Punkten  $x$  ist

$$g_i(x) > 0, \quad i \in I(x), \quad g_i(x) < 0, \quad i \notin I(x).$$

Folglich reduziert sich  $p(x)$  zu

$$p(x) = \sum_{i \in I(x)} g_i(x)^2.$$

Wir haben

$$\frac{\partial^2 g_i^2}{\partial x_k \partial x_l} = 2g_i \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_l} + 2 \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \frac{\partial g_i}{\partial x_l}$$

und somit

$$H_p(x) = 2 \underbrace{\sum_{i \in I(x)} g_i(x) H_{g_i}(x)}_{=: H_1(x)} + 2 \underbrace{\sum_{i \notin I(x)} \nabla g_i(x) \nabla g_i(x)^T}_{=: H_2(x)}.$$

Wir definieren wieder den Vektor  $y^\varepsilon \in \mathbb{R}_+^m$  durch

$$y_i^\varepsilon := \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon} g_i(x), & i \in I(x), \\ 0, & i \notin I(x), \end{cases}$$

und erhalten die Darstellung

$$H_\varepsilon(x) = H_{L_\varepsilon}(x) + \frac{2}{\varepsilon} H_2(x)$$

mit der Hesse-Matrix

$$H_{L_\varepsilon}(x) := H_f(x) + \sum_{i=1}^m y_i^\varepsilon H_{g_i}(x)$$

der Lagrange-Funktion

$$L(x, y^\varepsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i^\varepsilon g_i(x).$$

Nach Satz 6.8 konvergiert für  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$H_{L_\varepsilon}(x^\varepsilon) \rightarrow H_f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{y}_i H_{g_i}(\hat{x}) = H_L(\hat{x}),$$

wobei  $H_L(\hat{x})$  die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion  $L(\hat{x}, \hat{y})$  des Ausgangsproblems ( $P$ ) ist. Wir untersuchen nun das Verhalten der Matrizen

$$\frac{2}{\varepsilon} H_2(x^\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i \in I(x)} \nabla g_i(x^\varepsilon) \nabla g_i(x^\varepsilon)^T = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \nabla g_i^+(x^\varepsilon) \nabla g_i^+(x^\varepsilon)^T.$$

Offenbar konvergiert für  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\sum_{i=1}^m \nabla g_i^+(x^\varepsilon) \nabla g_i^+(x^\varepsilon)^T \rightarrow \sum_{i=1}^m \nabla g_i^+(\hat{x}) \nabla g_i^+(\hat{x})^T$$

und folglich  $\frac{2}{\varepsilon} H_2(x^\varepsilon) \rightarrow \infty$ . Die Matrix

$$H_2(\hat{x}) = \sum_{i \in I(x)} \nabla g_i^+(\hat{x}) \nabla g_i^+(\hat{x})^T = \sum_{i \in I(x)} \nabla g_i(\hat{x}) \nabla g_i(\hat{x})^T$$

lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$H_2(\hat{x}) = AA^T, \quad A := [\nabla g_i(\hat{x}), i \in I(x)] \in \mathbb{R}^{q \times n}.$$

Da  $A$  nach Voraussetzung an  $\hat{x}$  maximalen Rang hat, ist  $H_2(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{q \times q}$  symmetrisch und positiv-definit und damit regulär. Ebenso ist aufgrund der strikten Konvexität von  $f$  und der  $g_i$  die Matrix  $H_L(\hat{x})$  positiv definit. Hieraus erschließt man folgendes Resultat.

**Lemma 6.10:** *Die Hesse-Matrix*

$$H_\varepsilon(x^\varepsilon) = H_{L_\varepsilon}(x^\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} H_2(x^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

von  $f_\varepsilon(\cdot)$  im Minimum  $x^\varepsilon$  hat  $n - q$  eigenwerte, welche mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen Eigenwerte der Hesse-Matrix  $H_L(\hat{x})$  konvergieren, und  $q$  Eigenwerte, welche wie  $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$  gegen unendlich gehen.

**Beweis:** ohne

Q.E.D.

Zusammen mit Satz 6.7 besagt dies, dass das einfache Gradientenverfahren zur Approximation der Penalty-Lösung  $x^\varepsilon$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  immer langsamer konvergiert. Auswege aus diesem Dilemma bieten das „Verfahren der konjugierten Gradienten“ (CG-Verfahren) sowie die sog. „Quasi-Newton-Verfahren“ und deren beschleunigte („vorkonditionierte“) Varianten.

## 6.6 Übungsaufgaben

**Aufgabe 6.1:** Man führe einen Schritt der Methode der Schnittebenen aus für die Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n : \quad & -x_1 + x_2 \rightarrow \min! \\ & x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 4x_1 \leq 5, \\ & x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 2x_1 \leq 3, \\ & x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 + 2x_2 \leq 2. \end{aligned}$$

Das Startpolyeder  $S_0$  werde durch Linearisierung der Restriktionen im Punkt  $\bar{x} = (0, 0)^T$  gewonnen. Man skizziere die zulässige Menge  $M$  und die Polyeder  $S_0$  und  $S_1$ .

**Aufgabe 6.2:** Die Anwendung des Simplex-Verfahrens auf die lineare Programmierungsaufgabe

$$(II) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad c^T \cdot x \rightarrow \min!, \quad Ax = b, \quad x \geq 0,$$

führe auf ein Tableau, bei dem alle  $\gamma_k$  in der letzten Zeile bis auf ein  $\gamma_{k_0}$  nicht negativ sind. Man zeige, dass damit ein optimales Tableau für die redizierte Aufgabe

$$(\tilde{II}) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad c^T \cdot x \rightarrow \min!, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x_{k_0} = 0,$$

vorliegt.

**Aufgabe 6.3:** Welche Vereinfachung ergibt sich bei der Anwendung des Dualitätsverfahrens von Wolfe auf quadratische Programmierungsaufgaben mit Ungleichungsrestriktionen:

$$x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T \cdot Cx + c^T \cdot x \rightarrow \min!, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

mit  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, positiv definit,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ ?

**Aufgabe 6.4:** Man löse die quadratische Programmierungsaufgabe

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^2 : \quad & Q(x) := x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 4x_2 \rightarrow \min! \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 \leq 4, \quad x_1 + x_2 \leq 10, \end{aligned}$$

mit dem Dualitätsverfahren von Wolfe.

**Aufgabe 6.5:** Man löse die Programmierungsaufgabe aus Aufgabe 6.1 mit dem Abstiegsverfahren von Frank und Wolfe. Als Startvektor nehme man  $x^0 = (0, 0)^T$  und führe drei Iterationsschritte aus. Wie gut nähert dann  $Q(x^3)$  den tatsächlichen Minimalwert an?

**Aufgabe 6.6:** Zur Verständniskontrolle gebe man kurze Antworten auf die folgenden Fragen:

1. Wie lautet ein „Lineares Programm“ (lineare Optimierungsaufgabe) in Normalform als Grundlage des Simplex-Verfahrens und wie lautet die dazu „duale“ Aufgabe?
2. Was ist bei linearen Programmen eine „Schlupfvariable“ und wozu dient sie?
3. Wodurch ist beim Simplex-Verfahren das Endtableau zu einer „optimalen“ zulässigen Ecke charakterisiert? Was ist die Aufgabe der primalen Auswahlregel (R)?
4. Wodurch unterscheiden sich „primales“ und „duales“ Simplex-Verfahren, und in welchem Zusammenhang wird letzteres benötigt?
5. Wann nennt man ein Zweipersonen-Spiel „fair“ und wie kann man das im konkreten Fall feststellen?
6. Welche konkrete Gestalt hat die „Lagrange-Funktion“ einer linearen Optimierungsaufgabe in Standardform und wodurch ist ein zugehöriger Sattelpunkt definiert?
7. Was ist der Ausgangspunkt eines „Innere-Punkte-Verfahrens“ zur iterativen Lösung eines Linearen Programms und was versteht man in diesem Zusammenhang unter der „Dualitätslücke“?
8. Wie lautet das sog. „Sattelpunkt-Kriterium“ der konvexen Optimierung und was impliziert es?
9. Wie lautet der (globale) Karush-Kuhn-Tucker-Satz der konvexen Optimierung und was ist die sog. „Slater-Bedingung“?
10. Was ist die Idee des „Schnittebenenverfahrens“ zur Lösung linear/konvexer Programme?

**Aufgabe 6.7:** Zur Verständniskontrolle gebe man kurze Antworten auf die folgenden Fragen:

1. Wie lautet ein „Lineares Programm“ (lineare Optimierungsaufgabe) in „Standardform“ und wie wird diese konkret in die sog. „Normalform“ überführt?
2. Welche Formulierung eines Linearen Programms liegt dem Simplex-Verfahren zugrunde? Wie geht man vor, wenn für eine Variable  $x_i$  keine Vorzeichenbedingung vorliegt?
3. Woran sieht man, dass ein im Verlaufe des Simplex-Verfahrens erhaltenes Tableau zu einer zulässigen und optimalen Ecke gehört? Was ist eine zugehörige „Basis“ zu dieser Ecke?
4. Wann wird eine Ecke des zulässigen Bereichs eines Linearen Programms „entartet“ genannt? Welche Konsequenz kann das Auftreten entarteter Ecken für das Simplex-Verfahren haben?

5. Was ist ein „Matrixspiel“, was sind seine zugehörige „Auszahlungstafel“ und seine „Wertigkeit“? Existiert letztere immer?
6. Was besagt der „Alternativsatz“ für das Standardproblem der linearen Optimierung? Gilt ein analoger Satz auch für das „kanonische Problem“?
7. Was versteht man im Rahmen der Innere-Punkte-Methode zur Lösung eines Linearen Programms unter dem „zentralen Pfad“ und wozu dient die dabei verwendete Regularisierung?
8. Was versteht man bei einer konvexen Optimierungsaufgabe unter dem zugehörigen „KKT-System“ und wie ist der Zusammenhang zwischen dessen Lösungen und den Lösungen der Optimierungsaufgabe?
9. Wie gewinnt man aus einer vom Simplex-Verfahren gelieferten optimalen Eckenlösung  $x^0$  eines Linearen Programms eine Lösung der zugehörigen dualen Aufgabe?
10. Was besagt der „Satz von der trennenden Hyperebene“? Man illustriere seine Aussage in zwei Dimensionen.