

4 Innere-Punkte-Methoden

Innere-Punkte-Verfahren sind neben dem klassischen Simplex-Verfahren eine zweite Klasse von Lösungsmethoden für lineare Optimierungsaufgaben. Sie sind aber auch für allgemeiner Problemtypen wie z. B. „quadratische“ Optimierungsaufgaben anwendbar. Im Gegensatz zur Simplex-Methode, die zur Klasse der sog. „Active-Set“-Methoden gehört, und systematisch (in endlich vielen Schritten) Eckpunkte entlang des Randes des zulässigen Bereichs durchlaufen, gehen Innere-Punkte-Methoden, wie der Name andeutet, durch das Innere des zulässigen Bereichs und konvergieren in der Regel (in unendlich vielen Schritten) gegen einen Optimalpunkt am Rande. Die Innere-Punkte-Methoden gestatten im Gegensatz zum Simplex-Verfahren den theoretischen Nachweis, dass sie im Prinzip von polynomialer Komplexität sind. Ihre Durchführung ist aber von wesentlich höherer Komplexität als das Simplex-Verfahren und erfordert mehr Erfahrung bei der Wahl von Verfahrensparametern. Sie sind besonders geeignet für sehr große, „dünn besetzte“ Aufgaben. Zur Lösung von „ganzzahligen“ Aufgaben und in Verbindung mit „Schnittebenen-Verfahren“ in der konvexen Optimierung (sog. „Branch and Bound“-Verfahren), die in einem späteren Kapitel betrachtet werden, sind sie weniger geeignet.

Bemerkung 4.1 (Exponentielle Komplexität der Simplex-Methode): Für einen Parameter $\delta \in (0, 0.5)$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachten wir folgendes Beispiel eines Linearen Programms (nach Victor Klee & George J. Minty 1972):

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n : \quad & -x_n \rightarrow \min! \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ & \delta x_{i-1} \leq x_i \leq (1 - \delta)x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

Der zulässige Bereich der Aufgabe (4.0.1) ist ein konvexes Polyeder in \mathbb{R}^n in Form eines deformierten Würfels. Man sieht direkt ein, dass der Ursprung $x = 0$ eine zulässige Basislösung ist. Startet man das Simplex-Verfahren damit und wählt man die Pivotspalte wie üblich danach aus, dass der Zielfunktionskoeffizient γ_k minimal ist, dann durchläuft das Simplex-Verfahren alle Ecken des Würfels, d. h.: Es werden 2^{n-1} Iterationen ausgeführt. Mit n wächst somit die Anzahl der Iterationen exponentiell. Man kann nun einwenden, dass bei anderer (geeigneter) Pivotwahl bereits nach weniger Iterationen die Optimallösung erreicht wird. Bisher konnte aber stets gezeigt werden, dass für jede vorgegebene Pivotwahl ein Beispiel existiert, so dass die Anzahl der Iterationen exponentiell mit der Problemgröße ansteigt. Das Simplex-Verfahren hat also generisch exponentielle arithmetische Komplexität.

Bemerkung 4.2 (Verfahren mit polynomialer Komplexität): Leonid Khachiyan's Ellipsoid-Algorithmus aus dem Jahre 1979 war das erste polynomiale Verfahren zur Lösung von LP-Problemen. Zur Lösung benötigt es höchstens $\mathcal{O}(n^2 L)$ Iterationen. Leider ist diese Methode in der Praxis viel langsamer als das Simplex-Verfahren, sogar bei kleinen Problemen. Im Jahr 1984 publizierte Narendra Krishna Karmarkar einen Algorithmus zur

Lösung von LP-Problemen mit einer Komplexitätsschranke von $\mathcal{O}(nL)$ Iterationen. Neben seiner guten Komplexität ist dieses Verfahren in der Lage, auch praktische Probleme effizient zu lösen. Dennoch hat sich dieses Verfahren in der Praxis nicht durchgesetzt, vermutlich deshalb, weil es eine Vorabtransformation benötigt, bevor es angewandt werden kann. Die beste bisher erreichte Komplexitätsschranke zur Lösung von LP-Problemen liegt bei $\mathcal{O}(\sqrt{n}L)$. Auch wenn sich Verfahren mit günstiger Komplexitätsschranke in der Praxis nicht immer als wirklich effizient erwiesen haben, so haben die Forschungsaktivitäten auf diesem Gebiet dazu geführt, dass in den letzten Jahren sehr effiziente Verfahren zur Lösung von LP-Problemen entstanden sind. Diese stellen insbesondere für große Aufgaben eine gute Alternative zum Simplex-Verfahren dar. Hierzu gehören die im Folgenden vorgestellten „(Primal-Dualen)-Innere-Punkte-Verfahren“.

4.1 Idee der (primal-dualen) Innere-Punkte-Methoden

Wir betrachten wieder lineare Programme in der Normalform und die zugehörigen dualen Probleme (mit Schlupfvariablen):

$$(II) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad c^T \cdot x \rightarrow \min! \qquad (II^*) \quad y \in \mathbb{R}^m : \quad b^T \cdot y \rightarrow \max!$$

$$x \geq 0, \quad Ax = b, \qquad A^T y + z = c, \quad z \geq 0,$$

mit gegebenen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und Vektoren $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$. Es wird wieder angenommen, dass $n > m$ und $\text{Rang}(A) = m$.

Innere-Punkte-Verfahren erzeugen Folgen von Punkten $(x^k, y^k, z^k), k \in \mathbb{N}, x^k, z^k \geq 0$, welche gegen Lösungen der Aufgaben (II) und (II*) konvergieren. Ein solches Verfahren heißt „zulässig“, wenn alle Iterierten zulässige *innere* Punkte von D sind, d. h.:

$$Ax^k = b, \quad x^k > 0, \quad A^T y^k + z^k = c, \quad z^k > 0; \qquad (4.1.2)$$

andernfalls heißt das Verfahren „unzulässig“. Dies setzt voraus, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$M_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0, Ax = b\} \neq \emptyset,$$

$$M_0^* = \{(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid A^T y + z = c, z > 0\} \neq \emptyset, \qquad (4.1.3)$$

$$\Omega_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A^T y + z = c, x, z > 0\} \neq \emptyset.$$

Unter diesen Bedingungen besitzen insbesondere die primalen und dualen Probleme (II) und (II*) Lösungen $\hat{x} \in M$ bzw. $(\hat{y}, \hat{z}) \in M^*$. Diese Bedingungen sind wesentlich für die im Folgenden betrachteten Innere-Punkte-Methoden. Sie sind aber nicht immer erfüllt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.1: Der zulässige Bereich M des folgenden linearen Programms

$$x \in \mathbb{R}^3 : \quad 2x_1 + x_2 \rightarrow \min!$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad x_1 + x_3 = 5,$$

ist nicht leer: es existiert also eine Optimallösung. Andererseits muss für jeden zulässigen Punkt $x_2 = 0$ sein, so dass $M_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0, Ax = b\} = \emptyset$.

Das primal-duale System

Gemäß der Ergebnisse der Dualitätstheorie aus Kapitel 1 gelten für je zwei zulässige Punkte $x \in M$ und $(y, z) \in M^*$ von (II) bzw. (II*) die Beziehungen

$$0 \leq x^T \cdot z = x^T \cdot (c - A^T y) = c^T \cdot x - (Ax)^T \cdot y = c^T \cdot x - b^T \cdot y, \quad (4.1.4)$$

bzw.

$$b^T \cdot y \leq c^T \cdot x, \quad x \in M, (y, z) \in M^*. \quad (4.1.5)$$

Optimallösungen $\hat{x} \in M$ und $(\hat{y}, \hat{z}) \in M^*$ sind dadurch charakterisiert, dass in (4.1.5) Gleichheit gilt: $b^T \cdot \hat{y} = c^T \cdot \hat{x}$. Dies wiederum ist offenbar äquivalent zu (wegen $\hat{x}, \hat{z} \geq 0$)

$$\hat{x}^T \cdot \hat{z} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \hat{x}_i \hat{z}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1.6)$$

Dies impliziert, dass die Optimallösung $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in M \times M^*$ von (II) und (II*) als Lösung des folgenden (nichtlinearen) Gleichungssystems gegeben ist:

$$\Psi_0(x, y, z) := \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x, z \geq 0, \quad (4.1.7)$$

mit den $(n \times n)$ -Diagonalmatrizen $X := \text{diag}(x_i)$, $Z := \text{diag}(z_i)$ und dem n -Vektor $e := (1, \dots, 1)^T$. Die Jacobi¹-Matrix $D\Psi_0(x, y, z)$ der Abbildung $\Psi_0(\cdot, \cdot, \cdot) : M_0 \times M_0^* \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

$$D\Psi_0(x, y, z) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}.$$

Lemma 4.1: *Unter den Voraussetzungen $\text{Rang}(A) = m$ und $(x, z)^T > 0$ ist die Jacobi-Matrix $D\Psi_0(x, y, z)$ regulär.*

Beweis: Wegen $(x, z)^T > 0$ sind die Diagonalmatrizen X und Z positiv definit. Angenommen, es gäbe einen Vektor $(u, v, w)^T \neq 0$ mit $D\Psi_0(x, y, z)(u, v, w) = 0$. Damit gilt dann

$$Au = 0, \quad A^T v + w = 0, \quad Zu + Xw = 0,$$

und folglich $u^T \cdot w = -u^T \cdot A^T v = -(Au)^T \cdot v = 0$. Weiter folgt dann $u = -Z^{-1}Xw$ und damit $0 = u^T \cdot w = -w^T \cdot XZ^{-1}w$. Wegen der Positivdefinitheit von XZ^{-1} ist

¹Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851): Deutscher Mathematiker; schon als Kind hochbegabt; wirkte in Königsberg und Berlin; Beiträge zu vielen Bereichen der Mathematik: zur Zahlentheorie, zu elliptischer Funktionen, zu partiellen Differentialgleichungen, zu Funktionaldeterminanten und zur theoretischen Mechanik.

also $w = 0$. Damit ist auch $u = 0$. Schließlich ergibt dann $0 = A^T v + w = A^T v$ wegen $\text{Rang}(A) = m$ auch $v = 0$, im Widerspruch zur Annahme. Q.E.D.

Es liegt also nahe, das System (4.1.7) ausgehend von einem Startvektor $(x^0, y^0, z^0)^T \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ mit $(x^0, z^0) > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens zu lösen. Dabei besteht aber eine Schwierigkeit in der Tatsache, dass die gesuchte Lösung am Rand der Menge $\Omega = M \times M^*$ liegt. Denn die Gleichung $x^T \cdot z = 0$ impliziert, dass für jeden Index $i \in \{1, \dots, n\}$ eine der beiden Komponenten x_i oder z_i gleich Null ist. Am Rand von Ω geht aber die Regularität der Jacobi-Matrix $D\Psi_0(x, y, z)$ verloren, so dass das Newton-Verfahren bei Annäherung an solche Punkte zunehmend problematisch wird. Um das „Innere“ Ω_0 nicht zu verlassen, muss die Schrittweite im Newton-Verfahren geeignet beschränkt werden. Zur Umgehung dieses Problems wird das Newton-Verfahren auf die folgende „regularisierte“ Funktion angewendet:

$$\Psi_\mu(x, y, z) := \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZ e - \mu e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.8)$$

mit einem Parameter $\mu > 0$. In diesem Fall ist wegen $Xz = \mu e > 0$ gemäß Lemma 4.1 die zugehörige Jacobi-Matrix ebenfalls regulär:

$$D\Psi_\mu(x, y, z) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}$$

Definition 4.1: Wenn das regularisierte primal-duale System (4.1.8) für jeden Parameterwert $\mu > 0$ eine eindeutige Lösung $(x_\mu, y_\mu, z_\mu)^T \in M_0 \times M_0^*$ besitzt, wird die Abbildung $\mu \rightarrow (x_\mu, y_\mu, z_\mu)^T$ als der „zentrale Pfad“ der Optimierungsaufgabe (4.1.7) bezeichnet. Die zugehörige Größe

$$n\mu = x_\mu \cdot z_\mu = c^T \cdot x_\mu - b^T \cdot y_\mu$$

wird als „Dualitätslücke“ bezeichnet und dient als Maß für die Güte der Approximation des Optimalpunkts.

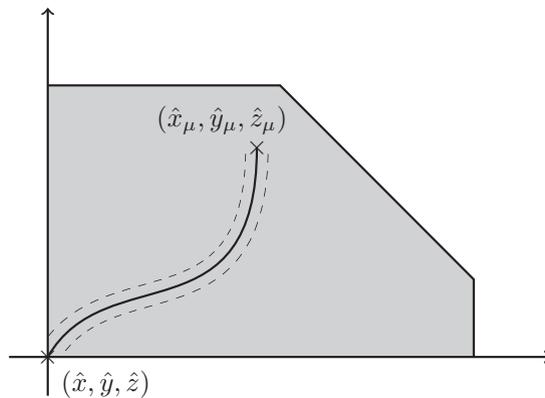


Abbildung 4.1: Der zentrale Pfad zur Approximation einer Optimallösung am Rande

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass unter den obigen Bedingungen der „zentrale Pfad“ $(x_\mu, y_\mu, z_\mu)^T \in M_0 \times M_0^*$ existiert und gegen eine Lösung des primal-dualen Systems (4.1.7) konvergiert: $(x_\mu, y_\mu, z_\mu)^T \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T$ ($\mu \rightarrow 0$). Die Elemente des zentralen Pfads können mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmt werden. Um im Limes eine Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems zu erhalten, muss im Verlauf der Newton-Iteration der Regularisierungsparameter $\mu > 0$ fortlaufend geeignet verkleinert werden, ohne die Newton-Konvergenz zu beeinträchtigen. Zum Nachweis dieser Aussagen sind einige Vorbereitungen notwendig.

4.2 Das Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n

Wir betrachten das Newton²-Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme mit stetig differenzierbaren Abbildungen $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dabei ist D eine gegebene, offene und konvexe Teilmenge. Mit einer Nullstelle $z \in D$ gilt durch Linearisierung

$$0 = f(z) = f(x) + f'(x)(z - x) + o(\|z - x\|), \quad x \in D, \quad (4.2.9)$$

mit der Jacobi-Matrix $f'(\cdot)$ von $f(\cdot)$. Dies legt zur Approximation der Nullstelle folgende „Newton-Iteration“ nahe:

$$x^{t+1} = x^t - f'(x^t)^{-1} f(x^t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.10)$$

In jedem Iterationsschritt ergibt sich ein lineares $(n \times n)$ -Gleichungssystem mit $f'(x^t)$ als Koeffizientenmatrix:

$$f'(x^t)x^{t+1} = f'(x^t)x^t - f(x^t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.11)$$

²Isaac Newton (1643–1727): Englischer Physiker und Mathematiker; wirkte an der Universität Cambridge und entwickelte u. a. die Grundlagen der klassischen Mechanik.

Dies macht das Newton-Verfahren wesentlich aufwendiger als eine einfache Fixpunktiteration; dafür konvergiert es aber auch sehr viel schneller. Das Newton-Verfahren wird meist in Form einer Defektkorrekturiteration durchgeführt (mit dem negativen „Defekt“ $d^t := -f(x^t)$):

$$f'(x^t)\delta x^t = d^t, \quad x^{t+1} = x^t + \delta x^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.12)$$

Dies spart gegenüber (4.2.11) pro Iterationsschritt eine Matrix-Vektor-Multiplikation.

Im Folgenden geben wir ein Konvergenzresultat für das Newton-Verfahren, welches nebenbei auch die Existenz einer Nullstelle sichert. Mit $\|\cdot\|$ seien die euklidische Vektornorm und ebenso die zugehörige natürliche Matrizenorm bezeichnet. Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung, für die eine Nullstelle z gesucht ist. Die Jacobi-Matrix $f'(\cdot)$ sei auf der Niveaumenge

$$D_* := \{x \in D \mid \|f(x)\| \leq \|f(x^*)\|\}$$

zu einem festen Punkt $x^* \in D$ regulär mit gleichmäßig beschränkter Inverser:

$$\|f'(x)^{-1}\| \leq \beta, \quad x \in D_*.$$

Ferner sei $f'(\cdot)$ auf D_* gleichmäßig Lipschitz-stetig:

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma\|x - y\|, \quad x, y \in D_*.$$

Mit diesen Bezeichnungen haben wir den folgenden Satz von Newton-Kantorovich³

Satz 4.1 (Newton-Kantorovich): *Unter den vorausgehenden Voraussetzungen sei für den Startpunkt $x^0 \in D_*$ mit $\alpha := \|f'(x^0)^{-1}f(x^0)\|$ die folgende Bedingung erfüllt:*

$$q := \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma < 1. \quad (4.2.13)$$

Dann erzeugt die Newton-Iteration

$$f'(x^t)x^{t+1} = f'(x^t)x^t - f(x^t), \quad t \geq 1, \quad (4.2.14)$$

eine Folge $(x^t)_{t \in \mathbb{N}} \subset D_*$, welche quadratisch gegen eine Nullstelle $z \in D_*$ von f konvergiert. Dabei gilt die a priori Fehlerabschätzung

$$\|x^t - z\| \leq \frac{\alpha}{1 - q} q^{(2^t - 1)}, \quad t \geq 1. \quad (4.2.15)$$

Beweis: Zum Startpunkt $x^0 \in D_*$ gehört die abgeschlossene, nicht leere Niveaumenge

$$D_0 := \{x \in D \mid \|f(x)\| \leq \|f(x^0)\|\} \subset D_*.$$

³Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch (1912–1986): Russischer Mathematiker; Prof. an der Universität Leningrad (1934–1960), an der Akademie der Wissenschaften (1961–1971) und an der Universität Moskau (1971–1976); fundamentale Beiträge zur Anwendung der linearen Optimierung in der Ökonomie, zur Funktionalanalysis und Numerik.

Wir betrachten die durch

$$g(x) := x - f'(x)^{-1}f(x), x \in D_0,$$

definierte stetige Abbildung $g : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$.

i) Wir wollen zunächst einige Hilfsresultate ableiten. Für $x \in D_0$ sei gesetzt:

$$x_r := x - rf'(x)^{-1}f(x), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

und $R := \max\{r \mid x_s \in D_0, 0 \leq s \leq r\} = \max\{r \mid \|f(x_s)\| \leq \|f(x^0)\|, 0 \leq s \leq r\}$. Für die Vektorfunktion $h(r) := f(x_r)$ gilt

$$h'(r) = -f'(x_r)f'(x)^{-1}f(x), \quad h'(0) = -h(0).$$

Für $0 \leq r \leq R$ ergibt dies

$$\begin{aligned} \|f(x_r)\| - (1-r)\|f(x)\| &\leq \|f(x_r) - (1-r)f(x)\| = \|h(r) - (1-r)h(0)\| \\ &= \left\| \int_0^r h'(s) ds + rh(0) \right\| = \left\| \int_0^r \{h'(s) - h'(0)\} ds \right\| \\ &\leq \int_0^r \|h'(s) - h'(0)\| ds, \end{aligned}$$

und ferner wegen $x_s - x = -sf'(x)^{-1}f(x)$:

$$\begin{aligned} \|h'(s) - h'(0)\| &= \|\{f'(x_s) - f'(x)\}f'(x)^{-1}f(x)\| \\ &\leq \gamma\|x_s - x\| \|f'(x)^{-1}f(x)\| \leq \gamma s \|f'(x)^{-1}f(x)\|^2. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\|f(x_r)\| - (1-r)\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}r^2\gamma\|f'(x)^{-1}f(x)\|^2. \quad (4.2.16)$$

Mit der Größe $\alpha_x := \|f'(x)^{-1}f(x)\|$ und der Voraussetzung $\|f'(x)^{-1}\| \leq \beta$ folgt

$$\|f(x_r)\| \leq (1-r + \frac{1}{2}r^2\alpha_x\beta\gamma)\|f(x)\|.$$

Im Falle $\alpha_x \leq \alpha$ gilt dann wegen der Voraussetzung $\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma < 1$:

$$\|f(x_r)\| \leq (1-r+r^2)\|f(x)\|.$$

Folglich ist in diesem Fall $R = 1$, d. h.: $g(x) \in D_0$. Für solche $x \in D_0$ gilt weiter

$$\|g(x) - g^2(x)\| = \|g(x) - g(x) + f'(g(x))^{-1}f(g(x))\| \leq \beta\|f(g(x))\|.$$

Mit Hilfe der Abschätzung (4.2.16) für $r = 1$ folgt bei Beachtung von $g(x) = x_1$:

$$\|g(x) - g^2(x)\| \leq \frac{1}{2}\beta\gamma\|f'(x)^{-1}f(x)\|^2 = \frac{1}{2}\beta\gamma\|x - g(x)\|^2. \quad (4.2.17)$$

ii) Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum Beweis des Satzes. Zunächst wollen wir zeigen, dass die Newton-Iterierten $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$ in D_0 existieren und die Ungleichung

$$\|x^t - g(x^t)\| = \|f'(x^t)^{-1}f(x^t)\| \leq \alpha$$

erfüllen. Dies erfolgt durch vollständige Induktion. Für $t = 0$ ist die Aussage trivialerweise richtig; insbesondere ist wegen $\alpha_{x^0} = \alpha$ nach dem oben gezeigten $g(x^0) \in D_0$. Sei nun $x^t \in D_0$ eine Iterierte mit $g(x^t) \in D_0$ und $\|x^t - g(x^t)\| \leq \alpha$. Dann folgt

$$\|x^{t+1} - g(x^{t+1})\| = \|g(x^t) - g^2(x^t)\| \leq \frac{1}{2}\beta\gamma\|x^t - g(x^t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\alpha^2\beta\gamma \leq \alpha$$

und somit nach dem oben Gezeigten $g(x^{t+1}) \in D_0$. Also existiert $(x^t)_{t \in \mathbb{N}} \subset D_0$. Als nächstes zeigen wir, dass diese Folge Cauchy-Folge ist. Mit Hilfe von (4.2.17) ergibt sich

$$\|x^{t+1} - x^t\| = \|g^2(x^{t-1}) - g(x^{t-1})\| \leq \frac{1}{2}\beta\gamma\|g(x^{t-1}) - x^{t-1}\|^2 = \frac{1}{2}\beta\gamma\|x^t - x^{t-1}\|^2,$$

und bei Iteration dieser Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|x^{t+1} - x^t\| &\leq \frac{1}{2}\beta\gamma\left(\frac{1}{2}\beta\gamma\|x^{t-1} - x^{t-2}\|^2\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\beta\gamma\right)^{(2^2-1)}\|x^{t-1} - x^{t-2}\|^{(2^2)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\beta\gamma\right)^{(2^2-1)}\left(\frac{1}{2}\beta\gamma\|x^{t-2} - x^{t-3}\|^2\right)^{(2^2)} = \left(\frac{1}{2}\beta\gamma\right)^{(2^3-1)}\|x^{t-2} - x^{t-3}\|^{(2^3)}. \end{aligned}$$

Fortsetzung der Iteration bis $t = 0$ ergibt mit $q = \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma$:

$$\|x^{t+1} - x^t\| \leq \left(\frac{1}{2}\beta\gamma\right)^{(2^t-1)}\|x^1 - x^0\|^{(2^t)} \leq \left(\frac{1}{2}\beta\gamma\right)^{(2^t-1)}\alpha^{(2^t)} \leq \alpha q^{(2^t-1)}.$$

Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ folgt damit wegen $q < 1$:

$$\begin{aligned} \|x^{t+m} - x^t\| &\leq \|x^{t+m} - x^{t+m-1}\| + \dots + \|x^{t+2} - x^{t+1}\| + \|x^{t+1} - x^t\| \\ &\leq \alpha q^{(2^{t+m-1}-1)} + \dots + \alpha q^{(2^{t+1}-1)} + \alpha q^{(2^t-1)} \\ &\leq \alpha q^{(2^t-1)} \{ (q^{(2^t)})^{(2^{m-1}-1)} + \dots + q^{(2^t)} + 1 \} \\ &\leq \alpha q^{(2^t-1)} \sum_{j=0}^{\infty} (q^{(2^t)})^j \leq \frac{\alpha q^{(2^t-1)}}{1 - q^{(2^t)}}. \end{aligned}$$

Dies besagt, dass $(x^t)_{t \in \mathbb{N}} \subset D_0$ Cauchy-Folge ist. Deren Limes $z \in D_0$ ist dann notwendig ein Fixpunkt von g bzw. Nullstelle von f :

$$z = \lim_{t \rightarrow \infty} x^t = \lim_{t \rightarrow \infty} g(x^{t-1}) = g(z).$$

Durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ erhalten wir auch die Fehlerabschätzung

$$\|z - x^t\| \leq \frac{\alpha q^{(2^t-1)}}{1 - q^{(2^t)}} \leq \frac{\alpha}{1 - q} q^{(2^t-1)},$$

was den Beweis vervollständigt.

Q.E.D.

Beispiel 4.2: Zur Bestimmung der Inversen $Z = A^{-1}$ einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird gesetzt

$$f(X) := X^{-1} - A,$$

für $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Eine Nullstelle dieser Abbildung $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ist gerade die Inverse $Z = A^{-1}$. Diese soll mit dem Newton-Verfahren berechnet werden. Dazu ist zunächst eine Umgebung von A bzw. von A^{-1} zu bestimmen, auf der $f(\cdot)$ definiert und differenzierbar ist. Für $X \in K_\rho(A) := \{Z \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \|Z - A\| \leq \rho\}$ mit $\rho < \|A^{-1}\|^{-1}$ folgt aus $X = A - A + X = A(I - A^{-1}(A - X))$ die Beziehung

$$\|A^{-1}(A - X)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - X\| \leq \rho \|A^{-1}\| < 1,$$

d. h.: $I - A^{-1}(A - X)$ und damit auch X sind regulär. Als nächstes ist die Jacobi-Matrix $f'(\cdot)$ von $f(\cdot)$ als Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n}$ in sich zu bestimmen. Für die Durchführung des Newton-Verfahrens genügt es offensichtlich, die Wirkung von $f'(\cdot)$ auf Matrizen $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu bestimmen. Wir wollen zeigen, dass

$$f'(X)Y = -X^{-1}YX^{-1}, \quad Y \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dies sieht man wie folgt: Aus $f(X) = X^{-1} - A$ folgt $Xf(X) = I - XA$. Für die Jacobi-Matrizen der rechten und linken Seite gilt

$$\begin{aligned} ([Xf(X)]'Y)_{j,k} &= \sum_{pq} \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \sum_l x_{jl} f_{lk}(X) y_{pq} \\ &= \sum_{p,q} \sum_l \left\{ \underbrace{\frac{\partial x_{jl}}{\partial x_{pq}}}_{\delta_{jp} \cdot \delta_{lq}} f_{lk}(X) + x_{jl} \frac{\partial f_{lk}(X)}{\partial x_{pq}} \right\} y_{pq} \\ &= \sum_q f_{qk}(X) y_{jq} + \sum_{p,q} \sum_l x_{jl} \frac{\partial f_{lk}(X)}{\partial x_{pq}} y_{pq} \\ &= (Yf(X) + Xf'(X)Y)_{jk}. \end{aligned}$$

Analog finden wir

$$[I - XA]'Y = -YA.$$

Also ist

$$-YA = Yf(X) + Xf'(X)Y = YX^{-1} - YA - Xf'(X)Y$$

bzw.

$$f'(X)Y = -X^{-1}YX^{-1}.$$

Das Newton-Verfahren

$$f'(X^t)X^{t+1} = f'(X^t)X^t - f(X^t)$$

erhält in diesem Fall also die Gestalt

$$-X^{t-1}X^{t+1}X^{t-1} = -X^{t-1} \underbrace{X^t X^{t-1}}_{=I} - X^{t-1} + A$$

bzw.

$$X^{t+1} = 2X^t - X^t A X^t = X^t \{2I - A X^t\}. \quad (4.2.18)$$

Diese Iteration ist das mehrdimensionale Analogon der Iteration $x_{t+1} = x_t(2 - ax_t)$ im skalaren Fall zur divisionsfreien Berechnung des Kehrwertes $1/a$ einer Zahl $a \neq 0$. Über die Identität

$$X^{t+1} - Z = 2X^t - X^t A X^t - Z = -(X^t - Z)A(X^t - Z) \quad (4.2.19)$$

gewinnt man die Fehlerabschätzung

$$\|X^{t+1} - Z\| \leq \|A\| \|X^t - Z\|^2. \quad (4.2.20)$$

Der Einzugsbereich der quadratischen Konvergenz für das Newton-Verfahren ist in diesem Fall also die Menge

$$\{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \|X - Z\| < \|A\|^{-1}\}.$$

4.2.1 Das gedämpfte Newton-Verfahren

Bei der Durchführung des Newton-Verfahrens zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme treten zwei Hauptschwierigkeiten auf:

- (i) hoher Aufwand pro Iterationsschritt,
- (ii) „guter“ Startpunkt x^0 erforderlich.

Zur Überwindung dieser Probleme verwendet man gegebenenfalls das sog. „vereinfachte Newton-Verfahren“

$$f'(c)\delta x^t = d^t := -f(x^t), \quad x^{t+1} = x^t + \delta x^t, \quad (4.2.21)$$

mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}^n$, etwa $c = x^0$, welches nahe bei der Nullstelle z liegt. Dabei haben alle zu lösenden Gleichungssysteme dieselbe Koeffizientenmatrix und können mit Hilfe einer einmal berechneten LR -Zerlegung von $f'(c)$ effizient gelöst werden. Andererseits führt man zur Vergrößerung des Konvergenzbereiches des Newton-Verfahrens eine „Dämpfung“ ein,

$$f'(x^t)\delta x^t = d^t, \quad x^{t+1} = x^t + \lambda_t \delta x^t, \quad (4.2.22)$$

wobei der Parameter $\lambda_t \in (0, 1]$ zu Beginn klein gewählt wird und dann nach endlich vielen Schritten gemäß einer geeigneten Dämpfungsstrategie $\lambda_t = 1$ gesetzt wird. Der folgende Satz gibt ein konstruktives Kriterium für die a posteriori Wahl des Dämpfungsparameters λ_t .

Satz 4.2 (Gedämpftes Newton-Verfahren): *Unter den Bedingungen von Satz 4.1 erzeugt für jeden Startpunkt $x^0 \in D_*$ die gedämpfte Newton-Iteration (4.2.22) mit*

$$\lambda_t := \min \left\{ 1, \frac{1}{\alpha_t \beta \gamma} \right\}, \quad \alpha_t := \|f'(x^t)^{-1} f(x^t)\|,$$

eine Folge $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$, für welche nach t_ Schritten $q_* := \frac{1}{2} \alpha_{t_*} \beta \gamma < 1$ erfüllt ist, so dass ab dann x^t quadratisch konvergiert. Es gilt dann die a priori Fehlerabschätzung*

$$\|x^t - z\| \leq \frac{\alpha}{1 - q_*} q_*^{(2^t - 1)}, \quad t \geq t_*. \quad (4.2.23)$$

Beweis: Wir verwenden wieder die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 4.1. Für ein $x \in D_0$ gilt mit $x_r := x - r f'(x)^{-1} f(x)$, $0 \leq r \leq 1$, und $\alpha_x := \|f'(x)^{-1} f(x)\|$ die Abschätzung

$$\|f(x_r)\| \leq (1 - r + \frac{1}{2} r^2 \alpha_x \beta \gamma) \|f(x)\|, \quad 0 \leq r \leq R = \max\{r \mid x_s \in D_0, 0 \leq s \leq r \leq 1\}.$$

Der Vorfaktor wird minimal für

$$r_* = \min \left\{ 1, \frac{1}{\alpha_x \beta \gamma} \right\} > 0 : \quad 1 - r_* + \frac{1}{2} r_*^2 \alpha_x \beta \gamma \leq 1 - \frac{1}{2 \alpha_x \beta \gamma} < 1.$$

Bei Wahl von

$$r_t := \min \left\{ 1, \frac{1}{\alpha_t \beta \gamma} \right\}$$

ist also $(x^t)_{t \in \mathbb{N}} \subset D_0$, und die Norm $\|g(x^t)\|$ fällt streng monoton, d. h.:

$$\|f(x^{t+1})\| \leq \left(1 - \frac{1}{2 \alpha_t \beta \gamma} \right) \|f(x^t)\|.$$

Nach endlich vielen, $t_* \geq 1$, Iterationsschritten ist dann $\frac{1}{2} \alpha_{t_*} \beta \gamma < 1$, und die quadratische Konvergenz der weiteren Folge $(x^t)_{t \geq t_*}$ folgt aus Satz 4.1. Q.E.D.

4.3 Der Euler-Lagrange-Ansatz der Optimierung

Für die weitere Diskussion der Innere-Punkte-Methoden stellen wir im Folgenden ein Resultat über (endliche-dimensionale) Optimierungsaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen bereit. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g = (g_1, \dots, g_m)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit $n \geq m$, differenzierbare Funktionen auf einer offenen (konvexen) Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Wir suchen ein *lokales* Extremum von f auf der Mannigfaltigkeit $N_g := \{x \in D \mid g(x) = 0\}$, d. h. einen Punkt $\hat{x} \in D$ mit der Eigenschaft

$$f(\hat{x}) = \inf \{f(x) \mid x \in U(\hat{x}), g(x) = 0\}, \quad (4.3.24)$$

oder analog $f(\hat{x}) = \sup \{f(x) \mid x \in U(\hat{x}), g(x) = 0\}$, für eine Umgebung $U(\hat{x})$. Der folgende Satz gibt uns ein notwendiges Kriterium für eine Lösung dieser Aufgabe.

Satz 4.3 (Satz von Karush-Kuhn-Tucker (KKT)): Sei $\hat{x} \in D$ eine Lösung der Aufgabe (4.3.24), d. h. mit der Menge $N_g := \{x \in D : g(x) = 0\}$ gilt auf einer Umgebung $U(\hat{x}) \subset D$:

$$f(\hat{x}) = \inf_{x \in U \cap N_g} f(x) \quad \text{oder} \quad f(\hat{x}) = \sup_{x \in U \cap N_g} f(x). \quad (4.3.25)$$

Hat dann die Jacobi-Matrix $\nabla g(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ maximalen Rang m , so gibt es einen Vektor $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\nabla f(\hat{x}) + \hat{\lambda}^T \cdot \nabla g(\hat{x}) = 0. \quad (4.3.26)$$

Der Vektor $\hat{\lambda}$ wird „Lagrange-Multiplikator“ genannt.

Beweis: Wir geben den Beweis nur für den Fall $m = 1$; die Verallgemeinerung für $m > 1$ ist offensichtlich. Die Rangvoraussetzung bedeutet in diesem Fall, dass $\nabla g(\hat{x}) \neq 0$ ist; wir können nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten annehmen, dass $\partial_n g(\hat{x}) \neq 0$. Wir setzen

$$\hat{x} := (\hat{x}', \hat{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{x}' = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Der Satz über implizite Funktionen, angewendet auf die Gleichung

$$F(x', x_n) := g(x) = 0,$$

liefert dann die Existenz von Umgebungen $U(\hat{x}') \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von \hat{x}' und $U(\hat{x}_n) \subset \mathbb{R}$ von \hat{x}_n mit $U(\hat{x}') \times U(\hat{x}_n) \subset D$, sowie einer (eindeutig bestimmten) stetig differenzierbaren Funktion $\varphi : U(\hat{x}') \rightarrow U(\hat{x}_n)$, so dass

$$F(x', \varphi(x')) = 0, \quad x' \in U(\hat{x}'), \quad (4.3.27)$$

und

$$N_g \cap (U(\hat{x}_n) \times U(\hat{x}')) = \{x \in U(\hat{x}_n) \times U(\hat{x}') : x_n = \varphi(x')\}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel folgt aus (4.3.27):

$$\partial_i g(\hat{x}) + \partial_n g(\hat{x}) \partial_i \varphi(\hat{x}') = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.3.28)$$

Da f auf N_g im Punkt \hat{x} ein lokales Extremum besitzt, hat die Funktion

$$\tilde{f}(x') := F(x', \varphi(x'))$$

auf $U(\hat{x}')$ im Punkt \hat{x}' ein lokales Extremum. Die notwendige Extremalbedingung bedingt also

$$0 = \partial_i \tilde{f}(\hat{x}') = \partial_i f(\hat{x}) + \partial_n f(\hat{x}) \partial_i \varphi(\hat{x}'), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.3.29)$$

Definieren wir nun

$$\hat{\lambda} := -\partial_n f(\hat{x}) \partial_n g(\hat{x})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \partial_n f(\hat{x}) + \hat{\lambda} \partial_n g(\hat{x}) = 0,$$

so ergibt sich zusammen mit (4.3.28) und (4.3.29)

$$\partial_i f(\hat{x}) + \hat{\lambda} \partial_i g(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{bzw.} \quad \nabla f(\hat{x}) + \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x}) = 0,$$

was den Beweis vervollständigt.

Q.E.D.

Bemerkung 4.3: Die Aussage von Satz 4.3 kann auch so interpretiert werden, dass jeder lokale Minimalpunkt \hat{x} der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(\hat{x}) = 0$ notwendig zu einem sog. „stationären Punkt“ der Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda^T \cdot g(x), \quad (x, \lambda) \in D \times \mathbb{R}^m,$$

korrespondiert, d. h. zu einem Punkt $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ mit

$$\nabla_{(x,\lambda)} L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \begin{pmatrix} \nabla f(\hat{x}) + \hat{\lambda}^T \cdot \nabla g(\hat{x}) \\ g(\hat{x}) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.3.30)$$

Bemerkung 4.4: Satz 4.3 behandelt nur die einfachste Situation einer Extremalaufgabe mit *Gleichungsnebenbedingungen*. Der eigentliche Satz von Karush-Kuhn-Tucker betrifft allgemeinere Aufgaben mit zusätzlichen *Ungleichungsnebenbedingungen* $h(x) \leq 0$, wobei die Stationaritätsgleichung (4.3.30) (KKT-System) weitere Bedingungen enthält. Die sog. „Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen“ erschienen erstmalig 1939 in der (unveröffentlichten) Master-Arbeit von William Karush⁴. Bekannter wurden diese jedoch erst 1951 nach einem Konferenz-Paper von Harold W. Kuhn und Albert W. Tucker

Korollar 4.1: *Satz 4.3 liefert zunächst nur notwendige Bedingungen für einen Punkt \hat{x} , extremal zu sein. I. Allg. ist die Umkehrung nicht richtig. In dem uns hier interessierenden Spezialfall einer strikt konvexen Kostenfunktion $f(\cdot)$ und affin-linearen Restriktionen der Art $g(x) = Ax - b$ liefert ein stationärer Punkt $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ der Euler-Lagrange-Funktion mit \hat{x} eine globale Lösung des Optimierungsproblems (4.3.24). Beide Lösungen sind dabei eindeutig bestimmt.*

Beweis: Für (differenzierbare) konvexe Funktionen $f(\cdot)$ gilt

$$f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x'), \quad x, x' \in D, \quad x \neq x', \quad 0 < t < 1,$$

und folglich die Monotonieungleichung für den Gradienten (Übungsaufgabe)

$$\nabla(f(x) - f(x'))^T \cdot (x - x') \geq 0, \quad x, x' \in D, \quad x \neq x'.$$

Letztere zeigt man unter Verwendung der Beziehung

$$f(x') \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (x' - x), \quad x, x' \in D, \quad x \neq x'. \quad (4.3.31)$$

Für *strikt* konvexe Funktionen gelten diese Ungleichungen mit dem strikten Ungleichheitszeichen.

i) Wir zeigen zunächst, dass unter den obigen Voraussetzungen das Optimierungsproblem (4.3.24) jedes lokale Minimum auch global und als solches eindeutig bestimmt

⁴William Karush (1917–1997): US-amerikanischer Mathematiker; Prof. an der California State University; bekannt durch seinen Beitrag zur Entwicklung der sog. „KarushKuhnTucker-Bedingungen“; diese erscheinen erstmalig in seiner Master-Arbeit an der Univ. of Chicago 1939, wurden aber erst weiter bekannt durch einen Tagungsbeitrag von Harold W. Kuhn und Albert W. Tucker 1951.

ist. Wegen der Linearität der Restriktion ist für $\hat{x}, x \in N_g$ auch jeder Zwischenpunkt $t\hat{x} + (1-t)x \in N_g$, $t \in (0, 1)$:

$$A(t\hat{x} + (1-t)x) - b = tA\hat{x} + (1-t)Ax - b = tb + (1-t)b - b = 0.$$

Gäbe es ein lokales Minimum $\hat{x} \in N_g$ sowie einen weiteren Punkt $x \in N_g$ mit $x \neq \hat{x}$ und $f(x) < f(\hat{x})$, so ergäbe sich mit der strikten Konvexität von f :

$$f(t\hat{x} + (1-t)x) < tf(\hat{x}) + (1-t)f(x) \leq f(\hat{x}), \quad 0 < t < 1,$$

d. h.: Der Punkt \hat{x} kann kein lokales Minimum sein, ein Widerspruch.

ii) Als nächstes zeigen wir, dass eine Lösung des KKT-Systems eindeutig ist. Für zwei Lösungen $(\hat{x}, \hat{\lambda})^T$ und $(\hat{x}', \hat{\lambda}')^T$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla(f(\hat{x}) - f(\hat{x}')) - (\hat{\lambda} - \hat{\lambda}')^T \cdot A &= 0, \\ A(\hat{x} - \hat{x}') &= 0. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\hat{x} - \hat{x}'$ von rechts und der zweiten mit $\hat{\lambda} - \hat{\lambda}'$ von links und Addition der Resultate ergibt

$$\nabla(f(\hat{x}) - f(\hat{x}')) \cdot (\hat{x} - \hat{x}') = 0.$$

Wegen der strikten Konvexität von $f(\cdot)$ impliziert dies, dass $\hat{x} = \hat{x}'$. Also gilt

$$A^T(\hat{\lambda} - \hat{\lambda}') = 0,$$

was wegen $\text{Rang}(A) = m$ auch $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}'$ impliziert.

iii) Schließlich sei nun $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ eine Lösung des KKT-Systems. Dann ist $\hat{x} \in N_g$ und es gilt:

$$\nabla f(\hat{x}) - \hat{\lambda}^T \cdot A = 0.$$

Also verschwindet der Gradient der konvexen Funktion

$$\psi(x) := L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T \cdot (Ax - b)$$

für $\hat{\lambda}$ im Punkt \hat{x} . Folglich hat $\psi(\cdot)$ wegen der Beziehung (4.3.31) für konvexe Funktionen in \hat{x} ein Minimum, d. h.: Für alle Punkte $x \in N_g$ gilt

$$f(\hat{x}) = \psi(\hat{x}) + \hat{\lambda}^T \cdot (A\hat{x} - b) = \psi(\hat{x}) \leq \psi(x) = \psi(x) + \hat{\lambda}^T \cdot (Ax - b) = f(x).$$

Also ist \hat{x} ein Minimum von f auf N_g , d. h. Lösung der Aufgabe (4.3.24). Q.E.D.

Bemerkung 4.5: Der obige Lösungsansatz für Optimierungsprobleme mit Gleichungsnebenbedingungen wird „Euler-Lagrange-Formalismus“ (oder auch „indirekte“ Lösungsmethode) genannt. Im Gegensatz dazu wird bei der „direkten“ Lösungsmethode z. B. im Fall $m = 1$ die Nebenbedingung $g(x) = 0$ explizit etwa nach $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ aufgelöst und dann die reduzierte, unrestringierte Optimierungsaufgabe

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) \rightarrow \min.$$

gelöst. In der Praxis ist diese explizite Auflösung aber häufig schwierig, so dass die indirekte Methode trotz der damit verbundenen Dimensionserhöhung verwendet wird.

Beispiel 4.3: Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $a(\cdot)$ die zugehörige quadratische Form

$$a(x) := (x, Ax)_2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Wir wollen die Extrema von $a(x)$ unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$ bestimmen. Wir definieren:

$$g(x) := \|x\|_2^2 - 1, \quad N_g := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}.$$

Wegen $\nabla g(x) = 2x$ ist $\nabla g(x) \neq 0$ für $x \in N_g$. Weiter gilt wegen $a_{ij} = a_{ji}$:

$$\begin{aligned} \partial_k a(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \delta_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = 2 \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i. \end{aligned}$$

In kompakter Schreibweise heißt dies $\nabla a(x) = 2Ax$. Auf der kompakten Menge N_g nimmt die stetige Funktion a ihr Maximum an. Nach Satz 4.3 gibt es ein $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$, so dass

$$A\hat{x} = \hat{\lambda}\hat{x}.$$

Dies bedeutet, dass $\hat{\lambda}$ Eigenwert der Matrix A mit dem Eigenvektor \hat{x} ist. Wegen

$$a(\hat{x}) = (\hat{x}, A\hat{x})_2 = (\hat{x}, \hat{\lambda}\hat{x})_2 = \hat{\lambda}$$

wird das Minimum bei einem Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert λ_{\min} angenommen. Für diesen gilt dann offenbar

$$\lambda_{\min} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{(x, Ax)_2}{\|x\|_2^2},$$

d. h. er ist charakterisiert als das Minimum des sog. „Rayley-Quotienten“

$$R(x) := \frac{(x, Ax)_2}{\|x\|_2^2}$$

der Matrix A auf \mathbb{R}^n . Analog sieht man, dass der maximale Eigenwert λ_{\max} entsprechend als das Maximum des Rayley-Quotienten charakterisiert ist.

4.4 Die primalen/dualen Barriereprobleme („zentraler Pfad“)

Wir kommen jetzt zum Nachweis der Existenz des „zentralen Pfads“ $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)^T$. Dazu verwenden wir eine „Barriere-Technik“ zur Behandlung der Ungleichungsnebenbedingungen $x, z \geq 0$. Für den parameter $\mu > 0$ führen wir die folgenden „Barriere-Formulierungen“ der linearen Programme (II) und (II^*) ein:

$$\begin{aligned} (II_\mu) \quad x \in \mathbb{R}^n : \quad Q_\mu(x) &:= c^T \cdot x - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \rightarrow \min!, \\ Ax &= b, \quad x > 0. \end{aligned}$$

$$(II_\mu^*) \quad y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n : \quad Q_\mu(y, z) := b^T \cdot y + \mu \sum_{i=1}^n \log(z_i) \rightarrow \max!$$

$$A^T y + z = c, \quad z > 0.$$

Lemma 4.2: Sei $\text{Rang}(A) = m$ und $\mu > 0$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Das primale Barriere-Problem (II_μ) besitzt eine (eindeutige) Lösung x_μ .
- b) Das duale Barriere-Problem (II_μ^*) besitzt eine (eindeutige) Lösung (y_μ, z_μ) .
- c) Das primal-duale Problem (4.1.8) besitzt eine (eindeutige) Lösung (x_μ, y_μ, z_μ) , d. h.: Es existiert ein „zentraler Pfad“. Dabei stimmen die Lösungskomponenten x_μ mit der Lösung unter (a) und (y_μ, z_μ) mit der Lösung unter (b) überein.

Beweis: i) (a) \Leftrightarrow (c): Die Zielfunktion in (II_μ) ist strikt konvex (Übungsaufgabe), und die Ungleichung $x > 0$ aufgrund des Logarithmus immer erfüllt. Also ist gemäß Korollar 4.1 \hat{x} genau dann eine Lösung des primalen Barriere-Problems, wenn ein \hat{y}_μ existiert, so dass die KKT-Bedingungen in $(x, y) = (\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu)$ erfüllt sind:

$$0 = \begin{pmatrix} \nabla f(x) - y^T \cdot \nabla g(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - \mu X^{-1}e - A^T y \\ Ax - b \end{pmatrix}. \quad (4.4.32)$$

Mit $z := \mu X^{-1}e > 0$ erfüllt das Tripel (x, y, z) die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4.33)$$

sowie die Vorzeichenbedingung $x > 0, z > 0$.

ii) Das Argument für (b) \Leftrightarrow (c) ist ähnlich (Übungsaufgabe).

Q.E.D.

Lemma 4.3: Ist die strikt zulässige Menge Ω_0 für das primal-duale Problem nicht leer, so besitzt das primale Barriere-Problem (II_μ) für jedes $\mu > 0$ eine (im Fall $\text{Rang}(A) = m$ eindeutige) Lösung \hat{x}_μ .

Beweis: Sei $\mu > 0$ fest gewählt und $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \Omega_0$ gegeben. Die Menge

$$K_\mu := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0, Q_\mu(x) \leq Q_\mu(\hat{x})\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. Die Abgeschlossenheit ist klar. Zum Nachweis der Beschränktheit schreiben wir für $x \in K_\mu$:

$$\begin{aligned}
Q_\mu(x) &= c^T \cdot x - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\
&= c^T \cdot x - \hat{y}^T \cdot (Ax - b) - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\
&= c^T \cdot x - x^T \cdot A^T \hat{y} + b^T \cdot \hat{y} - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\
&= c^T \cdot x - x^T \cdot (c - \hat{z}) + b^T \cdot \hat{y} - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\
&= x^T \cdot \hat{z} + b^T \cdot \hat{y} - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i).
\end{aligned}$$

Mit $Q_\mu(x) \leq Q_\mu(\hat{x})$ folgt

$$x^T \cdot \hat{z} + b^T \cdot \hat{y} - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \leq Q_\mu(\hat{x}),$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^n (\hat{z}_i x_i - \mu \log(x_i)) \leq Q_\mu(\hat{x}) - b^T \cdot \hat{y}.$$

Die Funktionen $\varphi(x_i) := \hat{z}_i x_i - \mu \log(x_i)$ sind nach unten beschränkt. Daher erfüllen alle $x \in K_\mu$ notwendig $x > 0$, obwohl in der Definition nur $x \geq 0$ gefordert wird. Also ist K_μ beschränkt. Auf der kompakten Menge K_μ nimmt die stetige Funktion $Q_\mu(\cdot)$ ihr Minimum in einem Punkt $\hat{x}_\mu \in K_\mu$ an. Dieser ist dann Lösung des primalen Barriere-Problems (II_μ) . Q.E.D.

Beispiel 4.4: Wir betrachten das lineare Programm

$$(II) \quad x \in \mathbb{R}^2 : \quad (1, 0) \cdot (x_1, x_2)^T \rightarrow \min! \quad x \geq 0, \quad (1, -1)(x_1, x_2) = 1,$$

und das zugehörige duale Problem

$$(II^*) \quad y \in \mathbb{R}^1 : \quad y \rightarrow \max! \quad (1, -1)^T y \leq (1, 0)^T.$$

Die Optimallösungen sind offenbar $\hat{x} = (1, 0)^T$ und $\hat{y} = 1$. Als Lösungen der zugehörigen regularisierten Aufgaben (II_μ) und (II_μ^*) haben wir

$$\begin{aligned}
\hat{x}_\mu &= \left(\mu + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4\mu^2 + 1}), \mu + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4\mu^2 + 1}) \right)^T, \\
\hat{y}_\mu &= -\mu - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4\mu^2 + 1})
\end{aligned}$$

In diesem Fall konvergiert offenbar $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ für $\mu \rightarrow 0$.

Die im vorausgehenden Beispiel realisierte Situation tritt auch in allgemeinerem Zusammenhang auf. Dazu beweisen wir den folgenden Satz über die Existenz und Konvergenz des „zentralen Pfads“.

Satz 4.4 (Existenz des „zentralen Pfads“): *Die strikt zulässige Menge Ω_0 für das primal-duale Problem sei nichtleer. Dann gilt:*

- i) *Das primal-duale Problem (4.1.8) besitzt für jedes $\mu > 0$ eine Lösung $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)$.*
- ii) *Die Lösungskomponenten \hat{x}_μ und \hat{z}_μ sind eindeutig bestimmt. Im Fall $\text{Rang}(A) = m$ ist auch die Lösungskomponente \hat{y}_μ eindeutig bestimmt.*
- iii) *Hat das ursprüngliche (nicht regularisierten) primal-duale Problem (KKT-System) eine eindeutige Lösung $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, so konvergieren die eindeutigen Lösungen $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)$ der regularisierten primal-duale Probleme gegen diese Lösung. Im allgemeinen Fall kann nur die Konvergenz einer Teilfolge der $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)$ gegen eine (nicht notwendig eindeutige) Lösung des KKT-Systems erwartet werden.*

Beweis: i) Da Ω_0 nichtleer ist, besitzt das primale Barriere-Problem (II_μ) für jedes $\mu > 0$ eine Lösung \hat{x} . Daher besitzen nach Lemma 4.2 auch das primal-duale Problem eine Lösung $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)$, wobei die x -Komponente mit der Lösung von (II_μ) zusammenfällt.

ii) Da das primale Barriere-Problem strikt konvex ist, ist \hat{x}_μ eindeutig bestimmt. Mit $\hat{x}_{\mu,i} \hat{z}_{\mu,i} = \mu n$, $i = 1, \dots, n$, ist auch \hat{z} eindeutig bestimmt. Ist zusätzlich $\text{Rang}(A) = m$, so ist auch \hat{y} durch $A^T \hat{y}_\mu + \hat{z}_\mu = c$ festgelegt.

iii) Der Beweis wird als Übungsaufgabe gestellt.

Q.E.D.

4.5 Realisierung der primal-dualen Innere-Punkte-Methode

Die primal-duale Innere-Punkte-Methode besteht im Wesentlichen aus der Anwendung des Newton-Verfahrens auf das gekoppelte nichtlineare regularisierte KKT-System

$$\begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5.34)$$

Dieser Lösungsansatz ist wesentlich robuster als die separate Lösung der regularisierten Optimierungsaufgaben (II_μ) und (II_μ^*) für immer kleinere $\mu > 0$.

Für einen geeigneten, zulässigen Startwert $(x^0, y^0, z^0) \in \Omega_0$ wird eine Folge von Iterierten $(x^t, y^t, z^t) \in \Omega_0$, $t \geq 1$, erzeugt durch die Vorschriften:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z^t & 0 & X^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x^t \\ \delta y^t \\ \delta z^t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax^t - b \\ A^T y^t + z^t - c \\ X^t Z^t e - \tau_t e \end{pmatrix} \quad (4.5.35)$$

und

$$(x^{t+1}, y^{t+1}, z^{t+1}) = (x^t, y^t, z^t) + \lambda_t(\delta x^t, \delta y^t, \delta z^t). \quad (4.5.36)$$

wobei der verwendete Regularisierungsparameter τ_t auf Basis der Dualitätslücke der vorgehenden Newton-Iterierten gewählt wird gemäß

$$\tau_t := \sigma_t \mu_t = \sigma_t \frac{x^{tT} \cdot z^t}{n}, \quad \sigma_t \in (0, 1]. \quad (4.5.37)$$

Die Wahl von σ_t erfolgt in der Praxis nach heuristischen Kriterien, z. B.: $\sigma_t = 0,5$. Der Dämpfungsparameter λ_t ist so zu wählen, dass im Newton-Schritt die Zulässigkeit der nächsten Iterierten erhalten bleibt, d. h.:

$$x^{t+1} = x^t + \lambda_t \delta x^t > 0, \quad z^{t+1} = z^t + \lambda_t \delta z^t > 0. \quad (4.5.38)$$

Ist für eine vorgegebene Toleranz $\varepsilon > 0$

$$\mu_t := \frac{x^t \cdot z^t}{n} \leq \varepsilon, \quad (4.5.39)$$

erreicht, so wird die Iteration abgebrochen.

Wenn der Startvektor zulässig gewählt wird, d. h. $(x^0, y^0, z^0)^T \in \Omega_0$, bleiben offenbar während der gesamten Iteration die ersten beiden (linearen) Gleichungen erfüllt,

$$Ax^t = b, \quad A^T y^t + z^t = c,$$

und die Newton-Korrektur wirkt nur auf die dritte (nichtlineare) Gleichung. Das Korrektursystem (4.5.35) erhält damit die vereinfachte Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x^t \\ \delta y^t \\ \delta z^t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^t Z^t e - \tau_t e \end{pmatrix}. \quad (4.5.40)$$

Bemerkung 4.6: Diese Innere-Punkte-Methode wird als „zulässig“ bezeichnet, da nach Konstruktion alle Iterierte im zulässigen Bereich Ω_0 bleiben. Je nach Wahl der Verfahrensparameter $\varepsilon, \sigma_t, \lambda_t$ erhält man unterschiedliche Realisierungen des Verfahrens. Varianten des Verfahrens, bei denen nicht notwendig $(x^t, y^t, z^t) \in \Omega_0$, ist, die aber trotzdem konvergieren können, werden „unzulässig“ genannt. Die zulässigen primal-dualen Innere-Punkte-Verfahren sind von eher historischer Bedeutung. Die unzulässigen primal-dualen Innere-Punkte-Verfahren haben sich in der Praxis durchgesetzt. Andererseits sind die Resultate verfügbarer Konvergenzanalysen nach wie vor eher pessimistisch. Einen kleinen Eindruck hiervon erhält man in Chapter 6 bei S. J. Wright (1987).

Die Parameter im Newton-Verfahren werden in der Regel so gewählt, dass die Iteriertenfolge $(x^t, y^t, z^t) \in \Omega_0$ als Approximation des zentralen Pfades in einer der beiden folgenden „Pfadumgebungen“ liegen:

$$N_2(\theta) := \{(x, y, z) \in \Omega_0 \mid \|XZe - \mu(x, z)e\|_2 \leq \theta \mu(x, z)\}, \quad \theta \in (0, 1),$$

$$N_{-\infty}(\gamma) := \{(x, y, z) \in \Omega_0 \mid \min_{i=1, \dots, n} x_i z_i \geq \gamma(x^T \cdot z)/n\}, \quad \gamma \in (0, 1),$$

wobei $\mu(x, z) := x^T \cdot z/n$. Die Bedingung $(x^t, y^t, z^t) \in N_2(\theta)$ ist in der Praxis meist zu restriktiv und erfordert sehr gute Startwerte. Die Wahl von $N_{-\infty}(\gamma)$ als Pfadumgebung ist weniger einschränkend. Dies ersieht man aus den folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} \|XZe - \mu(x, z)e\|_2 \leq \theta\mu(x, z) &\Rightarrow \min_{i=1, \dots, n} |x_i z_i - \mu(x, z)| \leq \theta\mu(x, z) \\ \Rightarrow \mu(x, z) - \min_{i=1, \dots, n} x_i z_i \leq \theta\mu(x, z) &\Rightarrow \min_{i=1, \dots, n} x_i z_i \geq (1 - \theta)\mu(x, z), \end{aligned}$$

d. h.: Ein Punkt $(x, y, z) \in N_2(\theta)$ ist automatisch auch in $N_{-\infty}(\gamma)$ für $\gamma := 1 - \theta$.

Die Innere-Punkte-Methode, die sich der Pfadumgebung $N_2(\theta)$ bedient, führt auf den folgenden sog. „Kurz-Schritt-Algorithmus“:

Algorithmus 1 (Kurz-Schritt-Algorithmus):

1. Wähle $\theta := 0,4$, $\sigma := 1 - 0,4/\sqrt{n}$ und $\varepsilon > 0$. Bestimme sei ein $(x^0, y^0, z^0) \in N_2(\theta)$. Setze $t := 0$.
2. Gilt für die Dualitätslücke $\mu_t = x^{tT} \cdot z^t/n \leq \varepsilon$, dann STOP.
3. Setze $\tau_t := \sigma\mu_t$ und bestimme eine Korrektur $(\delta x^t, \delta y^t, \delta z^t)$ durch Lösung der Newton-Gleichung

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z^t & 0 & X^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x^t \\ \delta y^t \\ \delta z^t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X^t Z^t e - \tau_t e \end{bmatrix}.$$

4. Setze $(x^{t+1}, y^{t+1}, z^{t+1}) := (x^t, y^t, z^t) + (\delta x^t, \delta y^t, \delta z^t)$ (voller Newton-Schritt), $t := t + 1$ und gehe zu Schritt (2).

Der folgende Satz zum Kurz-Schritt-Algorithmus besagt u. a., dass dual-primale Innere-Punkte-Methoden bei geeigneter Wahl der Verfahrensparameter konvergieren und (im Gegensatz zum Simplex-Verfahren) von nur polynomialer Komplexität sind.

Satz 4.5: Sei $(x^0, y^0, z^0) \in N_2(\theta)$ für ein $\theta \in (0, 1)$. Dann erzeugt der Kurz-Schritt-Algorithmus eine Folge von Iterierten $(x^t, y^t, z^t) \in N_2(\theta)$. Für beliebig kleines $\varepsilon \in (0, 1)$ existiert ein $t_\varepsilon = \mathcal{O}(\sqrt{n} \log(1/\varepsilon))$, so dass

$$\mu_t \leq \varepsilon\mu_0, \quad t \geq t_\varepsilon. \quad (4.5.41)$$

In diesem Sinne konvergiert diese Innere-Punkte-Methode also für $t \rightarrow \infty$. In jedem Iterationsschritt sind höchstens $\mathcal{O}(n^3)$ a. Op. erforderlich, so dass der Kurz-Schritt-Algorithmus von polynomialer Gesamtkomplexität ist.

Beweis: Der Beweis ist sehr technisch und verläuft ähnlich wie des des nachfolgenden Satzes zum „Lang-Schritt-Algorithmus“; er wird deswegen weggelassen. Q.E.D.

Wie vorher schon gesagt, stellt der Kurz-Schritt-Algorithmus zu hohe Anforderungen an die Qualität der Startwerte, so dass in der Praxis eine „Lang-Schritt-Variante“ basierend auf der Pfadumgebung $N_{-\infty}(\gamma)$ vorgezogen wird.

Algorithmus 2 (Lang-Schritt-Algorithmus):

1. Wähle $\varepsilon > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ und $0 < \sigma_* < \sigma^* < 1$. Bestimmt sei ein $(x^0, y^0, z^0) \in N_{-\infty}(\gamma)$. Setze $t := 0$.
2. Gilt für die Dualitätslücke $\mu_t = x^{tT} \cdot z^t/n \leq \varepsilon$, dann STOP.
3. Wähle $\sigma_t \in [\sigma_*, \sigma^*]$. Setze $\tau_t := \sigma_t \mu_t$ und bestimme eine Korrektur $(\delta x^t, \delta y^t, \delta z^t)$ durch Lösung der Newton-Gleichung

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z^t & 0 & X^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x^t \\ \delta y^t \\ \delta z^t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X^t Z^t e - \tau_t e \end{bmatrix}.$$

4. Bestimme ein größtmögliches $\lambda_t \in (0, 1]$, so dass

$$(x^{t+1}, y^{t+1}, z^{t+1}) := (x^t, y^t, z^t) + \lambda_t (\delta x^t, \delta y^t, \delta z^t) \in N_{-\infty}(\gamma).$$

5. Setze $(x^{t+1}, y^{t+1}, z^{t+1}) := (x^t, y^t, z^t) + \lambda_t (\delta x^t, \delta y^t, \delta z^t)$ (gedämpfter Newton-Schritt), $t := t + 1$ und gehe zu Schritt (2).

Bemerkung 4.7: Die Bezeichnungen „Kurz-Schritt-Algorithmus“ und „Lang-Schritt-Algorithmus“ haben sich eingebürgert wegen der unterschiedlich schnellen Reduktion des Parameters σ_t in der Regularisierung τ_t , d. h.: $\sigma_t \approx 1 - 1/\sqrt{n}$ beim Kurz-Schritt-Algorithmus und $\sigma_t \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ beim Lang-Schritt-Algorithmus. Das bezieht sich nicht auf die „Schrittlänge“ im verwendeten Newton-Verfahren, die beim Kurz-Schritt-Algorithmus sogar „länger“ ist.

Satz 4.6: Sei $(x^0, y^0, z^0) \in N_{-\infty}(\gamma)$ für ein $\gamma \in (0, 1)$. Dann erzeugt der Lang-Schritt-Algorithmus (konstruktionsgemäß) eine Folge von Iterierten $(x^t, y^t, z^t) \in N_{-\infty}(\gamma)$. Für beliebig kleines $\varepsilon \in (0, 1)$ existiert ein $t_\varepsilon = \mathcal{O}(n \log(1/\varepsilon))$, so dass

$$\mu_t \leq \varepsilon \mu_0, \quad t \geq t_\varepsilon. \quad (4.5.42)$$

In jedem Iterationsschritt sind höchstens $\mathcal{O}(n^3)$ a. Op. erforderlich, so dass auch der Lang-Schritt-Algorithmus von polynomialer Gesamtkomplexität ist.

Beweis: i) Wir betrachte einen Newton-Schritt $t \rightarrow t + 1$ und lassen den Iterationsparameter t weg. Unter Verwendung von $A\delta x = 0$, $A^T\delta y + \delta z = 0$, $Ax = b$ und $A^T y + z = c$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
c^T \cdot (x + \lambda \delta x) - b^T \cdot (y + \lambda \delta y) &= c^T \cdot x - b^T \cdot y + \lambda \underbrace{(c - A^T y)^T}_{=0} \delta x - \lambda \underbrace{(Ax)^T}_{=b} \delta y \\
&= c^T \cdot x - b^T \cdot y + \lambda \underbrace{(c - A^T y)^T}_{=z^T} \delta x - \lambda x^T \cdot A^T \delta y \\
&= c^T \cdot x - b^T \cdot y + \lambda e^T (Z \delta x - X A^T \delta y) \\
&= c^T \cdot x - b^T \cdot y + \lambda e^T (Z \delta x + X \delta z - X \underbrace{(\delta z + A^T \delta y)}_{=0}) \\
&= c^T \cdot x - b^T \cdot y + \lambda e^T (\tau e - X Z e) \\
&= c^T \cdot x - b^T \cdot y + \lambda \tau n - \lambda x^T \cdot z \\
&= c^T \cdot x - b^T \cdot y + \lambda \sigma (c^T \cdot x - b^T \cdot y) - \lambda (c^T \cdot x - b^T \cdot y) \\
&= (1 - \lambda(1 - \sigma))(c^T \cdot x - b^T \cdot y),
\end{aligned}$$

wobei die Beziehung $\tau n = \sigma(c^T \cdot x - b^T \cdot y)$ verwendet wurde. Die Dualitätslücke verändert sich also in jedem Newton-Schritt gemäß

$$\mu_{t+1} = (1 - \lambda_t(1 - \sigma_t))\mu_t, \quad t \geq 0. \quad (4.5.43)$$

ii) Eine genauere Analyse der Newton-Konvergenz ergibt die Notwendigkeit der Wahl $\lambda_t = \mathcal{O}(1/n)$ zur Erzwingung der Eigenschaft $(x^t, y^t, z^t) \in N_{-\infty}(\gamma)$ und damit insbesondere $(x^t, z^t) > 0$. Wegen der speziellen Wahl von $\sigma_t \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ im Algorithmus impliziert dies dann die Behauptung. Hierzu benötigen wir eine Reihe von Zwischenresultaten, die im Folgenden in Hilfssätzen zusammengefasst werden.

Zunächst bemerken wir, dass wegen der Zulässigkeit des Startvektors $(x^0, y^0, z^0) \in N_{-\infty}(\gamma)$ auch alle weiteren Iterierte $(x^t, y^t, z^t) \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ automatisch die linearen Restriktionen

$$Ax^t = b, \quad A^T y^t + z^t = c, \quad t \geq 1, \quad (4.5.44)$$

erfüllen (Übungsaufgabe). Ferner folgt aufgrund der Wahl von $\lambda_t \in (0, 1]$ im Algorithmus für $(x^t, z^t) > 0$ auch stets

$$(x^{t+1}, z^{t+1}) = (x^t, z^t) + \lambda_t(\delta x^t, \delta z^t) > 0, \quad (4.5.45)$$

d. h.: per Induktion $(x^t, z^t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Wir kommen nun zu den angekündigten Hilfssätzen.

Hilfssatz 4.1: Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei orthogonale Vektoren, $u^T \cdot v = 0$. Dann gilt:

$$\|UVe\|_2 \leq 2^{-3/2} \|u + v\|_2^2, \quad (4.5.46)$$

wobei wieder $U := \text{diag}(u_i)$, $V := \text{diag}(v_i)$ und $e := (1, \dots, 1)^T$.

Beweis: (Details Übungsaufgabe) Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ergibt sich für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ab \geq 0$:

$$\sqrt{|ab|} \leq \frac{1}{2}|a + b|. \quad (4.5.47)$$

Aus $u^T \cdot v \geq 0$ folgt

$$0 \leq u^T \cdot v = \sum_{u_i v_i \geq 0} u_i v_i + \sum_{u_i v_i < 0} u_i v_i = \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| - \sum_{i \in \mathcal{M}} |u_i v_i|, \quad (4.5.48)$$

mit der (disjunkten) Zerlegung $\mathcal{P} := \{i \in I_n \mid u_i v_i \geq 0\}$, $\mathcal{M} := \{i \in I_n \mid u_i v_i < 0\}$ der Indexmenge $I_n := \{1, \dots, n\}$. Damit ergibt sich dann die Abschätzungskette

$$\begin{aligned} \|UVe\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |u_i v_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i|^2 + \sum_{i \in \mathcal{M}} |u_i v_i|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\left(\sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| \right)^2 + \left(\sum_{i \in \mathcal{M}} |u_i v_i| \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2 \left(\sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| \right)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{2} \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| \quad (\text{wegen (4.5.48)}) \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{i \in \mathcal{P}} \frac{1}{4} |u_i + v_i|^2 = 2^{-3/2} \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i + v_i|^2 \quad (\text{wegen (4.5.47)}) \\ &\leq 2^{-3/2} \sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^2 = 2^{-3/2} \|u + v\|_2^2. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung.

Q.E.D.

Hilfssatz 4.2: Für jeden Vektor $(x, y, z) \in N_{-\infty}(\gamma)$ gilt:

$$\|\delta X \delta Z e\|_2 \leq 2^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mu(x, z) n, \quad (4.5.49)$$

wobei wieder $\mu(x, z) := x^T \cdot z / n$.

Beweis: Aus der Newton-Gleichung (4.5.40) folgt $A \delta x = 0$ und $A^T \delta y + \delta z = 0$, was wiederum impliziert, dass

$$\delta x^T \cdot \delta z = -\delta x^T \cdot A^T \delta y = -A \delta x \cdot \delta y = 0.$$

Die dritte Gleichung in (4.5.40),

$$Z \delta x + X \delta z = -X Z e + \tau e,$$

wird nun mit $(XZ)^{-1/2}$ multipliziert. Mit der Matrix $D := X^{1/2} Z^{-1/2}$ ergibt sich

$$D^{-1} \delta x + D \delta z = (XZ)^{-1/2} (-X Z e + \tau e). \quad (4.5.50)$$

Da $(D^{-1}\delta x)^T \cdot (D\delta z) = \delta x^T \cdot \delta z = 0$ gilt, kann Hilfssatz 4.1 auf die Vektoren $u := D^{-1}\delta x$ und $v := D\delta z$ angewendet werden:

$$\begin{aligned} \|\delta X \delta Z e\|_2 &= \|(D^{-1}\delta x)(D\delta z)e\|_2 \\ &\leq 2^{-3/2} \|D^{-1}\delta x + D\delta z\|_2^2 \quad (\text{mit Hilfssatz 4.1}) \\ &= 2^{-3/2} \|(XZ)^{-1}(-XZe + \tau e)\|_2^2 \quad (\text{mit Gleichung (4.5.50)}). \end{aligned}$$

Wegen $x^T \cdot z = \mu(x, z)n =: \mu n$ ergibt sich dann die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \|\delta X \delta Z e\|_2 &\leq 2^{-3/2} \|(XZ)^{-1}(-XZe + \tau e)\|_2^2 \\ &= 2^{-3/2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_i z_i}} (-x_i z_i + \tau) \right)^2 \\ &= 2^{-3/2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i z_i} (x_i^2 z_i^2 - 2x_i z_i \tau + \tau^2) \\ &= 2^{-3/2} \left(x^T \cdot z - 2n\tau + \tau^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i z_i} \right) \\ &\leq 2^{-3/2} \left(x^T \cdot z - 2n\tau + \tau^2 \frac{n}{\gamma\mu} \right) \quad (\text{da } x_i z_i \geq \gamma\mu) \\ &= 2^{-3/2} \left(1 - 2\sigma + \frac{\sigma^2}{\gamma} \right) \mu n \quad (\text{da } \tau = \sigma\mu = \sigma x^T \cdot z/n) \\ &\leq 2^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mu n. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung.

Q.E.D.

Hilfssatz 4.3: Für die im Algorithmus erzeugte Folge der Schrittweiten λ_t gilt

$$\lambda_t \geq \lambda_* := 2^{3/2} \gamma \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \frac{\sigma_*}{n}, \quad t \geq 0. \quad (4.5.51)$$

Beweis: Die dritte Newton-Gleichung lautet (Iterationsindex t unterdrückt und $\mu := \mu(x, z)$ gesetzt):

$$Z\delta x + X\delta z = \sigma\mu e - XZe. \quad (4.5.52)$$

Mit Hilfssatz 4.2 folgt

$$|\delta x_i \delta z_i| \leq 2^{-3/2} (1 + 1/\gamma) \mu n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5.53)$$

Für $(x, y, z,)^T \in N_{-\infty}(\gamma)$ gilt definitionsgemäß $x_i z_i \geq \gamma\mu$ und damit

$$\begin{aligned} (x_i + \lambda \delta x_i)(z_i + \lambda \delta z_i) &= x_i z_i + \lambda(x_i \delta z_i + z_i \delta x_i) + \lambda^2 \delta x_i \delta z_i \\ &\geq x_i z_i (1 - \lambda) + \lambda \sigma_t \mu - \lambda^2 |\delta x_i \delta z_i| \quad (\text{wegen (4.5.52)}) \\ &\geq \gamma\mu (1 - \lambda) + \lambda \sigma_t \mu - \lambda^2 2^{-3/2} (1 + 1/\gamma) \mu n \quad (\text{wegen (4.5.53)}). \end{aligned}$$

Wir führen jetzt wieder den Iterationsindex t ein. Damit garantiert $(x^{t+1}, y^{t+1}, z^{t+2})^T \in N_{-\infty}(\gamma)$ ist, sollte also unter Beachtung von (4.5.43) gelten:

$$\gamma\mu_t(1-\lambda) + \lambda\sigma_t\mu_t - \lambda^2 2^{-3/2}(1+1/\gamma)\mu_t n \geq \gamma\mu_{t+1} = \gamma(1-\lambda(1-\sigma_t))\mu_t,$$

bzw.

$$\gamma(1-\lambda) + \lambda\sigma_t - \lambda^2 2^{-3/2}(1+1/\gamma)n \geq \gamma(1-\lambda(1-\sigma_t)).$$

Dies ist erfüllt für (nachrechnen)

$$\lambda \leq \lambda_* := 2^{3/2}\gamma \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \frac{\sigma_*}{n}.$$

Also gilt bei Verwendung einer Schrittweite $\lambda \leq \lambda_*$ im Newton-Schritt:

$$x_i^{t+1} z_i^{t+1} \geq \gamma\mu_{t+1} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Für $\lambda = 0$ ist nach Voraussetzung $(x, z) > 0$. Wegen der stetigen Abhängigkeit von $(x(\lambda), z(\lambda))$ von λ und $x_i(\lambda)z_i(\lambda) > 0$ für $\lambda \in [0, \lambda_*]$ muss also für solche λ auch $(x(\lambda), z(\lambda)) > 0$ sein. Folglich ist $(x^{t+1}, y^{t+1}, z^{t+1})^T \in N_{-\infty}(\gamma)$ für Schrittweiten $\lambda \leq \lambda_*$. Da $\lambda_t \in (0, 1]$ als größtmögliche Schrittweite mit dieser Eigenschaft definiert ist, folgt $\lambda_t \geq \lambda_*$. Q.E.D.

Nach diesen Vorbereitungen, können wir jetzt den Beweis des Satzes vervollständigen. Mit der Ungleichung (4.5.51) erhalten wir

$$\lambda_t(1-\sigma_t) \geq 2^{3/2}\gamma \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \frac{\sigma_*}{n} (1-\sigma^*) =: \frac{\delta}{n}.$$

Somit folgt

$$x^{t+1T} \cdot z^{t+1} \leq (1-\lambda_t(1-\sigma_t))x^T \cdot z^t \leq \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)x^T \cdot z^t,$$

was den Beweis vervollständigt. Q.E.D.

Die betrachteten Innere-Punkte-Verfahren brechen mit einer Iterierten (x^t, y^t, z^t) ab, die zulässig ist mit einer ausreichend kleinen Dualitätslücke. In diesem Sinne ist der Punkt (x^t, y^t, z^t) als Näherungslösung der primal-dualen Optimierungsaufgabe zu verstehen. Tatsächlich sagt die Dualitätslücke nichts darüber aus, ob (x^t, y^t, z^t) wirklich „nahe“ an der optimalen Lösung des Ausgangsproblems am Rande von Ω liegt. Dies wird qualitativ durch folgenden Satz belegt.

Satz 4.7: *Die von der Innere-Punkte-Methode erzeugte Folge von Iterierten (x^t, y^t, z^t) besitzt mindestens einen Häufungspunkt $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ und jeder dieser Häufungspunkte ist eine Optimallösung der primal-dualen Aufgabe (KKT-System).*

Beweis: Nach dem oben Gezeigten ist das Polyeder

$$F := \{(x, y, z) \in \Omega \mid x^T \cdot z \leq x^{0T} \cdot z^0\}$$

kompakt. Da die Folge $(x^{tT} \cdot z^t)_{t \in \mathbb{N}}$ der Dualitätslücken monoton fällt (mit konstanter Rate), ist $(x^t, y^t, z^t) \in F$ und besitzt daher einen Häufungspunkt $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in F$. Für die zugehörige Teilfolge gilt dabei

$$\hat{x}^T \cdot \hat{z} = \lim_{t_i \rightarrow \infty} x^{t_i T} \cdot z^{t_i} = 0,$$

d. h.: $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ hat Dualitätslücke Null und ist folglich Optimallösung. Q.E.D.

4.5.1 Praktische Aspekte

Bei der Realisierung der Innere-Punkte-Methoden sind die folgenden Fragen zu klären:

1. Wie findet man geeignete Startwerte $(x^0, y^0, z^0) \in \Omega_0$?
2. Wie ist der Parameter $\sigma_t \in (0, 1]$ zu wählen?
3. Wie können die Korrektursysteme (4.5.35) effizient gelöst werden?
4. Wie ist der Dämpfungsparameter $\lambda_t \in (0, 1]$ zu wählen?

a) Die Konstruktion geeigneter Startwerte $(x^0, y^0, z^0) \in \Omega_0$ für Innere-Punkte-Methoden erfordert häufig eine aufwendige Vorlaufrechnung in Form von zusätzlich zu lösenden Optimierungsaufgaben. Wir betrachten die beiden linear/quadratischen Optimierungsaufgaben

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n : \quad & \frac{1}{2} x^T \cdot x \rightarrow \min! \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{4.5.54}$$

und

$$\begin{aligned} (y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : \quad & \frac{1}{2} z^T \cdot z \rightarrow \min! \\ & A^T y + z = c, \end{aligned} \tag{4.5.55}$$

deren Lösungen (x, y, z) man aus den folgenden (linearen) Gleichungen erhält:

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b, \quad y = (AA^T)^{-1} A c, \quad z = c - A^T y. \tag{4.5.56}$$

Diese Punkte erfüllen zwar konstruktionsgemäß die linearen Gleichungen aber nicht notwendig die Bedingung $(x, z) > 0$. Um dies zu korrigieren, setzen wir

$$x^0 := x + \delta_x e + \varepsilon_x e, \quad y^0 := y, \quad z^0 := z + \delta_z e + \varepsilon_z e.$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_x &:= \max \left(-\frac{3}{2} \min_i x_i, 0 \right), & \delta_z &:= \max \left(-\frac{3}{2} \min_i z_i, 0 \right), \\ \varepsilon_x &:= \frac{1}{2} \frac{\tilde{x}^T \cdot \tilde{z}}{e^T \cdot \tilde{z}}, & \varepsilon_z &:= \frac{1}{2} \frac{\tilde{x}^T \cdot \tilde{z}}{e^T \cdot \tilde{x}}. \end{aligned}$$

Diese Korrekturen bewirken, dass die Komponenten von x^0 und z^0 nicht zu nahe bei Null liegen und nicht zu verschieden sind.

b) Der Hauptaufwand bei der Anwendung des Newton-Verfahrens besteht in der Lösung der Korrekturgleichungen (mit unterdrücktem Iterationsparameter „ t “)

$$A\delta x = -(Ax - b), \quad A^T\delta y + \delta z = -(A^T y + z - c), \quad Z\delta x + X\delta z = -(XZe - \tau e).$$

Aus diesen Gleichungen können nacheinander zunächst δy , dann δx und schließlich δz berechnet werden. Mit der positiv definiten Diagonalmatrix $D := Z^{-1}X$ gilt:

$$\begin{aligned} ADA^T\delta y &= -AD(A^T y + z - c) - AD\delta z \\ &= -AD(A^T y + z - c) - AZ^{-1}X\delta z \\ &= -AD(A^T y + z - c) - AZ^{-1}(-Z\delta x - (XZe - \tau e)) \\ &= -AD(A^T y + z - c) - (Ax - b) + ADX^{-1}(XZe - \tau e) \\ &= -(Ax - b + AD((A^T y + z - c) - X^{-1}(XZe - \tau e))). \end{aligned}$$

Die Matrix ADA^T ist symmetrisch und wegen $\text{Rang}(A) = m$ positiv definit. Die Korrektur δy lässt sich also aus der Gleichung

$$ADA^T\delta y = -(Ax - b + AD((A^T y + z - c) - X^{-1}(XZe - \tau e))) \quad (4.5.57)$$

bestimmen. Anschließend werden die Korrekturen δx und δz aus den folgenden Gleichungen berechnet:

$$\delta z = -A^T\delta y - (A^T y + z - c), \quad (4.5.58)$$

$$\delta x = -D\delta z - Z^{-1}(XZe - \tau e). \quad (4.5.59)$$

Die Matrix $ADA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist zwar positiv definit aber i. Allg. selbst für dünn besetztes A vollbesetzt und häufig schlecht konditioniert. Zur stabilen Lösung des Systems (4.5.57) sind also spezielle Verfahren erforderlich, welche nicht den explizite Aufbau der Matrix ADA^T erfordern, z. B. die Verwendung einer QR -Zerlegung von A oder das CG-Verfahren.

Wenn der Startvektor zulässig gewählt wird, bleiben während der gesamten Iteration die ersten beiden (linearen) Gleichungen erfüllt,

$$Ax^t = b, \quad A^T y^t + z^t = c,$$

und die Newton-Korrektur wirkt nur auf die dritte (nichtlineare) Gleichung. Die Gleichungen (4.5.57) – (4.5.59) vereinfachen sich dann zu

$$ADA^T\delta y = X^{-1}(XZe - \tau e), \quad (4.5.60)$$

$$\delta z = -A^T\delta y, \quad (4.5.61)$$

$$\delta x = -D\delta z - Z^{-1}(XZe - \tau e). \quad (4.5.62)$$

4.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ sei die durch $D := \{y \in \mathbb{R}^n \mid A^T y \leq c\}$ definierte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit nichtleerem Inneren D^0 . Man zeige, dass die mit den Spaltenvektoren $a_i, i = 1, \dots, n$, von A und den Komponenten $c_i, i = 1, \dots, n$, von c gebildete Funktion

$$\Phi(y) := - \sum_{i=1}^n \ln(c_i - a_i^T \cdot y)$$

auf D^0 streng konvex ist und bei Annäherung an den Rand von D gegen unendlich strebt.

Aufgabe 4.2: Man verifiziere, dass die Jacobi-Matrix der durch

$$\Psi_0(x, y, z) := \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x, z > 0,$$

mit den $(n \times n)$ -Diagonalmatrizen $X := \text{diag}(x_i)$, $Z := \text{diag}(z_i)$ und dem n -Vektor $e := (1, \dots, 1)^T$ definierten Abbildung $\Psi_0(x, y, z) : M_0 \times M_0^* \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ die folgende Gestalt hat:

$$D\Psi_0(x, y, z) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4.3: Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ konvergiert das Newton-Verfahren lokal quadratisch gegen eine Nullstelle z . Man zeige, dass es für (nur) einmal stetig differenzierbare Funktionen immer noch „super-linear“ konvergiert,

$$\frac{\|x_{t+1} - z\|}{\|x_t - z\|} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

d. h.: Es ist asymptotisch schneller als die einfache Fixpunktiteration.

Aufgabe 4.4: Die Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist äquivalent zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Ax - \lambda x &= 0, \\ \|x\|_2^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

von $n + 1$ Gleichungen in den $n + 1$ Unbekannten x_1, \dots, x_n, λ .

a) Man gebe die Newton-Iteration zur Lösung dieses Gleichungssystems an.

b) Man führe zwei (oder bei Interesse auch mehr) Newton-Schritte durch für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

mit den Startwerten $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1.5$, $\lambda^0 = 3.5$. Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix und stelle fest, ob das Newton-Verfahren in diesem Fall quadratisch konvergiert.

Aufgabe 4.5: Man gebe das Newton-Verfahren für das regularisierte primal-duale System aus dem Text an:

$$\Psi_\mu(x, y, z) := \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ XZe - \mu e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x, z > 0.$$

Ist eins der üblichen iterativen Standardverfahren geeignet zur Lösung der in jedem Newton-Schritt auftretenden linearen Gleichungssysteme?

Aufgabe 4.6: Man beschreibe das Prinzip des Euler-Lagrange-Formalismus und wende diesen an zur Bestimmung der Maxima und Minima des Polynoms

$$f(x, y) = x - y$$

auf der Kreislinie $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 4.7: Die reelle Zahl $a > 0$ ist so in drei positive Summanden zu zerlegen, dass deren Produkt maximal ist. (Hinweis: Man formuliere dies als eine Optimierungsaufgabe mit Gleichungsrestriktion und benutze zu deren Lösung den Euler-Lagrange-Ansatz.)

Aufgabe 4.8: Man zeige, dass eine stetig differenzierbare, strikt konvexe Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$f(tx + (1-t)x') < tf(x) + (1-t)f(x'), \quad x, x' \in D, \quad 0 < t < 1,$$

notwendig einen strikt monotonen Gradienten besitzt, d. h.:

$$\nabla(f(x) - f(x'))^T \cdot (x - x') > 0, \quad x, x' \in D, \quad x \neq x'.$$

(Hinweis: Man leite die Beziehung $f(x') > f(x) + \nabla f(x) \cdot (x' - x)$ her und verwende diese zum Beweis der behaupteten Monotonieeigenschaft.)

Aufgabe 4.9: Im Text wurde die folgende Aussage bewiesen:

Sei $\text{Rang}(A) = m$ und $\mu > 0$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Das primale Barriere-Problem (II_μ) besitzt eine (eindeutige) Lösung x_μ .
 b) Das duale Barriere-Problem (II_μ^*) besitzt eine (eindeutige) Lösung (y_μ, z_μ) .
 c) Das gekoppelte primal-duale Problem (KKT-System) besitzt eine (eindeutige) Lösung (x_μ, y_μ, z_μ) , d. h.: Es existiert ein „zentraler Pfad“.

Man gebe in Anlehnung an den Beweis für (a) \Leftrightarrow (c) aus dem Text das Argument für die Aussage (b) \Leftrightarrow (c) an.

Aufgabe 4.10: Man zeige die Konvergenz des „zentralen Pfades“ der primal-dualen Optimierungsaufgabe (KKT-System), d. h.: Für $\mu \rightarrow 0$ konvergieren die (eindeutigen) Lösungen $(\hat{x}_\mu, \hat{y}_\mu, \hat{z}_\mu)$ der regularisierten primal-duale Probleme gegen eine Lösung $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ des ursprünglichen (nichtregularisierten) primal-dualen Problems.

Aufgabe 4.11: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $n \geq m$ habe maximalen Rang m und $d = \text{dig}(d_i)$ sei eine Diagonalmatrix mit positiven Hauptdiagonalelementen $d_i > 0$. Man zeige, dass dann die Matrix ADA^T symmetrisch und positiv definit ist.

Aufgabe 4.12: Der Startwert (x^0, y^0, z^0) für die Newton-Iteration sei zulässig gewählt, d. h.:

$$(x^0, y^0, z^0) \in \Omega_0 := \{(x, y, z) \in \Omega \mid Ax = b, A^T y + z = c, x > 0, z > 0\}.$$

Man zeige, dass dann für hinreichend kleine Dämpfungsparameter $\lambda_t \in (0, 1]$ auch alle weiteren Iterierten (x^t, y^t, z^t) in Ω_0 liegen.

Aufgabe 4.13: Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei orthogonale Vektoren, d. h.: $u^T \cdot v = 0$. Man zeige, dass gilt:

$$\|Uve\|_2 \leq 2^{-3/2} \|u + v\|_2^2, \quad (4.6.63)$$

wobei wieder $U := \text{diag}(u_i)$, $V := \text{diag}(v_i)$, $e := (1, \dots, 1)^T$ und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm sind. (Hinweis: Man verwende die folgende Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel: $\sqrt{|ab|} \leq \frac{1}{2}|a+b|$, $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \geq 0$. Weiterhin kann die Aufspaltung $0 = u^T \cdot v = \sum_{u_i v_i \geq 0} u_i v_i + \sum_{u_i v_i < 0} u_i v_i$ hilfreich sein.)

Aufgabe 4.14: Seien eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit maximalem Rang m und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Man zeige, dass die Lösung des linear/quadratischen Optimierungsproblems

$$x \in \mathbb{R}^n : \quad \frac{1}{2} x^T \cdot x \rightarrow \min! \quad Ax = b,$$

durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b.$$