2 Das Simplex-Verfahren

2.1 Das Simplex-Verfahren

Im Folgenden entwickeln wir das sog. „Simplex-Verfahren“ (bzw. „Simplex-Algorithmus“) nach G. B. Dantzig (1947) zur Lösung von Linearen Programmen. Wir verwenden weiter die Bezeichnungen des vorherigen Kapitels. Sei x^0 eine Ecke der zulässigen Menge M der kanonischen Programmierungsaufgabe

$$(II) \qquad Q(x) := c^T x \to \min!, \quad x \geq 0, \quad Ax = b,$$

mit einer zugehörigen Basis $\hat{B}(x^0) = \{ a_i \, , \, i \in I^0 \} \, , I^0 \supseteq I(x^0)$. Dann gilt

$$\sum_{i \in I^0} x_i^0 \, a_i = b. \tag{2.1.1}$$

Für ein beliebiges $x \in M$ ist $Ax = b$ und folglich

$$\sum_{i \in I^0} \{x_i - x_i^0\} a_i = - \sum_{i \notin I^0} x_i a_i. \tag{2.1.2}$$

(Die Schreibweise „ $i \notin I^0$“ bedeutet $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I^0$.) Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren in $\hat{B}(x^0)$ kann nach den Differenzen $x_i - x_i^0$ aufgelöst werden, und man erhält Gleichungen der Form

$$x_i = \sum_{k \notin I^0} \alpha_{ik} x_k + x_i^0, \quad i \in I^0. \tag{2.1.3}$$

Der zugehörige Zielfunktionswert

$$c^T \cdot x = c^T \cdot x^0 + c^T \cdot (x - x^0) = c^T \cdot x^0 + \sum_{i \in I^0} c_i (x_i - x_i^0) + \sum_{i \notin I^0} c_i x_i.$$

ergibt sich nach Substitution von $x_i - x_i^0 \ (i \in I^0)$ in der Form

$$c^T \cdot x = \sum_{k \notin I^0} \gamma_k x_k + c^T \cdot x^0 \tag{2.1.4}$$

$$\gamma_k = \sum_{i \in I^0} \alpha_{ik} c_i + c_k, \quad k \notin I^0. \tag{2.1.5}$$

Setzt man nun $z := c^T \cdot x$ und $x_{n+1} := 1$, so werden die Gleichungsbedingung $Ax = b$ und der Zielfunktionswert $c^T \cdot x$ offenbar (bzgl. der Basis in $\hat{B}(x^0)$) durch das folgende $(m+1) \times (n-m+1)$-Gleichungssystem wiedergegeben:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k \notin I^0} \alpha_{ik} x_k + x_i^0 x_{n+1}, \quad i \in I^0, \\ z &= \sum_{k \notin I^0} \gamma_k x_k + (c^T \cdot x^0) x_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

In Matrix-Notation lautet dieses System wie folgt:

$$\left[\begin{array}{c} x_i \\ (i \in I^0) \\ \hline z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{ik} & x_i^0 \\ (i \in I^0,\, k \notin I^0) & (i \in I^0) \\ \hline \gamma_k \ (k \notin I^0) & c^T \cdot x^0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_k \\ (k \notin I^0) \\ \hline x_{n+1} \end{array}\right].$$

Die Komponenten x_i, $i \in I^0$, und der zugehörige Zielfunktionswert z eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ sind durch Vorgabe von $x_k \geq 0$ $(k \notin I^0)$ (und $x_{n+1} = 1$) in (2.1.6) eindeutig bestimmt. Gilt dabei auch noch $x_i \geq 0$ $(i \in I^0)$, so ist nach Konstruktion $x \in M$. Für die speziellen Werte $x_k = 0$ $(k \notin I^0)$ ergibt sich gerade die Ausgangsecke x^0.

Wir betrachten nun die umgekehrte Situation, dass die zulässige Menge M gerade aus denjenigen Vektoren $x \geq 0$ besteht, deren Komponenten einem System der Gestalt (2.1.6) genügen, mit gewissen Zahlen $x_i^0 \geq 0$ $(i \in I^0)$. Dann ist der Vektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten x_i^0 $(i \in I^0)$, $x_i^0 = 0$ $(i \notin I^0)$ automatisch Ecke von M, denn er erfüllt offensichtlich (2.1.6), d. h.: $Ax^0 = b$, und jede Darstellung $x^0 = \lambda x + (1-\lambda)\tilde{x}$ mit $x, \tilde{x} \in M$, $0 < \lambda < 1$, impliziert wegen $x_k^0 = 0$ $(k \notin I^0)$ zunächst notwendig $x_k = \tilde{x}_k = 0$ $(k \notin I^0)$ und damit auch $x_i = \tilde{x}_i = x_i^0$ $(i \in I^0)$.

Das System (2.1.6) charakterisiert also zu einer festen Ecke x^0 bzw. der zugehörigen Basis in $\hat{B}(x^0)$ die zulässige Menge M. Der Simplex-Algorithmus sucht nun eine (zu x^0 benachbarte) Ecke x^1 von M, wobei möglichst $c^T \cdot x^1 < c^T \cdot x^0$ gelten soll. Der zugehörige Basiswechsel in der Darstellung (2.1.6) wird mit Hilfe des sog. „Gauß-Jordan-Algorithmus“ bewerkstelligt.

2.1.1 Gauß-Jordan-Algorithmus

Der Vollständigkeit halber rekapitulieren wir im Folgenden den Gauß-Jordan[1]-Algorithmus. Dieser dient zur Lösung linearer (nicht notwendig quadratischer) Gleichungssysteme

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{2.1.7}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, durch sukzessiven Austausch der Komponenten von x gegen solche von y. Ist ein Matrixelement $a_{pq} \neq 0$, so kann die p-te Gleichung nach x_q aufgelöst werden:

$$x_q = -\frac{a_{p1}}{a_{pq}} x_1 - \ldots - \frac{a_{p,q-1}}{a_{pq}} x_{q-1} + \frac{1}{a_{pq}} y_p - \frac{a_{p,q+1}}{a_{pq}} x_{q+1} - \ldots - \frac{a_{pn}}{a_{pq}} x_n .$$

Durch Substitution von x_q in den anderen Gleichungen

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{j,q-1}x_{q-1} + a_{jq}\boxed{x_q} + a_{j,q+1}x_{q+1} + \ldots + a_{jn}x_n = y_j$$

[1]Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922): Französischer Mathematiker; Prof. in Paris; Beiträge zur Algebra, Gruppentheorie, Analysis und Topologie.

erhält man für $j = 1, \dots, m,\ j \neq p$:

$$\left[a_{j1} - \frac{a_{jq}a_{p1}}{a_{pq}}\right] x_1 + \ldots + \left[a_{j,q-1} - \frac{a_{jq}a_{p,q-1}}{a_{pq}}\right] x_{q-1}$$
$$+ \frac{a_{jq}}{a_{pq}}\, y_p + \left[a_{j,q+1} - \frac{a_{jq}a_{p,q+1}}{a_{pq}}\right] x_{q+1} + \ldots + \left[a_{jn} - \frac{a_{jq}a_{pn}}{a_{pq}}\right] x_n = y_j.$$

Das Resultat ist ein zum Ausgangssystem äquivalentes System

$$A' \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ y_p \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ x_q \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{2.1.8}$$

wobei die Elemente der Matrix $\tilde{A}$ wie folgt bestimmt sind:

– Pivotelement: $\quad a'_{pq} = \dfrac{1}{a_{pq}},$

– Pivotzeile: $\quad a'_{pk} = -\dfrac{a_{pk}}{a_{pq}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad k \neq q\,,$

– Pivotspalte: $\quad a'_{jq} = \dfrac{a_{jq}}{a_{pq}}\,, \quad j = 1, \dots, m, \quad j \neq p\,,$

– Sonstige: $\quad a'_{jk} = a_{jk} - a_{jq}\dfrac{a_{pk}}{a_{pq}}, \quad \begin{array}{ll} j = 1, \dots, m, & j \neq p \\ k = 1, \dots, n, & k \neq q. \end{array}$

Gelingt es, durch Fortsetzung des Verfahrens alle Komponenten von x durch solche von y zu ersetzen, so hat man eine explizite Darstellung der Lösung von $Ax = y$. Im Fall $m = n$ ergibt sich so auch die Inverse A^{-1}, allerdings im allgemeinen mit vertauschten Zeilen und Spalten. Bei der Festlegung des Pivotelementes empfiehlt es sich aus Stabilitätsgründen, unter allen in Frage kommenden a_{pq} jeweils eines mit möglichst großem Betrag zu wählen.

Lemma 2.1: *Im Fall* $\operatorname{Rang} A = r$ *können im Gauß-Jordan-Algorithmus genau* r *Austauschritte durchgeführt werden. Für ein quadratisches Gleichungssystem mit regulärer Koeffizientenmatrix* A *ist also das Gauß-Jordan-Verfahren zur Berechnung von* A^{-1} *stets durchführbar.*

Beweis: Das Verfahren breche nach r Austauschschritten ab. Seien dann $x_1, \dots, x_r$ gegen $y_1, \dots, y_r$ ausgetauscht. Das resultierende System hat die Gestalt

$$\begin{array}{r} r \\ m-r \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Wählt man nun $y_1 = \cdots = y_r = 0$ und $x_{r+1} = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_{n-r}$ beliebig, so sind die $x_1, \dots, x_r$ dadurch eindeutig bestimmt und es folgt $y_{r+1} = \cdots = y_m = 0$. Für beliebige Werte von $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ ist also

$$A \begin{bmatrix} x_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}) \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_r \\ 0_{r+1} \\ \vdots \\ 0_m \end{bmatrix},$$

d. h.: Es ist $\dim(\text{Kern}\, A) \geq n - r$. Andererseits ist wegen der möglichen freien Wahl von $y_1, \dots, y_r$ offenbar $\dim(\text{Bild}\, A) \geq r$. Da bekanntlich gilt

$$\dim(\text{Bild}\, A) + \dim(\text{Kern}\, A) = n,$$

folgt $\text{Rang}\, A = \dim(\text{Bild}\, A) = r$. Q.E.D.

Beispiel 2.1 (Gauß-Jordan-Algorithmus):

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -7 & -12 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Austauschschritte: $\boxed{\cdot}$ Pivotelement

$$
\begin{array}{rrr|l}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & y_1 \\
-3 & -5 & -1 & y_2 \\
-7 & \boxed{-12} & -2 & y_3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|l}
x_1 & y_3 & x_3 & \\
\hline
-1/6 & -1/6 & \boxed{2/3} & y_1 \\
-1/12 & 5/12 & -5/6 & y_2 \\
-7/12 & -1/12 & -1/6 & x_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
x_1 & y_3 & y_1 & \\
\hline
1/4 & 1/4 & 3/2 & x_3 \\
\boxed{-1/8} & 3/8 & -1/4 & y_2 \\
-5/8 & -1/8 & -1/4 & x_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|l}
y_2 & y_3 & y_1 & \\
\hline
-2 & 1 & 1 & x_3 \\
-8 & 3 & -2 & x_1 \\
5 & -2 & 1 & x_2
\end{array}
$$

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}
$$

2.1.2 Phase I und Phase II des Simplex-Algorithmus

Der Simplex-Algorithmus besteht aus zwei sog. „Phasen“. In Phase I wird eine Ausgangsecke x^0 konstruiert und das zugehörige sog. „Simplex-Tableau“ erstellt:

I^0	$x_k\ (k \notin I^0)$	$x_{n+1} = 1$	x_i^0/α_{iq}
x_i $(i \in I^0)$	α_{ik} $(i \in I^0,\ k \notin I^0)$	x_i^0 $(i \in I^0)$	
z	$\gamma_k\ (k \notin I^0)$	$c^T \cdot x^0$	

In Phase II werden dann unter Verwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus Basiswechsel vollzogen, wobei der Zielfunktionswert jeweils möglichst stark verkleinert wird. Wir beginnen mit der Beschreibung dieses Basisaustausches.

Phase II (Basisaustausch)

1. Gilt $\gamma_i \geq 0\ (i \notin I^0)$, so folgt für beliebige Vorgabe von $x_i \geq 0\ (i \notin I^0)$, d. h.: für beliebige Punkte $x \in M$, stets
$$z = c^T \cdot x = \sum_{k \notin I^0} \gamma_k x_k + c^T \cdot x^0 \geq c^T \cdot x^0,$$
d. h.: Die Startecke x^0 ist bereits optimal.

2. Gibt es ein $q \notin I^0$ mit $\gamma_q < 0$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) Im Falle $\alpha_{iq} \geq 0$ $(i \in I^0)$ erhält man durch Vorgabe von $x_q := \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ und $x_k = 0$ $(k \notin I^0,\ k \neq q)$ Vektoren $x \in M$,

$$x_i = \sum_{k \notin I^0} \alpha_{ik} x_k + x_i^0 = \alpha_{iq}\lambda + x_i^0 \geq 0,$$

mit Zielfunktionswert

$$z = \gamma_q \lambda + c^T \cdot x^0 \to -\infty \quad (\lambda \to \infty).$$

Die Aufgabe ist also unlösbar.

(b) Gibt es Indizes $p \in I^0$ mit $\alpha_{pq} < 0$, so wird die (inaktive) Variable x_q gegen eine noch auszuwählende (aktive) Variable x_p ausgetauscht. Die Elemente des Tableaus sind dabei gemäß dem Gauß-Jordan-Algorithmus wie folgt zu transformieren (Der Pfeil „$\to$“ deutet an, dass das linke Element im Tableau durch das rechte ersetzt wird.):

Pivotelement: $\alpha_{pq} \to \alpha_{qp}^1 = \dfrac{1}{\alpha_{pq}}$

Pivotzeile: $\alpha_{pk} \to \alpha_{qk}^1 = -\dfrac{\alpha_{pk}}{\alpha_{pq}} \quad (k \notin I^0,\ k \neq q), \qquad x_p^0 \to x_q^1 = -\dfrac{x_p^0}{\alpha_{pq}}$

Pivotspalte: $\alpha_{iq} \to \alpha_{ip}^1 = \dfrac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}} \quad (i \in I^0 \setminus \{p\}), \qquad \gamma_q \to \gamma_p^1 = \dfrac{\gamma_q}{\alpha_{pq}}$

Sonstige: $\alpha_{ik} \to \alpha_{ik}^1 = \alpha_{ik} - \dfrac{\alpha_{iq}\alpha_{pk}}{\alpha_{pq}}$

$x_i^0 \to x_i^1 = x_i^0 - \dfrac{\alpha_{iq} x_p^0}{\alpha_{pq}}$

$\gamma_k \to \gamma_k^1 = \gamma_k - \dfrac{\gamma_q \alpha_{pk}}{\alpha_{pq}}$

$c^T \cdot x^0 \to c^T \cdot x^1 = c^T \cdot x^0 - \dfrac{\gamma_q x_p^0}{\alpha_{pq}}$

Indexmenge: $I^1 := [I^0 \setminus \{p\}] \cup \{q\}$

Auswahlregel (R): *Der Index $p \in I^0$ wird dabei gemäß der folgenden Regel ausgewählt:*

$$\alpha_{pq} < 0\,, \quad \frac{x_p^0}{\alpha_{pq}} = \max_{i \in I^0,\, \alpha_{iq} < 0} \frac{x_i^0}{\alpha_{iq}}. \tag{2.1.9}$$

Diese Auswahl bewirkt, wie wir unten sehen werden, dass mit $x^0 \geq 0$ auch $x^1 \geq 0$ ist. Eine maximale Reduzierung des Zielfunktionalwerts wird damit in der Regel nicht erreicht. Man beachte, dass in den obigen Transformationsformeln eine etwas andere Notation als in den entsprechenden Formeln des Gauß-Jordan-Algorithmus verwendet wird:

Da hier Komponenten ein und desselben Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ gegeneinander ausgetauscht werden, ist der Übergang der Tableauelemente z. B. als $\alpha_{pq} \to \alpha'_{qp}$ mit Indextausch geschrieben, um den Zusammenhang (Spalten- und Zeilenindex) mit den Indizes der getauschten Variablen x_q und x_p deutlich zu machen.

Unter Verwendung der obigen Transformationsformeln ergibt sich das neue Simplex-Tableau

I^1	$x_k \ (k \notin I^1)$	$x_{n+1} = 1$	x_i^1/α_{iq}^1
x_i $(i \in I^1)$	α_{ik}^1 $(i \in I^1,\ k \notin I^1)$	$x^1 1_i$ $(i \in I^1)$	
z	$\gamma_k^1 \ (k \notin I^1)$	$c^T \cdot x^1$	

Dieses ist äquivalent zu dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k \notin I^1} \alpha_{ik}^1 x_k + x_i^1 x_{n+1}, \quad i \in I^1, \\ z &= \sum_{k \notin I^1} \gamma_k^1 x_k + (c^T \cdot x^1) x_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

In diesem steckt wieder die Information $Ax = b$, so dass $x \in M$ für $x \geq 0$. Weiter gilt für $x_k = 0$, $k \notin I^1$, die Beziehung $x_i = x_1^1$, $i \in I^1$. Dann ist der Vektor $x^1 \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten x_i^1 $(i \in I^1)$, $x_i^1 = 0$ $(i \notin I^1)$ im Falle, dass $x_i^1 \geq 0$, automatisch wieder Ecke von M, denn er erfüllt offensichtlich (2.1.10), d. h.: $Ax^0 = b$, und jede Darstellung $x^1 = \lambda x + (1-\lambda)\tilde{x}$ mit $x, \tilde{x} \in M$, $0 < \lambda < 1$, impliziert zunächst notwendig $x_k = \tilde{x}_k = x_k^1$ $(k \notin I^1)$ und damit auch $x_i = \tilde{x}_i = x_i^1$ $(i \in I^0)$.

Satz 2.1 (Simplex-Algorithmus): *Wird der Basisaustausch gemäß der Regel* (R) *vorgenommen, so ist der Vektor $x^1 \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $x_i^1 > 0$ $(i \in I^1 := [I^0 \setminus \{p\}] \cup \{q\})$, $x_i^1 = 0$ $(i \notin I^1)$ wieder eine Ecke von M mit der zugehörigen Basis*

$$\hat{B}(x^1) = \big[\hat{B}(x^0) \setminus \{a_p\}\big] \cup \{a_q\}, \tag{2.1.11}$$

und es gilt $c^T \cdot x^1 \leq c^T \cdot x^0$. Im Falle $x_p^0 > 0$ ist auch

$$c^T \cdot x^1 < c^T \cdot x^0. \tag{2.1.12}$$

Beweis: Wegen $\alpha_{pq} < 0$ folgt $x_q^1 = -x_p^0/\alpha_{pq} \geq 0$. Ist weiter $\alpha_{iq} \geq 0$, so folgt $x_i^1 = x_i^0 - \alpha_{iq} x_p^0/\alpha_{pq} \geq 0$. Im Falle $\alpha_{iq} < 0$ gilt ebenfalls wegen der Auswahlregel (R):

$$\frac{x_i^1}{\alpha_{iq}} = \frac{x_i^0}{\alpha_{iq}} - \frac{x_p^0}{\alpha_{pq}} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_i^1 \geq 0.$$

Nach dem oben Gesagten ist x^1 also Ecke von M. Ferner folgt für $x_p^0 > 0$ die Reduktion des Zielfunktionalwerts. Q.E.D.

Der Eckenaustausch nach (2b) kann solange fortgesetzt werden, bis Fall (1) oder Fall (2a) eintritt. Eine *nicht* entartete Ecke kann dabei nie ein zweites Mal erreicht werden, da ihr Austausch je zu einer Verkleinerung des Zielfunktionswertes führt. Das Auftreten entarteter Ecken wird weiter unten diskutiert werden. Hier könnten sich (theoretisch) im Laufe des Verfahrens verschiedene Basen zu einer entarteten Ecke zyklisch wiederholen, so dass der Algorithmus nicht abbricht.

Beispiel 2.2: Beispiel 0.3 aus Abschnitt 0.6 erhält nach Einführung von Schlupfvariablen $x_3,\ x_4,\ x_5$ die Form

$$Q(x) := -120x_1 - 40x_2 \to \min!\,, \quad x_i \geq 0\,, \quad i = 1,\ldots,5,$$

$$\begin{array}{rcrcccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 100 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & & + & x_4 & = & 160 \\ 20x_1 & + & 10x_2 & & & & + \ x_5 & = & 1100 \end{array}$$

Offensichtlich ist $x^0 = (0, 0, 100, 160, 1100)^T$ eine *nicht* entartete Ecke mit der Basis

$$B(x^0) = \{a_3, a_4, a_5\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Ausgangstableau ist also:

I^0	x_1	x_2	$x_6 = 1$	x_i^0/α_{iq}
x_3	-1	-1	100	-100
x_4	$\boxed{-4}$	-1	160	-40
x_5	-20	-10	1100	-55
z	$\boxed{-120}$	-40	0	

$\boxed{\text{Fall (2b)}}$

Wahl $q = 1$ (oder $q = 2$)

Regel (R) $\Rightarrow p = 4\,.$

Eckentausch (Pivotelement α_{41})

I^1	x_4	x_2	$x_6 = 1$	x_i^0/α_{iq}
x_3	$1/4$	$-3/4$	60	-80
x_1	$-1/4$	$-1/4$	40	-160
x_5	5	$\boxed{-5}$	300	-60
z	30	$\boxed{-10}$	-4800	

$\boxed{\text{Fall (2b)}}$

Wahl $q = 2$

Regel (R) $\Rightarrow p = 5\,.$

Eckentausch (Pivotelement α_{52})

I^2	x_4	x_5	$x_6 = 1$
x_3	$-1/2$	$-3/20$	15
x_1	$-1/2$	$1/20$	25
x_2	1	$-1/5$	60
z	20	2	-5400

$\boxed{\text{Fall (1)}}$

Eckenlösung $x^3 = (25, 60, 15, 0, 0)^T$

Extremwert $z = -5400\,.$

Wie wir schon gesehen haben, wird der maximale Gewinn von 5400 EURO erreicht, wenn 25 Produkte des Typs A und 60 des Typs B hergestellt werden.

Bemerkung 2.1: Zur Kontrolle der Rechnung sollten die Größen γ_k $(k \notin I^0)$ zusätzlich auch aus der folgenden Formel berechnet werden:

$$\gamma_k = \sum_{i \in I^0} \alpha_{ik} c_i + c_k. \tag{2.1.13}$$

Phase I (Konstruktion einer Startecke)

Wir diskutieren nun die Phase I des Simplex-Algorithmus, d. h. die Konstruktion einer Ausgangsecke x^0.

a) Im Falle eines in Standardform gegebenen Programms mit $b \geq 0$ ist dies, wie obiges Beispiel zeigt, sehr einfach:

$$(\mathrm{I}) \qquad c^T \cdot x \to \max!, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0. \tag{2.1.14}$$

Durch Einführung von Schlupfvariablen $v \in \mathbb{R}^m$ geht (I) in die kanonische Form über:

$$(\tilde{\mathrm{II}}) \qquad \tilde{c}^T \cdot \tilde{x} \to \min!, \quad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq 0, \tag{2.1.15}$$

mit

$$\tilde{A} = [A, I_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \quad \tilde{b} = b, \quad \tilde{c} = (-c, 0_m)^T \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad \tilde{x} = (x, v)^T \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Wegen $b \geq 0$ ist der Vektor $\tilde{x}^0 = (0_n, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ automatisch eine Ecke von $\tilde{M}$, denn die zugehörigen Spaltenvektoren von $\tilde{A}$ bilden gerade die Einheitsmatrix I_m. Die Einträge im zugehörigen Ausgangstableau können dann wie in obigem Beispiel direkt abgelesen werden.

b) Ist die Programmierungsaufgabe in kanonischer Form gestellt,

$$(\mathrm{II}) \qquad c^T \cdot x \to \min!, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \tag{2.1.16}$$

oder ist in (I) $b \geq 0$ nicht erfüllt, so ist i. Allg. keine Ecke von M (oft nicht einmal ein zulässiger Vektor) ersichtlich. Zu ihrer Konstruktion betrachte man das Hilfsproblem (o.B.d.A.: $\tilde{b} \geq 0$)

$$(\tilde{\mathrm{II}}) \qquad \tilde{c}^T \cdot \tilde{x} \to \min!, \quad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq 0, \tag{2.1.17}$$

mit $v \in \mathbb{R}^m$,

$$\tilde{A} = [A, I_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \quad \tilde{b} = b, \quad \tilde{c} = (0_n, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad \tilde{x} = (x, v)^T \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Hier ist mit $\tilde{x}^0 = (0_n, \tilde{b})^T$ eine Ausgangsecke von $\tilde{M}$ bekannt. Die zulässige Menge des zugehörigen dualen Problems

$$\tilde{M}^* = \{y \in \mathbb{R}^m |\ \tilde{A}^T y \leq \tilde{c}\}$$

enthält offensichtlich den Nullvektor, d. h. ist nicht leer. Nach dem Alternativsatz für das kanonische Problem, Satz 1.2, ist Problem $(\tilde{II})$ also lösbar. Die optimale Eckenlösung (x^*, v^*) bestimmt man mit Hilfe des Simplex-Verfahrens. Ist $v^* = 0$, so liefern die ersten n Komponenten der Lösung $\tilde{x}^*$ eine Ausgangsecke des ursprünglichen Problems (II):

$$x_i^0 := \tilde{x}_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.1.18}$$

Das Ausgangstableau für die weitere Rechnung mit (II) erhält man einfach durch Streichen der zu v gehörenden Spalten. Im Fall $v_i^* > 0$ für ein i muss $M = \emptyset$ sein, d. h.: Problem (II) besitzt keine Lösung.

Bemerkung 2.2: Gemäß der vorausgehenden Diskussion kann mit dem Simplex-Verfahren auch die Frage nach der Lösbarkeit eines (LP) entschieden werden.

2.1.3 Behandlung entarteter Ecken

Nach den bisherigen Überlegungen ist der Simplex-Algorithmus (mit der Auswahlregel (R)) grundsätzlich geeignet zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben bzw. zur Entscheidung ihrer Unlösbarkeit, vorausgesetzt, es treten keine entarteten Ecken auf. Das Erscheinen einer entarteten Ecke x^1 ist dadurch gekennzeichnet, dass im vorangehenden Austauschschritt das Kriterium (R) nicht zu einem eindeutig bestimmten Index $p \in I^0$ führt:

$$x^1 \quad \textit{nicht}\text{ entartet } \Rightarrow \begin{cases} \exists!\, p \in I^0 : \alpha_{pq} < 0, \\ \dfrac{x_p^0}{\alpha_{pq}} = \max\limits_{\alpha_{iq}<0} \dfrac{x_i^0}{\alpha_{iq}}. \end{cases}$$

Andernfalls folgte mit $x_p^0/\alpha_{pq} = x_{p'}^0/\alpha_{p'q}$

$$\left.\begin{array}{rcccl} x_p^1 & = & x_p^0 - \alpha_{pq} x_p^0/\alpha_{pq} & = & 0 \\ x_{p'}^1 & = & x_{p'}^0 - \alpha_{p'q} x_p^0/\alpha_{pq} & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 \text{ hat weniger als } m \\ \text{positive Komponenten.} \end{cases}$$

Tritt im Verlaufe des Simplex-Verfahrens eine entartete Ecke x^0 auf, so kann es passieren, dass für den Index $p \in I^0$ gerade $x_p^0 = 0$ ist. Dann bewirkt der Austauschschritt offenbar keine Veränderung des Vektors x^0, insbesondere also keine Reduzierung des Zielfunktionswerts, sonderen nur den Übergang zu einer anderen Basis zur Ecke x^0. Wiederholt sich dann dieselbe Basis zyklisch, so führt das Verfahren nicht zum Ziel. Obwohl in der Praxis häufig entartete Ecken auftreten, sind derartige Zyklen noch nicht beobachtet worden (nur bei eigens zu diesem Zweck konstruierten pathologischen Beispielen). Für Belange der Praxis erscheint der Simplex-Algorithmus mit der Auswahlregel (R) als hinreichend robust. Vom theoretischen Standpunkt ist diese Situation aber unbefriedigend und man sucht nach einer Auswahlregel, mit der der Algorithmus grundsätzlich zum Ziel führt.

Definition 2.1 (Lexikographische Ordnung): *Ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ heißt „lexikographisch positiv“, in Symbolen $u \succ 0$, wenn $u \neq 0$ ist und die erste nicht verschwindende Komponente positiv ist. Ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ heißt „lexikographisch kleiner (größer)“ als ein $v \in \mathbb{R}^n$, wenn $v-u \succ 0$ $(u-v \succ 0)$. Damit ist auf dem $\mathbb{R}^n$ eine “Ordnung” erklärt.*

Das Simplex-Verfahren sei gestartet mit einer Ecke x^{start} mit der Basis $\hat{B}(x^{\text{start}}) = \{a_1, \dots, a_m\}$ (gegebenenfalls nach Umbenennung der Variablen). Damit ist die zugehörige Indexmenge $I^{\text{start}} = \{1, \dots, m\}$. Zur Einführung einer erweiterten Auswahlregel werden die Parameter α_{ik} und γ_k auch für $k \in I^{\text{start}}$ erklärt durch

$$\alpha_{ik} := -\delta_{ik}\,, \quad \gamma_k := 0\,, \quad i\,, k \in I^{\text{start}},$$

Lemma 2.2: *Für die durch die Darstellungen*

$$a_i = \sum_{k \in I^{\text{start}}} c_{ik} a_k\,, \quad i \in \{1, \dots, n\} \tag{2.1.19}$$

eindeutig bestimmten Zahlen c_{ik} *gilt*

$$c_{ki} = -\alpha_{ik}\,, \quad k \in \{1, \dots, n\}\,, \quad i \in I^{\text{start}}. \tag{2.1.20}$$

Beweis: Für $i, k \in I^{\text{start}}$ ist nach Definition

$$\alpha_{ik} = -\delta_{ik} = -c_{ki}.$$

Sei nun $x \in M$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I^{\text{start}}} \{x_i - x_i^{\text{start}}\} a_i &= -\sum_{i \notin I^{\text{start}}} x_i a_i \\ &= -\sum_{i \notin I^{\text{start}}} x_i \Big(\sum_{k \in I^{\text{start}}} c_{ik} a_k \Big) = -\sum_{i \in I^{\text{start}}} \Big(\sum_{k \notin I^{\text{start}}} c_{ki} x_k \Big) a_i\end{aligned}$$

und folglich wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren in $\hat{B}(x^{\text{start}})$

$$x_i - x_i^{\text{start}} = -\sum_{k \notin I^{\text{start}}} c_{ki} x_k\,, \quad i \in I^{\text{start}}.$$

Da die α_{ik} in der Darstellung (2.1.3),

$$x_i = \sum_{k \notin I^{\text{start}}} \alpha_{ik} x_k + x_i^{\text{start}}, \quad i \in I^0,$$

eindeutig bestimmt sind, ergibt sich notwendig $c_{ki} = -\alpha_{ik}\ (k \in I^{\text{start}})$. Q.E.D.

Sei nun x^0 eine im Verlaufe des Verfahrens erreichte Ecke und $q \in I^0$ der Austauschindex. Zur Bestimmung des Index $p \in I^0$ bilde man für alle $r \in I^0$ mit

$$\frac{x_r^0}{\alpha_{rq}} = \max_{\alpha_{jq} < 0} \frac{x_j^0}{\alpha_{jq}}\,, \quad \alpha_{rq} < 0, \tag{2.1.21}$$

die Vektoren

$$u^r = \Big(\frac{x_r^0}{\alpha_{rq}}, -\frac{\alpha_{r1}}{\alpha_{rq}}, \dots, -\frac{\alpha_{rm}}{\alpha_{rq}} \Big)^T \in \mathbb{R}^{1+m}.$$

Die Auswahlregel lautet dann wie folgt:

Auswahlregel ($\tilde{\mathrm{R}}$): *Der Index $p \in I^0$ wird dann als derjenige mit der Eigenschaft (2.1.21) gewählt, so dass u^p der lexikographisch größte unter den u^r ist.*

Im Falle, dass der „maximale“ Index in (2.1.21) eindeutig bestimmt ist, stimmt die Auswahlregel ($\tilde{\mathrm{R}}$) offenbar mit (R) überein. Ansonsten ist durch ($\tilde{\mathrm{R}}$) eindeutig ein $p \in I^0$ festgelegt; denn gäbe es keines, so wären für zwei $p, p' \in I^0$ die Vektoren u^p, $u^{p'}$ identisch. Dies bedeutete aber, dass die quadratische Matrix $(\alpha_{ik})_{i\in I^0, k=1,\dots,m}$ zwei zueinander proportionale Zeilen hätte und somit singulär wäre. Nach Lemma 2.2 wäre dann auch $(c_{ik})_{i=1,\dots,m,k\in I^0}$ singulär im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Vektoren in $\hat{B}(x^0)$ und $\hat{B}(x^{\text{start}})$. Der Ecke x^0 ordnen wir nun den folgenden Vektor zu:

$$v^0 = (c^T \cdot x^0, c_1 - \gamma_1, \dots, c_m - \gamma_m)^T \in \mathbb{R}^{1+m}.$$

Lemma 2.3 (Reduktionssatz): *Beim Eckenaustausch $x^0 \to x^1$ unter Verwendung der Auswahlregel ($\tilde{\mathrm{R}}$) wird der Vektor v^0 durch einen lexikographisch kleineren Vektor v^1 ersetzt.*

Beweis: Die Indexmenge I^0 wird ersetzt durch $I^1 = (I^0\backslash\{p\}) \cup \{q\}$. Die γ_i werden nach den folgenden Regeln transformiert:

$$\begin{array}{rll}
k \notin I^0,\quad k \neq q: & \gamma_k \to \gamma_k - \gamma_q\, \alpha_{pk}/\alpha_{pq} & \text{(Transformationsformel)} \\
k = q: & \gamma_q \to \gamma_q - \gamma_q\, \alpha_{pq}/\alpha_{pq} = 0 & \\
k \in I^0,\quad k \neq p: & \gamma_k \to 0 \quad \text{(gemäß obiger Setzung)} & \\
k = p: & \gamma_p \to \gamma_p - \gamma_q\, \alpha_{pp}/\alpha_{pq} = \gamma_q/\alpha_{pq} & (\text{wegen } \gamma_p = 0,\ \alpha_{pp} = -1).
\end{array}$$

Ferner gilt: $$c^T \cdot x^0 \to c^T \cdot x^0 - \gamma_q\, x^0_p/\alpha_{pq}\,.$$

Für den zur neuen Ecke x^1 gehörenden Vektor $v^1 \in \mathbb{R}^{1+m}$ gilt also:

$$v^1 = v^0 - \gamma_q \begin{bmatrix} x^0_p/\alpha_{pq} \\ -\alpha_{p1}/\alpha_{pq} \\ \vdots \\ -\alpha_{pm}/\alpha_{pq} \end{bmatrix} = v^0 - \gamma_q u^p.$$

Da $\gamma_q < 0$ und $\alpha_{pq} < 0$, bleibt zu zeigen, dass der Vektor $w^p = (x^0_p, -\alpha_{p1}, \dots, -\alpha_{pm})^T \in \mathbb{R}^{1+m}$ lexikographisch positiv ist. Dies geschieht wie folgt durch Induktion bzgl. der Zahl der durchgeführten Verfahrensschritte:

i) Die zur Ausgangsecke x^{start} gehörenden Vektoren $w^k\ (k = 1, \dots, m)$ sind trivialerweise lexikographisch positiv, denn es ist $x^0_k \geq 0$ und $-\alpha_{ki} = \delta_{ki}\ (i = 1, \dots, m)$.

ii) Sei x^0 eine im Verlaufe des Verfahrens auftretende Ecke, und alle zu x^0 gebildeten Vektoren $w^k\ (k \in I^0)$ seien lexikographisch positiv. Beim Übergang von x^0 zur Ecke x^1 ergeben sich die zugehörigen Vektoren $\tilde{w}^k\ (k \in I^1)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
k \in I^1\,,\quad k \neq q\,: \qquad \tilde{w}^k &= \Big(x_k^0 - \frac{\alpha_{kq} x_p^0}{\alpha_{pq}}\,, -\alpha_{k1} + \frac{\alpha_{kq}\alpha_{p1}}{\alpha_{pq}}\,, \dots, -\alpha_{km} + \frac{\alpha_{kq}\alpha_{pm}}{\alpha_{pq}} \Big)^T \\
&= w^k - \frac{\alpha_{kq}}{\alpha_{pq}}\, w^p \\
k = q\,: \qquad \tilde{w}^q &= \Big(-\frac{x_p^0}{\alpha_{pq}}, \frac{\alpha_{p1}}{\alpha_{pq}}\,, \dots, \frac{\alpha_{pm}}{\alpha_{pq}} \Big)^T = -\frac{1}{\alpha_{pq}}\, w^p.
\end{aligned}$$

Hieraus entnehmen wir mit der Induktionsannahme, dass

$$\begin{aligned}
k \in I^1\,,\quad k \neq q\,: \quad & \text{a)} \quad \alpha_{kq} \geq 0 \Rightarrow \tilde{w}^k = w^k + \left|\frac{\alpha_{kq}}{\alpha_{pq}}\right| w^p \succ 0\,, \\
& \text{b)} \quad \alpha_{kq} < 0 \Rightarrow \text{Auswahlregel } (\tilde{R})\ :\ u^p \succ u^k \\
& \qquad \Rightarrow \tilde{w}^k = \alpha_{kq} u^k - \frac{\alpha_{kq}}{\alpha_{pq}} \alpha_{pq} u^p \succ 0\,, \\
k = q\,: \quad & \qquad \tilde{w}^q = \left|\frac{1}{\alpha_{pq}}\right| w^p \succ 0\,.
\end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Wir fassen die Ergebnisse der bisherigen Überlegungen in nachfolgendem Satz zusammen.

Satz 2.2 (Erweitertes Simplex-Verfahren): *Unter der obigen Voraussetzung an die Ausgangsecke liefert der Simplex-Algorithmus mit der Auswahlvorschrift* ($\tilde{\mathrm{R}}$) *in endlich vielen Schritten eine Lösung des kanonischen Problems* (II) *oder die Bestätigung seiner Unlösbarkeit.*

Beweis: Nach Lemma 2.2 kann aufgrund der Auswahlregel ($\tilde{\mathrm{R}}$) keine Basis von Spaltenvektoren von A zweimal auftreten, denn durch die Ecke x^0 und eine zugehörige Basis $\hat{B}(x^0)$ ist der Vektor v^0 eindeutig bestimmt. Zyklen werden also vermieden. Q.E.D.

2.2 Varianten des Simplex-Verfahrens

2.2.1 Lösung des dualen Programms

Wir betrachten wieder das kanonische Problem

$$(II) \qquad c^T \cdot x \to \min!, \quad Ax = b, \;\; x \geq 0,$$

und das zugehörige duale Problem

$$(II^*) \qquad b^T \cdot y \to \max!, \quad A^T y \leq c.$$

Ist (II) lösbar, so kann eine Lösung grundsätzlich mit dem Simplex-Verfahren bestimmt werden. Oft ist man aber gleichzeitig auch an einer Lösung von (II^*) interessiert. Wir wollen zeigen, wie eine solche ohne besonderen Mehraufwand mitberechnet werden kann.

Satz 2.3 (Lösung der dualen Aufgabe): *Sei x^0 eine vom Simplex-Verfahren gelieferte Lösung von (II), d. h.: Im Simplex-Tableau gilt $\gamma_k \ge 0$ $(k \notin I^0)$. Mit $A_0 := [a_i,\, i \in I^0] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $c^0 := (c_i)_{i\in I^0} \in \mathbb{R}^m$ ist dann durch*

$$y^0 := (A_0^T)^{-1}c^0$$

eine Lösung des dualen Problems (II^*) gegeben.

Beweis: Das duale Problem lautet

$$(II^*) \qquad b^T\cdot y \to \max!, \quad A^Ty \le c.$$

Wir wollen die Zulässigkeit von y^0 zeigen. Dabei werden die folgenden Beziehungen verwendet (Lemma 2.2 und Identität (2.1.5)):

$$a_i = \sum_{l\in I^0}(-\alpha_{li})a_l, \quad \gamma_i = \sum_{l\in I^0}\alpha_{li}c_l + c_i \;\; (i \notin I^0).$$

Es wird eine Fallunterscheidung gemacht:
i) Fall $i \in I^0$:

$$(A^Ty^0)_i = \sum_{k\in I^0}^m a_{ki}y_k^0 = (A_0^Ty^0)_i = c_i$$

ii) Fall $i \notin I^0$: Wegen $\gamma_i \ge 0$ folgt

$$\begin{aligned}(A^Ty^0)_i &= \sum_{k\in I^0}^m a_{ki}y_k^0 = \sum_{k\in I^0}^m \Big(\sum_{l\in I^0}(-\alpha_{li})a_{kl}\Big)y_k^0 \\ &= \sum_{l\in I^0}(-\alpha_{li})\Big(\sum_{k\in I^0}^m a_{kl}y_k^0\Big) = \sum_{l\in I^0}(-\alpha_{li})c_l \\ &= c_i - \gamma_i \le c_i\,.\end{aligned}$$

Also ist $y^0 \in M^*$ und darüberhinaus gilt $(A^Ty^0)_i = c_i$ für $i \in I^0$, d. h.: insbesondere für die Indizes i mit $x_i > 0$. Nach dem Gleichgewichtssatz (Satz 1.4) für das kanonische Problem ist dann y^0 optimal für (II^*). Q.E.D.

2.2.2 Lösung von Ungleichungssystemen

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ sei ein $x \in \mathbb{R}^n$ gesucht, welches Lösung der Ungleichung

$$Ax \le b \tag{2.2.22}$$

ist. Zur Konstruktion von x wird das folgende kanonische Programm betrachtet:

$$(II) \qquad y \in \mathbb{R}^m,\ \eta \in \mathbb{R}: \quad \eta \to \min!, \quad y \ge 0,\ \eta \ge 0,\ \ A^Ty = 0,\ \ \eta - b^T\cdot y = 1.$$

Satz 2.4 (Ungleichungssysteme): *Die Aufgabe* (II) *besitzt eine Lösung* $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{\eta} \in \mathbb{R}$. *Genau, wenn* $\hat{\eta} > 0$ *ist, hat die Ungleichung (2.2.22) eine Lösung, welche mit der Lösung* $z \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$ *der zu* (II) *dualen Aufgabe* (II^*) *durch*

$$\hat{x} := \frac{1}{\xi} z \tag{2.2.23}$$

gegeben ist.

Beweis: Übungsaufgabe. Q.E.D.

2.2.3 Lösung großer, dünn besetzter Programme

Wir diskutieren eine Variante des Simplex-Verfahrens, welche besonders für den Fall großer, dünn besetzter Programme mit $n \gg m$, d. h. mit wesentlich mehr Optimierungsvariablen als Nebenbedingungen geeignet ist.

Sei x^0 wieder eine Ecke des zulässigen Bereichs der kanonischen Aufgabe und $\hat{B}(x^0) = \{a_i,\, i \in I^0\}$ eine zugehörige Basis von Spaltenvektoren. Die Beziehungen

$$a_k = \sum_{i \in I^0} c_{ki} a_i, \quad k \notin I^0,$$

lassen sich in der kompakten Form

$$A_1 = A_0 C_1^T \quad \text{bzw.} \quad C_1^T = A_0^{-1} A_1$$

schreiben mit den Matrizen

$$A_0 := [a_i,\, i \in I^0], \quad A_1 := [a_k,\, k \notin I^0], \quad C_1 := (c_{ki})_{k \notin I^0, i \in I^0}.$$

Nach Lemma 2.2 ist die Matrix $\mathcal{A}_1 := (\alpha_{ik})_{i \in I^0, k \notin I^0}$ der (wesentlichen) Tableauelemente also gegeben durch

$$\mathcal{A}_1 = -C_1^T = -A_0^{-1} A_1.$$

Weiter genügt der Vektor $x^0 = (x_i^0)_{i \in I^0}$ der (wesentlichen) Komponenten der Ecke x^0 der Beziehung

$$x^0 = A_0^{-1} b,$$

und der Vektor $\gamma^1 = (\gamma_k)_{k \notin I^0}$ ist wegen

$$\gamma_k = \sum_{i \in I^0} \alpha_{ik} c_i + c_k, \quad k \notin I^0,$$

gegeben durch

$$\gamma^1 = (c^{0T} \cdot \mathcal{A}_1)^T + c^1 = -(c^{0T} \cdot A_0^{-1} A_1)^T + c^1$$

mit $c^0 = (c_i)_{i \in I^0}$ und $c^1 = (c_i)_{i \notin I^0}$.

Das sog. „revidierte Simplex-Verfahren" arbeitet nun wie folgt: Es sei eine Ecke x^0 mit Basis $\hat{B}(x^0) = \{a_i,\, i \in I^0\}$ erreicht und die zugehörige Inverse A_0^{-1} bekannt. Diese kann z. B. mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren in $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ a. Op. berechnet werden.

1. Der Vektor γ^1 wird aus

$$\lambda^T := c^{0T} \cdot A_0^{-1}, \quad \gamma^1 = c^1 - \lambda^T \cdot A_1$$

bestimmt. Zur Berecnung von λ^1 mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren sind $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ a. Op. erforderlich.

Existiert ein $q \notin I^0$ mit $\gamma_q < 0$, so wird ein Austauschschritt vorgenommen; andernfalls war x^0 bereits optimal.

2. Die q-te Spalte (Pivotspalte) von $\mathcal{A}_1$ wird aus

$$\alpha_q = -A_0^{-1} a_q \quad \Leftrightarrow \quad A_0 \alpha_q = -a_q$$

bestimmt. Gemäß der Auswahlregel (R) wird ein $p \in I^0$ ausgewählt; im Fall dass $\alpha_{iq} \geq 0$ $(i \in I^0)$ ist die Aufgabe unlösbar.

3. Zur neuen Indexmenge

$$\tilde{I}^0 := (I^0 \setminus \{p\}) \cup \{q\}$$

wird die Matrix $\tilde{A}_0^{-1}$ berechnet und damit der wesentliche Teil

$$\tilde{x}^0 = \tilde{A}_0^{-1} b$$

der neuen Ecke bestimmt.

Dieses Vorgehen ist im Vergleich zur ursprünglichen Form des Simplex-Verfahrens sparsamer hinsichtlich Rechenaufwand und Speicherplatzbedarf, da im Austauschschritt nicht die gesamte Matrix $\mathcal{A}_1$ neu berechnet wird. Die neue Inverse $\tilde{A}_0^{-1}$ erhält man aus A_0^{-1} durch einen „Austauschschritt“ in $\mathcal{O}(m^2)$ a. Op.:

$$A_0^{-1} = (\sigma_{ik})_{i \in I^0, k \notin I^0}, \quad \tilde{A}_0^{-1} = (\tilde{\sigma}_{ik})_{i \in \tilde{I}^0 . k \notin \tilde{I}^0}.$$

Lemma 2.4: *Die Elemente der Inversen* $\tilde{A}_0^{-1} = (\tilde{\sigma}_{ik})_{i \in \tilde{I}^0, k \notin \tilde{I}^0}$ *haben die Form*

$$\begin{aligned} i = q : &\quad \tilde{\sigma}_{qk} = -\frac{\sigma_{pk}}{\alpha_{pq}}, \quad k \notin \tilde{I}^0, \\ i \in \tilde{I}^0 \setminus \{q\} : &\quad \tilde{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{\alpha_{iq}\sigma_{pk}}{\alpha_{pq}}, \quad k \notin \tilde{I}^0. \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Beweis: Übungsaufgabe. Q.E.D.

Die direkte Berechnung von $\tilde{A}_0^{-1}$ mit Hilfe der Formeln (2.2.24) und die Matrix-Vektor-Multiplikation $\tilde{A}_0^{-1} y$ ist deutlich billiger als die andernfalls erforderliche Lösung von Gleichungssystemen mit der Koeffizientenmatrix $\tilde{A}_0$, was i. Allg. jeweils $\frac{1}{3}m^3 + \mathcal{O}(n^2)$ a. Op. kostet.

2.3 Anwendungen

Im Folgenden verwenden wir die bisher diskutierten Methoden zur Analyse und Lösung linearer Programme für zwei Klassen von Anwendungsproblemen.

2.3.1 Approximationstheorie

Wir betrachten eine Aufgabe der diskreten, linearen Tschebyscheff-Approximation:

- Gegeben: auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Funktionen $f \in C[a,b]$, $f_i \in C[a,b]$, $i = 1,\dots,m$, und Punkte $t_k \in [a,b]$, $k = 1,\dots,n$, mit $n > m$.
- Gesucht: Linearkombination $s = \sum_{i=1}^m x_i f_i$, mit der Eigenschaft

$$Q(x_1,\dots,x_m) := \max_{k=1,\dots,n} |s(t_k) - f(t_k)| \to \min! \qquad (2.3.25)$$

Die zugehörige „Interpolationsaufgabe“ $Q(x_1,\dots,x_m) = 0$ sei nicht lösbar.

In algebraischer Formulierung ist ein Koeffizientenvektor $x = (x_i)_{i=1}^m$ gesucht, als Lösung des Optimierungsproblems (ohne Vorzeichenrestriktion)

$$Q(x) := \|b - A^T x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} \Big| b_k - \sum_{i=1}^m a_{ik} x_i \Big| \to \min! \qquad (2.3.26)$$

mit

$$b = (b_k)_{k=1}^n, \quad b_k := f(t_k), \qquad A = (a_{ik})_{i,k=1}^{m,n}, \quad a_{ik} := f_i(t_k).$$

Diese Aufgabe kann wie folgt in ein äquivalentes lineares Programm umgeformt werden:

$$\begin{aligned} (A) \qquad x \in \mathbb{R}^{m+1}: \quad & x_{m+1} \to \min! \quad x_{m+1} \geq 0, \\ x_{m+1} + \sum_{i=1}^m a_{ik} x_i &\geq b_k, \quad k = 1,\dots,n, \\ x_{m+1} - \sum_{i=1}^m a_{ik} x_i &\geq -b_k, \quad k = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Lemma 2.5: *Das lineare Programm (A) ist lösbar.*

Beweis: Die zugehörige zulässige Menge M ist nicht leer, da alle $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit x_{m+1} hinreichend groß in ihr enthalten sind. In Standardform lautet die Aufgabe (A) wie folgt (nach Einführung von Hilfsvariablen $u_i,\ v_i,\ i = 1, \dots, m$, zur Erzeugung von Vorzeichenbedingungen):

$$\begin{aligned} -x_{m+1} &\to \max! \\ x_{m+1} \geq 0,\ u_i, v_i &\geq 0\ (i = 1, \dots, m), \\ -x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}(u_i - v_i) &\leq -b_k, \quad k = 1, \dots, n, \\ -x_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_{ik}(u_i - v_i) &\leq b_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Nach Korollar 1.1 hat diese Aufgabe eine Lösung. Q.E.D.

Wegen $b \notin \mathrm{Bild} A^T$ (Unlösbarkeit der zugehörigen Interpolationsaufgabe) gilt im Optimalpunkt stets $x_{m+1} > 0$. Mit Hilfe der Transformation

$$y_{m+1} := \frac{1}{x_{m+1}}, \quad y_i := -\frac{x_i}{x_{m+1}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

geht die Aufgabe (A) über in ($a_{m+1,k} := b_k$):

$$(\tilde{A}^*) \qquad y \in \mathbb{R}^{m+1}: \quad \begin{aligned} y_{m+1} &\to \max! \\ \sum_{i=1}^{m+1} a_{ik} y_i &\leq 1, \quad k = 1, \dots, n, \\ -\sum_{i=1}^{m+1} a_{ik} y_i &\leq 1, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet diese Aufgabe

$$(\tilde{A}^*) \qquad y \in \mathbb{R}^{m+1}: \quad \begin{aligned} &(0_m, 1)^T \cdot y \to \max! \\ &[A, -A]^T y \leq (1_m), \quad A := (a_{ik})_{i,k=1}^{m+1,n}. \end{aligned}$$

Sie ist dual zu der folgenden Optimierungsaufgabe für Variable $z^+, z^- \in \mathbb{R}^n$:

$$(\tilde{A}) \qquad z^+, z^- \in \mathbb{R}^n: \quad \begin{aligned} &(1_m)^T \cdot (z^+, z^-) \to \min!, \\ &z^+ \geq 0, \quad z^- \geq 0, \\ &[A, -A](z_k^+, z_k^-) = (0_m, 1), \end{aligned}$$

bzw. in ausgeschriebener Form:

$$(\tilde{A}) \qquad z_k^+, z_k^- \in \mathbb{R}^n: \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (z_k^+ + z_k^-) &\to \min!, \\ z_k^+ \geq 0,\ z_k^- &\geq 0, \quad k = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(z_k^+ - z_k^-) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{n} a_{k,m+1}(z_k^+ - z_k^-) &= 1. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe hat nach Satz 1.2 ebenfalls eine Lösung $(\hat{z^+}, \hat{z^-}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Dabei ist stets $\hat{z}_k^+ = 0$ oder $\hat{z}_k^- = 0$, denn im Fall $\delta := \min\{\hat{z}_k^+, \hat{z}_k^-\} > 0$ für ein k wären auch $\hat{z}_k^+ - \delta$, $\hat{z}_k^- - \delta$ zulässig und für die Zielfunktion gälte

$$\sum_{k=1}^n (\hat{z}_k^+ - \delta + \hat{z}_k^- - \delta) = \sum_{k=1}^n (\hat{z}_k^+ + \hat{z}_k^-) - 2n\delta < \sum_{k=1}^n (\hat{z}_k^+ + \hat{z}_k^-),$$

im Widerspruch zur Optimalität von $(\hat{z}_k^+, \hat{z}_k^-)$. Bei Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\hat{z}_k^+ \hat{z}_k^- = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

geht Aufgabe $(\tilde{A})$ also über in die folgende dazu äquivalente Optimierungsaufgabe für die Variablen $z_k := z_k^+ - z_k^-$, $k = 1, \dots, n$ (wegen $z_k^+ + z_k^- = |z_k|$):

$$(\tilde{\tilde{A}}) \qquad z \in \mathbb{R}^n : \qquad \sum_{k=1}^n |z_k| \to \min!$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} z_k = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{k,m+1} z_k = 1.$$

Für das Folgende formulieren wir die sog. „Haarsche[2] Bedingung" für die Approximationsaufgabe:

(H) *Jede* $(m \times m)$*-Teilmatrix von* A *ist regulär.*

Lemma 2.6: *Unter der Haarschen Bedingung (H) ist keine der Ecken des zulässigen Bereichs der Optimierungsaufgabe* $(\tilde{A})$ *entartet.*

Beweis: Angenommen, es existiert ein zulässiger Vektor mit weniger als $m+1$ von Null verschiedenen Komponenten. Dann gilt mit einer Indexmenge $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{k \in I} a_{ki}(z_k^+ - z_k^-) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Da nach der Bedingung (H) je m Zeilenvektoren von A linear unabhängig sein sollen, folgt notwendig

$$z_k^+ - z_k^- = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dies widerspricht aber der anderen Nebenbedingung

$$\sum_{k=1}^n a_{a,m+1}(z_k^+ - z_k^-) = 1.$$

Da es genau $m+1$ Nebenbedingungen gibt, sind also alle Ecken nicht entartet. Q.E.D.

[2] Alfréd Haar (1885–1933): Ungarischer Mathematiker; Prof. in Kolozsvár (Cluj), Budapest und Szeged; viele wichtige Beiträge zur Approximationstheorie ("Haarsche Bedingung") und Analysis auf Gruppen ("Haar measure").

Satz 2.5: *Ist die Haarsche Bedingung (H) erfüllt, so sind für eine Lösung der Optimierungsaufgabe (A) mindestens* $m+1$ *der Nebenbedingungen mit dem Gleichheitszeichen erfüllt.*

Beweis: Da bei jedem zulässigen Punkt von Aufgabe $(\tilde{A})$ mindestens $m{+}1$ Komponenten positiv sind, sind für jede Lösung der dazu dualen Aufgabe $(\tilde{A}^*)$ nach dem Gleichgewichtssatz für das kanonische Problem (Satz 1.4) mindestens $m+1$ der Nebenbedingungen mit dem Gleichheitszeichen erfüllt. Wegen der Äquivalenz von $(\tilde{A}^*)$ und (A) folgt somit die Behauptung. Q.E.D.

Die Aussage von Satz 2.5 ist das *diskrete* Analogon zum sog. „Alternantensatz“ der *kontinuierlichen* Tschebyscheff-Approximation.

Zusammenhang mit der „kontinuierlichen“ Tschebyscheff-Approximation

Die sog. (kontinuierliche) “Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe” bestimmt zu einer gegebenen Funktion $f \in C[a,b]$ eine bzgl. der Maximumnorm $\|f\|_\infty := \max_{[a,b]} |f|$ beste Approximation aus einem endlich dimensionalen Unterraum $S \subset C[a,b]$:

$$s \in S: \qquad \|f-s\|_\infty = \min_{\varphi \in S} \|f-\varphi\|_\infty. \tag{2.3.27}$$

Approximationsaufgaben vom Typ der Tschebyscheff-Approximation sind auch in sehr allgemeinem Rahmen lösbar.

Satz 2.6 (Allgemeine Tschebyscheff-Approximation): *Sei* E *ein normierter Vektorraum mit Norm* $\|\cdot\|$ *und* $S \subset E$ *ein endlich dimensionaler Teilraum. Dann gibt es zu jedem* $f \in E$ *eine beste Approximation* $s \in S$ *:*

$$\|f-s\| = \min_{\varphi \in S} \|f-\varphi\|. \tag{2.3.28}$$

Beweis: Ein $s_0 \in S$ mit $\|s_0\| > 2\|f\|$ kann keine beste Approximation sein, da

$$\|f-s_0\| \geq \|s_0\| - \|f\| > \|f\| = \|f-0\| \geq \inf_{\varphi \in S} \|f-\varphi\|.$$

Die beste Approximation ist also in der beschränkten Teilmenge

$$S_0 := \{\varphi \in S : \|\varphi\| \leq 2\|f\|\} \subset S$$

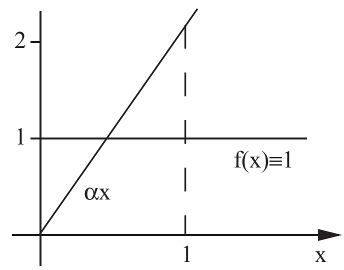
zu suchen. Sie ist abgeschlossen und, da S endlich dimensional ist, kompakt (Satz von Bolzano/Weierstraß). Die auf S stetige Funktion $F(\varphi) := \|f-\varphi\|$ nimmt dann auf S_0 ein Minimum g an, d. h.:

$$\|f-s\| = \min_{\varphi \in S_0} \|f-\varphi\| = \min_{\varphi \in S} \|f-\varphi\|.$$

Q.E.D.

Beispiel 2.3: Das Beispiel belegt neben der Existenz auch die mögliche Mehrdeutigkeit der "besten" Tschebyscheff-Approximation.

$$[a,b]=[0,1]\,,\quad f(x)\equiv 1$$
$$S=\{\,s|\,s(x)=\alpha x\,,\ \alpha\in\mathbb{R}\,\}\,,\quad \dim S=1$$
$$\|f-g\|_\infty\ge 1\quad \forall g\in S$$
$$\|f-g\|_\infty = 1\quad \forall g=\alpha x\,,\quad 0\le\alpha\le 2$$



Die Eindeutigkeit der Tschebyscheff-Approximation wird durch die sog. "Haarsche Bedingung" (H) an den Ansatzraum $S\subset C[a,b]$ mit $\dim S=n$ garantiert: Diese besagt, dass die Lagrangesche Interpolationsaufgabe $s(x_i)=y_i\,,\ i=1,\dots,n$ mit beliebigen Stützstellen $a\le x_1<x_2<\dots<x_n\le b$ und Werten $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ stets durch ein $s\in S$ lösbar ist. Sei $\{s_1,\dots,s_n\}$ eine Basis von S. Die Existenz eines interpolierenden $s=\sum a_i\,s_i\in S$ ist äquivalent zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^n a_i s_i(x_j)=y_j\,,\quad j=1,\dots,n, \tag{2.3.29}$$

für den Koeffizientenvektor $(a_i,\dots,a_n)^T$. Die Haarsche Bedingung ist also äquivalent zur Regularität der Matrix $(s_i(x_j))_{i,j=1,\dots,n}$ für beliebige Sätze von n Stützstellen $a\le x_1<x_2<\dots<x_n\le b$.

Beispiel 2.4: *Beispiele von Systemen S mit und ohnen Erfüllung der Haarschen Bedingung (H) sind:*

1. *Die Polynomräume P_n erfüllen die Haarsche Bedingung auf jedem Intervall $[a,b]$.*

2. *Der Raum $S=\mathrm{Span}\{x,\dots,x^n\}$ erfüllt im Falle $0\in[a,b]$ die Haarsche Bedingung nicht:*
$$x_1=0\ \Rightarrow\ x_1^k=0\,,\quad k=1,\dots,n\quad\Rightarrow\quad \det(x_i^j)_{i,j=1,\dots,n}=0.$$

Satz 2.7 (Tschebyscheffscher Alternantensatz): *Für den Teilraum $S\subset C[a,b]$ mit $\dim S=n$ sei die Haarsche Bedingung (H) erfüllt. Dann ist die Tschebyscheff-Approximation $s\in S$, einer Funktion $f\in C[a,b]$ durch folgende Eigenschaft charakterisiert:*

(A) Es existieren $m\ge n+1$ Stellen $a\le x_0<\dots<x_m\le b$ (sog. "Alternante"), so dass für die Fehlerfunktion $e(x)=f(x)-s(x)$ gilt:

$$|e(x_i)|=\|e\|_\infty\,,\quad e\,(x_i)=-e\,(x_{i+1})\,;\quad i=1,\dots,n\,. \tag{2.3.30}$$

Insbesondere ist die beste Approximation eindeutig bestimmt.

Beweis: Für den nicht trivialen Beweis der Alternantenaussage verweisen wir auf die Literatur, z. B.: G. Hämmerlin und K.-H. Hoffmann: Numerische Mathematik, 2. Auflage, Springer 1992. Q.E.D.

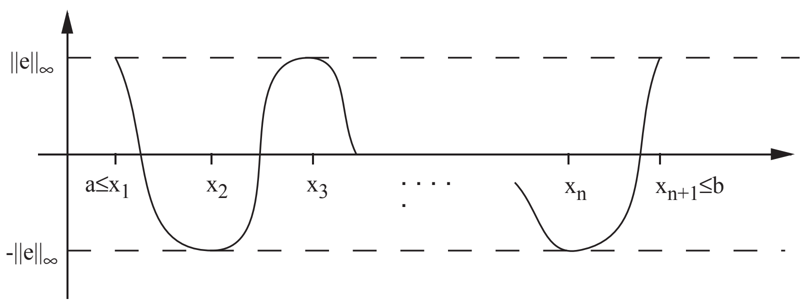


Abbildung 2.1: *Schema der Alternantenregel*

Korollar 2.1: *Der Alternantensatzes impliziert, dass die beste Approximation für den Spezialfall* $S = P_{n-1}$ *eindeutig bestimmt ist.*

Beweis: Seien s_1, s_2 zwei beste Approximationen mit $e_1 = f - s_1$, $e_2 = f - s_2$. Für $\lambda \in (0,1)$ ist dann $\|\lambda e_2\|_\infty < \|e_1\|_\infty$, so dass der Graph von $\lambda e_2(x)$ den von $e_1(x)$ mindestens n-mal schneidet (siehe Abbildung 2.1). Jede der Funktionen $\varphi_\lambda(x) = e_1(x) - \lambda e_2(x)$ hat also mindestens n Nullstellen. Durch Grenzübergang $\lambda \to 1$ folgt, dass $\varphi_1(x) = e_1(x) - e_2(x) = s_2(x) - s_1(x)$ mindestens n (ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählte) Nullstellen besitzt. Wegen $s_2 - s_1 \in P_{n-1}$ ergibt sich zwangsläufig $s_1 \equiv s_2$. Q.E.D.

Bemerkung 2.3: Der Alternantensatz ist die Grundlage des sog. "Remez[3]-Algorithmus" zur Konstruktion der Tschebyscheff-Approximation. Wäre eine Alternante $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ bekannt, so könnte man bei gegebener Basis $\{s_1, \dots, s_n\}$ von S die beste Approximation

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$$

sowie die Größe $\alpha_{n+1} := \sigma\|f - s\|_\infty$, $\sigma \in \{-1, 1\}$, aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(x_k) + (-1)^k \alpha_{n+1} = f(x_k), \quad k = 1, \dots, n+1,$$

[3]Evgeny Yakovlevich Remez (1896–1975): Russischer Mathematiker; Prof. an der Universität Kiew (1935); Beiträge zur konstruktiven Approximationstheorie ("Remez-Algorithmus") und zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen.

berechnen. Der Remez-Algorithmus besteht aus der systematischen iterativen Suche nach der Alternante $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. In jedem Schritt wird mit der Näherung $\{x_i^{(t)}, \dots, x_{n+1}^{(t)}\}$ das Gleichungssystem für $\alpha_1^{(t)}, \dots, \alpha_n^{(t)}$ und $\alpha_{n+1}^{(t)}$ gelöst und für

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(t)} s_i$$

das Optimalitätskriterium

$$\|f - s^{(t)}\|_\infty = |\alpha_{n+1}^{(t)}|$$

abgefragt. I. Allg. konvergiert $\{x_1^{(t)}, \dots, x_{n+1}^{(t)}\}$ gegen $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, allerdings nicht in endlich vielen Schritten. Im Gegensatz dazu haben wir oben gesehen, dass sich die *diskrete* Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe in endlich vielen Schritten mit Hilfe des Simplex-Verfahrens lösen lässt.

2.3.2 Spieltheorie

Wir wollen im Folgenden die Ergebnisse der vorausgehenden Abschnitte auf Probleme der Spieltheorie anwenden. Zunächst rekapitulieren wir Beispiel 0.2 (Knobelspiel) aus Abschnitt 0.5.

Beispiel 2.5 (Knobel-Spiel)): Das Knobel-Spiel „Stein-Schere-Papier“ mit den Wertigkeitsregeln

$$\text{Stein} > \text{Schere} > \text{Papier} > \text{Stein}$$

und

$$\text{gewonnen} = 1, \quad \text{unentschieden} = 0, \quad \text{verloren} = -1$$

führt als sog. „Matrixspiel“ auf die folge Tabelle (sog „Auszahlungstafel“ oder „Auszahlungsmatrix“ für Spieler P_1):

$P_1 \backslash P_2$	Stein	Schere	Papier
Stein	0	1	−1
Schere	−1	0	1
Papier	1	−1	0

Gesucht sind optimale Spielstrategien für beide Spieler.

Ein anderes Spiel ähnlicher Art ist das sog. „Skin-Spiel“:

Beispiel 2.6 (Skin-Spiel): Zwei Spielder P_1 und P_2 haben je drei Karten auf der Hand, und zwar P_1 die Karten Karo-Ass ($\diamondsuit$), Pik-Ass ($\spadesuit$), Karo-Zwei ($\diamondsuit\diamondsuit$) und P_2 die Karten Karo-Ass ($\diamondsuit$), Pik-Ass ($\spadesuit$), Pik-Zwei ($\spadesuit\spadesuit$). Beide Spieler legen jeweils zugleich eine ihrer Karten auf den Tisch. Spieler P_1 gewinnt, wenn die hingelegten Karten die gleiche Farbe haben, andernfalls Spieler P_2. Ein Ass hat den Wert 1, eine Zwei den

Wert 2. Die Höhe des Gewinns ist gleich dem Wert derjenigen Karte, die der Gewinner hingelegt hat. Das Resultat eines Spiels ist also durch die folgende Auszahlungstafel beschrieben:

$P_1\backslash P_2$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit\spadesuit$
$\diamondsuit$	1	-1	-2
$\spadesuit$	-1	1	1
$\diamondsuit\diamondsuit$	2	-1	-2

Wir nennen zunächst etwas unpräzise ein Spiel „fair“, wenn beide Spieler die gleichen Chancen haben, sonst „unfair“. Offensichtlich ist das Knobel-Spiel fair. Dagegen erscheint das Skin-Spiel unfair, da die Gewinnregeln nicht ausgeglichen sind. Dies gibt Anlass zur Formulierung der folgenden Zusatzregel: *Wenn beide Spieler die Zwei hinlegen, so gilt das Spiel unentschieden.*

Definition 2.2: *Ein „Matrixspiel“ ist ein Spiel mit zwei Spielern P_1, P_2 mit (endlichen Aktionsmengen) $\Sigma_1 = \{\sigma_i^1, i = 1,\dots,m\}$, $\Sigma_2 = \{\sigma_k^2, k = 1,\dots,n\}$, dessen Verlauf durch eine „Auszahlungsmatrix“ $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{m,n}$ bestimmt ist:*

$P_1\backslash P_2$	σ_1^2	$\cdots$	σ_n^2
σ_1^1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
σ_m^1	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}

Die „Spielregeln“ besagen, dass bei (gleichzeitiger) Ausübung der Aktionen σ_i^1 und σ_k^2 der Spieler P_2 an den Spieler P_1 den Betrag a_{ik} zahlen muss. Gegeben ist also die „Gewinntabelle“ für P_1. Da die entsprechende Gewinntabelle für P_2 mit der Matrix $-A$ gegeben wäre, nennt man Matrixspiele auch „(endliche) Zwei-Personen-Nullsummenspiele“. Das Spiel werde mehrfach wiederholt, wobei der Spieler P_1 die Aktion σ_i^1 mit der relativen Häufigkeit x_i verwendet:

$$0 \le x_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Definition 2.3: *Der Vektor $x = (x_i)_{i=1}^m$ der relativen Häufigkeiten von Aktionen heißt „Strategie“ des Spielers P_1. Ist eine Komponente von x gleich Eins und sind alle anderen gleich Null, so spricht man von einer „reinen“ Strategie.*

Verwenden die Spieler P_1, P_2 die jeweiligen Strategien $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, so ist der „Erwartungswert“ (durchschnittliche Wert) des „Gewinns“ von P_1 gegeben durch:

$$W_A := \sum_{i,k=1}^{m,n} a_{ik} x_i y_k = x^T \cdot Ay. \tag{2.3.31}$$

Lemma 2.7: *Es gilt stets*

$$\min_{i=1,\dots,m,\, k=1,\dots,n} a_{ik} \le W_A \le \max_{i=1,\dots,m,\, k=1,\dots,n} a_{ik}. \tag{2.3.32}$$

Beweis: Bei Beachtung von $0 \le x_i, y_k \le 1$ und $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ folgt

$$W_A = \sum_{i,k=1}^{m,n} a_{ik} x_i y_k \le \max_{i=1,\dots,m,k=1,\dots,n} |a_{ik}| \sum_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1,\dots,n} x_i y_k \le \max_{i=1,\dots,m,k=1,\dots,n} |a_{ik}|.$$

Die Abschätzung nach unten folgt analog. Q.E.D.

Bei Matrixspielen stellt sich die Frage nach sicherem, maximalem *Gewinn* für Spieler P_1 und entsprechend sicherem, minimalem *Verlust* für Spieler P_2.

Definition 2.4: *Ein Matrixspiel heißt „lösbar", wenn es ein Skalar $\mu_A \in \mathbb{R}$ und Strategien $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass*

$$x^T \cdot A\hat{y} \le \mu_A \le \hat{x}^T \cdot Ay \tag{2.3.33}$$

für alle möglichen Strategien $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Dabei heißen $\hat{x}, \hat{y}$ „optimale Strategien" für die Spieler P_1, P_2 und μ_A der „Wert" des Spiels. Im Fall $\mu_A = 0$ ist das Spiel „fair", sonst „unfair" mit Vorteil für Spieler P_1 im Fall $\mu_A > 0$.

Der folgende fundamentale Satz der Spieltheorie geht auf J. v. Neumann (1944) zurück.

Satz 2.8 (Matrixspiele): *Jedes Matrixspiel ist lösbar.*

Beweis: Mit den Mengen

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^m |\ x \ge 0,\ 1_m^T \cdot x = 1\}, \quad D_2 = \{y \in \mathbb{R}^n |\ y \ge 0,\ 1_n^T \cdot y = 1\}$$

der möglichen Strategien der Spieler P_1, P_2 setzen wir

$$g(y) := \max_{x \in D_1} x^T \cdot Ay, \qquad h(x) := \min_{y \in D_2} x^T \cdot Ay.$$

Die Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sind wohl definiert, da die Mengen D_1, D_2 kompakt sind. Die Ecken der zulässigen Bereiche D_1 und D_2 sind gerade die Punkte $x \ge 0$ und $y \ge 0$ der Form $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ bzw. $y = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, was anschaulich klar ist. Der Fundamentalsatz des Simplex-Verfahrens (Lemma 1.7) besagt, dass für festes y das Maximum in $g(y)$ in einer Ecke von D_1, d. h. für eine „reine" Strategie, angenommen wird. Also ist

$$g(y) = \max_{x \in D_1} x^T \cdot Ay = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k,$$

und analog

$$h(x) = \min_{y \in D_2} x^T \cdot Ay = \min_{k=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ik}.$$

Die Funktionen g und h sind stetig und nehmen daher auf den kompakten Mengen D_2 bzw. D_1 ihre Extremwerte an. Es gibt also $\hat{x} \in D_1$ und $\hat{y} \in D_2$, so dass

$$\begin{aligned} g(\hat{y}) &= \min_{y \in D_2} g(y) = \min_{y \in D_2} \max_{x \in D_1} x^T \cdot Ay =: \mu_2, \\ h(\hat{x}) &= \max_{x \in D_1} h(x) = \max_{x \in D_1} \min_{y \in D_2} x^T \cdot Ay =: \mu_1. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $\mu_1 = \mu_2$ ist. Dazu schreiben wir die obigen Gleichungen als lineare Optimierungsaufgaben:

$$\begin{aligned} (P) \qquad & x_0 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^m : \qquad x_0 \to \max!, \quad x \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ik} \geq x_0 \ \ (k = 1, \dots, n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P^*) \qquad & y_0 \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^n : \qquad y_0 \to \min!, \quad y \geq 0, \\ & \sum_{k=1}^{n} y_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \leq y_0 \ \ (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Offenbar sind $(\mu_1, \hat{x})$ und $(\mu_2, \hat{y})$ Lösungen von (P^*) bzw. (P), und jede solche Lösung hat die Eigenschaften von $\hat{x}$ bzw. $\hat{y}$. Wir schreiben Aufgabe (P) in kanonischer Form:

$$\begin{aligned} (\tilde{P}) \qquad & x_0^+, x_0^- \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^n : \qquad -x_0^+ + x_0^- \to \min! \\ & x_0^+ \geq 0,\ x_0^- \geq 0,\ x \geq 0,\ u \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ik} - x_0^+ + x_0^- - u_k = 0 \ \ (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

bzw. in abstrakter Schreibweise:

$$(\tilde{P}) \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^{2+m+n} : \quad c^T \cdot \tilde{x} \to \min!, \quad \tilde{A}\tilde{x} = b, \ \ \tilde{x} \geq 0,$$

mit

$$c := (-1, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{2+m+n}, \quad b := (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{1+n},$$

und

$$\tilde{A} := \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & 1_m & 0_n \\ \hline -1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & a_{ik} & -I_n \\ -1 & 1 & & \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(1+n)\times(2+m+n)}.$$

Die dazu duale Aufgabe hat die Form

$$(\tilde{P}^*) \quad \tilde{y} \in \mathbb{R}^{1+n}: \quad b^T \cdot \tilde{y} \to \max!, \quad \tilde{A}^T \tilde{y} \le c,$$

bzw. in unserem speziellen Fall:

$$(\tilde{P}^*) \qquad y_0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n: \qquad \begin{aligned} & y_0 \to \max! \\ & -\sum_{k=1}^n y_k \le -1, \quad \sum_{k=1}^n y_k \le 1, \quad -y_k \le 0 \ \ (k = 1, \dots, n) \\ & y_0 + \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \le 0 \ \ (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Wenn wir in $(\tilde{P}^*)$ die Variable y_0 durch $-y_0$ ersetzen, erhalten wir gerade die ursprüngliche Aufgabe (P^*). Der Alternativsatz für das kanonische Problem (Korollar 1.2) ergibt also die Gleichheit der Extremwerte von $(\tilde{P})$ und $(\tilde{P}^*)$ bzw. der von (P) und (P^*), d. h.:

$$\mu_1 = \mu_2 =: \mu_A.$$

Durch $\hat{x} \in D_1$ und $\hat{y} \in D_2$ sind dann auch optimale Strategien für die Spieler P_1 und P_2 gegeben. Für diese gilt wie verlangt:

$$\max_{x \in D_1} x^T \cdot A\hat{y} = \mu_A = \min_{y \in D_2} \hat{x}^T \cdot Ay.$$

Q.E.D.

Jedem Matrixspiel ist aufgrund von Satz 2.8 eindeutig ein Wert μ_A zugeordnet, an Hand dessen sich entscheiden lässt, ob das Spiel fair ist, bzw. welcher Spieler benachteiligt ist. Zugehörige optimale Strategien erhält man ebenfalls durch Lösung der zueinander dualen Programme (P) und (P^*). Wir wollen dies anhand der obigen Beispiele demonstrieren.

Beispiel 2.5 (Knobel-Spiel): Das Knobel-Spiel ist offenbar anti-symmetrisch (d. h.: $A = -A^T$) und folglich fair (Übungsaufgabe). Durch $x_0 = 0$, $x = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ und $y_0 = 0$, $y = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ sind zulässige Punkte der Aufgaben (P) und (P^*) gegeben. Wegen der Gleichheit der zugehörigen Zielfunktionalwerte sind dies auch Lösungen. Der Vektor $(1/3, 1/3, 1/3)^T$ ist also optimale Strategie beider Spieler P_1 und P_2.

Beispiel 2.6 (Skin-Spiel): Das Skin-Spiel mit der obigen Zusatzregel hat die Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass der Wert $\mu_A > 0$ ist, und gehen in (P) und (P^*) über zu den neuen Variablen $\bar{x} := x/x_0$, $\bar{y} := y/y_0$:

$$(\bar{P}) \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^m: \qquad -\sum_{i=1}^m \bar{x}_i \to \max!, \quad \bar{x} \ge 0, \ \ A^T \bar{x} \ge 1_n;$$

$$(\bar{P}^*) \qquad \bar{y} \in \mathbb{R}^n : \qquad -\sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k \to \min!, \quad \bar{y} \geq 0, \quad A\bar{y} \leq 1_m.$$

Bemerkung 2.4: Die Voraussetzung $\mu_A > 0$ ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Durch Addition einer hinreichend großen Konstante zu den Elementen der Auszahlungsmatrix erhält man eine neue Matrix

$$\tilde{A} = A + cE > 0.$$

Das zugehörige Matrixspiel hat dann sicher einen Wert $\mu_{\tilde{A}} > 0$ und ist „strategisch äquivalent" zum ursprünglichen Spiel, d. h.: Jede optimale Strategie des einen Spiels ist auch optimale Strategie des anderen.

Nach Einführung von Schlupfvariablen y_4, y_5, y_6 liefert der Simplex-Algorithmus angewendet auf die Aufgabe $(\bar{P}^*)$ die folgenden Tableaus:

	y_1	y_2	y_3	
y_4	-1	1	-2	1
y_5	1	$\boxed{-1}$	-1	1
y_6	-2	1	0	1
	-1	$\boxed{-1}$	-1	0

	y_1	y_5	y_3	
y_4	0	-1	1	2
y_2	1	-1	-1	1
y_6	$\boxed{-1}$	-1	-1	2
	$\boxed{-2}$	1	0	-1

	y_6	y_5	y_3	
y_4	0	-1	1	2
y_2	-1	-2	-2	3
y_1	-1	-1	-1	2
	2	3	2	-5

Lösung $\hat{y} = (2, 3, 0)^T$,

Extremwert $Q(\hat{y}) = -5$.

Hieraus entnehmen wir den Wert des Spiels als

$$\mu_A = -\frac{1}{\min} = \frac{1}{5}$$

und die optimale Strategie für Spieler P_2 als

$$\hat{y} = \frac{1}{5}\,(2, 3, 0)^T.$$

Wegen $\mu_A > 0$ ist das Skin-Spiel nicht „fair"; Spieler P_1 ist im Vorteil.

Da die Matrix $\tilde{A} = [A, e_1, e_2, e_3] \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ der kanonischen Formulierung von $(\bar{P}^*)$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ enthält, lässt sich eine Lösung des dazu dualen Problems

$$z \in \mathbb{R}^3 : \qquad \sum_{i=1}^{3} z_i \to \max!, \quad A^T z \leq -1_3, \quad z_i \leq 0 \ (i = 1, 2, 3),$$

direkt aus dem Endtableau ablesen (Übungsaufgabe):

$$z_1 = -(0, 3, 2)^T.$$

Durch $\hat{x} = \frac{1}{5}(0, 3, 2)^T$ ist also eine optimale Strategie für Spieler P_1 gegeben.

Bemerkung 2.5: Als Übung bestimme man den Wert des ursprünglichen Skin-Spiels ohne die obige Zusatzregel. Ist dieses Spiel wirklich unfair?

Bemerkung 2.6: Die lineare Optimierung kann als Spezialfall der Spieltheorie aufgefasst werden, denn die beiden dualen Standardprobleme (I), (I^*) sind in gewissem Sinne äquivalent zu einem Matrixspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1: Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Zur Lösung des Ungleichungssystems

$$(U) \qquad Ax \leq b$$

wird die folgende kanonische Optimierungsaufgabe betrachtet

$$(II) \qquad y \in \mathbb{R}^m,\ \eta \in \mathbb{R}: \qquad \eta \to \min!, \quad y \geq 0,\ \eta \geq 0, \quad A^T y = 0, \quad \eta - b^T \cdot y = 1.$$

Man zeige:

a) Problem (II) hat eine Lösung $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{\eta} \in \mathbb{R}$.

b) Ist (U) lösbar so folgt für jede Lösung $(\hat{y}, \hat{\eta})$ von (II) notwendigerweise $\hat{\eta} = 1$.

c) Ist $\hat{\eta} > 0$ und ist $\hat{z} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\xi} \in \mathbb{R}$ eine Lösung des zu (II) dualen Problems (II^*), so wird (U) durch $\hat{x} := \hat{z}/\hat{\xi}$ gelöst.

Aufgabe 2.2: a) Man wende den Gauß-Jordan-Algorithmus auf die folgende 3×3-Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Ergebnisses bestimme man alle $y \in \mathbb{R}^3$, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ eine Lösung besitzt, sowie die jeweilige Lösungsmenge.

b) Man implementiere den Gauß-Jordan-Algorithmus für allgemeine $m \times n$-Matrizen in einer Programmiersprache eigener Wahl und verifiziere damit die gefundene Lösung zu Teil (a).

Aufgabe 2.3: Man berechne mit Hilfe des Simplex-Verfahrens eine nicht-negative Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 6x_3 - 5x_5 &= 2, \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4: Man löse die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} Q(x) := x_1 + 3x_2 + x_3 &\to \max! \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 4, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Simplex-Verfahrens. (Hinweis: Man überführe das System durch Einführung von „Schlupfvarablen“ in Normalform und rate eine Startecke.)

Aufgabe 2.5: Man löse die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} Q(x) := 4x_1 + x_2 + x_3 &\to \min! \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Simplex-Verfahrens. Eine Startecke verschaffe man sich durch die Vorlaufrechnung (Phase I).

Aufgabe 2.6: Man berechne eine Lösung der *dualen Programmierungsaufgabe* zu dem oben betrachteten linearen Programm

$$\begin{aligned} Q(x) := x_1 + 3x_2 + x_3 &\to \max! \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.7: Man löse das lineare Programm

$$\begin{aligned} Q(x) := \tfrac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - 6x_4 &\to \max!, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \tfrac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 &\leq 0, \\ \tfrac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 + 3x_4 &\leq 0, \\ x_3 &\leq 1, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Simplex-Verfahrens unter Verwendung

a) der Auswahlregel (R), ergänzt um die Vorschrift, dass kleinste mögliche $p \in I^0$ zu wählen;

b) der Auswahlregel $(\tilde{R})$.

In beiden Fällen sei $q \notin I^0$ so bestimmt, dass $\gamma_q = \min\{\gamma_k | \, \gamma_k < 0, \; k \notin I^0\}$, und dass q der kleinste dieser Indizes ist.

c) Man implementiere Phase II des Simplex-Algorithmus für lineare Programme in Normalform für den Fall einer bekannten Startecke $x^{(0)} \in M$ und eines Ausgangstableaus. Man verifiziere damit die unter (a) bzw. (b) gefundene Optimallösung.

Aufgabe 2.8: Eine Ölgesellschaft habe die Ölquellen $Q_1, \ldots, Q_m$ mit den wöchentlichen Förderkapazitäten von $q_1, \ldots, q_m$ Barrel und betreibe gleichzeitig die Raffinerien $R_1, \ldots, R_n$ mit einem wöchentlichen Mindestbedarf von $r_1, \ldots, n_n$ Barrel. Die Kosten für die Förderung und den Versand von Q_i nach R_j seien k_{ij} pro Barrel.

a) Die Gesellschaft will Förderung und Verteilung kostenminimal gestalten:

i) Wie sieht das zu lösende lineare Programm aus?

ii) Man gebe eine Relation zwischen den q_i und den b_j an, welche die Existenz von zulässigen Vektoren sichert.

b) Eine Reederei macht der Ölfirma folgendes Angebot: Sie kauft die gesamte Produktion zum Preis von u_i pro Barrel an den Quellen Q_i auf und liefert den Raffinerien R_j die benötigten Mengen zum Preis von v_j pro Barrel. Das Angebot erscheint wegen $v_j - u_i \le k_{ij}$ günstig für die Ölfirma, und sie willigt in das Geschäft ein. Natürlich hat die Reederei die Preise so kalkuliert, dass ihr Gewinn maximal wird.

i) Welches lineare Programm musste die Reederei lösen?

ii) Macht die Ölfirma bei diesem Geschäft einen Gewinn?

Aufgabe 2.9: Man beweise die folgende Spezialisierung des Satzes aus dem Text über die Konstruktion einer Lösung des dualen Problems (II^*): *Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ eine vom Simplex-Algorithmus gelieferte Lösung der kanonischen Aufgabe*

$$(II) \qquad c^T \cdot x \to \min!. \quad Ax = b, \;\; x \ge 0,$$

d. h.: im Simplextableau gilt $\gamma_k \ge 0$ $(k \notin I^0)$. Sind unter den Spaltenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die m Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^m$, also z. B. $a_i = e_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, so erhält man direkt aus dem Simplextableau durch

$$y_i^0 := -\gamma_i + c_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

eine Lösung $y^0 \in \mathbb{R}^m$ der zugehörigen dualen Aufgabe

$$(II^*) \qquad b^T \cdot y \to \max!, \quad A^T y \le c.$$

Hierbei sei $\gamma_k = 0$ für $k \in I^0$ gesetzt.

Aufgabe 2.10: Man beweise Lemma 2.4 des Textes betreffend den Übergang von A_0^{-1} nach $\tilde{A}_0^{-1}$ beim Indexwechsel $\tilde{I}^0 := (I^0 \setminus \{p\}) \cup \{q\}$ im revidierten Simplex-Algorithmus: *Die Elemente der Inversen* $\tilde{A}_0^{-1} = (\tilde{\sigma}_{ik})_{i\in\tilde{I}^0, k\notin\tilde{I}^0}$ *haben die Form*

$$\begin{aligned} i = q: \quad & \tilde{\sigma}_{qk} = -\frac{\sigma_{pk}}{\alpha_{pq}}, \quad k \notin \tilde{I}^0, \\ i \in \tilde{I}^0 \setminus \{q\}: \quad & \tilde{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{\alpha_{iq}\sigma_{pk}}{\alpha_{pq}}, \quad k \notin \tilde{I}^0. \end{aligned}$$

(Hinweis: Die Identität $a_q = -\sum_{i\in I^0} \alpha_{iq} a_i$ könnte hilfreich sein.)

Aufgabe 2.11: a) Man löse das lineare Programm

$$\begin{aligned} Q(x) := 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &\to \max!, \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &\leq 100, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 80 \\ x_1 + x_3 + x_4 &\leq 50, \end{aligned}$$

mit Hilfe des revidierten Simplex-Algorithmus.

b) Man implementiere den revidierten Simplex-Algorithmus für lineare Programme in Normalform für den Fall einer bekannten Startecke $x^{(0)} \in M$ und eines Ausgangstableaus. Man verifiziere damit die unter (a) gefundene Optimallösung.

Aufgabe 2.12: Man rekapituliere den Beweis von Satz 2.5 des Textes, dass bei der diskreten Tschebyscheff-Approximation unter der Haarschen Bedingung das Minimum in mindestens $m+1$ Punkten angenommen wird. (Hinweis: Man beachte Lemma 2.6 des Textes.)

Aufgabe 2.13: Zwei Spieler P_1 und P_2 spielen „Stumme Mora“. Dies ist ein Spiel, bei dem die Spieler gleichzeitig eine gewisse Anzahl von Fingern einer Hand zeigen (keine Finger ist auch zulässig). Ist die Summe der gezeigten Fingerzahlen gerade, so gewinnt Spieler P_1, andernfalls P_2.

a) Man gebe die Auszahlungsmatrix für Spieler P_1 an.

b) Ist das Spiel fair? Man gebe optimale Strategien für Spieler P_1 und P_2 an.

Aufgabe 2.14: Man analysiere das Matrixspiel, welches durch die Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2.15: Ein Matrixspiel heißt „symmetrisch", wenn die Aktionenmengen Σ_1, Σ_2 der Spieler P_1, P_2 identisch sind, und wenn die Auszahlungsmatrix A schiefsymmetrisch ist, d. h.: $A = -A^T$. Man zeige, dass ein symmetrisches Spiel *fair* ist, und dass beide Spieler dieselbe optimale Startegie verwenden können.

Aufgabe 2.16: Man analysiere das Skin-Spiel ohne Pattregel, d. h.:

$P_1 \setminus P_2$	KA	PA	$P2$
KA	1	−1	−2
PA	−1	1	1
$K2$	2	−1	−2

auf Fairness und gebe optimale Strategien für Spieler P_1 und P_2 an.