A Lösungen der Übungsaufgaben

Im Folgenden sind Lösungen für die am Ende der einzelnen Kapitel formulierten Aufgaben zusammengestellt. Es handelt sich dabei nicht um „Musterlösungen“ mit vollständig ausformuliertem Lösungsweg, sondern nur um „Lösungsansätze“ in knapper Form.

A.1 Integralsätze

Lösung A.1.1: Die durch die drei Parametrisierungen des Einheitsbogens gegebenen Längen sind:

$$
\begin{aligned}
|\Gamma_\varphi| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt = 2\sqrt{2}\pi, \\
|\Gamma_\psi| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt = 2\sqrt{2}\pi, \\
|\Gamma_\xi| &= \int_0^{1} \sqrt{(\sin(2\pi t^3)6\pi t^2)^2 + (\cos(2\pi t^3)6\pi t^2)^2 + (6\pi t^2)^2}\, dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{2}6\pi t^2\, dt = 2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

Lösung A.1.2: Wir setzen $g(t) := t^a \cos(t^{-b}\pi)$.

i) Fall $a \le b$: Der zur Zerlegung

$$
Z_m := \{t_m = 0 < \cdots < t_k = k^{-1/b} < \cdots < t_0 = 1\}
$$

gehörende Polygonzug hat die Länge

$$
\begin{aligned}
|Z_m| &= \sum_{k=1}^{m} \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \ge \sum_{k=2}^{m-1} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=2}^{m-1} \big|k^{-a/b}\cos(k\pi) - (k-1)^{-a/b}\cos((k-1)\pi)\big| \ge \sum_{k=2}^{m-1} k^{-a/b}.
\end{aligned}
$$

Für $0 < a \le b$ divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^m k^{-a/b}$, d. h. die Kurve ist nicht rektifizierbar.

ii) Fall $a > b$: Es ist

$$
g'(t) = at^{a-1}\cos(\pi t^{-b}) + \pi b t^{a-b-1}\sin(\pi t^{-b}), \quad t > 0.
$$

Also ist $|g'(t)| \le ct^{\varepsilon-1}$ mit einer gewissen Konstante $c > 0$. Das Integral

$$
L := \int_0^1 \sqrt{1 + |g'(t)|^2}\, dt
$$

existiert also für $a > b$; im Fall $b < a < b+1$ als uneigentliches R-Integral. Für eine beliebige Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ gilt für die Länge des zugehörigen Polygonzugs:

$$|p_Z(\Gamma)| \le \|\varphi(t_1)\| + \int_{t_1}^{1} \sqrt{1 + |g'(t)|^2}\, dt \le 1 + L.$$

Also ist $\sup_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} |p_Z(\Gamma)| < \infty$, d. h.: Γ ist rektifizierbar.

Lösung A.1.3: i) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $|f'|$ R-Integrierbar, und für jede Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ gilt nach dem Mittelwertsatz mit gewissen Zwischenstellen $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$V_a^b(f;Z) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \Big| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \Big| = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) |f'(\tau_k)|.$$

Übergang zum Supremum bzgl. $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ ergibt $f \in BV(I)$ und

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

ii) Ist f nur stetig und in (a,b) stetig differenzierbar, so gilt nach wie vor mit $h_k := t_k - t_{k-1},\ h := \max_{k=1,\dots,m} h_k$:

$$\begin{aligned}
V_a^b(f;Z) &= \sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\
&= |f(t_1) - f(a)| + \sum_{k=2}^{m-1} \Big| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \Big| + |f(b) - f(t_{m-1})| \\
&= |f(t_1) - f(a)| + \sum_{k=2}^{m-1} |f'(\tau_k)|\, dt + |f(b) - f(t_{m-1})|.
\end{aligned}$$

Für eine Folge von Zerlegungen $Z = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b\}$ mit t_1, t_{m-1} fest und $\max_{k=2,\dots,m-1}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ konvergiert

$$\sum_{k=2}^{m-1} |f'(\tau_k)|\, dt \to \int_{t_1}^{t_{m-1}} |f'(t)|\, dt.$$

Da f' über I uneigentlich R-integrierbar sein soll, konvergiert

$$\int_{t_1}^{t_{m-1}} |f'(t)|\, dt \to \int_a^b |f'(t)|\, dt \quad (|Z| \to 0).$$

Wegen der Stetigkeit von f konvergiert

$$|f(t_1) - f(a)| + |f(b) - f(t_{m-1})| \to 0 \quad (|Z| \to 0).$$

Dies zusammen genommen impliziert die Beschränktheit von $V_a^b(f;Z)$, und damit $f \in BV(I)$, sowie

$$V_a^b(f) = \lim_{h \to 0} V_a^b(f;Z) = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

Lösung A.1.4: a) Vektorraum: Sei $f, g \in BV(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$:

$$\begin{aligned}
V_a^b(\alpha f + \beta g; Z) &= \sum_{k=1}^m |\alpha f(t_k) + \beta g(t_k) - \alpha f(t_{k-1}) - \beta g(t_{k-1})| \\
&\le \alpha \sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \beta \sum_{k=1}^m |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\
&\le \alpha V_a^b(f; Z) + \beta V_a^b(g; Z) \le \alpha V_a^b(f) + \beta V_a^b(g).
\end{aligned}$$

Also ist $\alpha f + \beta g \in BV(I)$, d. h.: $BV(I)$ ist ein Vektorraum.

b) Normeigenschaft: Für $f \in BV(I)$ ist offensichtlich $\|f\|_{BV} \ge 0$ sowie

$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_a^b(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv konst. = 0.$$

Ferner, für $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\|\alpha f\|_{BV} = |\alpha|\,|f(a)| + |\alpha| V_a^b(f) = |\alpha|\,\|f\|_{BV},$$

und

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{BV} &= |(f+g)(a)| + V_a^b(f+g) \\
&\le |f(a)| + |g(a)| + V_a^b(f) + V_a^b(g) = \|f\|_{BV} + \|g\|_{BV}.
\end{aligned}$$

c) Vollständigkeit: Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im normierten Raum $BV(I)$. Dann ist $(f_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit Limes $f(a) := \lim_{k\to\infty} f_k(a)$. Für jeden Punkt $t \in [a,b]$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f_k(t) - f_l(t)| &\le |f_k(t) - f_l(t) - f_k(a) + f_l(a)| + |f_k(a) - f_l(a)| \\
&\le V_a^b(f_k - f_l) + |f_k(a) - f_l(a)| = \|f_k - f_l\|_{BV},
\end{aligned}$$

d. h.: Auch $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit Limes $f(t) := \lim_{k\to\infty} f_k(t)$. Für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
V_a^b(f; Z) &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^m \lim_{k\to\infty} |f_k(t_j) - f_k(t_{j-1})| \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^m |f_k(t_j) - f_k(t_{j-1})| = \lim_{k\to\infty} V_a^b(f_k; Z) \le \lim_{k\to\infty} V_a^b(f_k) \le \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{BV}.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite beschränkt ist, folgt bei Supremumsbildung bzgl. Z, dass $f \in BV(I)$

ist. Dann gilt auch

$$\begin{aligned} V_a^b(f_k - f; Z) &= \sum_{j=1}^m |f_k(t_j) - f(t_j) - f_k(t_{j-1}) - f(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^m \lim_{l\to\infty} |f_k(t_j) - f_l(t_j) - f_k(t_{j-1}) - f_l(t_{j-1})| \\ &= \lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^m |f_k(t_j) - f_l(t_j) - f_k(t_{j-1}) - f_l(t_{j-1})| \\ &= \lim_{l\to\infty} V_a^b(f_k - f_l; Z) \le \lim_{l\to\infty} V_a^b(f_k - f_l) \end{aligned}$$

bzw. $V_a^b(f_k - f) \le \lim_{l\to\infty} V_a^b(f_k - f_l)$. Also konvergiert $V_a^b(f_k - f) \to 0\ (k \to \infty)$. Dies impliziert schließlich

$$\|f_k - f\|_{BV} = |(f_k - f)(a)| + V_a^b(f_k - f) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Lösung A.1.5: i) Wir berechnen zunächst die Bogenlängenfunktion

$$s(t) := \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\tau}\, d\tau = \int_0^t 1 + 2\tau\, d\tau = t + t^2.$$

Diese bildet das Intervall $[0,1]$ bijektiv auf $[0, |\Gamma|] = [0,2]$ ab. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$s^{-1}(t) = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{t + \tfrac{1}{4}}.$$

Damit ist die Parametrisierung bzgl. der Bogenlänge gegeben durch

$$\psi(t) = \varphi(s^{-1}(t)) = (-\tfrac{1}{2} + \sqrt{t + \tfrac{1}{4}}, t + \tfrac{1}{2} - \sqrt{t + \tfrac{1}{4}}, \tfrac{4}{3}\Big(-\tfrac{1}{2} + \sqrt{t + \tfrac{1}{4}}\Big)^{3/2}). \quad t \in [0,2].$$

ii) Die Krümmung ist dann gegeben als

$$\kappa(t) = \|\psi''(t)\|.$$

Wir bestimmen daher zunächst die Ableitungen

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \Big(\frac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{4}}}, 1 - \frac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{4}}}, \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}\Big) \\ \psi''(t) &= \Big(-\frac{1}{4}(t+\tfrac{1}{4})^{-3/2}, \frac{1}{4}(t+\tfrac{1}{4})^{-3/2}, \frac{-2(\sqrt{4t+1}-2)}{\sqrt{-2+2\sqrt{4t+1}}(4t+1)^{3/2}}\Big) \end{aligned}$$

und es folgt

$$\kappa(t)^2 = \frac{2}{(4t+1)^2(-1+\sqrt{4t+1})}$$

Lösung A.1.6: Der Ellipsenbogen besitzt die Parametrisierung

$$\varphi(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad t \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

Damit ist

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} x(t)y(t)\|\varphi'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt,$$

und nach Variablentansformation $u := \sin^2 t$ mit $du = 2\sin t\cos t dt$:

$$I(a,b) = \frac{ab}{2}\int_0^1 \sqrt{a^2u + b^2(1-u)}\,du = \frac{ab}{3}\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Lösung A.1.7: i) Test der Verträglichkeitsbedingung ergibt für $i,j = 1,2,3$ im Falle $x \in K^\circ$

$$\partial_i F_j = -\frac{4\pi}{3}\gamma\partial_i(\rho_0 x_j) = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0\delta_{ij} = -\frac{4\pi}{3}\gamma\partial_j(\rho_0 x_i) = \partial_j F_i\,,$$

sowie im Falle $x \notin K$

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i\,.$$

Auf jedem Sterngebiet G das entweder in K oder in K^c enthalten ist besitzt F also ein Potential U mit $F = -\nabla U$. Für dieses erhält man mit etwas Phantasie die Darstellung

$$U(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}\gamma\rho_0\|x\|^2 - \frac{6\pi}{3}\gamma\rho_0 R^2, & x \in K \\ -\frac{4\pi}{3}\gamma R^3\rho_0\frac{1}{\|x\|}, & x \notin K. \end{cases}$$

Da U stetig auf $\mathbb{R}^3$ ist, folgt die behauptete Wegunabhängigkeit.

ii) Die Verträglichkeitsbedingung ist eine *lineare* Beziehung für die Ableitungen von F . Es genügt daher, sie für die additiven Bestandteile von F einzeln nachzuprüfen. Für das Newtonsche Gravitationsfeld ist sie bereits im Text bestätigt worden. Analog gilt für $i,j = 1,2,3$ und $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$\partial_i \frac{x_j}{\|x\|^2} = \frac{\|x\|^2\delta_{ij} - 2x_jx_i}{\|x\|^4} = \partial_j \frac{x_i}{\|x\|^2}.$$

Auf dem Sterngebiet $\tilde{G} := \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x \le 0, x_2 = x_3 = 0\}$ besitzt F also ein Potential U mit $F = -\nabla U$, für welches man leicht die folgende Form findet:

$$U(x) = -\gamma\mu\left(\frac{1}{\|x\|} - \tilde{\gamma}\log(\|x\|)\right).$$

Dieses Potential kann nun wieder stetig differenzierbar auf die ganze Menge $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden, d. h.: F ist auf G konservativ.

Lösung A.1.8: Das Kurvenintegral einer Funktion $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\int_{\Gamma(a)} f(x)\,ds = \int_{-a}^{a} f(x(t))\|\varphi'(t)\|\,dt = \int_{-a}^{a} f(x(t))\sqrt{1+4t^2}\,dt.$$

Für $f \equiv 1$ ergibt sich wegen der Symmetrie des Integranden bei Substitution $u = 2t$ (Stammfunktion nach Bronstein Band I):

$$\begin{aligned}
|\Gamma(a)| &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1+4t^2}\,dt = 2\int_{0}^{a} \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_{0}^{2a} \sqrt{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\Big[u\sqrt{1+u^2} + \log\big(u+\sqrt{1+u^2}\big)\Big]_0^{2a} \\
&= \frac{1}{2}\Big(2a\sqrt{1+4a^2} + \log\big(2a+\sqrt{1+4a^2}\big) - 0\Big).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$|\Gamma(1)| = \frac{1}{2}\big(2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5})\big)$$

Weiterhin gilt:

$$S(a) = \frac{1}{|\Gamma(a)|}\int_{\Gamma(a)} x\,ds = \frac{1}{|\Gamma(a)|}\int_{\Gamma(a)} x(t)\|\varphi'(t)\|\,ds = \frac{2}{|\Gamma(a)|}\int_{-a}^{a}(t,t^2)\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

Wegen der Antisymmetrie des Polynoms $p(t) = t$ ist die x-Koodinate des Schwerpunkts

$$S_x(a) = \frac{1}{|\Gamma(a)|}\int_{-a}^{a} t\sqrt{1+4t^2}\,dt = 0.$$

Für die y-Koordinate gilt wieder wegen der Symmetrie des Integranden bei Substitution $u = 2t$ (Stammfunktion nach Bronstein Band I):

$$\begin{aligned}
S_y(a) &= \frac{1}{|\Gamma(a)|}\int_{-a}^{a} t^2\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{4|\Gamma(a)|}\int_{0}^{2a} u^2\sqrt{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{4|\Gamma(a)|}\Big[\frac{u}{4}(1+u^2)^{3/2} - \frac{1}{8}\Big(u\sqrt{1+u^2} + \log(u+\sqrt{1+u^2})\Big)\Big]_0^{2a} \\
&= \frac{1}{4|\Gamma(a)|}\Big[\frac{a}{2}(1+4a^2)^{3/2} - \frac{1}{8}\Big(2a\sqrt{1+4a^2} + \log(2a+\sqrt{1+4a^2})\Big) - 0\Big]. \\
&= \frac{\frac{a}{2}(1+4a^2)^{3/2} - \frac{1}{8}\Big(2a\sqrt{1+4a^2} + \log(2a+\sqrt{1+4a^2})\Big)}{2\Big(2a\sqrt{1+4a^2} + \log\big(2a+\sqrt{1+4a^2}\big)\Big)} \\
&= \frac{4a(1+4a^2)^{3/2} - \Big(2a\sqrt{1+4a^2} + \log(2a+\sqrt{1+4a^2})\Big)}{16\Big(2a\sqrt{1+4a^2} + \log\big(2a+\sqrt{1+4a^2}\big)\Big)}.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$S_y(1) = \frac{4\cdot 5^{3/2} - \Big(2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5})\Big)}{16\big(2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5})\big)}.$$

Lösung A.1.9: i) Sei M weg-zusammenhängend. Wäre nun $M = U \cup V$ eine nicht-triviale, disjunkte, relativ-offene Zerlegung, so ließen sich je zwei Punkte $x \in U$ und $y \in V$ durch eine Jordan-Kurve $\Gamma \subset M$ verbinden. Für jede Jordan-Parametrisierung $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ von Γ existiert die Inverse $\varphi^{-1} : \Gamma \to [a,b]$ und ist stetig. Dann wäre also $[a,b] = \varphi^{-1}(\Gamma \cap U) \cup \varphi^{-1}(\Gamma \cap V)$ eine nicht-triviale, disjunkte, relativ-offene Zerlegung von $[a,b]$. Eine solche kann es aber nicht geben, da das Intervall $[a,b]$ zusammenhängend ist.

ii) Sei nun M nur zusammenhängend. Für einen beliebigen Punkt $a \in M$ definieren wir die Menge

$$U := \{x \in M : \text{Es gibt einen Streckenzug in } M \text{ von } a \text{ nach } x\,.\}.$$

Mit M ist auch die Menge U offen, denn für jeden Punkt $x \in U$ gibt es eine offene Kugelumgebung $K_\varepsilon(x) \subset U$. Alle Punkte $y \in K_\varepsilon(x)$ lassen sich dann durch den Polygonzug $\overline{ax} \cup \overline{xy}$ mit dem Punkt a verbinden, d. h.: Es ist $K_\varepsilon(x) \subset U$. Analog erschließt man, dass auch die Menge $V := M \setminus U$ offen ist. Denn ist $x \in M \setminus U$, d. h. gibt es keinen x mit a verbindenden Polygonzug, so kann es auch für alle Punkte y aus einer Kugelumgebung $K_\varepsilon(x) \subset M$ keine mit a verbindenden Polygonzüge geben. Also ist $M = U \cup V$ eine disjunkte, offene Zerlegung. Da M nach Voraussetzung zusammenhängend ist, können nicht beide Komponenten U, V nicht leer sein. Wegen $a \in U$ ist folglich $V = \emptyset$, d. h.: $U = M$. Also kann jeder Punkt $x \in M$ durch einen Polygonzug mit dem (beliebigen) Punkt a verbunden werden, d. h.: M ist weg-zusammenhängend.

Lösung A.1.10: Mit Hilfe des Determinantenentwicklungssatzes folgt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{a} \times \mathrm{b}) \cdot \mathrm{c} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3) \\
&= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösung A.1.11: i) Sei $(x,z) \colon I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine Parametrisierung der Kurve C. Dann ist $\varphi \colon I \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(t,\theta) = (\cos(\theta)x(t), \sin(\theta)x(t), z(t))$$

eine Parametrisierung der Rotationsfläche. Es ist

$$\partial_t\varphi = (x'\cos\theta, x'\sin\theta, z'),\ \partial_\theta\varphi = (-x\sin\theta, x\cos\theta, 0)$$

und somit

$$\|\partial_t\varphi\| = \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad \|\partial_\theta\varphi\| = x(t), \quad \partial_t\varphi(t) \cdot \partial_\theta\varphi(t) = 0.$$

Also wird nach den Rechenregeln des Vektorprodukts

$$\|\partial_t\varphi \times \partial_\theta\varphi\|^2 = \|\partial_t\varphi\|^2\|\partial_\theta\varphi\|^2 - (\partial_t\varphi \cdot \partial_\theta\varphi)^2 = x(t)^2(x'(t)^2 + z'(t)^2).$$

Der Inhalt der Rotationsfläche ergibt sich folglich zu

$$\begin{aligned}|F_C| &= \int_M \|\partial_t\varphi \times \partial_\theta\varphi\|\, d(t,\theta) = \int_a^b \int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{x'(t)^2+z'(t)^2}\, d\theta\, dt \\ &= 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2+z'(t)^2}\, dt.\end{aligned}$$

Dasselbe Integral tritt auch auf bei der Berechnung des Schwerpunkts der Kurve C bei konstanter Massebelegung $\rho \equiv \rho_0$:

$$r_C = \frac{1}{\mu(C)} \int_a^b \rho x(t)\sqrt{x'(t)^2+z'(t)^2}\, dt, \quad \mu(C) = \rho_0|C|.$$

Kombination der letzten beiden Beziehungen ergibt die behauptete Gleichung.

ii) Zur Berechnen des Volumens des Rotationskörpers verfahren wir analog wie bei der Rotationsfläche. Sei F ein quadrierbares Gebiet in der „positiven" (x,z)-Ebene $(x \geq 0)$. Für den zugehörigen Rotationskörper $K_F \subset \mathbb{R}^3$ gilt bei Verwendung von Zylinderkoordinaten nach dem Satz von Fubini

$$|K_F| = \int_{K_F} d\mathrm{x} = \int_{F'\times[0,2\pi)} r\, d(r,z,\theta) = 2\pi \int_{F'} r\, d(r,z),$$

wobei F' die zu F kongruente Fläche in der (r,z)-Ebene ist. Die r-Koordinate des Schwerpunkts von F' ist gegeben durch

$$r_F = |F'|^{-1} \int_F r\, d(r,z).$$

Also folgt $|K_F| = 2\pi r_F|F'|$ und somit wegen $|F'| = |F|$ die 1. Guldinsche Regel.

Lösung A.1.12: a) Wir betrachten die als Graph der Funktion

$$z = \psi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad (x,y) \in B_\varepsilon = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{u^2+v^2} \leq 1-\varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

gegebene offene Fläche Γ_ε . Ihr Inhalt ist nach einem Resultat des Textes (Kor. 1.1)

$$\begin{aligned}|\Gamma_\varepsilon| &= \int_{B_\varepsilon} \sqrt{1+\partial_x f^2+\partial_y f^2}\, d(x,y) = \int_{B_\varepsilon} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\, d(x,y) \\ &= \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\, d\theta \\ &= -2\pi\sqrt{1-r^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2\pi\big(\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}-1\big).\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 2π . Der Inhalt der Einheitssphäre ist also 4π .

b) Nach der 2. Guldinschen Regel hat der von der Kurve C mit der Parametrisierung

$$\varphi(\theta) = (x(\theta), z(\theta)) := (\cos\theta, \sin\theta), \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

bei Rotation um die z-Achse erzeugte Rotationsfläche F_C den Inhalt

$$|F_C| = 2\pi r_C |C|,$$

mit dem Abstand r_C des Schwerpunkts von C von der z-Achse. Letzterer ist

$$|C| r_C = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, \|\varphi'(\theta)\| \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \, d\theta = \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

Die Länge der Kurve ist

$$|C| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\varphi'(\theta)\| \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi.$$

Der Inhalt der Einheitssphäre ergibt sich also zu 4π.

Lösung A.1.13: Der Gaußsche Integralsatz in $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\int_{F_\Gamma} \nabla \cdot v \, d\mathrm{x} = \int_{\partial F_\Gamma} v \cdot \mathrm{n} \, ds.$$

Anwendung für das Vektorfeld $v = (x, y)$ ergibt

$$2|F_\Gamma| = \int_{\partial F_\Gamma} (x n_x + y n_y) \, ds$$

und mit der Parametrisierung $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, der Randkurve:

$$2|F_\Gamma| = \int_a^b \big(\varphi_x(t) n_x(t) + \varphi_y(t) n_y(t)\big) \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Ein Normaleneinheitsvektor zu ∂F_Γ ist bzgl. der Parametrisierung mit t gegeben durch

$$\mathrm{n}(t) = \frac{(\varphi_y'(t), -\varphi_x'(t))}{\|\varphi'(t)\|}.$$

Dies ergibt

$$2|F_\Gamma| = \Big| \int_a^b \{\varphi_x(t)\varphi_y'(t) - \varphi_x'(t)\varphi_y(t)\} \, dt \Big|.$$

Lösung A.1.14: Die Divergenz des gegebenen Vektorfelds ist für $x^2 + y^2 \neq 0$:

$$\nabla \cdot F(x, y) = \nabla \cdot \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \Big) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Also existiert das Gebietsintegral links und hat den Wert

$$\int_M \nabla \cdot F(x, y) \, d(x, y) = 0.$$

Das Randintegral zerfällt in drei Komponenten, den Kreisviertelbogen $\Gamma_\circ$ mit der Parametrisierung $(x(\theta), y(\theta)) := (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, \pi/2]$, den x-Achsenabschnitt Γ_x sowie den y-Achsenabschnitt Γ_y. Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\circ} F(x(s), y(s)) \cdot \mathrm{n}(s)\, ds &= \int_0^{\pi/2} F(x(\theta), y(\theta)) \cdot \mathrm{n}(x(\theta), y(\theta)) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{x(\theta)}{x^2(\theta) + y^2(\theta)}, \frac{y(\theta)}{x^2(\theta) + y^2(\theta)} \Big) \cdot (y'(\theta), -x'(\theta))\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Auf den anderen beiden Randkomponenten gilt jeweils $F_x n_x = F_y n_y = 0$; sie liefern also keinen Beitrag zu dem Randintegral. Der Gaußsche Integralsatz gilt in diesem Fall also offensichtlich nicht. Dies liegt daran, dass das Vektorfeld F auf dem Bereich M zwar für $x^2 + y^2 \neq 0$ stetig differenzierbar, aber nicht (gleichmäßig) L-stetig ist. Wir sehen, dass man bei der naheliegenden Übertragung des Gaußschen Integralsatzes auf unbeschränkte und nur uneigentlich integrierbare Funktionen vorsichtig sein muss.

Lösung A.1.15: Die Divergenz des Vektorfeldes $v(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ ist $\nabla \cdot v \equiv 3$. Z ist ein Kreiszylinder mit Grundkreisradius 3 und Höhe 5. Z ist ein Normalgebiet. Daher ist der Gaußsche Integralsatz anwendbar:

$$\int_Z \nabla \cdot v\, d\mathrm{x} = \int_{\partial Z} v \cdot \mathrm{n}\, do.$$

Es ist

$$\int_Z \nabla \cdot v\, d\mathrm{x} = 3 \int_Z d\mathrm{x} = 3|Z| = 3 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 3^2 = 135\pi.$$

Auf der oberen Deckfläche $D_o := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9, z = 5\}$ des Zylinders ist $\mathrm{n} = (0, 0, 1)$ und somit (bei Beachtung von Symmetrien)

$$\int_{D_o} v \cdot \mathrm{n}\, do = \int_{x^2+y^2\le 9} (5 + x)\, d(x, y) = 5 \int_{x^2+y^2\le 9} d(x, y) = 5 \cdot \pi \cdot 3^2 = 45\pi.$$

Auf der unteren Deckfläche $D_u := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9, z = 0\}$ des Zylinders ist $\mathrm{n} = (0, 0, -1)$ und somit (bei Beachtung von Symmetrien)

$$\int_{D_u} v \cdot \mathrm{n}\, do = -\int_{x^2+y^2\le 9} x\, d(x, y) = 0.$$

Für den Zylindermantel $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 8, 0 \le z \le 5\}$ wählen wir die Parametrisierung $(x, y, z) = \varphi(\theta, z) := (3\cos\theta, 3\sin\theta, z)$, $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 5]$. Der zugehörige äußere Normalenvektor ist

$$\mathrm{n} = \partial_\theta \varphi \times \partial_z \varphi = (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0) \times (0, 0, 1) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_M v\cdot \mathrm{n}\, do &= \int_0^5\int_0^{2\pi} v(\varphi(\theta,z))\cdot(\partial_\theta\varphi\times\partial_z\varphi)\, d\theta\, dz\\ &= \int_0^5\int_0^{2\pi}(9+9\cos\theta\sin\theta+3z\sin\theta)\, d\theta\, dz = \int_0^5 18\pi\, dz = 90\pi.\end{aligned}$$

Also ist der Gaußsche Integralsatz für diesen Fall bestätigt.

Lösung A.1.16: i) Linearität: Wegen der Linearität der Differentiation ist

$$L(\alpha u+\beta v) = -\nabla\cdot(\rho\nabla(\alpha u+\beta v)) = -\alpha\nabla\cdot(\rho\nabla u) - \beta\nabla\cdot(\rho\nabla v) = \alpha Lu+\beta Lv$$

für $u,v\in C^2(\overline{G})$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, d.h.: der Operator $L:V\to C(\overline{G})$ ist linear.

ii) Für $u,v\in V$ gilt (in Anlehnung an den Beweis der Greenschen Formeln) durch zweimalige Anwendung des Gaußschen Satzes zunächst mit dem Vektorfeld $\rho\nabla u\, v$ und dann mit dem Vektorfeld $\rho u\nabla v$ und Beachtung von $u_{|\partial G} = v_{|\partial G} = 0$:

$$\begin{aligned}(Lu,v)_{L^2} &= -\int_G \nabla\cdot(\rho\nabla u)v\, d\mathrm{x}\\ &= -\int_G \nabla\cdot(\rho\nabla u\, v)\, d\mathrm{x} + \int_G \rho\nabla u\cdot\nabla v\, d\mathrm{x}\\ &= \int_{\partial G}\mathrm{n}\cdot\rho\nabla u\, v\, do + \int_G \rho\nabla u\cdot\nabla v\, d\mathrm{x} = \int_G \rho\nabla u\cdot\nabla v\, d\mathrm{x}\\ &= \int_G \nabla\cdot(u\rho\nabla v)\, d\mathrm{x} - \int_G u\nabla\cdot(\rho\nabla v)\, d\mathrm{x}\\ &= \int_{\partial G}\mathrm{n}\cdot(u\rho\nabla v)\, do - \int_G u\nabla\cdot(\rho\nabla v)\, d\mathrm{x}\\ &= -\int_G u\nabla\cdot(\rho\nabla v)\, d\mathrm{x} = (u,Lv)_{L^2}.\end{aligned}$$

iii) Für $u\in V$ gilt nach Teil (ii):

$$(Lu,u)_{L^2} = \int_G \rho|\nabla u|^2\, d\mathrm{x}\ge 0.$$

Ist nun $(Lu,u)_{L^2}=0$, so folgt wegen der Stetigkeit von $\rho|\nabla u|^2$ und $\rho|\nabla u|^2\ge 0$ notwendig $\rho|\nabla u|^2\equiv 0$. Wegen $\rho>0$ impliziert dies $\nabla u\equiv 0$, d. h.: $u\equiv \mathit{konst}$. Da aber $u_{|\partial G}=0$ ist, muss $u\equiv 0$ sein.

Lösung A.1.17: Wir betrachten $a(u,u)$. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und Verwendung von $u|_{\partial\Omega} = 0$ folgt

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \sum_{i=1}^3 \int \beta_i \partial_i u u \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int \beta_i \partial_i (u^2) \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int \partial_i \beta_i u^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \int \nabla \cdot \beta u^2 \, dx \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\nabla \cdot \beta \leq 0$ und somit folgt für beliebiges $u \in V$, dass $a(u,u) \geq 0$. Angenommen es ist $a(u,u) = 0$ für ein $u \in V$. Dann ist wegen $-\nabla \cdot \beta u^2 \geq 0$ auch $|\nabla u| = 0$ und somit (da Ω zusammenhängend) ist u konstant. Wegen $u|_{\partial\Omega} = 0$ folgt dann $u \equiv 0$.

Lösung A.1.18: Aus der Darstellung des Laplace-Operators in Polarkoordinaten

$$\Delta = \partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r + \tfrac{1}{r^2}\partial_\theta^2$$

angewendet auf die rotationssymmetrische Funktion $g(r,\theta) = \ln(r)$ folgt

$$\Delta g = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{r} + 0 = 0.$$

Analog zum 3d-Fall betrachten wir die Kreisringe $B_{\epsilon,\rho} := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < \epsilon \leq \|x\| \leq \rho\}$. Auf diesen ist g harmonisch, und auf den Zusammenhängs-Komponenten S_ϵ und S_ρ von $\partial B_{\epsilon,\rho}$ sind g und $\partial_n g$ Konstant ($S_\kappa := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x\| = \kappa\}$). Da f harmonisch ist folgt

$$\int_{\partial B_\kappa} \partial_n f \, do = \int_{B_\kappa} \Delta f \, dx = 0$$

für alle $\kappa > 0$ und die 2. Greensche Formel liefert

$$\begin{aligned} 0 = \int_{B_{\epsilon,\rho}} \Delta f g - f \Delta g \, dx &= \int_{\partial B_{\epsilon,\rho}} \partial_n f g - f \partial_n g \, do = -\int_{\partial B_{\epsilon,\rho}} f \partial_n g \, do \\ = \int_{S_\epsilon} f \frac{1}{\epsilon} - \int_{S_\rho} f \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Durch den Grenzübergang $\epsilon \to 0$ folgt wegen der gleichmässigen Stetigkeit von f unter Beachtung von $|S_\epsilon| = 2\pi\epsilon$

$$\left| \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{S_\epsilon} f \, do - f(0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{S_\epsilon} f - f(0) \, do \right| \leq \max_{x \in S_\epsilon} |f(x) - f(0)| \to 0.$$

Somit erhalten wir die Mittelwerteigenschaft

$$f(0) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B_\rho} f(x) \, dx.$$

Lösung A.1.19: Die auf den Körper wirkende Kraft ist (komponentenweise geschrieben)

$$F_{x/y/z} = \int_{\partial M} p(\mathrm{x}) n_{x/y/z}\, do = \int_{\partial M} \rho_0 z n_{x/y/z}\, do.$$

Wir wollen diese Flächenintegrale mit Hilfe des Satzes von Gauß in Volumenintegrale umwandeln. Dazu definieren wir die Vektorfelder $v^x := (\rho_0 z, 0, 0)$, $v^y := (0, \rho_o z, 0)$, $v^z := (0, 0, \rho_o z)$ mit $\nabla \cdot v^x \equiv \nabla \cdot v^y \equiv 0$, $\nabla \cdot v^z \equiv \rho_0$. Mit diesen ergibt sich

$$F_{x/y/z} = \int_{\partial M} \rho_0 z n_{x/y/z}\, do = \int_{\partial M} v^{x/y/z} \cdot \mathrm{n}\, do = \int_M \nabla \cdot v^{x/y/z}\, d\mathrm{x}.$$

Also ist $F = (0, 0, \rho_0 |M|)$, d. h.: Auf K wirkt eine Kraft senkrecht nach oben, deren Betrag gleich dem Gewicht $\rho_0|M|$ der verdrängten Flüssigkeit ist.

Lösung A.1.20: Der Stokes'sche Integralsatz lautet

$$\int_G (\nabla \times f)(\Phi(u,v)) \cdot (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi)(u,v)\, d(u,v) = \int_0^{|\gamma|} f(\psi(s)) \cdot \psi'(s)\, ds,$$

wobei Φ eine reguläre Parametrisierung der Fläche Γ und ψ die Parametrisierung des „Randes“ γ von Γ mit der Bogenlänge ist. Für das gegebene Vektorfeld $v(x,y,z) = (y, z, x)$ ist

$$\nabla \times v = (\partial_y v_z - \partial_z v_y, \partial_z v_x - \partial_x v_z, \partial_x v_y - \partial_y v_x) = (-1, -1, -1).$$

Die Fläche Γ hat die Parametrisierung $\Phi(x,y) = (x, y, x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \le 1$. Der Normalenvektor

$$\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (1, 0, 2x) \times (0, 1, -2y) = (-2x, 2y, 1).$$

zeigt nach „oben“, d. h. in Richtung wachsender z-Koordinate. Für das Flächenintegral erhalten wir so

$$\begin{aligned}
&\int_{x^2+y^2\le 1} (\nabla \times v(x, y, z(x,y)) \cdot (\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi)(x,y)\, d(x,y) \\
&\qquad = \int_{x^2+y^2\le 1} (2x - 2y - 1)\, d(x,y) = -\int_{x^2+y^2\le 1} d(x,y) = -\pi.
\end{aligned}$$

Für die Randkurve γ können wir wegen $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$ die folgende Parametrisierung verwenden:

$$\varphi(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) := (\cos\theta, \sin\theta, \cos(2\theta)),\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{|\gamma|} v(\psi(s)) \cdot \psi'(s)\, ds &= \int_0^{2\pi} v(\varphi(\theta)) \cdot \varphi'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin\theta, \cos(2\theta), \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, -2\sin\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\sin^2\theta + \cos(2\theta)\cos\theta - 2\cos\theta\sin(2\theta) \big)\, d\theta = -\pi.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Integrale über $\cos(2\theta)\cos\theta$ und $\cos\theta\sin(2\theta)$ Null sind. Also ist in diesem Fall der Stokes'sche Integralsatz erfüllt.

Lösung A.1.21: a) Die Wahl der euklidischen Norm ist „natürlich“, da sie im Gegensatz zu anderen Normen, wie z. B. der Maximumnorm oder der l_p-Normen für $p \neq 2$, invariant gegenüber Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (d. h. unitären Transformationen) des verwendeten Koordinatensystems ist:

$$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}: \quad Q^TQ = I \quad \Rightarrow \quad \|Qx\|_2^2 = (Qx,Qx)_2 = (Q^TQx,x)_2 = \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist eine unabdingbare Bedingung an einen sinnvollen „Längenbegriff“ für Kurven.

Lösung A.1.22: Ein Vektorfeld $v: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt „Gradientenfeld“, wenn es Gradient einer skalaren Funktion ist. Das durch

$$v = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big)$$

definierte Vektorfeld $v: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ erfüllt zwar die Verträglichkeitsbedingung

$$\partial_y v_x = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x v_y,$$

ist aber in der gelochten Ebene $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kein Gradientenfeld. Das Wegintegral entlang des geschlossenen Einheitskreises Γ mit der Parametrisierung $\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$, ist nämlich nicht Null sondern

$$\begin{aligned}\int_\Gamma v(x)\cdot \mathrm{ds} &= \int_0^{2\pi} v(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\Big\{\frac{y(t)\sin t}{x^2(t)+y^2(t)} + \frac{x(t)\cos t}{x^2(t)+y^2(t)}\Big\}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Ist v ein stetig differenzierbares Vektorfeld welches der Verträglichkeitsbedingung $\partial_i v_j = \partial_j v_i,\ i,j = 1,\dots,n$ genügt, ist dann D ein Sterngebiet, so ist v ein Gradientenfeld. Entsprechend ist v z. B. auf der Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ ein Gradientenfeld mit Stammfunktion $f := \arctan(y/x)$, denn

$$\nabla f = \Big(\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}, \frac{1/x}{1+(y/x)^2}\Big) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

Lösung A.1.23: Auf einer kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand wird das Vektorfeld $v(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ betrachtet. Für dieses ist $\nabla\cdot v = \partial_x x + \partial_y y \equiv 2$ und somit nach dem Satz von Gauß

$$|M| = \frac{1}{2}\int_M \nabla\cdot v(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} = \frac{1}{2}\int_{\partial M} v(\mathrm{x})\cdot \mathrm{n}\,ds.$$

Speziell für den Einheitskreis $\overline{K_1(0)}$ ist $\mathrm{n} = \mathrm{x} = v(\mathrm{x})$ entlang $\partial K_1(0)$ und somit, wie erwartet:

$$|K_1(0)| = \frac{1}{2}\int_{\partial K_1(0)} \mathrm{x}\cdot\mathrm{n}\,ds = \frac{1}{2}\int_{\partial K_1(0)} \|\mathrm{x}\|^2\,ds = \pi.$$

Fall $\mathbb{R}^3$: Ergibt eine analoge Rechnung $|K_1(0)| = \frac{1}{3}|\partial K_1(0)| = 4\pi$.

Lösung A.1.24: In der Parameter-(u, v)-Ebene sei G ein Gebiet, das von einer stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurve $\gamma = \partial G$ berandet wird; G hat also keine Löcher. Weiter sei $\psi(s) = (u(s), v(s))$, $0 \leq s \leq |\gamma|$, eine Parametrisierung von γ mit der Bogenlänge, welche eine positive Orientierung (im Gegenuhrzeigersinn) von γ erzeugt. Auf einer offenen Umgebung U des Abschlusses $\overline{G}$ sei $\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) : U \to \mathbb{R}^3$ eine stetige Abbildung derart, dass $\Phi(U)$ eine offene Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist. Wir betrachten die abgeschlossene Fläche $\Gamma = \Phi(\overline{G})$. Der Rand von Γ ist dann eine geschlossene, stückweise glatte Jordan-Kurve $C = \partial\Gamma$ mit der Parametrisierung

$$\mathrm{x} = \Psi(s) := \Phi(\psi(s)), \quad 0 \leq s \leq |\gamma|.$$

Satz von Stokes: Für eine abgeschlossene Fläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ mit zweimal stetig differenzierbarer Parametrisierung $\Phi : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ sollen die obigen Voraussetzungen gelten. Für ein auf einer offenen Umgebung V von Γ stetig differenzierbares Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ gilt dann:

$$\int_\Gamma (\nabla \times f(\mathrm{x})) \cdot \mathrm{n}(\mathrm{x})\, do = \int_{\partial\Gamma} f(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{ds},$$

bzw.

$$\int_G (\nabla \times f)(\Phi(u, v)) \cdot (\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi)(u, v)\, d(u, v) = \int_0^{|\gamma|} f(\Psi(s)) \cdot \Psi'(s)\, ds.$$

Spezialfall: Im speziellen Fall einer ebenen Fläche in der (x_1, x_2)-Ebene parametrisieren wir die Fläche durch die Abbildung $\Phi(u, v) = (u, v, 0)$. Entsprechend ist $\partial_u\Phi = (1, 0, 0)$ sowie $\partial_v\Phi = (0, 1, 0)$ und somit $\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi = (0, 0, 1)$. Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\int_G (\nabla \times f)(\Phi(u, v)) \cdot (\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi)(u, v)\, d(u, v) &= \int_G \partial_1 f_2(u, v, 0) - \partial_2 f_1(u, v, 0)\, d(u, v) \\ &= \int_G \nabla \cdot (f_2, -f_1)\, d(u, v).\end{aligned}$$

Eine äusseres Normalenfeld an G ergibt sich durch $n_G = (\partial_2\psi, -\partial_1\psi)$. Für das Randintegral ergibt sich folglich

$$\begin{aligned}\int_0^{|\gamma|} f(\Psi(s)) \cdot \Psi'(s)\, ds &= \int_0^{|\gamma|} f(\psi(s), 0) \cdot (D_1\psi, \partial_2\psi, 0)\, ds \\ &= \int_0^{|\gamma|} f_1(\psi(s), 0)\partial_1\psi + f_2(\psi(s), 0)\partial_2\psi\, ds \\ &= \int_0^{|\gamma|} (f_2, -f_1) \cdot n_G \|\psi'\|\, ds\end{aligned}$$

Wir erhalten also als Spezialfall die Aussage des Satzes von Gauß für das Vektorfeld $(f_2, -f_1)$.

A.2 Variationsaufgaben

Lösung A.2.1: Das Problem liegt darin, dass die Funktion $g(x,y)$ offenbar in $(x,y) = (0,0)$ nicht stetig ist. Für $y \neq 0$ sind aber dennoch die Integrale

$$f(y) = \int_0^1 g(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

als normale R-Integrale definiert. Für $y = 0$ ist sein Wert trivialerweise $f(0) = 0$. Dasselbe gilt für die Integrale über die Ableitung

$$\partial_y g(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 4xy^4}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^3}.$$

Also ist

$$f^*(0) = \int_0^1 \partial_y g(x,0)\,dx = 0.$$

Dagegen ergibt sich

$$f(y) = \int_0^1 \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{y^3}{x^2+y^2}\Big|_0^1 = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{1+y^2}$$

und folglich

$$f'(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(1+y^2)3y^2 - 2y^4}{(1+y^2)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Lösung A.2.2: Aus der Differenzierbarkeit folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big[\int_{\psi(y+h)}^{\varphi(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)\,dx\Big] &= \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx \\ &\quad + \frac{1}{h}\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \frac{1}{h}\int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x,y+h)\,dx.\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ geht die rechte Seite unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Intgeralrechnung in die folgende Form über:

$$\begin{aligned}... = &\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \partial_y f(x,y)\,dx + \lim_{h\to 0} f(\xi_1, y+h)\,\frac{\varphi(y+h)-\varphi(y)}{h} \\ &- \lim_{h\to 0} f(\xi_2, y+h)\,\frac{\psi(y+h)-\psi(y)}{h}.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung wegen $\lim_{h\to 0}\xi_1 = \varphi(y)$ und $\lim_{h\to 0}\xi_2 = \psi(y)$ und der Differenzierbarkeit von φ und ψ.

Lösung A.2.3: Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung eines Variationsfunktionals mit Funktion $f(t,x,q)$ lautet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}(t,u(t),u'(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,u(t),u'(t)) = 0, \quad t \in [a,b].$$

Im vorliegenden Fall ist $f(t,x,q) = \frac{1}{2}\big(p(t)q^2 + r(t)x^2\big) - f(t)x$. Damit ergeben sich die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}[p(t)u'(t)] - r(t)u(t) + f(t) = 0,$$

mit den Randbedingung $u(a) = 0,\ u(b) = 0$, bzw. als Sturm-Liouville-Aufgabe:

$$-[pu']'(t) + r(t)u(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \quad u(a) = 0,\ u(b) = 0.$$

Wegen $p(t) \ge \rho > 0$ und $r(t) \ge 0$ besitzt diese RWA nach einem Satz des Textes eine eindeutig bestimmte Lösung.

Lösung A.2.4: O.B.d.A. betrachten wir nur den Fall $x_0 = 0$ und $\delta = 1$. In den Gebieten $B := B_1(0)$ sowie $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}$ ist die Funktion $\varphi := \varphi_1$ zum einen als Exponentialfunktion und zum anderen als Nullfunktion offensichtlich beliebig oft (stetig) differenzierbar. Es bleibt, den differenzierbaren Übergang für $\|x\| \to 1$ zu zeigen. Die Ableitungen der Funktion $\varphi(x) = \exp(\|x\|^2/(1-\|x\|^2))$ sind von der Gestalt (Multiindexschreibweise)

$$D^\alpha \varphi(x) = \varphi(x)\frac{p_\alpha(x)}{(1-\|x\|^2)^{2m}}, \quad |\alpha| = m,$$

mit gewissen Polynomen $p_\alpha(x)$. Für jede rationale Funktion $p(t)$ und Zahl $\gamma > 0$ gilt:

$$p(t)e^{-\gamma t} \to 0 \quad (t \to \infty),$$

was man sich leicht mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel klar macht. Mit $t := (1-\|x\|^2)^{-1}$ ergibt dies:

$$D^\alpha \varphi(x) \to 0 \quad (\|x\| \uparrow 1),$$

d. h. die Stetigkeit der Ableitung $D^\alpha \varphi$.

Lösung A.2.5: Für die betrachtete Riemann-integrierbare Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gelte

$$\int_a^b g(t)\varphi(t)\,dt = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Angenommen, es gäbe einen Stetigkeitspunkt $t_0 \in [a,b]$ von g mit $g(t_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von g in t_0 gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(t_0) - g(t)| > \tfrac{1}{2}|g(t_0)| \quad \forall t \in I := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [a,b].$$

O.B.d.A. ist also $g(t) > 0$ auf I. Man wähle nun eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ mit Träger in I und $\varphi > 0$ auf I^0 (Zur Existenz von φ siehe eine der früheren Aufgaben). Dann ist

$$\int_a^b g(t)\varphi(t)\,dt = \int_I g(t)\varphi(t)\,dt > 0$$

im Widerspruch zur Annahme.

Lösung A.2.6: Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung eines Variationsfunktionals mit Funktion $f(t,x,q)$ lautet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}(t,u(t),u'(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,u(t),u'(t)) = 0, \quad t \in [a,b].$$

Im vorliegenden Fall ist $f(t,x,q) = \big(1{+}q^2\big)^{p/2}$. Damit ergeben sich die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\Big(\big(1+u'(t)^2\big)^{p/2-1}u'(t)\Big) = 0,$$

mit den Randbedingung $u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta$, bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= \big(1+u'(t)^2\big)^{p/2-1}u''(t) + (p-2)\big(1+u'(t)^2\big)^{p/2-2}u'(t)^2u''(t) \\ &= \big(1+u'(t)^2\big)^{p/2-2}\big(1+u'(t)^2+(p-2)u'(t)^2\big)u''(t) \\ &= \big(1+u'(t)^2\big)^{p/2-2}\big(1+(p-1)u'(t)^2\big)u''(t). \end{aligned}$$

Wegen $p \geq 1$ erfüllt jede C^2-Lösung dieser Gleichung $u''(t) = 0$ und ist folglich linear. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt sich als (eindeutigen) Lösung $u(t) = \frac{b-t}{b-a}\alpha + \frac{t-a}{b-a}\beta$. Diese Lösung ist erstaunlicherweise unabhängig von p. Im Fall $p = 2$ ergibt sich die lineare Sturm-Liouville-Aufgabe

$$u''(t) = 0, \quad t \in [a,b], \quad u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,$$

und im Fall $p = 1$ die Aufgabe

$$\frac{u''(t)}{\big(1+u'(t)^2\big)^{3/2}} = 0, \quad t \in [a,b], \quad u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta.$$

Lösung A.2.7: Das „Dirichletsche Prinzip“ besagt: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet und $g : \partial G \to \mathbb{R}$ irgendeine stetige Randfunktion. Dann gibt es unter den Funktionen der Menge

$$V_g(G) := \big\{\varphi \in C^1(G) \cap C(\overline{G}),\ \nabla u \in L^2(G)^n,\ \varphi_{|\partial G} = g\big\}$$

eine, $u \in V_g(G)$, welche dem Dirichletschen Integral den kleinsten Wert verleiht, d.h.

$$D[u] = \inf\{D[\varphi],\ \varphi \in V_g(G)\},$$

und u ist eine sog. „Potentialfunktion“, d. h. Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial G.$$

Eine harmonische Funktion $u \in V_g$ (d. h.: $v\Delta u = 0$) die die gegebenen Randwerte erfüllt ist $u(x,y) = xy$. Das diese auch ein Minimierer in V_g ist folgt sofort, denn sei $\tilde u$ ein Minimierer in $u + H_0^1(\Omega) \supset V_g$ (die Existenz eines solchen ist klar nach Text), so erfüllen sowohl u wie auch $\tilde u$ die Euler-Lagransche Gleichung, d. h. für jedes $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ist

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega \nabla \tilde u \nabla \varphi\, dx = 0.$$

Da $u - \tilde u \in H_0^1(\Omega)$, folgt

$$\|\nabla(u-\tilde u)\|^2 = \int_\Omega \nabla u \nabla(u-\tilde u)\, dx - \int_\Omega \nabla \tilde u \nabla(u-\tilde u)\, dx = 0$$

und somit ist $u = \tilde u$.

A.3 Das Lebesgue-Integral

Lösung A.3.1: Wegen der Bewegungsinvarianz und Additivität des äußeren L-Maßes genügt es, die Behauptung für die Viertelebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n,\, x_1 \ldots, x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$ zu zeigen. Wir betrachten die abzählbar vielen Intervalle

$$I_{i_1 \ldots i_{n-1}} := [i_1 - 1, i_1] \times \ldots \times [i_{n-1} - 1, i_{n-1}] \times \{0\},\ i_1, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{N},$$

deren Vereinigung H überdeckt. Wegen der σ-Additivität des L-Maßes folgt

$$0 \leq \mu^*(H) \leq \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}=1}^{\infty} \mu(I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}) = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Lösung A.3.2: i) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist A endlich oder $X \setminus A$ endlich. Also ist $X \setminus A$ endlich oder $X \setminus (X \setminus A) = A$ endlich, d. h.: Es ist auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Sei weiter $A, B \in \mathcal{A}$. Ist A oder B unendlich, so ist auch $A \cup B$ unendlich und damit $X \setminus (A \cup B) \subset X \setminus A \cap X \setminus B$ endlich, also $A \cup B \in \mathcal{A}$. Sind A und B endlich, so müssen $X \setminus A$ und $X \setminus B$ beide unendlich sein. Dann ist auch $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ unendlich, also $A \cup B \in \mathcal{A}$. Nach Lemma 3.3. des Textes ist daher $\mathcal{A}$ eine Algebra.

ii) Wegen der Unendlichkeit von X gibt es eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Elementen in X. Dann ist $A := \{x_{2k},\, k \in \mathbb{N}\}$ unendlich und auch $X \setminus A$ unendlich. Also ist $A \notin \mathcal{A}$. Aber $A = \cup_{k \in \mathbb{N}} \{x_{2k}\}$ ist abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen d.h. von Mengen aus $\mathcal{A}$. Folglich ist $\mathcal{A}$ nicht abgeschlossen gegenüber abzählbare Vereinigung und daher keine σ-Algebra.

Lösung A.3.3: i) Wir weisen die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nach:
- $x \sim x$, da $x - x = 0 \in \mathbb{Q}^n$.
- Aus $x \sim y$ folgt $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}^n$ und somit $y \sim x$.
- Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x - z = x - y + y - z \in \mathbb{Q}^n$ und somit $x \sim z$.

ii) Sei $[x] = x + \mathbb{Q}^n$ die Äquivalenzklasse eines beliebigen $x \in \mathbb{R}^n$. Dann enthält

$$[0,1]^n - x = [-x_1, 1 - x_1] \times \ldots \times [-x_n, 1 - x_n]$$

abzählbar viele Elemente $y_i \in \mathbb{Q}^n$. Für diese gilt $y_i + x \in [0,1]^n \cap [x]$. Der Einheitswürfel $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ enthält also aus jeder der Äquivalenzklassen von $\sim$ abzählbar unendlich viele Elemente.

iii) Angenommen $x \in (r+A) \cap (s+A)$. Dann gibt es $a, b \in A$ mit $x = r+a$ und $x = s+b$. Dann folgt $a - b = s - r \in \mathbb{Q}^n$, also $a \sim b$. A enthält aus jeder Äquivalenzklasse nur ein Element; also folgt $a = b$ und damit $r = s$.

iv) Sei $x \in [0,1]^n$ beliebig und $a \in A \cap [x]$. Dann ist $a \sim x$, also $x - a =: r \in \mathbb{Q}^n$. Wegen $x, a \in [0,1]^n$ folgt für die Koordinaten $-1 \leq r_i = x_i - a_i \leq 1$, also $x = r + a \in S$. Ist nun $x \in S$, d.h. es gibt $a \in A \subset [0,1]^n$ und $r \in Q^n \cap [-1,1]^n \subset [-1,1]^n$ mit $x = a + r$, so ist notwendig $x \in [0,1]^n + [-1,1]^n = [-1,2]^n$.

v) Wäre die Menge A Lebesgue-messbar, hätten wegen der Translationsinvarianz des L-Maßes auch die Mengen $r+A$ das gleiche Maß. Wäre $\mu(A)=0$, so wäre wegen der σ-Additivität auch $\mu(S)=0$, im Widerspruch zu $[0,1]^n \subset S$. Wäre $\mu(A)>0$, so kann wegen der σ-Additivität S kein endliches Maß haben, im Widerspruch zu $S\subset[-1,2]^n$.

Lösung A.3.4: i) Die Menge $A := [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist abzählbar und daher nach Lemma 3.2 des Textes L-Nullmenge, d. h. L-messbar. Wäre A J-quadrierbar, so müsste nach Lemma 3.1. des Textes $|A|_i = |A|_a = \mu^*(A) = 0$ sein. Da nun A dicht im Intervall $[0,1]$ liegt, muss jede *endliche* Intervallüberdeckung von A notwendig das ganze Intervall $[0,1]$ überdecken (Man überlege sich hierfür einen Beweis.), was $|A|_a \geq 1$ impliziert. Also kann A nicht J-quadrierbar sein.

ii) Die gegebene Funktion f ist, wie bereits im Band Analysis 1 gezeigt worden war, in allen irrationalen Punkten unstetig. Wäre f R-integrierbar, so müsste die Menge B ihrer Unstetigkeitsstellen L-Nullmenge sein. Wegen $[0,1] = \big([0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\big)\cup\big([0,1]\cap\mathbb{Q}\big)$ und $\mu^*([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0$ kann $[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ aber keine Nullmenge sein. Folglich ist f nicht R-integrierbar.

iii) Die Ordinaten Menge M_f der Funktion $f(x) := x^{-1/2}$ ist darstellbar als die abzählbare, disjunkte Vereinigung der beschränkten Mengen

$$A_k := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \, x\in(\tfrac{1}{k+1},\tfrac{1}{k}],\, 0\leq y\leq x^{-1/2}\big\}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Die Mengen A_k sind J-quadrierbar und folglich auch L-messbar mit dem J-Inhalt bzw. dem L-Maß

$$\mu(A_k) = |A_k| = \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big).$$

Da die Menge der L-messbaren Mengen eine σ-Algebra bildet, ist auch die Menge $M_f = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ L-messbar mit dem L-Maß

$$\mu(M_f) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\mu(A_k) = \lim_{m\to\infty}\Big(2 - \frac{2}{\sqrt{m+1}}\Big) = 2.$$

Lösung A.3.5: i) Es ist $A = \cup_n A_n$ mit den messbaren Mengen $A_n := A\cap[0,n]\times[-1,1]$. Damit ist A messbar, und es ist, da $A_n\subset A_{n+1}$,

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Die Mengen A_n sind J-quadrierbar, und da e^{-x} auf $[0,n]$ R-Integrierbar sind ist

$$\mu(A_n) = |A_n| = 2\int_0^n e^{-x}\,dx = -2e^{-x}|_0^n = -2e^{-n}+2 \to 2 \quad (n\to\infty).$$

ii) Die Menge $A = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\times\mathbb{R}$. Die Hyperebenen $\{q\}\times\mathbb{R}$ sind messbar mit Maß Null. Folglich ist auch A messbar, und wegen der σ-Additivität ist

$$\mu(A) = \sum_{q\in\mathbb{Q}}\mu(\{q\}\times\mathbb{R}) = 0.$$

iii) Die Menge $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]\times[-n,n]$ ist als Vereinigung von messbaren Mengen messbar, und es ist

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty.$$

Lösung A.3.6: a) Da f L-integrierbar ist, sind die Mengen $B_k := \{x \in D : f(x) \geq 1/k\}$ L-messbar. Da f f. ü. in D positiv ist, gibt es eine Nullmenge N mit $D = N \cup (\cup_k B_k)$. Es muss nun ein $k \in \mathbb{N}$ geben mit $\mu(B_k) > 0$, sonst wäre nämlich wegen der σ-Subadditivität des äußeren L-Maßes auch $\mu(D) = 0$. Wegen der Monotonie des L-Integrals folgt mit der charakteristischen Funktion χ_{B_k} von B_k:

$$\int_D f(x)\,dx \geq \frac{1}{k}\int_D \chi_{B_k}\,dx = \frac{1}{k}\mu(B_k) > 0.$$

b) Nach (a) muss im Fall $\int_D |f(x)|\,dx = 0$ notwendig $f(x) = 0$ f. ü. in D sein. Umgekehrt folgt aus $f(x) = 0$ f. ü. in D trivialerweise $\int_D |f(x)|\,dx = 0$, denn die Integrale zweier Funktionen (hier f und die Nullfunktion), welche sich nur in einer Nullmenge unterscheiden, stimmen überein.

Lösung A.3.7: Die Aussage ist falsch, denn es gibt dichte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit L-Maß Null. Z. B. stimmt die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap D}$ auf der dichten Teilmenge $\mathbb{Q}\cap D$ von D mit der Funktion $f \equiv 1$ überein. Es ist aber

$$\int_D \chi_{\mathbb{Q}\cap D}(x)\,dx = 0 \neq \mu(D) = \int_D f(x)\,dx.$$

Lösung A.3.8: $D = \mathbb{R}$ ist L-messbar und $D = [0,1]$ ist L-messbar und J-quadrierbar. In allen drei Beispielen haben die Funktionen f_k nur endlich viele Unstetigkeitsstellen. Sie sind also zumindest auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ L- und R-integrierbar. Die Funktionen in (ii) sind auf $\mathbb{R}$ L-integrierbar und uneigentlich R-integrierbar.

i) Die Funktionenfolge erfüllt sämtliche Voraussetzungen aller drei Sätze. Sie konvergiert monoton, und die Integralfolge ist beschränkt:

$$\int_D f_k(x)\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Funktion $g \equiv 1$ ist eine auf $[0,1]$ integrierbare Majorante. Die Folge der f_k konvergiert überall gegen die charakteristische Funktion $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ und daher f. ü. gegen die Nullfunktion. Damit ist das L-Integral über den Limes gleich dem Limes der Integrale:

$$\int_D f(x)\,dx = 0 = \lim_{k\to\infty}\int_D f_k(x)\,dx.$$

ii) Die Funktionenfolge erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes von Beppo Levi, außer der monotonen Konvergenz. Die Folge der Integrale ist konstant

$$\int_D f_k(x)\,dx = 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionenfolge konvergiert überall in D gegen die Nullfunktion (sogar gleichmäßig). Das Integral über den Limes ist also nicht gleich dem Limes der Integrale. Natürlich kann die Folge der f_k dann auch keine integrierbare Majorante besitzen, denn alle anderen Voraussetzungen des Satzes von Lebesge sind erfüllt. Beim Lemma von Fatou sind alle Voraussetzungen erfüllt. In diesem Beispiel gilt das echte "<"-Zeichen:

$$\int_D \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = 0 < 2 = \liminf_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\,dx.$$

iii) Für Beispiel (iii) gilt dasselbe wie für Beispiel (ii), außer dass die Konvergenz gegen Null hier nur noch f. ü., nämlich bis auf $\xi = 0$, und auch nicht gleichmäßig erfolgt.

Aus (i) ersehen wir, da $f(x) = \lim_k f_k(x) = \liminf_k f_k(x)$ weder R-integrierbar, noch uneigentlich R-Integrierbar ist, dass die drei Sätze in dieser Form nicht für das R-Integral gelten können. Sie bleiben jedoch richtig, wenn die Existenz eines geeigneten Grenzwertes als Voraussetzung gefordert wird (vgl. Band Analysis 1, Satz 6.19 und 6.20).

Lösung A.3.9: Die Funktion f hat nach der Regel von L'Hospital in $x = 0$ den Limes $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$, ist also beschränkt.

i) Wenn f L-integrierbare wäre, müsste auch $|f|$ L-integrierbar sein. Dies ist aber nicht der Fall, denn zu jeder Zerlegung $Z^* = \{B_i^*\} \in \mathcal{Z}(D)$ gibt es eine Verfeinerung $Z = \{B_j\}$, so dass auf gewissen der B_j gilt $\sup_{x\in B_j} |f(x)| = 1/j$. Für die zugehörigen Obersummen gilt also:

$$\overline{S}_{Z^*}(|f|) \ge \overline{S}_Z(|f|) \ge \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty.$$

Die Funktion f erfüll also nicht die Bedingung (Z).

ii) Die Funktion f ist auf D *uneigentlich* R-integrierbar. Um dies zu sehen, berechnen wir mit partieller Integration für $k \ge 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^k \frac{\sin(x)}{x}\,dx &= \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx + \int_1^k \frac{\sin(x)}{x}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx - \frac{\cos(x)}{x}\Big|_1^k + \int_1^k \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Da die Funktion $g(x) = \cos(x)/x^2$ über $[1,\infty)$ uneigentlich R-integrierbar ist, folgt die Konvergenz

$$\int_0^k \frac{\sin(x)}{x}\,dx \to I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \quad (k\to\infty).$$

iii) In mehr als einer Dimension wird zur Sicherung der Eindeutigkeit des *uneigentlichen* R-Integrals, d. h. seiner Unabhängigkeit von der Wahl der ausschöpfenden Folge, noch die Zusatzbedingung

$$\sup_{M\subset Q_f} \int_M |f(x)|dx < \infty, \qquad Q_f := \{M \subset D:\ M \text{ quadrierbar und } f \text{ R-integrierbar}\}$$

gestellt. Diese Bedingung ist aber im vorliegenden Fall nicht erfüllt, d. h.: Das zu untersuchende Integral ist in diesem engeren Sinne *nicht* uneigentlich R-integrierbar.

Lösung A.3.10: Die Funktionen $|f|, \sin(f)$ sind L-integrierbar (Lemma des Textes), die Funktionen f^2, fg aber i. Allg. nicht. Gegenbeispiele sind

$$\Omega = (0,1),\ f = x^{-1/2}$$

sowie

$$\Omega = (1,\infty),\ f = x^{-2}, g = x^2$$

Lösung A.3.11: Es ist $\int_{\mathbb{R}} \delta_k = 1$. Ferner ist $0 \leq \delta_k \leq Ck$ und $\delta_k(x) = 0$ falls $|x| > 1/k$. Somit folgt

$$(f,\delta_k)_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_k(x)\,dx = \int_{-1/k}^{k} f(x)\delta_k(x)\,dx$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen der Stetigkeit von f in Null gibt es ein $k_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass:

$$f(0) - \epsilon \leq f(x) \leq f(0) + \epsilon, \quad \forall\, |x| < 1/k_\epsilon.$$

Somit folgt für $k \geq k_\epsilon$

$$f(0) - \epsilon \leq (f,\delta_k) \leq f(0) + \epsilon$$

und somit die Behauptung.

A.4 Anwendungen des Lebesgue-Integrals

Lösung A.4.1: Die Stetigkeit von f ist klar, da f Komposition stetiger Funktionen ist. Wegen $h(\mathbb{R}) \subset [0,1]$ ist auch $0 \leq f \leq 1$ klar. Sei nun $x \in K^c_{2\delta/3}$, bzw. $d(x) = \operatorname{dist}(x,K) \geq 2\delta/3$, dann ist nach Definition $f(x) = h(d(x)) = 0$. Für $x \in K_{\delta/3}$, bzw. $d(x) < \delta/3$, folgt $f(x) = h(d(x)) = 1$.

b) Da ψ einen kompakten Träger besitzt, ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi\Big(\frac{x-y}{\delta/6}\Big)\,dy = \int_{\{(x-y)\in 6/\delta\,\operatorname{supp}(\psi)\}} f(y)\psi\Big(\frac{x-y}{\delta/6}\Big)\,dy.$$

Insbesondere ist das Integral ein R-Integral, und nach dem Satz über die Differentiation von parameterabhängigen Integralen ist $\varphi_\delta \in C^\infty(\Omega)$ (Dies sollte bei Bedarf ausgeführt werden, da das Integrationsgebiet noch von x abhängt!).

Durch Substitution $y \mapsto x - \delta/6y$ erhalten wir

$$\varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \tfrac{\delta}{6}y)\psi(y)\,dy.$$

Somit folgt, da $f, \psi \geq 0$:

$$0 \leq \varphi_\delta(x) \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\,dy = 1.$$

Sei nun $x \in K^c_{5/6\delta}$ dann ist für $y \in K_1(0)$ notwendig $x - \delta/6y \in K^c_{2/3\delta}$ und somit ist $f(x - \delta/6y) = 0$. Es folgt

$$\varphi_\delta(x) = \int_{K_1(0)} f(x - \tfrac{\delta}{6}y)\psi(y)\,dy + \int_{K_1(0)^c} f(x - \tfrac{\delta}{6}y)\psi(y)\,dy = 0 + 0$$

und somit $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ da $\overline{K_{5/6\delta}} \subset \Omega$.

Sei nun $x \in K$. Dann ist für $y \in K_1(0)$ notwendig $x - \delta/6y \in K_{1/3\delta}$ und somit ist $f(x - \delta/6y) = 1$. Es folgt

$$\varphi(x) = \int_{K_1(0)} f(x - \tfrac{\delta}{6}y)\psi(y)\,dy = 1.$$

Lösung A.4.2: i) Zunächst sei $O \subset \Omega$ eine beliebige beschränkte, offene Menge. Nach der vorherigen Aufgabe gibt es dann zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(O) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_\epsilon(x) = 1$ falls $x \in A_\epsilon := \{x \in O | \operatorname{dist}(x, \partial O) \geq \epsilon\}$ und $0 \leq \varphi_\epsilon \leq 1$ auf Ω. Da $|\varphi_\epsilon g| \leq \chi_O |g|$ und $\varphi_\epsilon g \to \chi_O g$ punktweise f. ü., gilt nach dem Satz von Lebesgue zur majorisierten Konvergenz und Voraussetzung an g:

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega g(x)\varphi_\epsilon(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\chi_O(x)\,dx = \int_O g(x)\,dx\,.$$

ii) Sei nun im Widerspruch zur Behauptung $g \neq 0$ auf einer Teilmenge $A \subset \Omega$ mit $\mu^*(A) > 0$; o.B.d.A. sei $g > 0$ auf A und A beschränkt angenommen. Da $g \in L^1(\Omega)$ und somit messbar ist, ist o.B.d.A. auch A messbar. Es gilt dann mit einer Konstante $\gamma > 0$:

$$\int_A g(x)\,dx \geq \gamma > 0$$

Für beliebige $\varepsilon > 0$ seien $O_\varepsilon \subset \Omega$ offene Teilmengen mit $\mu(O_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$. Nach dem in (i) Gezeigten gilt dann

$$0 = \int_{O_\varepsilon} g(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx + \int_{O_\varepsilon \setminus A} g(x)\,dx \geq \gamma + \int_{O_\varepsilon \setminus A} g(x)\,dx.$$

Wegen

$$\int_{O_\varepsilon \setminus A} g(x)\,dx \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

ergibt sich ein Widerspruch.

Lösung A.4.3: a) Die Vektorraumeigenschaft ist klar, da endliche Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind. Ebenso klar sind Homogenität, positive Semi-Definitheit die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_\infty$. Ferner ist nach Definition $\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ f. ü. in Ω.

Wir haben also nur noch die Vollständigkeit des Quotientenraumes $L^\infty(\Omega)$ zu zeigen. Sei also f_k eine Cauchy-Folge in $L^\infty(\Omega)$ (Wir verwenden der Einfachheithalber die selbe

Bezeichnung für die Äquivalenzklasse wie für den gewählten Representanten). Es gibt, da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, eine Nullmenge N und eine Konstante C, so dass für $x \in \Omega \setminus N$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_l(x)| &\leq \|f_k - f_l\|_\infty \to 0 \quad (k, l \to \infty) \\ |f_k(x)| &\leq \|f\|_\infty \leq C < \infty \quad \forall k \end{aligned}$$

Wir definieren also

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_k(x) & x \in \Omega \setminus N, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese ist messbar, wesentlich beschränkt und nach Definition ist $\|f_k - f\|_\infty \to 0$.

b) Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ liegt nicht dicht in $L^\infty(\Omega)$, da die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_{L^\infty}$ dieselbe wie die bzgl. $\|\cdot\|_{C^0}$ ist (daher auch dasselbe Symbol). Es ist aber $C_0^\infty(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ und somit $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subset \overline{C^0(\overline{\Omega})} = C^0(\overline{\Omega})$ da $C^0(\overline{\Omega})$ vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist. Es gibt jedoch unstetige Funktionen in $L^\infty(\Omega)$. Sei z. B. $\Omega = (-1, 1)$ so ist $f(x) = \operatorname{sign}(x) \in L^\infty(\Omega) \setminus C^0(\overline{\Omega})$.

Lösung A.4.4: a) Aufgrund des Satzes von Fischer-Riesz (Parsevallsche Identität) ist für $f \in L^2(0, 2\pi)$ die Folge der Fourier-Koeffizienten quadratisch summierbar. Es bleibt also nur noch die Umkehrung zu zeigen. Seien also die Fourier-Koeffizienten $c_k = (f, e_k)$ quadratisch summierbar. Dann definiert

$$g := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$$

ein Element in $L^2(0, 2\pi)$, denn

$$\Big\| \sum_{|k|\geq N}^{M} c_k e_k \Big\|^2 = \sum_{|k|\geq N}^{M} |c_k|^2 \to 0 \quad (N, M \to \infty)$$

und somit konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ normal in L^2. Es ist dann $(g - f, e_k) = 0$ für alle k und somit, da $\operatorname{span}(e_k)$ dicht in L^2 auch $g - f = 0$ f.ü. was zu zeigen war.

b) Da für beliebige beschränkte Gebiete Ω gilt, dass $C_0^\infty(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ folgt $\overline{C^0(0, 2\pi)}^{\|\cdot\|_2} = L^2(0, 2\pi)$. Die Funktionen e^{ikx} lassen sich auf $(0, 2\pi)$ gleichmässig durch Polynome approximieren (Taylor-Reihe), d.h.

$$\operatorname{span}\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\} \subset \overline{\operatorname{span}\{1, x, x^2, \dots\}}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

Da die Norm $\|\cdot\|_\infty$ stärker als die Norm $\|\cdot\|_2$ ist (d. h.: Für $f \in L^\infty(0, 2\pi)$ ist $\|f\|_2 \leq 2\pi\|f\|_\infty$), folgt

$$L^2(0, 2\pi) = \overline{\operatorname{span}\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}}^{\|\cdot\|_2} \subset \overline{\operatorname{span}\{1, x, x^2, \dots\}}^{\|\cdot\|_2} \subset \overline{C^0(0, 2\pi)}^{\|\cdot\|_2} = L^2(0, 2\pi).$$

Durch Transformation folgt

$$\overline{\operatorname{span}\{1, x, x^2, \dots\}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(-1, 1)$$

da diese Eigenschaft unter Basiswechseln invariant ist folgt dass die orthonomalisierten Polynome ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2(-1,1)$ bilden.

Die Aussage von Teil a) bleibt auch für dieses Orthonormalsystem richtig.

Bemerkung: Dass $\overline{\operatorname{span}\{1,x,x^2,\dots\}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(-1,1)$ folgt sofort, ohne den Umweg über die Taylor-Reihe von e^{ikx}, aus dem „Approximationssatz von Weierstrass“, da

$$\operatorname{span}\{1,x,x^2,\dots\} \subset C^0([-1,1])$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ dicht liegt.

Lösung A.4.5: a) Die Aussage ist falsch; siehe Gegenbeispiel in einer Bemerkung des Textes.

b) Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachte man die Folge $f_k(x) = \frac{\chi_{[-k,k]}}{\sqrt{k}}$.

c & d) Die Aussagen sind richtig, denn sei $f \in L^p(\Omega)$. Dann gilt f. ü.

$$|f(x)|^{p'} \le |f(x)|^p + 1$$

Da die rechte Seite in $L^1(\Omega)$ liegt, ist dann $|f(x)|^{p'} \in L^1(\Omega)$ und somit $f \in L^{p'}(\Omega)$.

e) Die Aussage ist falsch, da z. B. $\min(1, 1/|x|) \in L^2(\mathbb{R})$ aber $\min(1, 1/|x|) \notin L^1(\Omega)$.

Lösung A.4.6: a) Da $|f(x)|^p \le \|f\|_\infty^p$ f. ü., folgt $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Ferner gilt:

$$\int_\Omega |f|^p \, dx \le \mu(\Omega)\|f\|_\infty^p.$$

Umgekehrt ist für $\kappa > 0$

$$\int_\Omega |f|^p \, dx \ge \mu(\{|f| \ge \kappa\})\kappa^p.$$

Somit folgt

$$\mu(\{|f| \ge \kappa\})^{\frac{1}{p}}\kappa \le \|f\|_p \le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty.$$

Ist nun $\kappa < \|f\|_\infty$, so ist $\mu(\{|f| \ge \kappa\}) > 0$ und es folgt durch Grenzübergang $p \to \infty$

$$\kappa \le \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \le \limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$$

und damit durch $\kappa \to \|f\|_\infty$ die Behauptung.

b) Nach Teil (a) wissen wir $\cap_{p\in[1,\infty)} L^p(\Omega) \supset L^\infty(\Omega)$. Um also Ungleichheit zu zeigen. suchen wir eine Funktion f, die in jedem $L^p(\Omega)$ mit $p < \infty$ liegt, die aber nicht beschränkt ist. Hierzu betrachten wir $\Omega = (-1,1)$ und $f(x) = \ln(|x|)$. Zunächst ist klar, dass $f \notin L^\infty(\Omega)$. Da gilt $|\ln(|x|)||x|^{\frac{1}{2p}} \to 0$ für $x \to 0$ (Regel von L'Hospital), ist somit $|\ln(|x|)|^p \le \frac{c}{\sqrt{|x|}} \in L^1(\Omega)$. Damit haben wir gezeigt, dass $f \in L^p(\Omega)$ für alle $p < \infty$.

Die Aussage von a) kann auf unbeschränkten Gebieten i. Allg. nicht gelten, da in diesem Fall $L^\infty(\Omega) \not\subset L^p(\Omega)$ (sofern $\mu(\Omega) = \infty$). Um dies einzusehen, betrachte man auf einem Gebiet Ω mit $\mu(\Omega) = \infty$ die Funktion $1 \in L^\infty(\Omega)$. Es ist aber $1 \notin L^p(\Omega)$ für $p < \infty$.

Lösung A.4.7: Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ gegeben. Da $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, gibt es eine Folge $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|f - f_k\|_2 \leq 1/k$. Damit gilt dann für die Fourier-Transformierten $\hat{f}_k \in L^2(\mathbb{R})$, dass für $k < l$ gilt:

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|_2 = \|f_k - f_l\|_2 \leq \|f_k - f\|_2 + \|f_l - f\|_2 \leq 2/k.$$

Die Folge $\hat{f}_k$ hat also einen Limes $\hat{f}$ in $L^2(\mathbb{R})$ mit $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Die Fourier-Transformation ist also als lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$ wohldefiniert mit Norm eins. Die Injektivität der Abbildung ist klar. Durch Wiederhohlung der obigen Argumentation auf die Inverse-Abbildung folgt die Surjektivität.

Lösung A.4.8: a) Dies ist wegen $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n k|a_k|^2$ nach dem Majorantenkriterium klar.

b) Sei also a^i eine beschränkte Folge in $l^{1/2,2}(\mathbb{N})$. Es gibt also ein $C > 0$, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k|a_k^i|^2 \leq C$. Damit ist dann für jedes $i, m \in \mathbb{N}$ notwendig

$$\sum_{k=m}^\infty |a_k^i|^2 \leq \sum_{k=m}^\infty \frac{k}{m}|a_k^i|^2 \leq \frac{C}{m}.$$

Um nun eine konvergente Teilfolge in l^2 zu konstruieren, zeigen wir, dass es zu jeder unendlichen Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ und zu jedem $\epsilon > 0$ eine unendliche Teilmenge $I_\epsilon \subset I$ gibt, so dass $\|a^i - a^j\|_2^2 < \epsilon$ für jedes $i, j \in I$. Dafür wählen wir m derartig, dass

$$\sum_{k=m}^\infty |a_k^i|^2 \leq \epsilon/4 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Damit genügt es nun zu zeigen, dass es eine unendliche Indexmenge I gibt, derartig, dass für alle $i, j \in I$ gilt

$$\sum_{k=1}^{m-1} |a_k^i - a_k^j|^2 \leq \epsilon/2.$$

Dies ist klar, da alle Koeffizienten $a_k^i \in [-C, C]$ und $[-C, C]^{m-1}$ kompakt ist. Durch Wahl der Folge $\epsilon_n = 1/n$ und zugehöriger Indexmengen $I_{1/(n+1)} \subset I_{1/n}$ erhalten wir durch Wahl von $i_n \in I_{1/n}$ eine Cauchy-Teilfolge in l^2.

Lösung A.4.9: a) Sei zunächst $u \in H_0^1(0, 2\pi)$. Wegen $\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2$ genügt es, die Fourier-Koeffizienten c_k' von $u' \in L^2(0, 2\pi)$ zu bestimmen. Die Fourier-Koeffizienten von u' sind gegeben durch $c_k' = (u', e_k)$. Durch partielle Integration unter Beachtung der Randwerte von u folgt $c_k' = -(u, e_k') = (u, ike_k) = -ikc_k$. Entsprechend ist

$$\|u'\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \{|c_k|^2 + |c_k'|^2\} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \{|c_k|^2 + k^2|c_k|^2\}.$$

Umgekehrt (vgl. frühere Aufgabe) definiert jede Folge c_k mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\{|c_k|^2 + k^2|c_k|^2\} < \infty$ eine Funktion in $u \in H_0^1(0, 2\pi)$ mit $\|u\|_{1,2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\{|c_k|^2 + k^2|c_k|^2\}$.

b) Sei nun u^n eine in H_0^1 beschränkte Folge. Wegen der isometrischen Einbettung sind dann die Fourier-Koeffizienten c_k^n eine in $l^{1,2}(\mathbb{Z})$ beschränkte Folge. Wegen der kompakten Einbettung $l^{1,2}(\mathbb{Z})$ nach $l^2(\mathbb{Z})$ gibt es eine in $l^2(\mathbb{Z})$ konvergente Teilfolge $c_k^{n_l}$ diese korrespondiert zu einer Teilfolge $u^{n_l} \in L^2(0, 2\pi)$. Wegen der Isometrie der Einbettung von $l^2(\mathbb{Z})$ nach $L^2(0, 2\pi)$ ist diese ebenfalls konvergent.

A.5 Partielle Differentialgleichungen

Lösung A.5.1: Wir setzen $p := \partial_x u$, $q := \partial_y u$, $r := \partial_x^2 u$, $s := \partial_x \partial_y u$, $t := \partial_y^2 u$ und

$$\alpha := \partial_x^3 u,\ \beta := \partial_x^2 \partial_y u,\ \gamma = \partial_x \partial_y^2 u,\ \delta = \partial_y^3 u.$$

Differenzieren der Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} a_{11}\partial_x^3 u + 2a_{12}\partial_x^2\partial_y u + a_{22}\partial_x\partial_y^2 u &= \partial_x f - a_{01}\partial_x^2 u - a_{02}\partial_x\partial_y u - a_{00}\partial_x u \\ a_{11}\partial_x^2\partial_y u + 2a_{12}\partial_x\partial_y^2 u + a_{22}\partial_y^3 u &= \partial_y f - a_{01}\partial_x\partial_y u - a_{02}\partial_y^2 u - a_{00}\partial_y u \end{aligned}$$

Differenzieren von r, s, t entlang Γ ergibt

$$\begin{aligned} \partial_\tau r &= \partial_x r \partial_\tau x + \partial_y r \partial_\tau y = \alpha \partial_\tau x + \beta \partial_\tau y \\ \partial_\tau s &= \partial_x s \partial_\tau x + \partial_y s \partial_\tau y = \beta \partial_\tau x + \gamma \partial_\tau y \\ \partial_\tau t &= \partial_x t \partial_\tau x + \partial_y t \partial_\tau y = \gamma \partial_\tau x + \delta \partial_\tau y \end{aligned}$$

Zusammengenommen ergeben sich zwei 3×3-Gleichungssysteme für die gesuchten Ableitungen α, β, γ, δ:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + 2a_{12}\beta + a_{22}\gamma &= \partial_x f - a_{01} r - a_{02} s - a_{00} p \\ \partial_\tau x \alpha + \partial_\tau y \beta \qquad &= \partial_\tau r \\ \partial_\tau x \beta + \partial_\tau y \gamma &= \partial_\tau s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}\beta + 2a_{12}\gamma + a_{22}\delta &= \partial_y f - a_{01} s - a_{02} t - a_{00} q \\ \partial_\tau x \beta + \partial_\tau y \gamma \qquad &= \partial_\tau s \\ \partial_\tau x \gamma + \partial_\tau y \delta &= \partial_\tau t \end{aligned}$$

Beide haben dieselbe Koeffizientenmatrix B wie das entsprechende System zur Bestimmung der zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned} a_{11} r + 2a_{12} s + a_{22} t &= f - a_{01} p - a_{02} q - a_{00} u \\ \partial_\tau x r + \partial_\tau y s \qquad &= \partial_\tau p \\ \partial_\tau x s + \partial_\tau y t &= \partial_\tau q. \end{aligned}$$

Man überliegt sich leicht, dass im Falle $\det B \neq 0$ die durch die beiden Gleichunsgsysteme bestimmten vier dritten Ableitungen eindeutig (und widerspruchsfrei) bestimmt sind.

Lösung A.5.2: Der Differentialoperator $L = a_{11}\partial_x + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 + \dots$ ist „elliptisch“ für $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, „parabolisch“ für $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ und „hyperbolisch“ für $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

a) Der Operator $L = \partial_x\partial_y - \partial_x$ ist wegen $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{1}{4} > 0$ hyperbolisch.

b) Der Operator $L = \partial_x^2 + \partial_x\partial_y + y\partial_y^2 + 4$ ist wegen $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{1}{4} - y$ hyperbolisch für $y < \frac{1}{4}$, parabolisch für $y = \frac{1}{4}$ und elliptisch für $y > \frac{1}{4}$.

c) Der Operator $L = 2(\partial_x + \partial_y)^2 + \partial_y = 2\partial_x^2 + 4\partial_x\partial_y + 2\partial_y^2 + \partial_y$ ist wegen $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 - 4 = 0$ parabolisch.

Lösung A.5.3: a) Seien $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ Lösungen derselben 2. RWA. Dann erfüllt $w := u - v$ die Gleichungen $-\Delta w + aw = 0$ in G und $\partial_n w_{|\partial G} = 0$. Mit Hilfe partieller Inegration folgt unter Aussnutzung der Randbedingung $\partial_n w_{|\partial G} = 0$:

$$\int_G \left\{\|\nabla w\|^2 + a|w|^2\right\} dx = \int_G (-\Delta w + aw)w\, dx + \int_{\partial G} \partial_n ww\, do = 0.$$

Dies impliziert $w \equiv 0$.

b) Mit denselben Bezeichnungen wie in (a) gilt nun $(\partial_n w + \alpha w)_{|\partial G} = 0$. Damit ergibt sich dann wegen $\alpha \geq 0$:

$$\int_G \left\{\|\nabla w\|^2 + a|w|^2\right\} dx = \int_G (-\Delta w + aw)w\, dx + \int_{\partial G} \partial_n ww\, do = -\int_{\partial G} \alpha w^2\, do \leq 0.$$

Dies impliziert wieder $w \equiv 0$.

Für $a = 0$ kann in beiden Fällen nur auf $\nabla w \equiv 0$ bzw. $w \equiv konst$ geschlossen werden. Es fehlt aber eine zusätzliche Bedingung, um hieraus $w \equiv 0$ folgern zu können. Eine solche Zusatzbedingung könnte z. B. die Forderung sein, dass nach Lösungen der RWAn mit verschwindendem Mittelwert gefragt ist: $\int_D u\, dx = 0$.

Lösung A.5.4: i) Durch Ausdifferenzieren erhalten wir für den Operator L die Darstellung

$$\begin{aligned} Lu = &-(a_{11}\partial_1^2 + a_{12}\partial_1\partial_2 + a_{21}\partial_2\partial_1 + a_{22}\partial_2^2)u \\ &- (\partial_1 a_{11}\partial_1 + \partial_1 a_{12}\partial_2 + \partial_2 a_{21}\partial_1 + \partial_2 a_{22}\partial_2)u. + a_{00}u \end{aligned}$$

Der Typ eines Differentialoperators ist durch seinen Hauptteil bestimmt. Die positive Definitheit der Koeffizientenmatrix $(a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ impliziert, dass in jedem Punkt $x \in G$ ihre beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ positiv sind. Wegen

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$$

ist der Operator L nach unserer Definition elliptisch.

ii) Sei $u \in C^2(G) \cap V_0(G)$ eine Lösung der homogenen 1. RWA. Dann folgt mit Hilfe von partieller Integration (Satz von Gauß) unter Ausnutzung der Randbedingung $u_{|\partial G} = 0$:

$$\begin{aligned}
\int_G Luu\,dx &= -\int_G \big\{\partial_1(a_{11}\partial_1 u)u + \partial_1(a_{12}\partial_2 u)u + \partial_2(a_{21}\partial_1 u)u + \partial_2(a_{22}\partial_2 u)u + a_{00}u^2\big\}\,dx \\
&= \int_G \big\{a_{11}\partial_1 u\partial_1 u + a_{12}\partial_2 u\partial_1 u + a_{21}\partial_1 u\partial_2 u + a_{22}\partial_2 u\partial_2 u + a_{00}u^2\big\}\,dx \\
&\geq \int_G \lambda_{\min}(A)\|\nabla u\|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\nabla u \equiv 0$ und somit $u \equiv \text{konst}$. Wegen $u_{|\partial G} = 0$ ist also $u \equiv 0$.

Lösung A.5.5: i) Wir verwenden den Beweisgang aus dem Text in leicht modifizierter Form. Für einen beliebigen Punkt $x = (x_1, x_2) \in Q$ ist

$$v(x) = v(x_1, x_2) - v(x_1, 0) = \int_0^{x_2} \partial_2 v(x_1, \xi)\,d\xi.$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|v(x)|^2 \leq \Big(\int_0^{x_2} \partial_2 v(x_1, \xi)\,d\xi\Big)^2 \leq \int_0^1 |\partial_2 v(x_1, \xi)|^2\,d\xi.$$

Wir integrieren diese Ungleichung unter Verwendung des Satzes von Fubini nacheinander bzgl. der Variablen x_1, x_2:

$$\begin{aligned}
\int_Q |v(x)|^2\,dx &\leq \int_0^1 \int_0^1 \Big(\int_0^1 |\partial_2 v(x_1, \xi)|^2\,d\xi\Big)\,dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^1 \int_0^1 |\partial_2 v(x_1, \xi)|^2\,dx_1\,d\xi\Big)\,dx_2 = \int_Q |\partial_2 v(x)|^2\,dx
\end{aligned}$$

ii) Für $\Gamma := \{(0,0)\}$ kann die Poincarésche Ungleichung *nicht* gelten. Zum Beweis konstruieren wir eine Folge von Funktionen $u_k \in V_0(\Gamma; Q)$ mit den Eigenschaften

$$\liminf_{k\to\infty} \int_Q |u_k|^2\,dx > 0, \qquad \int_Q \|\nabla u_k\|^2\,dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Dazu setzen wir unter Verwendung von Polarkoordinaten (r, θ):

$$u_k(r, \theta) := r^{1/k}.$$

Für diese Funktionen ist $\|\nabla u_k\| = |\partial_r u_k| = k^{-1} r^{-1+1/k}$ und folglich:

$$\begin{aligned}
\int_Q |u_k|^2\,dx &\geq \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^{2/k}\,r\,dr d\omega = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^{1+2/k}\,dr \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2/k + 2} r^{2+2/k}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2 + 2/k} \to \frac{\pi}{4} \quad (k \to \infty),
\end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{aligned}\int_Q \|\nabla u_k\|^2\,dx &= \frac{1}{k^2}\int_Q r^{-2+2/k}\,dx \le \frac{\pi}{2k^2}\int_0^2 r^{-1+2/k}\,dr\\ &= \frac{\pi}{2k^2}\frac{k}{2}r^{2/k}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{4}\frac{2^{2/k}}{k} \to 0 \quad (k\to\infty).\end{aligned}$$

Als Konsequenz dieses Resultats ist in diesem Fall die im Text verwendte „direkte Methode der Variationsrechnung“ (d. h. das „Minimalfolgenargument“) zum Nachweis der Existenz „schwacher“ Lösungen der zugehötigen 1. RWA des Laplace-Operators nicht anwendbar, da das Energiefunktional $J(u)$ auf $V_0(\Gamma;Q)$ nicht nach unten beschränkt ist. Tatsächlich bedeutet dies, dass in zwei (und höheren) Dimensionen die 1. RWA mit solchen einpunktigen Dirichlet-Randbedingungen *nicht* „wohl gestellt“ ist.

Lösung A.5.6: Zur Wiederholung: Wir setzen $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ und $u(x) = u(x_1,x_2) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Mit Hilfe der Kettenregel gilt dann:

$$\begin{aligned}\partial_r^2 u(r,\theta) &= \partial_1^2 u(x)\cos^2\theta + \partial_2\partial_1 u(x)\sin\theta\cos\theta + \partial_1\partial_2 u(x)\cos\theta\sin\theta + \partial_2^2 u(x)\sin^2\theta,\\ \partial_\theta^2 u(r,\theta) &= \partial_1^2 u(x) r^2\cos^2\theta - \partial_2\partial_1 u(x) r^2\sin\theta\cos\theta - \partial_1\partial_2 u(x) r^2\cos\theta\sin\theta\\ &\quad - \partial_1 u(x) r\cos\theta - \partial_2 u(x) r\sin\theta + \partial_2^2 u(x) r^2\cos^2\theta.\end{aligned}$$

Also ist $(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2)u(r,\theta) = (\partial_1^2+\partial_2^2)u(x) = \Delta u(x)$.

i) Die Randbedingungen ließt man direkt ab. Wir setzen $\alpha := \pi/\omega$ und finden

$$\begin{aligned}\Delta s_\omega(r,\theta) &= (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2)(r^\alpha\sin\theta\alpha)\\ &= (\alpha-1)\alpha r^{\alpha-2}\sin\theta\alpha + \alpha r^{\alpha-2}\sin\theta\alpha - r^{\alpha-2}\alpha^2\sin\theta\alpha = 0.\end{aligned}$$

ii) Die Funktion s_ω ist im Innern des Sektorabschnitts G beliebig oft differenzierbar. Ihre ersten und zweiten Ableitungen verhalten sich dort wie

$$|\partial_i s_\omega(r,\theta)| \le c\,r^{\pi/\omega-1}, \qquad |\partial_i\partial_j s_\omega(r,\theta)| \le c\,r^{\pi/\omega-2}.$$

Zu überprüfen ist also die Existenz der (uneigentlichen) Riemann-Integrale

$$\begin{aligned}J_1(\omega) &:= \int_G r^{2\pi/\omega-2}\,dx = \int_0^\omega\int_0^1 r^{2\pi/\omega-1}\,dr\,d\theta = \omega\int_0^1 r^{2\pi/\omega-1}\,dr,\\ J_2(\omega) &:= \int_G r^{2\pi/\omega-4}\,dx = \int_0^\omega\int_0^1 r^{2\pi/\omega-3}\,dr\,d\theta = \omega\int_0^1 r^{2\pi/\omega-3}\,dr.\end{aligned}$$

Für $\pi < \omega \le 2\pi$ sind $2\pi/\omega - 1 \ge 0$ und folglich $J_1(\omega)$ existent, aber $2\pi/\omega - 3 < -1$ und folglich $J_2(\omega)$ *nicht* existent. Im Fall $\omega < \pi$ ist ∇s_ω beschränkt und somit (eigentlich) quadrat-integrierbar. Ferner ist $2\pi/\omega - 3 > -1$ und somit auch $\nabla^2 s_\omega$ wenigstens (uneigentlich) quadrat-integrierbar.

Lösung A.5.7: Wir betrachten die Funktion $w(x,y) := u(x,y) - v(x,y)$ mit $v(x,y) := \frac{1}{4}x(1-x) + \frac{1}{4}y(1-y)$. Dabei deken wir uns u durch Null auf ganz Q_1 fortgestzt. Dafür gilt:

$$-\Delta w(x,y) = -\Delta u(x,y) - \Delta v(x,y) = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0$$

und $\max_{\partial\Omega} |w| \le \max_{Q_1} |w| = \frac{1}{8}$. Nach dem Maximumprinzip für den Laplace-Operator, angewendet für w und $-w$, folgt

$$a)\ \ w \le 0 \quad \text{oder} \quad \max_{\overline{\Omega}} w \le \max_{\partial\Omega} w, \qquad b)\ \ -w \le 0 \quad \text{oder} \quad \max_{\overline{\Omega}} -w \le \max_{\partial\Omega} -w.$$

Also ist entweder $w = 0$ oder $\max_{\overline{\Omega}} |w| \le \max_{\partial\Omega} |w| \le \frac{1}{8}$.

Lösung A.5.8: i) Wir berechnen die Ableitungen von

$$s(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big)$$

zu

$$\begin{aligned}
\partial_t s(x,t) &= -\frac{1}{2t} s(x,t) + s(x,t)\frac{x^2}{4t^2},\\
\partial_x^2 s(x,t) &= \partial_x\Big(s(x,t)\frac{-x}{2t}\Big) = s(x,t)\frac{x^2}{4t^2} - s(x,t)\frac{1}{2t}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Funktion s Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in } (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$$

ii) Für $t > 0$ und $-\infty < x < \infty$ ist der Integrand in

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{4t}\Big) u^0(y)\, dy$$

beliebig oft differenzierbar mit Riemann-integrierbaren Ableitungen (wegen der Annahme an u^0). Folglich darf bei Anwendung des Wärmeleitungsoperators unter dem Intergal differenziert werden, und wir finden, dass u Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

iii) Zum Nachweis, dass u für $t \to 0$ auch die Anfangswerte annimmt schreiben wir das Integral wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \dots\, dy &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{4t}\Big)(u^0(y) - u^0(x))\, dy\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{4t}\Big)\, dy\, u^0(x).
\end{aligned}$$

Bei Beachtung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{4t}\Big)\, dy = \sqrt{4\pi t}$$

ergibt sich

$$u(x,t) = u^0(x) + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{4t}\Big)(u^0(y) - u^0(x))\,dy.$$

Es bleibt zu zeigen, dass das rechte Integral $I(x,t)$ für $t \to 0$ gegen null geht. Die Variablensubstitution

$$z := \frac{y-x}{\sqrt{4t}}, \qquad y = x + \sqrt{4t}z, \quad \frac{dy}{dz} = \sqrt{4t},$$

ergibt:

$$I(x,t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}(u^0(x+\sqrt{4t}z) - u^0(x))\,dz \;\to\; 0 \quad (t \to 0).$$

Lösung A.5.9: Wir bedienen uns wieder der „Spektral-Technik". Aus der Darstellung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit dem ONS von Eigenfunktionen $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ des eindimensionalen Laplace-Operators und den Fourier-Koeffizienten u_j^0 der Anfangsdaten

$$u(x,t) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 w_j(x) e^{-\lambda_j t},$$

folgt

$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) = -\sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 \lambda_j w_j(x) e^{-\lambda_j t}.$$

Aufgrund der Parsevalschen Identität gilt demnach

$$\|\partial_t u\|_2^2 = \|\Delta u\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j t}.$$

Hieraus folgt wegen $xe^{-x} \le 1,\, x \ge 0$:

$$\|\partial_t u\|_2^2 = \|\Delta u\|_2^2 = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u_j^0)^2 \lambda_j t e^{-2\lambda_j t} \le \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u_j^0)^2 = \frac{1}{t}\|\nabla u^0\|_2^2,$$

was den Beweis vervollständigt.

Lösung A.5.10: Wir machen den Lösungsansatz $u(x,t) = w(x)\psi(t)$ und erhalten hierfür durch Einsetzen in die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in } [0,\pi] \times [0,\infty)$$

die Beziehungen

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\partial_x^2 w(x)}{w(x)} \equiv: -\lambda.$$

Die Funktionen $w(x)$ und $\psi(t)$ sind also durch die folgenden Eigenwertaufgaben bestimmt:

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 w(x) &= \lambda w(x) \;\; x \in (0,\pi), \quad w(0) = w(\pi) = 0, \\ -\psi''(t) &= \lambda \psi(t), \;\; t > 0, \quad \psi(0) = \psi^0, \; \psi'(0) = \psi^1. \end{aligned}$$

Die Eigenwertaufgabe für $w(x)$ besitzt zu den Eigenwerten $\lambda_k = k^2$ eine Folge von Lösungen $w_k(x) = \sin(kx)$. Die zugehörigen Lösungen für $\psi(t)$ sind

$$\psi_k(t) = \psi_k^0 \cos(kt) + \frac{1}{k}\psi_k^1 \sin(kt).$$

Durch Superposition dieser Lösungen für Anfangswerte ψ_k^0, ψ_k^1 erhalten wir für die Lösung den formalen Reihenansatz

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x)\psi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\Big(\psi_k^0 \cos(kt) + \frac{1}{k}\psi_k^1 \sin(kt)\Big)$$

mit den Fourierkoeffizienten der Anfangsdaten $u^0 = u(\cdot,0)$ und $u^1 = \partial_t u(\cdot,0)$:

$$\psi_k^0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u^0(x)\sin(kx)\,dx, \qquad \psi_k^1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u^1(x)\sin(kx)\,dx.$$

Wegen der speziellen Form der Anfangswerte ist (δ_{kl} Kronecker-Symbol)

$$\psi_k^0 = \delta_{k1}, \quad \psi_k^1 = \delta_{k2}.$$

Damit lässt sich die Reihe auf zwei Terme reduzieren (und damit die sonst notwendige Konvergenzbetrachtung vermeiden):

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(t) + \sin(2x)\sin(t).$$

Die Funktion u erfüllt konstruktionsgemäß für $(x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty)$ die Wellengleichung. Für $t \to 0$ konvergiert gleichmäßig

$$u(x,t) \to \sin(x) = u^0(x), \qquad \partial_t u(x,t) \to \sin(2x) = u^1(x),$$

d. h.: Die vorgegebenen Anfangswerte werde von u angenommen.