

5 Partielle Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen gegeben. Diese haben im Gegensatz zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen eine viel reichere Struktur. Wir betrachten hier nur Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_{j=1}^n a_j \partial_j u + au = f,$$

mit gegebenen (stetigen) Koeffizientenfunktionen a_{ij} , a_j , a und rechter Seite f . Wenn diese Funktionen nicht zusätzlich von der unbekanntenen Lösung u abhängen, nennt man die Gleichung „linear“. Wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen kann o.B.d.A. $a_{ij} = a_{ji}$ angenommen werden, andernfalls setzt man einfach $\tilde{a}_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$. Für allgemeinere nichtlineare Gleichungen der Form

$$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$$

gibt es keine einheitliche, leicht darstellbare Lösungstheorie. Wir beschränken uns im Folgenden daher im wesentlichen auf lineare Probleme. Durch $u \rightarrow Lu$ ist dann offenbar eine lineare Abbildung (hier „Operator“ genannt) gegeben, welche zweimal stetig differenzierbare Funktionen in stetige Funktionen abbildet.

Partielle Differentialgleichungen betrachtet man in der Regel auf Gebieten (d. h. *offenen* Teilmengen) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ oder $n = 3$). Wir beschränken uns hier auf Probleme, die auf beschränkten Gebieten gestellt sind. In vieler Anwendungsbereichen treten aber auch Gleichungen auf unbeschränkten Gebieten auf, sog. „Außenraumprobleme“ oder auch „Ganzraumprobleme“ (z. B. die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik). Zur Differentialgleichung kommen noch Bedingungen entlang des Randes $\partial\Omega$ hinzu. Die geeignete Wahl dieser „Randbedingungen“ ist eine sehr delikate Angelegenheit und erfordert eingehende Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften der Differentialgleichung. Diesen wird der nächste Abschnitt gewidmet sein.

Damit eine Differentialgleichung mit den zugehörigen Randbedingungen ein sinnvolles Modell eines realen physikalischen Vorgangs ist, sind eine Reihe von Forderungen zu stellen:

1. *Existenz* von Lösungen in einem möglicherweise verallgemeinerten Sinne; unter einer „klassischen“ Lösung versteht man eine solche, für die alle auftretenden Ableitungen im Gebietsinnern im strengen Sinne definiert sind, und die bis an den Rand stetig ist, d. h.: $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Zusätzlich fordert man meist noch, dass ∇u quadratintegrierbar ist.
2. *Eindeutigkeit* der Lösungen möglicherweise unter Hinzunahme von weiteren physikalisch motivierten Bedingungen.
3. *Stetige Abhängigkeit* von den Daten wegen der meist nur inexakten Verfügbarkeit von Koeffizienten und Randdaten in den physikalischen Modellen; Lösungen sollten sich unter kleinen Datenstörungen auch nur wenig ändern.

Eine Aufgabe, welche diesen Minimalforderungen genügt, nennt man „wohl gestellt“ (im Sinne von Hadamard¹). Bei Anfangs- oder Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen war die Regularität der Lösung kein besonderes Thema, da sich hier die Regularität der Daten direkt auf die entsprechende der Lösung überträgt. Bei partiellen Differentialgleichungen ist dies nicht immer der Fall und bedarf für verschiedene Typen von Differentialgleichungen und Situationen gesonderter Untersuchung.

5.1 Typeneinteilung

Partielle Differentialgleichungen lassen sich in drei Haupttypen einteilen: die „elliptischen“, die „parabolischen“ und die „hyperbolischen“ Gleichungen. Wir werden das dieser Unterteilung zugrunde liegende Prinzip anhand einer leicht überschaubaren Situation erläutern. Dies sind die linearen, skalaren Gleichungen 2. Ordnung in zwei Variablen:

$$Lu = a_{11}\partial_x^2 u + 2a_{12}\partial_x\partial_y u + a_{22}\partial_y^2 u + a_{01}\partial_x u + a_{02}\partial_y u + a_{00}u = f$$

mit konstanten Koeffizienten a_{ij} . Dabei sollen nicht alle drei Koeffizienten a_{11} , a_{12} , a_{22} der Ableitungen zweiter Ordnung gleichzeitig Null sein. Diese Gleichung wird auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet.

Ausgangspunkt ist ein direkter Lösungsansatz, wie er auch bei gewöhnlichen Differentialgleichungen angewendet werden kann. Für die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u^0,$$

erhält man aus der Vorgabe $u(0) = u^0$ durch sukzessives Differenzieren von $f(t, x)$ Formeln für alle Ableitungen von u :

$$u^{(i)}(0) = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(0, u^0) =: f^{(i-1)}(0, u^0), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Wenn die Ableitungen $f^{(i-1)}$ nicht zu schnell wachsen (Für $f(t, x) = \sin(x)$ sind sie z. B. gleichmäßig beschränkt.), konvergiert für kleine Zeiten $0 \leq t \leq T$ die Taylor-Reihe

$$u(t) = u^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} f^{(i-1)}(0, u^0)$$

absolut und stellt die (eindeutige) Lösung der Anfangswertaufgabe dar.

Wir versuchen, diese Konstruktion auf partielle Differentialgleichungen zu übertragen. Dazu sei Γ ein Jordan-Kurvenstück in Ω mit beliebig oft differenzierbarer Parametrisierung $\Gamma = \{(x(\tau), y(\tau)), \tau \in [0, 1]\}$. Entlang Γ seien für die Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung die Funktionswerte u sowie ihre Ableitungen $\partial_n u$ in Normalenrichtung n zu Γ vorgegeben. Dies entspricht der Tatsache, dass wir es mit einer Differentialgleichung

¹Jacque Salomon Hadamard Hadamard (1865–1963): Französischer Mathematiker; Prof. in Bordeaux und Paris; viele wichtige Beiträge zur komplexen Analysis und speziellen Funktionen, zur analytische Zahlentheorie, zur Variationsrechnung und zu den Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

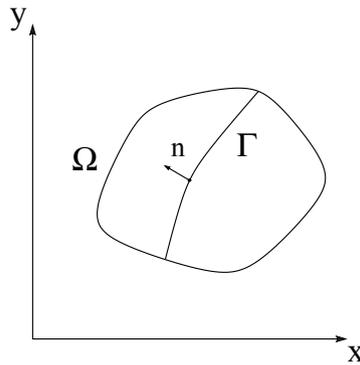


Abbildung 5.1: Schema zur Typeneinteilung.

2. Ordnung zu tun haben. Mit u und $\partial_n u$ ist der ganze Gradient $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)^T$ entlang Γ bekannt. Wir wollen versuchen, aus diesen Vorgaben alle weiteren Ableitungen von u entlang Γ zu bestimmen, um damit wieder einen Taylor-Reihenansatz für u in einer Umgebung von Γ zu machen. Zu diesem Zweck führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$p := \partial_x u, \quad q := \partial_y u, \quad r := \partial_x^2 u, \quad s := \partial_x \partial_y u, \quad t := \partial_y^2 u.$$

Differentiation von p und q entlang Γ ergibt

$$\begin{aligned} \partial_\tau p &= \partial_x p \partial_\tau x + \partial_y p \partial_\tau y = r \partial_\tau x + s \partial_\tau y, \\ \partial_\tau q &= \partial_x q \partial_\tau x + \partial_y q \partial_\tau y = s \partial_\tau x + t \partial_\tau y. \end{aligned}$$

mit den bekannten tangentialen Ableitungen $\partial_\tau x$ und $\partial_\tau y$ entlang Γ . Zusammen mit der Differentialgleichung $Lu = f$ ergibt dies ein 3×3 -Gleichungssystem für die drei gesuchten Ableitungen r, s, t :

$$\begin{aligned} a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t &= f - a_{01}p - a_{02}q - a_{00}u \\ \partial_\tau x r + \partial_\tau y s &= \partial_\tau p \\ \partial_\tau x s + \partial_\tau y t &= \partial_\tau q \end{aligned}$$

mit entlang Γ bekannter rechter Seite. Die Determinante der Koeffizientenmatrix B erhält man durch Entwicklung nach der ersten Zeile zu

$$\det B = a_{11} \partial_\tau y^2 - 2a_{12} \partial_\tau x \partial_\tau y + a_{22} \partial_\tau x^2.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

i) **Fall** $\det B \neq 0$ **entlang ganz** Γ :

In diesem Fall sind alle zweiten Ableitungen r, s, t von u durch Vorgabe von $u, \partial_n u$ entlang Γ (eindeutig) bestimmbar. Durch weitere Differentiation des Gleichungssystems nach x und y erhält man wieder ein System für die dritten Ableitungen $\partial_x r, \partial_x s, \partial_x t$

sowie $\partial_{yr}, \partial_{ys}, \partial_{yt}$ jeweils mit derselben Koeffizientenmatrix. Durch weiteres Differenzieren lassen sich so alle höheren Ableitungen von u entlang Γ bestimmen. Durch den Reihenansatz

$$u(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{(i+j)!} \partial_x^i \partial_y^j u(x_0, y_0)$$

bzgl. eines Punktes $(x_0, y_0) \in \Gamma$ erhält man dann in einer Umgebung der Kurve Γ eine Lösung der Differentialgleichung, die auf Γ die vorgegebenen Werte annimmt. Diese nennt man Lösung des sog. „Cauchy-Problems“ der Differentialgleichung bzgl. der „Anfangskurve“ Γ .

ii) **Fall** $\det B = 0$ **in einem Punkt** $(x_0, y_0) \in \Gamma$:

Die quadratische Gleichung

$$a_{11} \partial_\tau y^2 - 2a_{12} \partial_\tau x \partial_\tau y + a_{22} \partial_\tau x^2 = 0$$

bestimmt gewisse Richtungen $\partial_\tau y / \partial_\tau x = dy/dx$ bzw. $\partial_\tau x / \partial_\tau y = dx/dy$ von Kurven (mit Graph $y = y(x)$ oder $x = x(y)$) durch den Punkt (x_0, y_0) . Zu deren Bestimmung sei etwa angenommen, dass $a_{11} \neq 0$ und $\partial_\tau x \neq 0$. Dann besitzt die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2a_{12}}{a_{11}} \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a_{22}}{a_{11}} = 0$$

die Lösungen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{+/-} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \pm \frac{1}{a_{11}} \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}.$$

Diese entsprechen Steigungen von Kurven durch den Punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma$, entlang welcher die höheren Ableitungen von u sich nicht aus den Vorgaben entlang Γ bestimmen lassen. Entlang dieser kritischen, auch „charakteristisch“ genannten Kurven (sog. „Charakteristiken“ des Differentialoperators L) lässt sich also die Lösung der Differentialgleichung nicht aus den obigen Vorgaben konstruieren. Entlang solcher Kurven können Unstetigkeiten in der Lösung oder ihres Gradienten auftreten. Es ist also sehr wichtig, die Existenz von Charakteristiken und deren Gestalt für den zu betrachtenden Differentialoperator etwa vor Ansatz eines numerischen Verfahrens genau zu bestimmen. Offensichtlich hängt die Existenz von Charakteristiken allein von den Koeffizienten der höchsten Ableitungen des Operators L , d. h. seinem sog. „Hauptteil“ $a_{11} \partial_x^2 u + 2a_{12} \partial_x \partial_y u + a_{22} \partial_y^2 u$, ab. Diesem wird die quadratische Form

$$q(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

zugeordnet. Die Gleichung $q(x, y) = 0$ beschreibt Kegelschnitte in der (x, y) -Ebene:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} < 0 : & \text{Ellipse,} \\ = 0 : & \text{Parabel,} \\ > 0 : & \text{Hyperbel.} \end{cases}$$

Von dieser rein formalen Charakterisierung stammen die obigen Bezeichnungen für die drei Typen von partiellen Differentialgleichungen. Die Klassifikation eines Differentialoperators als „elliptisch“, „parabolisch“ oder „hyperbolisch“ wird für jeden einzelnen Punkt

(x_0, y_0) separat vorgenommen. Im Falle variabler Koeffizienten $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$ oder im nichtlinearen Fall $a_{ij}(u(x, y))$ kann der Typ einer Gleichung also im Lösungsgebiet wechseln. Wir werden im folgenden nur Gleichungen eines einheitlichen Typs betrachten; in vielen Anwendungen spielt aber gerade der Typwechsel eine wichtige Rolle.

Als nächstes wollen wir die prototypischen Vertreter von (linearen) elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differentialgleichungen ableiten. Dies wird uns erneut auf die obige Typeneinteilung führen. Dazu schreiben wir den Hauptteil L_0 des Differentialoperators in Matrix-Vektor-Form:

$$L_0 = a_{11}\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \nabla^T A \nabla$$

Die symmetrische Matrix A besitzt zwei reelle Eigenwerte λ, μ und ein zugehöriges Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\{\xi, \eta\}$. Mit der Spaltenmatrix $Q := [\xi, \eta]$ gilt

$$QQ^T = I, \quad Q^T A Q = D = \text{diag}(\lambda, \mu).$$

Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} L_0 &= \nabla^T Q D Q^T \nabla = (Q^T \nabla)^T D (Q^T \nabla) \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1 \partial_x + \xi_2 \partial_y \\ \eta_1 \partial_x + \eta_2 \partial_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \partial_x + \xi_2 \partial_y \\ \eta_1 \partial_x + \eta_2 \partial_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$L_0 = \lambda(\xi_1 \partial_x + \xi_2 \partial_y)^2 + \mu(\eta_1 \partial_x + \eta_2 \partial_y)^2,$$

oder mit den Richtungsableitungen $\partial_\xi = \xi \cdot \nabla$ und $\partial_\eta = \eta \cdot \nabla$:

$$L_0 = \lambda \partial_\xi^2 + \mu \partial_\eta^2.$$

Die Eigenwerte erhält man als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \det(A - zI) &= (a_{11} - z)(a_{22} - z) - a_{12}^2 = z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ &= (z - \lambda)(z - \mu) = z^2 - (\lambda + \mu)z + \lambda\mu. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man („Vietascher² Wurzelsatz“).

$$\lambda + \mu = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda\mu = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

a) „Elliptischer“ Fall $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$:

Beide Eigenwerte λ, μ sind ungleich Null und haben dasselbe Vorzeichen. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind nicht reell, d. h.: Es existieren keine charakteristischen Kurven durch den Punkt (x_0, y_0) . In diesem Fall ist der Konstruktionsprozess für die

²Francois Viète, lat. Franciscus Vieta (1540–1603): Französischer Mathematiker; Arbeiten über algebraische Gleichungen und sphärische Trigonometrie; gab trigonometrische Tafeln heraus und führte die systematische Buchstabenrechnung ein.

höheren Ableitungen von u durchführbar. Die Normalform eines elliptischen Operators L ist im Fall $\lambda = \mu = 1$:

$$Lu = \partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u + \psi(\xi, \eta, \partial_\xi u, \partial_\eta u, u)$$

Der „Hauptteil“ dieses Operators ist also gerade der „Laplace-Operator“ Δ , der sich somit als prototypischer Vertreter elliptischer Differentialoperatoren 2. Ordnung erweist. Wir werden uns daher im Folgenden hauptsächlich mit der zugehörigen Poisson-Gleichung beschäftigen:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = f. \quad (5.1.1)$$

b) „Parabolischer“ Fall: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

Einer der Eigenwerte ist Null; der zweite ist dann notwendig ungleich Null. Es existiert genau eine charakteristische Richtung im Punkt (x_0, y_0) mit der Steigung $dy/dx = a_{12}/a_{11}$. Die Normalform eines parabolischen Operators L ist im Fall $\lambda = 1, \mu = 0$:

$$Lu = \partial_\xi^2 u + \psi(\xi, \eta, \partial_\xi u, u).$$

Der Hauptteil dieses Operators ist im linearen Fall gerade der sog. „Wärmeleitungsoperator“, der prototypische Vertreter parabolischer Differentialoperatoren 2. Ordnung. Wir werden uns daher im folgenden mit der zugehörigen „Wärmeleitungsgleichung“ beschäftigen:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = f. \quad (5.1.2)$$

c) „Hyperbolischer“ Fall: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$

Beide Eigenwerte sind ungleich Null, haben aber verschiedene Vorzeichen. Es existieren zwei charakteristische Richtungen im Punkt (x_0, y_0) mit den Steigungen $(dy/dx)_\pm = a_{12}/a_{11} \pm a_{11}^{-1} \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$. Die Normalform eines hyperbolischen Differentialoperators L ist im Fall $\lambda = 1, \mu = -1$:

$$Lu = \partial_\xi^2 u - \partial_\eta^2 u + \psi(\xi, \eta, \partial_\xi u, \partial_\eta u, u).$$

Der Hauptteil dieses Operators ist der sog. „Wellenoperator“, der prototypischer Vertreter hyperbolischer Differentialoperatoren 2. Ordnung. Wir werden uns daher im folgenden mit der zugehörigen „Wellengleichung“ beschäftigen:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f. \quad (5.1.3)$$

Wir haben gesehen, dass die „Cauchysche Anfangswertaufgabe“ durch Reihenansatz lösbar ist, wenn die „Anfangskurve“ Γ nirgends mit einer Charakteristik des Differentialoperators zusammenfällt. Andernfalls kann die Situation eintreten, dass zu beiden Seiten der Kurve Γ eine Lösung existiert, diese aber nicht auf Γ stetig-differenzierbar fortsetzbar ist. Im Folgenden werden wir die für die drei Gleichungstypen geeigneten Randbedingungen diskutieren und dabei ganz unterschiedliche Ergebnisse erhalten.

5.2 Elliptische Randwertaufgaben

Wir haben gesehen, dass für (im ganzen Lösungsgebiet G) elliptische Differentialoperatoren die „Cauchysche Anfangswertaufgabe“ für jede (analytische) „Anfangskurve“ $\Gamma \subset G$ lösbar ist. Die Verallgemeinerung dieser Aussage für nichtlineare Differentialoperatoren der Art

$$L(u) = \partial_x^2 u - F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u, \partial_y^2 u)$$

ist der berühmte Satz von Cauchy-Kowalewska³. Dieser sehr allgemeine Existenzsatz für elliptische Differentialgleichungen ist aber für die Praxis nur von geringer Bedeutung. Die über einen lokalen Reihenansatz konstruierte Lösung u hängt nämlich i. Allg. nicht stetig von den vorgegebenen Anfangswerten entlang Γ ab. Dies ist aber eine unverzichtbare Bedingung an ein physikalisch sinnvolles Modell.

Beispiel: In der Halbebene $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ seien entlang der Randkurve $\Gamma = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$ die Randwerte $u(0, y) = u_0^0(y) = 0$, $\partial_x u(0, y) = u_0^1(y) = 0$ gegeben. Die zugehörige Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = 0$ ist $u \equiv 0$. Mit $\varepsilon > 0$ seien die Randdaten nun gestört zu

$$u_\varepsilon^0(y) = 0, \quad u_\varepsilon^1(y) = \varepsilon \sin(y/\varepsilon),$$

wobei $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon^1(y) = 0$. Die zugehörige gestörte Lösung der Poisson-Gleichung (nachrechnen!)

$$u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sin(y/\varepsilon) \sinh(x/\varepsilon), \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

konvergiert aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht gegen Null. Es zeigt sich, dass in diesem Fall entlang der Anfangskurve Γ nicht gleichzeitig Werte für u und $\partial_n u$ vorgegeben werden dürfen, wenn man an physikalisch sinnvollen Lösungen interessiert ist.

Wir haben gesehen, dass man bei der Wahl von Randbedingungen für elliptische Operatoren vorsichtig sein muss, wenn das resultierende Randwertproblem „wohl gestellt“ sein soll. Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$. Wir wollen dabei Ränder mit einer glatten Parametrisierung (mindestens zweimal stetig differenzierbar) oder ein Polygonebiet (mit endlich vielen Ecken) zulassen. Als prototypischen Modellfall betrachten wir mit einer gegebenen rechten Seite $f \in C(\bar{\Omega})$ die „Poisson-Gleichung“

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{auf } \Omega.$$

Es gibt drei Typen von Randbedingungen und zugehörige Randwertaufgaben („RWAn“):

³Sofia Vasilyevna Kowalewska (1850–1891): Russische Mathematikerin, eine der ersten Frauen mit Universitätskarriere; 1869 Studium in Heidelberg als „Gasthörerin“, da hier für Frauen ein offizielles Universitätsstudium noch nicht möglich war; ab 1871 Studium in Berlin bei Weierstraß und danach in Göttingen; eine ihrer ersten Veröffentlichungen enthält den nach ihr benannten „Existenzsatz“; konnte damals als Frau aber keine Universitätsanstellung in Deutschland bekommen, trotz Fürsprache von Weierstraß; auf Betreiben Mittag-Lefflers ab 1884 Stelle als „Privatdozent“ in Stockholm; leistete Beiträge zur Analysis und zur Theorie von Differentialgleichungen der Physik; *Anekdotisches*: In ihrer Autobiografie steht, dass sie bereits als 11-Jährige durch die Lektüre von Seiten aus Ostrogradskis Vorlesungskriptum über Differential- und Integralrechnung, mit denen ihr Kinderzimmer tapeziert war, mit der Analysis in Berührung gekommen war.

- a) Dirichletsche Randbedingungen („1. RWA“): $u = g$ auf $\partial\Omega$.
- b) Neumannsche Randbedingungen („2. RWA“): $\partial_n u = g$ auf $\partial\Omega$.
- c) Robinsche Randbedingungen („3. RWA“): $\partial_n u + \alpha u = g$ auf $\partial\Omega$.

Die Randfunktionen g werden i. Allg. als glatt und $\alpha \geq 0$ angenommen. Alle diese RWAn sind, wie wir zum Teil zeigen werden, unter geeigneten Zusatzbedingungen an die Daten wohl gestellt.

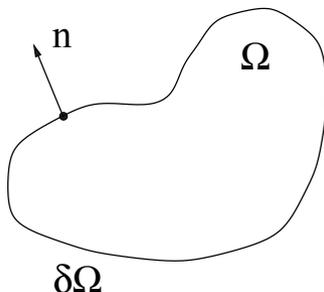


Abbildung 5.2: Konfiguration elliptischer RWAn.

5.2.1 Eindeutigkeit

Die Eindeutigkeitsforderung an Lösungen dieser RWAn ist leicht zu gewährleisten. Wir diskutieren hier nur die 1. RWA. Die entsprechenden Argumente für die 2. und die 3. RWA seien als Übungsaufgaben gestellt. Zunächst ist der Begriff einer „klassischen“ Lösung für die Dirichletschen Randbedingung zu präzisieren. Wir verstehen darunter eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, welche im Innern von Ω der Differentialgleichung und entlang des Randes $\partial\Omega$ der Randbedingung genügt. Ferner soll ihr Gradient (möglicherweise im uneigentlichen Riemannschen Sinne) quadratintegrabel sein: $\nabla u \in L^2(\Omega)^n$. Seien also $u^{(1)}, u^{(2)}$ zwei solche klassischen Lösungen der 1. RWA. Für die Differenz $w = u^{(1)} - u^{(2)}$ gilt dann:

$$-\Delta w(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, \quad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Multiplikation mit w , Integration über Ω und anschließender partiellen Integration (Anwendung der Greenschen Formel) ergibt

$$0 = - \int_{\Omega} \Delta w w \, dx = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n w w \, do = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx.$$

Dabei wurde verwendet, dass $w|_{\partial\Omega} = 0$. Hieraus ergibt sich notwendig $\nabla w \equiv 0$ bzw. $w \equiv \text{konst.}$, und bei Berücksichtigung der Randbedingung folgt $w \equiv 0$. Es kann also höchstens eine klassische Lösung der 1. RWA geben. Weiter unten werden wir noch ein anderes Argument für die Eindeutigkeit der Lösung kennenlernen.

5.2.2 Existenz

Die Frage nach der Existenz von Lösungen der 1. RWA ist wesentlich schwieriger zu behandeln.

a) *Potentialtheoretische Methode:*

Wir postulieren die Existenz einer Funktion $G(x, y)$ auf $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$,

$$G \in C^2(\{\Omega \times \Omega\} \setminus \{x = y\}) \cap C(\{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}\} \setminus \{x = y\}),$$

mit den Eigenschaften

$$-\Delta G(\cdot, y) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \{y\}, \quad G(\cdot, y) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \{y\},$$

für festes $y \in \bar{\Omega}$. Für $x = y$ habe $G(x, y)$ eine dimensionsabhängige Singularität, so dass für $v \in C(\bar{\Omega})$ mit den Kugelumgebungen $B_\varepsilon := \{y \in \Omega : |x| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in \Omega : \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} -\Delta_x G(x, y) v(y) dy = v(x), \\ x \in \partial\Omega : \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \setminus B_\varepsilon} \partial_n G(x, y) v(y) dy = v(x). \end{aligned}$$

Die Limiten sind also als uneigentliche Riemann-Integrale zu verstehen. Eine solche Funktion $G(x, y)$ wird „Greensche Funktion (1. Art)“ genannt. Mit dieser Notation macht man nun den Lösungsansatz

$$u(x) := \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \partial_n G(x, y) g(y) do_y.$$

Die formulierten Eigenschaften der Greenschen Funktion erlauben es, zu zeigen, dass dieser Ansatz tatsächlich eine klassische Lösung der 1. RWA liefert. Diese Rechnung ist aufwendig und kann z. B. im Buch von Hellwig nachgelesen werden. Die Konstruktion einer Greenschen Funktion für allgemeine Gebiete im \mathbb{R}^n ist schwer. Im Fall $n = 2$ folgt ihre Existenz aber mit Hilfe des Riemannsches Abbildungssatzes aus der Theorie komplexer Funktionen (siehe Hellwig). Für sehr spezielle Konfigurationen, wie z. B. Halbebenen oder Kreise, lässt sich die Greensche Funktion explizit angeben.

Beispiel: Auf dem Kreis $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$ ist durch

$$\begin{aligned} g(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \log(|x - y|) + \log\left(\frac{R}{|x|}\right) - \log\left(\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|\right) \right\}, \quad x \neq 0, \\ g(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \log(|y|) - \log(R) \right\}, \quad x = 0. \end{aligned}$$

eine Greensche Funktion mit den obigen Eigenschaften gegeben.

Die Existenz Greenscher Funktionen lässt sich für sehr allgemeine Gebiete Ω nachweisen, auch für die anderen RWAn. Das Konzept der „klassischen“ Lösung ist in vielen Anwendungsfällen zu restriktiv, z. B. wenn die rechte Seite f nicht regulär genug ist, um

eine C^2 -Lösung zuzulassen. Die Greensche Funktion selbst ist ein Extremfall in dieser Hinsicht. Als nächstes werden wir eine Abschwächung dieser Anforderungen kennenlernen, welche mehr Flexibilität bietet und für die man vergleichsweise leicht Existenz von Lösungen garantieren kann. Die Schwierigkeit wird dabei in den nachfolgenden Nachweis höherer Differenzierbarkeitseigenschaften solcher sog. „schwachen“ Lösungen verschoben.

b) *Funktionalanalytische Methode:*

Wir haben bereits im vorherigen Kapitel gesehen, dass eine enge Beziehung zwischen der Laplace-Gleichung $\Delta u \equiv 0$ und der Minimierung des zugehörigen Dirichlet-Funktional besteht. Dieser wird auch zum Nachweis der Existenz von Lösungen der Poisson-Gleichung ausgenutzt. Wir betrachten das sog. Energie-Funktional

$$E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$$

auf dem Vektorraum $V_0(\Omega)$ der „zulässigen“ Funktionen:

$$V_0(\Omega) := \{v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \nabla v \in L^2(\Omega)^n, v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

In kompakter Schreibweise ist $E(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 - (f, v)_2$ mit dem L^2 -Skalarprodukt und der zugehörigen Norm

$$(u, v)_2 = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|\nabla u\|_2 = \left(\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Der Raum $V_0(G)$ wird wieder mit der natürlichen „Energie-Norm“

$$\|v\|_E := \|\nabla v\|_2, \quad v \in V_0(\Omega),$$

versehen. Dass dies wirklich eine Norm ist, folgt aus der bereits bewiesenen „Poincaréschen Ungleichung“:

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq d_{\Omega}^2 \int_{\Omega} \|\nabla v(x)\|^2 dx, \quad v \in V_0(\Omega). \quad (5.2.4)$$

mit $d_{\Omega} := \text{diam}(\Omega)$.

Wir verwenden jetzt wieder eine Argumentation aus der Variationsrechnung, die sog. „direkte Methode“; siehe die Diskussion zum Dirichletschen Prinzip in Abschnitt 2.2.

i) Wir zeigen zunächst, daß $E(\cdot)$ nach unten beschränkt ist. Für $v \in V_0(\Omega)$ folgt mit Hilfe der Hölderschen und der Poincaréschen Ungleichung

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 - \|f\|_2 \|v\|_2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 - d_{\Omega} \|f\|_2 \|\nabla v\|_2.$$

Anwendung der Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ liefert weiter

$$d_{\Omega} \|f\|_2 \|\nabla v\|_2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2} d_{\Omega}^2 \|f\|_2^2,$$

und folglich

$$E(v) \geq -\frac{1}{2} d_{\Omega}^2 \|f\|_2^2 > -\infty, \quad v \in V_0(\Omega).$$

ii) Sei nun $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$, eine „Minimalfolge“ des Funktionals $E(\cdot)$, d. h.:

$$E(u_k) \rightarrow \inf_{v \in V_0(\Omega)} E(v) =: d > -\infty.$$

Wir wollen zeigen, dass $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Energie-Norm ist. Wichtiges Hilfsmittel dazu ist wieder die „Parallelogrammidentität“

$$\|v - w\|_E^2 + \|v + w\|_E^2 = 2\|v\|_E^2 + 2\|w\|_E^2,$$

die man durch direktes Nachrechnen verifiziert. Für beliebige Indizes $n, m \in \mathbb{N}$ gilt folglich

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_E^2 &= 2\|u_n\|_E^2 + 2\|u_m\|_E^2 - 4\|\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)\|_E^2 \\ &= 4E(u_n) + 4(f, u_n)_2 + 4E(u_m) + 4(f, u_m)_2 \\ &\quad - 8E(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)) - 8(f, \tfrac{1}{2}(u_n + u_m))_2 \\ &= 4E(u_n) + 4E(u_m) - 8E(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)). \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \{E(u_n) + E(u_m)\} = 2d, \quad E(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)) \geq d,$$

folgt damit

$$\limsup_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E^2 \leq 0,$$

d. h.: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist wie behauptet eine Cauchy-Folge.

Die Cauchy-Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt i. Allg. keinen Limes im normierten (unvollständigen) Raum $V_0(\Omega)$. Durch Vervollständigung von $V_0(\Omega)$ erhält man den „Sobolew-Raum“ $H_0^1(\Omega)$. Die Elemente von $H_0^1(\Omega)$ sind zunächst als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen (analog wie bei der Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen) definiert; sie lassen sich aber wieder als Funktionen interpretieren. Wir werden die Eigenschaften dieser Sobolew-Räume noch genauer diskutieren. Der Limes $u \in H_0^1(\Omega)$ der Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird als die „schwache“ oder auch „variationelle“ Lösung der 1. RWA des Laplace-Operators bezeichnet. Den Zusammenhang mit dem klassischen Lösungsbegriff stellt der folgende Satz her.

Satz 5.1: *Nimmt das Energiefunktional $E(\cdot)$ auf dem Funktionenraum $H_0^1(\Omega)$ in einem $u \in H_0^1(\Omega)$ ein Minimum an, so genügt dieses notwendig der Variationsgleichung*

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_2 = (f, \varphi)_2 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (5.2.5)$$

Ist darüberhinaus $u \in V_0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, so ist u klassische Lösung der 1. RWA des Laplace-Operators auf Ω :

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (5.2.6)$$

Beweis: Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ Minimalfunktion von $E(\cdot)$ auf $H_0^1(\Omega)$. Dann folgt für beliebiges $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ wieder mit Hilfe des Satzes über die Differentiation von Parameterintegralen:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} E(u + t\varphi) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \|\nabla(u + t\varphi)\|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (u + t\varphi) f dx \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u + t\varphi) \cdot \nabla \varphi dx \Big|_{t=0} - \int_{\Omega} f \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung (5.2.5). Im Fall $u \in V_0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ können wir wieder partiell integrieren und erhalten unter Ausnutzung der Dirichlet-Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\int_{\Omega} -\Delta u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Variationsrechnung folgt hieraus die Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

d. h.: u ist „klassische“ Lösung der RWA.

Q.E.D.

Damit ist der „schwache“ Lösungsbegriff verträglich mit dem ursprünglichen „klassischen“. Der Nachweis höherer Regularität der schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ ist allerdings schwierig und kann im Rahmen dieses Textes nicht diskutiert werden.

Wir wollen noch kurz diskutieren, wie das obige Argument verwendet werden kann, um die Existenz von schwachen Lösungen der 1. RWA auch im Fall inhomogener Randdaten $u|_{\partial\Omega} = g$ zu sichern. Dazu nehmen wir an, dass die Randfunktion g als sog. „Spur“ einer auf ganz $\bar{\Omega}$ definierten Funktion $\bar{g} \in C^2(\bar{\Omega})$ gegeben ist, d. h.: $g = \bar{g}|_{\partial\Omega}$. Dann wäre die Funktion $v := u - \bar{g}$ Lösung der RWA

$$-\Delta v = f - \Delta \bar{g} \quad \text{in } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Hierfür garantiert nun die variationelle Methode die Existenz einer (eindeutigen) schwachen Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$(\nabla v, \nabla \varphi)_2 = (f, \varphi)_2 + (\nabla \bar{g}, \nabla \varphi)_2 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Die schwache Lösung der ursprünglichen RWA ergibt sich dann als $u := v + \bar{g}$.

5.2.3 Stetige Abhängigkeit

Die Frage nach der stetigen Abhängigkeit der Lösungen der 1. RWA wollen wir wieder sowohl mit Hilfe des klassischen Ansatzes als auch mit der variationellen Methode angehen. Seien zunächst $u^{(1)}, u^{(2)}$ zwei Lösungen (klassisch oder variationell) der 1. RWA des

Laplace-Operators zu unterschiedlichen rechten Seiten $f^{(1)}, f^{(2)}$. Für die Differenz $w = u^{(1)} - u^{(2)}$ folgt dann mit dem bereits beim Eindeutigkeitsbeweis verwendeten Argument

$$\|\nabla w\|_2^2 = (f^{(1)} - f^{(2)}, w)_2 \leq \|f^{(1)} - f^{(2)}\|_2 \|w\|_2.$$

Unter Ausnutzung der Poincaréschen Ungleichung folgt daraus

$$\|\nabla w\|_2 \leq d_G \|f^{(1)} - f^{(2)}\|_2,$$

d. h. die Stetigkeit der Lösung (in der Energie-Norm) gegenüber Störungen der rechten Seite. Als nächstes betrachten wir Störungen der Randdaten. Dazu verwenden wir ein von der variationellen Methode völlig unterschiedliches Argument.

Lemma 5.1 (Maximumprinzip): *Für den elliptischen Operator*

$$Lu := -\Delta u + au$$

mit $a \geq 0$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt das sog. „Maximumprinzip“, d. h.: Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit der Eigenschaft $Lu \leq 0$ hat in Ω kein positives Maximum. Dies bedeutet, dass entweder $u \leq 0$ auf ganz Ω ist, oder

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass $a > 0$ auf Ω . Der allgemeine Fall $a \geq 0$ erfordert eine aufwendigere Argumentation (siehe z. B. das Buch von Hellwig). Ferner sei $d = 2$. Angenommen, die Funktion u habe im Fall $u \not\leq 0$ in einem Punkt $x_0 \in G$ ein positives Maximum, $u(x_0) > 0$. Dann ist notwendig

$$\nabla u(x_0) = 0, \quad \partial_x^2 u(x_0) \leq 0, \quad \partial_y^2 u(x_0) \leq 0.$$

Damit folgt $0 \geq Lu(x_0) = -\Delta u(x_0) + au(x_0) \geq au(x_0)$, was wegen $a > 0$ auf den Widerspruch $u(x_0) \leq 0$ führt. Q.E.D.

Das Maximumprinzip für elliptische Operatoren 2. Ordnung ist die natürliche Verallgemeinerung der simplen Tatsache, dass in einer Raumdimension aus $u''(x) \geq 0$ die Konvexität von u folgt.

Aussagen vom Typ des obigen Maximumprinzips lassen sich für sehr allgemeine (auch nichtlineare) elliptische Operatoren 2. Ordnung herleiten. Wir betonen, dass das Maximumprinzip i. Allg. für elliptische Operatoren höherer Ordnung (z. B. den „biharmonischen Operator“ Δ^2) und für elliptische Systeme (z. B. die Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie) nicht mehr gilt.

Als erste, einfache Anwendung des Maximumprinzips erhalten wir einen alternativen Beweis für die Eindeutigkeit (klassischer) Lösungen der 1. RWA des Laplace-Operators. Sind $u^{(1)}, u^{(2)}$ zwei Lösungen, so gilt für die Differenz $w := u^{(1)} - u^{(2)}$ wieder

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

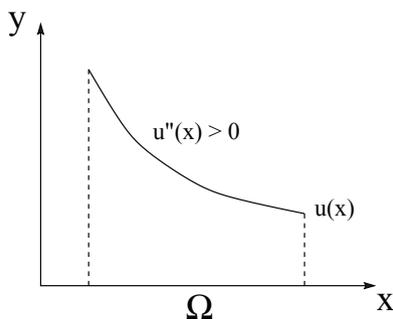


Abbildung 5.3: Schema zum Maximumprinzip.

Anwendung des Maximumprinzips auf w sowie $-w$ impliziert dann, dass $w \leq 0$, $-w \leq 0$, d. h.: $w \equiv 0$.

Als wichtigeres Resultat erhalten wir nun auch die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Randdaten. Seien dazu $u^{(1)}, u^{(2)}$ zwei Lösungen zu den Randdaten $g^{(1)}, g^{(2)}$. Für die Differenz $w := u^{(1)} - u^{(2)}$ gilt dann

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w = g := g^{(1)} - g^{(2)} \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Mit dem Maximumprinzip erschließen wir hieraus, dass $w \equiv 0$ (was natürlich i. Allg. nicht eintritt) oder

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} w(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} g(x), \quad \max_{x \in \bar{\Omega}} -w(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} -g(x).$$

Dies impliziert $\max_{x \in \bar{\Omega}} |w(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)|$.

Schließlich ergibt sich mit Hilfe des Maximumprinzips noch, dass eine Lösung der 1. RWA des Laplace-Operators zu nicht-negativer rechter Seite und ebensolchen Randdaten,

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

notwendig überall nicht-negativ ist: $u \geq 0$. Dies gilt dann z. B. auch für die zugehörige Greensche Funktion: $G(\cdot, \cdot) \geq 0$. Durch schärfere Argumente kann man darüber hinaus zeigen, dass die Greensche Funktion im Innern des Definitionsgebiets Ω *positiv* ist. Dies bedeutet u. a., daß bei einem elliptischen Problem lokale Störungen in den Daten die Lösung im gesamten Lösungsgebiet verändern. Es liegt also gewissermaßen eine „unendliche“ Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information vor. Dies ist charakteristisch für elliptische Randwertaufgaben.

5.2.4 Der Laplace-Operator

Wir betrachten nun den Laplace-Operator als eine Abbildung auf dem Funktionenraum $D(\Delta) := V_0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, den wir mit dem L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_2$ und der zugehörigen

L^2 -Norm $\|\cdot\|_2$ versehen. Der Bildbereich liegt im Raum $C(\Omega)$. Wichtige Eigenschaften des so definierten *linearen* Operators sind die „Symmetrie“ und die „positive Definitheit“. Für $u, v \in D(\Delta)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\partial_n u)v \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} u(-\Delta v) \, dx - \int_{\partial\Omega} (\partial_n u)v \, d\sigma + \int_{\Omega} u(\partial_n v) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Wegen $u|_{\partial\Omega} = 0$ und $v|_{\partial\Omega} = 0$ verschwinden die Randintegrale, und wir erhalten zunächst die Symmetriebeziehung

$$(-\Delta u, v)_2 = (u, -\Delta v)_2, \quad (5.2.7)$$

und ferner mit Hilfe der Poincaréschen Ungleichung die Definitheit

$$(-\Delta u, u)_2 = \|\nabla u\|_2^2 \geq d_{\Omega}^{-2} \|u\|_2^2. \quad (5.2.8)$$

Die Eigenschaft der Symmetrie und Definitheit wird wichtig vor allem im Zusammenhang mit Eigenwertaufgaben („Spektraltheorie“). Zum 1. Randwertproblem des Laplace-Operators gehört die Eigenwertaufgabe

$$-\Delta w = \lambda w \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

für Funktionen $w \neq 0$ und Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$. Wie bei Eigenwertaufgaben von Matrizen impliziert auch hier die Symmetrie des Operators, dass alle möglichen Eigenwerte reell und wegen der Definitheitseigenschaft auch notwendig positiv sind:

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geq d_{\Omega}^{-2} > 0.$$

Für weitere Eigenschaften von Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen benötigen wir tiefer gehende Resultate aus der Theorie des Laplace-Operators als („unbeschränkter“) Operator im Funktionen-Raum $L^2(\Omega)$. Dies ist üblicherweise Gegenstand von Texten zur „Funktionalanalysis“.

Im Spezialfall $n = 1$ können wir dazu bereits verfügbare Resultate aus der Fourier-Analyse verwenden (s. Kapitel 7 des Bandes Analysis 1). Wir betrachten die Eigenwertaufgabe zum eindimensionalen Laplace-Operator auf dem Intervall $\Omega = (0, \pi)$:

$$-w''(x) = \lambda w(x), \quad x \in (0, 1), \quad w(0) = w(\pi) = 0. \quad (5.2.9)$$

Lösungen sind hier gerade die trigonometrischen Funktionen $w_k(x) = \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_k = k^2$. Man kann zeigen, dass dies tatsächlich (bis auf Skalierung) die einzigen Lösungen sind, was für das Folgende aber nicht wichtig ist. Wichtig ist vielmehr, dass man durch ungerade Fortsetzung (bzgl. des Punktes $x = \pi$) dieser Eigenfunktionen auf das Intervall $[0, 2\pi]$ ein vollständiges Orthonormalsystem für den Raum $R(0, 2\pi) \supset C[0, 2\pi]$ erhält. Dies ist gerade die Aussage des Hauptsatzes der

Fourier-Analyse (Vollständigkeitsrelation): Jede Funktion $u \in R(0, 2\pi)$ lässt sich durch Fourier-Summen

$$u_m(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^m \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

approximieren, wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \sin(kx) dx.$$

Die Konvergenz dieser Approximation ist im L^2 -Sinne, d. h.:

$$\|u - u_m\|_2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty). \quad (5.2.10)$$

Ist die Funktion u ungerade, so sind alle Fourier-Koeffizienten $a_k = 0$, und die Entwicklung erhält mit $w_k(x) := \sqrt{2/\pi} \sin(kx)$, $\|w_k\|_2 = 1$, die Form

$$u(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k(x), \quad x \in [0, \pi], \quad \alpha_k = \int_0^{\pi} u w_k dx. \quad (5.2.11)$$

5.3 Parabolische Anfangs-Randwertaufgaben

Die *eindimensionale* Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (5.3.12)$$

oder allgemeiner in höheren Ortsdimensionen

$$\partial_t u - \Delta u = f, \quad (5.3.13)$$

wird üblicherweise auf Zylindern $Q_T := \Omega \times I$ des Orts/Zeit-Raumes betrachtet. Dabei sind $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Ortsgebiet und $I := (0, T]$ ein Zeitintervall. Im örtlich eindimensionalen Fall ($n = 1$) ist die natürliche Anfangskurve $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$ gerade Charakteristik, so dass das zugehörige Cauchysche Anfangswertproblem (mit Vorgabe von u und $\partial_n u$) i. Allg. nicht lösbar ist. Entlang Γ dürfen, wie wir noch sehen werden, nur Anfangsbedingungen an u selbst gestellt werden: $u|_{t=0} = u^0$. Entlang eines nicht-charakteristischen „örtlichen“ Randes $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \partial\Omega, t > 0\}$ gilt dagegen dasselbe wie im elliptischen Fall, d. h.: Die zugehörige Anfangswertaufgabe ist lösbar, doch dürfen nur u oder $\partial_n u$ vorgeschrieben werden, wenn man stetige Abhängigkeit von den Randdaten gewährleisten will.

Analog zum elliptischen Fall bieten sich drei verschiedene Typen von Randbedingungen entlang des örtlichen Randes $\partial\Omega \times I$ für die zugehörige Anfangs-Randwert-Aufgabe (kurz “ARWA”) an. Zusätzlich zu der Anfangsbedingung $u|_{t=0} = u^0$ wird gefordert:

- a) *Dirichletsche Randbedingungen* (“1. ARWA”): $u = g$ auf $\partial\Omega \times I$;
- b) *Neumannsche Randbedingungen* (“2. ARWA”): $\partial_n u = g$ auf $\partial\Omega \times I$;

c) *Robinsche Randbedingungen* („3. ARWA“): $\partial_n u + \alpha u = g$ auf $\partial\Omega \times I$.

Die Randfunktionen g werden hier der Einfachheit halber als glatt und $\alpha \geq 0$ angenommen. Alle diese ARWAn sind, wie wir zum Teil zeigen werden, unter geeigneten Zusatzbedingungen an die Daten ebenfalls wohl gestellt. Unter einer „klassischen Lösung“ verstehen wir nun eine Funktion $u \in C(\overline{Q_T}) \cap C^2(Q_T)$, welche der Differentialgleichung sowie den Anfangs- und Randbedingungen genügt, und deren erste Ableitungen $\partial_t u$ und ∇u über Ω (uneigentlich) R-quadrat-integrierbar sind. Ähnlich wie bei elliptischen Problemen gibt es auch im parabolischen Fall den Begriff der „schwachen Lösung“, den wir hier aber nicht weiter verfolgen wollen. Stattdessen bedienen wir uns für den Nachweis der Existenz von Lösungen eines anderen Ansatzes.

Wir diskutieren zunächst wieder die Eindeutigkeitsfrage. Seien $u^{(1)}, u^{(2)}$ wieder zwei klassische Lösungen der 1. ARWA des Wärmeleitungsoperators. Für die Differenz $w := u^{(1)} - u^{(2)}$ gilt dann

$$\partial_t w - \Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega \times I, \quad w|_{t=0} = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Multiplikation mit w , Integration über Ω und anschließende partielle Integration im Ort ergeben analog zum elliptischen Fall

$$0 = (\partial_t w, w)_2 - (\Delta w, w)_2 = (\partial_t w, w)_2 + \|\nabla w\|_2^2.$$

Mit Hilfe des Satzes von der Differenzierbarkeit von Parameterintegralen folgt weiter

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_2^2 + \|\nabla w\|_2^2.$$

Dies impliziert, dass $\|w(t)\|_2 \leq \|w(0)\|_2 = 0$ für $t \geq 0$, und somit die Eindeutigkeit der Lösung und darüber hinaus deren stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten.

Die Existenzfrage lässt sich im Prinzip mit ähnlichen Methoden behandeln wie im elliptischen Fall. Wir wollen das hier aber nicht weiter verfolgen. Im örtlich eindimensionalen Spezialfall $\Omega = (-\infty, \infty)$ und $f \equiv 0$ lässt sich eine Lösung der Anfangswertaufgabe explizit angeben:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right) u^0(s) ds. \quad (5.3.14)$$

Dies wird durch Nachrechnen verifiziert, wobei speziell auf die Existenz der auftretenden Integralterme zu achten ist. Man beachte, dass durch den Ansatz

$$s(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

eine spezielle Lösung der Wärmeleitungsgleichung gegeben ist (Übungsaufgabe).

Im Fall allgemeinerer, *beschränkter* Ortsgebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gewinnt man eine zu (5.3.14) korrespondierende Lösungsdarstellung mit Hilfe der „Methode der Separation der Variablen“. Einsetzen des Ansatzes $u(x, t) = w(x)\psi(t)$ in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$\psi'(t)w(x) = \psi(t)\Delta w(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} \equiv \textit{konst.},$$

für alle Argumente $(x, t) \in Q_T$. Die Faktoren $w(\cdot) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $w|_{\partial\Omega} = 0$, und $\psi(\cdot) \in C(I)$ sind also notwendig Lösungen der Eigenwertaufgaben

$$-\Delta w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \Omega, \quad -\psi'(t) = \lambda \psi(t), \quad t \geq 0,$$

unter den Nebenbedingungen $w|_{\partial\Omega} = 0$ bzw. $\psi(0) = 1$, mit Parametern $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Eigenwertaufgabe für $w(x)$ besitzt eine Folge von Lösungen $\lambda_j > 0$ und $w_j \not\equiv 0$:

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Eigenfunktionen $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bilden ein vollständiges Orthonormal-System im Raum $C(\overline{\Omega})$ bzgl. der L^2 -Norm. Im Spezialfall $n = 1$ folgt dies aus dem Hauptsatz der Fourier-Analyse (Vollständigkeitsrelation).

Die zugehörigen Lösungen für $\psi(t)$ sind $\psi_k(t) = e^{-\lambda_k t}$. Die Anfangsfunktion besitzt die (verallgemeinerte) bzgl. der L^2 -Norm konvergente Fourier-Entwicklung:

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 w_k(x), \quad u_k^0 = \int_{\Omega} u^0(x) w_k(x) dx.$$

Durch Superposition (d. h. Überlagerung) der Einzellösungen für $k \in \mathbb{N}$,

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 w_k(x) e^{-\lambda_k t}, \quad (5.3.15)$$

erhalten wir folglich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, welche den Randbedingungen und insbesondere den Anfangsbedingungen genügt. (Zum Nachweis überprüfe man die Konvergenz der Reihen der jeweils nach x sowie t abgeleiteten Einzellösungen.) Im eindimensionalen Spezialfall $\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R}^1$ ist gerade

$$w_k(x) = \sqrt{2/\pi} \sin(kx), \quad \lambda_k = k^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

und die Lösungsdarstellung erhält die explizite Form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) e^{-k^2 t}, \quad b_k := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u^0(y) \sin(ky) dy. \quad (5.3.16)$$

Anhand dieser Lösungsdarstellungen lassen sich einige wichtige Eigenschaften der ARWA der Wärmeleitungsgleichung ablesen. Wie bei AWAn gewöhnlicher Differentialgleichungen entwickelt sich die Lösung ausgehend vom Anfangswert in der Zeit. Im Ort pflanzen sich Störungen wie im elliptischen Fall „unendlich schnell“ fort. Irregularitäten in den Anfangs- oder Randdaten werden ausgeglättet, d. h.: im Innern des Zylindergebiets $Q_T := \Omega \times (0, T]$ ist die Lösung (im Falle glatter rechter Seite f) stets glatt.

Im folgenden wollen wir einige qualitative Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung diskutieren. Die Wärmeleitungsgleichung wird u. a. verwendet, um (ihrem Namen entsprechend) Wärmeausbreitungsvorgänge zu beschreiben. Es ist daher wichtig, garantieren zu können, dass ihre Lösungen bei entsprechenden Daten auch stets positiv sind. Dies wird durch ein (dem elliptischen Fall ähnliches) Maximumprinzip geleistet.

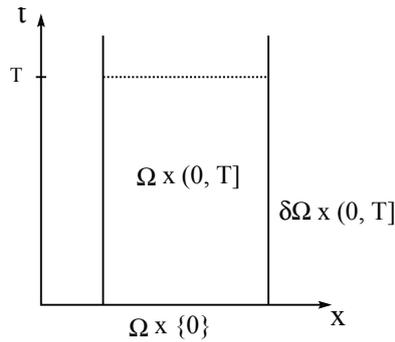


Abbildung 5.4: Schema zum parabolischen Maximumprinzip.

Satz 5.2 (Parabolisches Maximumprinzip): Für jede klassische Lösung $u = u(x, t)$ der Wärmeleitungs-Ungleichung

$$\partial_t u - \Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

gilt das sog. „Maximumprinzip“, d. h.: Sie nimmt im (halboffenen) Zylinder $Q_T := \Omega \times (0, T]$ kein striktes Maximum an.

Beweis: Wir geben den Beweis nur für eine Raumdimension. Die Verallgemeinerung für höhere Dimensionen ist dann evident. Für eine Lösung u der Wärmeleitungs-Ungleichung setzen wir $v_\varepsilon := u - \varepsilon t$, mit beliebigem $\varepsilon > 0$. Da v_ε stetig auf \overline{Q}_T ist, nimmt es in einem Punkt $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$ sein Maximum an. Angenommen, $(x_0, t_0) \in Q_T$. Dann gilt $\partial_x^2 v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$, und folglich

$$\partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq \partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) - \partial_x^2 v_\varepsilon(x_0, t_0) = \partial_t u(x_0, t_0) - \varepsilon - \partial_x^2 u(x_0, t_0) \leq -\varepsilon.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch $\partial_t v_\varepsilon(x_0, t) \leq -\frac{1}{2}\varepsilon$ für $t_0 - h \leq t \leq t_0$, mit einem geeigneten $h > 0$. Hiermit folgern wir, dass

$$v_\varepsilon(x_0, t_0) - v_\varepsilon(x_0, t_0 - h) = \int_{t_0-h}^{t_0} \partial_t v_\varepsilon(x_0, t) dt \leq -\frac{1}{2}\varepsilon h < 0.$$

Dies führt auf den Widerspruch $v_\varepsilon(x_0, t_0) < v_\varepsilon(x_0, t_0 - h)$. Also nimmt v_ε notwendig sein Maximum für $t = 0$ an. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden darf, gilt diese Aussage auch für den (stetigen) Grenzfall $\varepsilon = 0$, d. h. für die Lösung u . Q.E.D.

Als Konsequenz des „parabolischen“ Maximumprinzips sehen wir insbesondere, dass eine Lösung der (homogenen) Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

zu nicht-negativen Anfangsdaten $u^0 \geq 0$ nicht-negativ bleibt für alle $t \geq 0$:

$$u^0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u(x, t) \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} u^0(x), \quad (x, t) \in Q_T.$$

Dazu wird das parabolische Maximumprinzip für die Funktion $-u$ angewendet. Ferner sind „klassische“ Lösungen $u \in C(\overline{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$ wieder eindeutig bestimmt.

Satz 5.3 (Globale Beschränktheit): Für jede Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung (5.3.13) gilt die a priori Abschätzung

$$\|u(t)\|_2 \leq e^{-t/L} \|u^0\|_2 + L \sup_{[0,t]} \|f\|_2,$$

mit $L := \text{diam}(\Omega)$.

Beweis: Wir betrachten die beiden Hilfsprobleme

$$\partial_t v - \Delta v = 0 \text{ in } Q_T, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = u^0, \quad (5.3.17)$$

und

$$\partial_t w - \Delta w = f \text{ in } Q_T, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w|_{t=0} = 0. \quad (5.3.18)$$

Offenbar ist dann $u = v + w$ wegen der Linearität des Wärmeleitungsoperators (Superpositionsprinzip). Wir schätzen nun die beiden Lösungsanteile v und w separat ab.

i) Multiplikation von (5.3.17) mit v und Integration im Ort ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 = 0.$$

Wir multiplizieren dies mit $e^{2t/L}$ und finden

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^{2t/L} \|v\|_2^2) + e^{2t/L} \|\nabla v\|_2^2 - \frac{1}{L} e^{2\lambda t} \|v\|_2^2 = 0,$$

bzw. wegen $\|v\|_2^2 \leq L^2 \|\nabla v\|_2^2$ (Poincarésche Ungleichung):

$$\frac{d}{dt} (e^{2t/L} \|v\|_2^2) \leq 0.$$

Integration bzgl. t ergibt dann

$$e^{2t/L} \|v(t)\|_2^2 \leq \|u^0\|_2^2$$

bzw. wieder

$$\|v(t)\|_2 \leq e^{-t/L} \|u^0\|_2.$$

ii) Multiplikation von (5.3.18) mit w und Integration im Ort ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_2^2 + \|\nabla w\|_2^2 = (f, w)_2 \leq \frac{1}{2L^2} \|w\|_2^2 + \frac{L^2}{2} \|f\|_2^2.$$

Mit Hilfe von $\|w\|_2^2 \leq L^2 \|\nabla w\|_2^2$ folgern wir

$$\frac{d}{dt} \|w\|_2^2 + \|\nabla w\|_2^2 \leq L^2 \|f\|_2^2.$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung nun mit $e^{t/L}$ und finden

$$\frac{d}{dt}(e^{t/L}\|w\|_2^2) + e^{t/L}\|\nabla w\|_2^2 - \frac{1}{L}e^{t/L}\|w\|_2^2 \leq Le^{t/L}\|f\|_2^2,$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}(e^{t/L}\|w\|_2^2) \leq Le^{t/L}\|f\|_2^2.$$

Integration bzgl. t ergibt

$$e^{t/L}\|w(t)\|_2^2 \leq L \int_0^t e^{s/L}\|f\|_2^2 ds$$

bzw.

$$\|w(t)\|_2^2 \leq Le^{-t/L} \int_0^t e^{s/L}\|f\|_2^2 ds.$$

Die Abschätzung

$$e^{-t/L} \int_0^t e^{s/L} ds \leq L.$$

impliziert dann

$$\|w(t)\|_2 \leq L \max_{[0,t]} \|f\|_2.$$

Kombination der Resultate für die Lösungsanteile v und w liefert schließlich die behauptete Abschätzung. Q.E.D.

Als Folgerung aus diesem Satz ersehen wir insbesondere, dass bei einem parabolischen Problem der Einfluss der Anfangsdaten exponentiell mit der Zeit abklingt. Weiter interessiert das Lösungsverhalten für Anfangsdaten u^0 mit minimaler Regularität.

Satz 5.4 (Glättungseigenschaft): Für jede Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (5.3.13) mit $f \equiv 0$ und $u^0 \in L^2(\Omega)$ gilt die a priori Abschätzung

$$\|\partial_t u(t)\|_2 + \|\Delta u(t)\|_2 \leq t^{-1}\|u^0\|_2, \quad t > 0. \quad (5.3.19)$$

Beweis: Wir bedienen uns zum Beweis der sog. „Spektral-Technik“. Aus der Lösungsdarstellung (5.3.15) mit dem Orthonormalsystem von Eigenfunktionen $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ des Laplace-Operators,

$$u(x, t) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 w_j(x) e^{-\lambda_j t},$$

folgern wir

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) := - \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 \lambda_j w_j(x) e^{-\lambda_j t}.$$

Aufgrund der (verallgemeinerten) Parsevalschen Identität gilt demnach

$$\|\partial_t u\|_2^2 = \|\Delta u\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j t}.$$

Hieraus folgt wegen $x e^{-x} \leq 1$, $x \geq 0$:

$$\|\partial_t u\|_2^2 = \|\Delta u\|_2^2 = t^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 (\lambda_j t)^2 e^{-2\lambda_j t} \leq t^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 = t^{-2} \|u^0\|_2^2,$$

was den Beweis vervollständigt.

Q.E.D.

5.4 Hyperbolische Anfangswertaufgaben

In der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$$

wirkt der Laplace-Operator allein auf die Ortsvariable. Eine Lösung muss daher hinsichtlich ihrer Zeitabhängigkeit durch den Differentialoperator ∂_t^2 reproduziert werden. Diese Eigenschaft haben gerade die trigonometrischen Funktionen $\cos(t)$ und $\sin(t)$. Die Lösungen der Wellengleichung sind also typischerweise zeitliche Schwingungsprozesse.

Die Wellengleichung wird in der Regel wieder auf einem Zylindergebiet $Q_T := \Omega \times I$ mit einem (meist beschränkten) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einem Intervall $I = (0, T]$ betrachtet. Die Frage nach der Wohlgestelltheit zugehöriger Anfangs-Randwertaufgaben wollen wir nur für den örtlich eindimensionalen Fall diskutieren. Die charakteristischen Steigungen der (örtlich) *eindimensionalen* Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$

sind gerade gegeben durch $dt/dx = \pm 1$, d. h.: die Charakteristiken sind alle Geraden in der (x, t) -Ebene mit der Steigung ± 1 . Die natürliche Anfangskurve $\Gamma := \{(x, t) : x \in \Omega, t = 0\}$ ist also keine Charakteristik, so dass gemäß der Theorie die zugehörige Cauchysche Anfangswertaufgabe bei Vorgabe von Werten $u(x, 0) = u^0(x)$ und $\partial_t u(x, 0) = u^1(x)$ lösbar ist. Diese Lösung lässt sich im Fall einer Raumdimension leicht angeben. Wir betrachten den Sonderfall $\Omega = \mathbb{R}^1$.

Die Koordinatentransformation $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ überführt die Wellengleichung in die Form

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Diese hat die allgemeine Lösung

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

mit beliebigen, hinreichend glatten Funktionen $F(\cdot)$ und $G(\cdot)$. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung lautet demnach

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t).$$

Zur Erfüllung der Anfangsvorgaben auf Γ muss nun gelten:

$$F(x) + G(x) = u^0(x), \quad F'(x) - G'(x) = u^1(x).$$

Hieraus entnehmen wir, dass

$$\begin{aligned} F(x+t) + G(x+t) + F(x-t) + G(x-t) &= u^0(x+t) + u^0(x-t), \\ F(x+t) - G(x+t) - F(x-t) + G(x-t) &= \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds, \end{aligned}$$

und folglich,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ u^0(x+t) + u^0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds \right\}.$$

Dies ist die (eindeutige) klassische Lösung der Wellengleichung zu den vorgegebenen Anfangsdaten $u^0(x)$, $u^1(x)$. Eine analoge Konstruktion ist auch in höheren Raumdimensionen möglich.

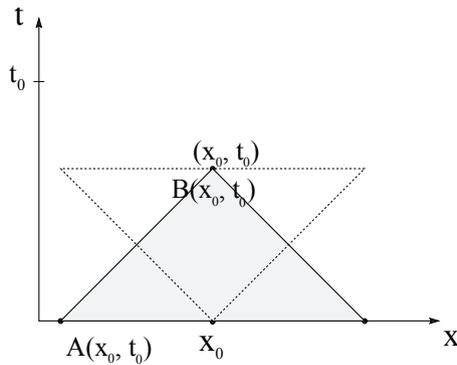


Abbildung 5.5: Schema zur Informationsausbreitung in der Wellengleichung.

Die Form der Lösung $u(x, t)$ zeigt, dass bei einem hyperbolischen Problem die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information endlich ist. Lokale Störungen pflanzen sich entlang der Charakteristiken (Geraden mit Steigung ± 1) fort. Insbesondere erzeugen unstetige Anfangsdaten notwendig auch unstetige Lösungen. Dies erfordert im Falle irregulärer Anfangs- oder Randdaten einen neuartigen Lösungsbegriff, der auch Unstetigkeiten zulässt. Für jeden Punkt $(x_0, t_0) \in Q_T$ gibt es demnach einen „Abhängigkeitsbereich“ $A(x_0, t_0)$ sowie einen „Bestimmtheitsbereich“ $B(x_0, t_0)$, innerhalb deren sich das Anfangswertproblem unabhängig vom restlichen Bereich lösen lässt:

$$A(x_0, t_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq t_0\}, \quad B(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : |x - x_0| \leq t\}.$$

Die Eindeutigkeit von Lösungen der Wellengleichung erschließt man wieder am leichtesten mit Variationsargumenten. Sei $u(x, t)$ eine klassische Lösung der ARWA

$$\partial_t^2 u = \Delta u \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u^1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.4.20)$$

mit endlicher „Energie“ (kinetische + potentielle Energie)

$$E(t) := \|\partial_t u(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 < \infty.$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit $\partial_t u$, Integration über Ω und anschließende partielle Integration ergibt

$$0 = (\partial_t^2 u - \Delta u, \partial_t u)_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\partial_t u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2).$$

Dies impliziert, dass

$$\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 = \|u^1\|_2^2 + \|\nabla u^0\|_2^2,$$

d. h.: Die Lösung ist eindeutig und hängt bzgl. der natürlichen Energie-Norm stetig von den Anfangsdaten ab. Ferner bleibt die Gesamtenergie $E(t)$ im System in der Zeit erhalten. Dies entspricht der Vorstellung, dass bei einem Schwingungsprozess, etwa der Schwingung eines elastischen Körpers oder einer Schallwelle, bei Vernachlässigung von Dämpfung im Verlaufe der Zeit keine Energie verloren geht. Ein „gutes“ Approximationsverfahren für die Wellengleichung sollte diese kritische Eigenschaft möglichst gut wiedergeben.

5.5 Übungen

Übung 5.1: Im Text wurde die Typeneinteilung von linearen Differentialoperatoren 2. Ordnung mit der Aufgabe motiviert, aus gegebenen Werten $u(x_0, y_0)$ und $\partial_n u(x_0, y_0)$ entlang einer Kurve Γ die Lösung $u(x, y)$ über einen Taylor-Reihenansatz zu bestimmen. Diese Konstruktion wurde allerdings nur bis zu den drei zweiten Ableitungen $\partial_x^2 u(x_0, y_0)$, $\partial_x \partial_y u(x_0, y_0)$ und $\partial_y^2 u(x_0, y_0)$ durchgeführt und hing von der Regularität einer gewissen Matrix A ab.

Man zeige, dass nach Bestimmung der zweiten Ableitungen die Konstruktion der vier dritten Ableitungen $\partial_x^3 u(x_0, y_0)$, $\partial_x^2 \partial_y u(x_0, y_0)$, $\partial_x \partial_y^2 u(x_0, y_0)$ und $\partial_y^3 u(x_0, y_0)$ auf dieselbe Matrix A führt. Diese Aussage gilt auch für die weiteren, höheren Ableitungen. Die Vorgenommene Klassifizierung des Differentialoperators als elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch basierend auf der Konstruierbarkeit der Lösung aus den Randdaten ist also sinnvoll.

Übung 5.2: Man bestimme den Typ der Differentialgleichungen

- a) $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0,$
- b) $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0,$
- c) $2(\partial_x + \partial_y)^2 u + \partial_y u = 0.$

(Hinweis: Das im Text angegebene Kriterium für den Typ einer Gleichung kann auch bei variablen Koeffizienten separat in jedem einzelnen Ortspunkt verwendet werden.)

Übung 5.3: Auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂G werden die folgende a) zweite und b) dritte Randwertaufgabe betrachtet:

$$\begin{aligned} a) \quad & -\Delta u + au = f \quad \text{in } \Omega, & \partial_n u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ b) \quad & -\Delta u + au = f \quad \text{in } \Omega, & \partial_n u + \alpha u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit Konstanten $a > 0$ und $\alpha \geq 0$. Man zeige, dass diese RWAn jeweils höchstens eine „klassische“ Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ haben können. Welches Problem ergibt sich im Fall $a = 0$, d. h. für den reinen Laplace-Operator?

Übung 5.4: Auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ sei der lineare Differentialoperator

$$L = -\partial_1(a_{11}\partial_1) - \partial_1(a_{12}\partial_2) - \partial_2(a_{21}\partial_1) - \partial_2(a_{22}\partial_2) + a_{00},$$

gegeben mit möglicherweise variablen Koeffizienten $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$. Die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^2$ sei für alle $x \in \Omega$ symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass der Operator L in ganz G elliptisch ist, und dass die zugehörige 1. RWA

$$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

im Falle $a_{00}(x) \geq 0$ nur die Nullfunktion als klassische Lösung hat.

Übung 5.5: Im Text wurde die Poincarésche Ungleichung

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq d_{\Omega}^2 \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx, \quad d_{\Omega} := \text{diam}(G),$$

nur für Funktionen $u \in V_0(\Omega)$ formuliert, d. h. welche auf dem ganzen Rand $\partial\Omega$ null sind. Der Beweis funktioniert aber auch für Funktionen, die nur entlang eines Teils $\Gamma \subset \partial\Omega$ des Randes mit Länge $|\Gamma| \neq 0$ null sind, d. h. auf dem Raum

$$V_0(\Gamma; \Omega) := \{v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : \nabla v \in L^2(\Omega)^n, v|_{\Gamma} = 0\}.$$

i) Man führe den Beweis dieser Verallgemeinerung der Poincaréschen Ungleichung für das Einheitsquadrat $Q = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und den Randteil $\Gamma := \{x = (x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$.

ii) Kann die Poincarésche Ungleichung gültig bleiben, wenn der Randteil $\Gamma \subset \partial G$ trivial ist, etwa nur aus einem Punkt besteht? Man untersuche diese Frage anhand der in (i) gegebenen Situation mit $\Gamma := \{(0, 0)\}$. Welche Konsequenzen hat die Antwort auf diese Frage für die 1. RWA des Laplace-Operators? (Hinweis: Man betrachte die Folge der Funktionen $u_k(r, \theta) = r^{1/k}$.)

Übung 5.6: Der Laplace-Operator $\Delta = \text{div grad}$ hat für Funktionen $u = u(r, \theta)$ in Polarkoordinaten $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ die folgende Form:

$$\Delta u = (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_{\theta}^2)u.$$

i) Für ein $\omega \in (0, 2\pi]$ sei $S_\omega := \{(r, \theta) : r > 0, \theta \in (0, \omega)\}$ der zugehörige Sektor der (x, y) -Ebene. Man zeige, dass die auf dem Gebiet $\Omega := S_\omega \cap K_1(0)$ definierte Funktion

$$s_\omega(r, \theta) := r^{\pi/\omega} \sin(\theta\pi/\omega)$$

harmonisch ist, d. h. $\Delta s_\omega \equiv 0$, und den Randbedingungen $s_\omega(r, 0) = s_\omega(r, \omega) = 0$ sowie $s_\omega(1, \theta) = \sin(\theta\pi/\omega)$ genügt.

ii) Man zeige, dass im Fall $\pi < \omega \leq 2\pi$, d. h. im Fall eines *stumpfen* Innenwinkels, die ersten Ableitungen dieser Funktion zwar unbeschränkt aber noch (uneigentlich) quadrat-integrabel sind, dass ihre zweiten Ableitungen aber nicht mehr quadrat-integrabel sind. Wie sieht das bei *spitzen* Innenwinkeln, d. h. $0 < \omega < \pi$, aus?

Dieses Beispiel zeigt, dass klassische Lösungen von elliptischen RWAn auch zu glatten Daten am Gebietsrand nicht regulär zu sein brauchen.

Übung 5.7: Für die klassische Lösung der 1. Randwertaufgabe des Laplace-Operators

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

auf einem beliebigen glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset Q_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ zeige man die Einschließung

$$0 \leq u(x, y) \leq \frac{1}{8}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

(Hinweis: Man vergleiche u mit der quadratischen Funktion $v(x, y) = \frac{1}{4}x(1-x) + \frac{1}{4}y(1-y)$ und wende das Maximumprinzip an.)

Übung 5.8: Man verifiziere, dass durch

$$s(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

eine spezielle Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in } (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$$

gegeben ist. Man verwende dies, um zu zeigen, dass für $u^0 \in C(-\infty, \infty)$ mit der Eigenschaft $u^0(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ durch

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u^0(y) dy$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu den Anfangswerten $u(x, 0) = u^0(x)$ ist. (Hinweis: Es ist $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/a} dy = \sqrt{a\pi}$.)

Übung 5.9: Für die klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in } [0, \pi] \times [0, \infty)$$

zu den Anfangs- und Randbedingungen $u(x, 0) = u^0$ und $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, zeige man mit Hilfe der Spektraltechnik für $u^0 \in C^1[0, \pi]$ die a priori Abschätzung

$$\|\partial_t u(\cdot, t)\|_2 + \|\partial_x^2 u(\cdot, t)\|_2 \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \|\partial_x u^0\|_2, \quad t > 0,$$

mit einer von u^0 und t unabhängigen Konstante $c > 0$.

Übung 5.10: Man konstruiere mit Hilfe der Methode der Variablenseparation eine Lösung $u(x, t)$ der 1. ARWA der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in } [0, \pi] \times [0, \infty)$$

zu den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \sin(2x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

(Hinweis: Man orientiere sich am entsprechenden Lösungsansatz für die Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung des ONS von Eigenfunktionen des Laplace-Operators.)