4 Anwendungen des Lebesgue-Integrals

In diesem Kapitel wollen wir als Anwendung der Theorie des Lebesgue-Integrals einen Ausflug in das Gebiet der sog. „Funktionalanalysis“ unternehmen. Ziele sind die Ausdehnung der im Band Analysis 1 diskutierten Fourier-Entwicklungen von *periodischen* Riemann-integrierbaren Funktionen für möglichst allgemeine, nicht notwendig periodische Funktionen und die Rechtfertigung des in Kapitel 2 betrachteten Dirichletschen Prinzips über die Existenz von Minima des Dirichlet-Integrals

$$D[u] := \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\,dx$$

bei vorgegeben Randwerten $u_{|\partial\Omega} = g$. Grundlage hierfür ist das Studium gewisser Räume Lebesgue-integrierbarer und in einem verallgemeinerten Sinne differenzierbarer Funktionen.

4.1 Der Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$

Als Vorbereitung betrachten wir „Funktionenräume“ von Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf offenen (d. h. messbaren) Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt ist $1 \le p < \infty$, wenn nichts Anderes gesagt ist.

Lemma 4.1: *Die folgende Funktionenmenge ist ein Vektorraum*

$$\tilde L^p(\Omega) := \big\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} :\ |f|^p \in L(\Omega)\big\}.$$

Beweis: Für $f, g \in \tilde L^p(\Omega)$ sind f, g und somit auch $|f+g|^p$ messbar. Die Ungleichung $|f+g|^p \le 2^p\big(|f|^p + |g|^p\big)$ impliziert dann das Integrabilitätskriterium von Satz 3.5, dass auch $f+g \in \tilde L^p(\Omega)$ ist. Ferner ist für $f \in \tilde L^p(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f \in \tilde L^p(\Omega)$. Q.E.D.

Im Sinne dieser Definition ist $\tilde L^1(\Omega) = L(\Omega)$. Auf $\tilde L^p(\Omega)$ definieren wir

$$\|f\|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Es handelt sich hier nur um eine „Semi-Norm“ und nicht eine Norm, da aus $\|f\|_p = 0$ nur $f = 0$ „fast überall“ (kurz: „f. ü.“) in Ω folgt. Die anderen Normeigenschaften sind aber gegeben. Die Homogenität folgt aus der Linearität des Integrals,

$$\|\alpha f\|_p = \Big(\int_\Omega |\alpha f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} = |\alpha|\Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} = |\alpha|\,\|f\|_p. \tag{4.1.1}$$

Die Dreiecksungleichung ist teilweise Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 4.2 (Höldersche und Minkowskische Ungleichung): *Für* $1 \le p, q < \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *seien* $f \in \tilde{L}^p(\Omega)$ *und* $g \in \tilde{L}^q(\Omega)$. *Dann ist* $fg \in L(\Omega)$, *und es gilt die Höldersche Ungleichung*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \le \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \Big)^{1/p} \Big(\int_\Omega |g(x)|^q \Big)^{1/q}. \tag{4.1.2}$$

Für $1 \le p < \infty$ *und* $f, g \in \tilde{L}^p(\Omega)$ *gilt die Minkowskische Ungleichung*

$$\Big(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \Big)^{1/p} \le \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega |g(x)|^p \Big)^{1/p}. \tag{4.1.3}$$

Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung lauten in kurzer Notation:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q, \qquad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis: i) O.B.d.A. sei $f, g \ge 0$. Im Fall $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ ist $fg = 0$ f. ü. und somit $\|fg\|_1 = 0$. Die Höldersche Ungleichung ist in diesem Fall also trivialerweise erfüllt. Sei also nun $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$ angenommen. Mit f, g ist auch fg messbar. Wir setzen

$$\varphi(x) := \frac{f(x)^p}{\|f\|_p^p}, \qquad \psi(x) := \frac{g(x)^q}{\|g\|_q^q}.$$

Es ist dann $\varphi, \psi \in L(\Omega)$ mit $\|\varphi\|_1 = 1 = \|\psi\|_1$. Für beliebige reelle Zahlen $a, b \ge 0$ gilt:

$$a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Dies folgt aus der Konkavität der Logarithmusfunktion, $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$, und der Monotonie der Exponentialfunktion durch beidseitiges Exponieren der Ungleichung

$$\ln\Big(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\Big) \ge \frac{1}{p}\ln(a) + \frac{1}{q}\ln(b) = \ln(a^{1/p} b^{1/q}).$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung mit $a := \varphi(x)$ und $b := \psi(x)$ ergibt sich

$$\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p \|g\|_q} \le \frac{\varphi(x)}{p} + \frac{\psi(x)}{q}.$$

Folglich ist nach dem Integrabilitätskriterium von Satz 3.5 $fg \in L(D)$. Integration auf beiden Seiten ergibt dann

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_\Omega f(x)g(x)\, dx \le \frac{\|\varphi\|_1}{p} + \frac{\|\psi\|_1}{q} = 1,$$

woraus die Höldersche Ungleichung folgt.

ii) Für $p = 1$ folgt die behauptete Ungleichung aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag und der Monotonie und Linearität des L-Integrals:

$$\int_\Omega |f+g|\, dx \le \int_\Omega (|f| + |g|)\, dx = \int_\Omega |f|\, dx + \int_\Omega |g|\, dx.$$

Sei nun $p > 1$ und $q := p/(p-1)$, d. h.: $1/p + 1/q = 1$. Wir definieren die Funktion $h := |f+g|^{p-1}$, welche samt ihrer Potenzen messbar ist. Dann ist $h^q = |f+g|^p$, also

$$\|h\|_q = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Ferner ist

$$|f+g|^p = |f+g|h \le |fh| + |gh|.$$

Die Höldersche Ungleichung liefert also

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g|^p\,dx \le \|fh\|_1 + \|gh\|_1\\ &\le \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|h\|_q \le \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p/q}.\end{aligned}$$

Wegen $p - p/q = 1$ ergibt sich die Behauptung. Q.E.D.

Um aus der Seminorm $\|\cdot\|_p$ eine richtige Norm zu machen, bedienen wir uns eines Kunstgriffs. Auf $\tilde{L}^p(\Omega)$ wird durch

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f = g \text{ f. ü. in } \Omega$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Zwei Funktionen $f, g \in \tilde{L}^p(\Omega)$ sind also „äquivalent", wenn sie sich nur auf einer Menge mit Maß Null unterscheiden; ihre Integrale und Seminormen stimmen dann überein. Die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen

$$[f] := \{g \in \tilde{L}^p(\Omega) : g \sim f\}$$

bildet dann wieder einen Vektorraum. Auf diesem ist durch

$$\|[f]\|_p := \sup\big\{\|g\|_p,\ g \in [f]\big\} = \|f\|_p$$

eine Norm definiert. Homogenität und Dreiecksungleichung überträgt sich unmittelbar von den entsprechenden Eigenschaften der Seminnorm auf $\tilde{L}^p(\Omega)$. Im Gegensatz zu letzterer liegt nun aber auch Definitheit vor, denn $\|[f]\|_p = 0$ bedeutet $f = 0$ f. ü., d. h.: $[f] = [0]$. Damit wird der Vektorraum der Äquivalenzklassen zu einem normierten Raum. Durch Zuordnung eines (beliebigen) Repräsentanten f zur Äquivalenzklasse $[f]$ kann dieser normierte Raum als Funktionenraum interpretiert werden. Wir werden im Folgenden nicht mehr zwischen Äquivalenzklasse und (beliebigem) Repräsentanten unterscheiden.

Definition 4.1: *Der normierte Raum der bis auf Mengen vom Maß Null definierten und zur p-ten Potenz integrierbaren Funktionen* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*, mit der Norm* $\|\cdot\|_p$*, wird als „Lebesgue-Raum"* $L^p(\Omega)$ *bezeichnet.*

Der folgende für die Theorie der Lebesgue-Räume fundamentale Satz geht auf Resultate zur Fourier-Analyse (s. den nächsten Abschnitt) zurück, die 1907 von Ernst Sigismund Fischer[1]und von Frigyes Riesz[2] unabhängig voneinander bewiesen wurden. In der Literatur finden sich heute unterschiedliche Sätze, die ihren Namen tragen und Varianten oder Verallgemeinerungen dieses Satzes sind.

[1]Ernst Sigismund Fischer (1875–1954): Österreichischer Mathematiker, Prof. an der Universität Köln, Beiträge zur Analysis und Algebra.

[2]Frigyes Riesz (1880–1956): Ungarischer Mathematiker; Prof. in Kolozsvr (heute Cluj-Napoca, Rumnien) und Budapest; wesentliche Beiträge zur Funktionalanalysis.

Satz 4.1 (Satz von Fischer-Riesz): *Der normierte Raum* $L^p(\Omega)$ *ist vollständig, d. h. ein Banach-Raum.*

Beweis: i) Sei (f_k) eine Cauchy-Folge von Funktionen $f_k \in L^p(\Omega)$. Wir haben zu zeigen, dass es ein $f \in L^p(\Omega)$ gibt mit $\|f_k - f\|_p \to 0$ $(k \to \infty)$. Sei dazu $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Dazu gibt es eine monoton wachsende Indexfolge $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|f_i - f_j\|_p < \varepsilon_k, \quad i, j \geq i_k.$$

Wir betrachten die Teilfolge $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und setzen $u_1 := f_{i_1}$ und $u_k := f_{i_k} - f_{i_{k-1}}$, $k \geq 2$. Dann gilt

$$\sigma := \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p \leq \|f_{i_1}\|_p + \sum_{k=2}^{\infty} \|f_{i_k} - f_{i_{k-1}}\|_p \leq \|f_{i_1}\|_p + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{k-1} < \infty.$$

ii) Wir wollen zeigen, dass hieraus $f := \sum_{k=1}^{\infty} u_k \in L^p(\Omega)$ folgt, sowie

$$\|f - f_{i_k}\|_p \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Zunächst ist $v_k := |u_1| + \cdots + |u_k| \in L^p(\Omega)$ und

$$\|v_k\|_p \leq \|u_1\|_p + \cdots + \|u_k\|_p.$$

Also ist

$$\int_{\Omega} |v_k|^p \, dx \leq \sigma^p.$$

Die Funktion $v := \lim_{k\to\infty} v_k = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$ ist messbar, und aus dem Satz von Beppo Levi (Satz 3.6) folgt

$$\int_{\Omega} |v|^p \, dx \leq \sigma^p.$$

Also ist $v \in L^p(\Omega)$ mit $\|v\|_p \leq \sigma$. Insbesondere ist $v(x) < \infty$ f. ü. in Ω, d. h. für $x \in \Omega \setminus N$ mit einer Nullmenge $N \subset \Omega$. Dies impliziert die absolute Konvergenz der Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in \Omega \setminus N.$$

Aus der Ungleichung $|f| \leq v$ f. ü. in Ω folgt weiter, dass $f \in L^p(\Omega)$. Für die Partialsummen $u_1 + \cdots + u_k = f_{i_1} + f_{i_2} - f_{i_1} + \cdots + f_{i_k} - f_{i_{k-1}} = f_{i_k}$ gilt

$$|f - f_{i_k}| \leq |f| + |f_{i_k}| \leq 2v.$$

Wegen $|f - f_{i_k}|^p \leq 2^p v^p \in L(\Omega)$ kann der Satz zur majorisierten Konvergenz (Satz 3.7) angewendet werden und liefert die Konvergenz der Teilfolge $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{k\to\infty} |f - f_{i_k}|^p = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} |f - f_{i_k}|^p \, dx = 0.$$

iii) Aus der Abschätzung

$$\|f_i - f\|_p \le \|f_i - f_{i_k}\|_p + \|f_{i_k} - f\|_p \le \varepsilon_k + \|f_{i_k} - f\|_p, \quad i \ge i_k,$$

ergibt sich die Konvergenz der ganzen Folge $f = \lim_{i\to\infty} f_i$ in $L^p(\Omega)$. Q.E.D.

Als Folgerung aus dem Beweis von Satz 4.1 erhalten wir die wichtige Aussage, dass Konvergenz einer Funktionenfolge in $L^p(\Omega)$ die f. ü. punktweise Konvergenz einer Teilfolge impliziert. Die punktweise Konvergenz der gesamten Folge liegt i. Allg. nicht vor.

Korollar 4.1: *Ist $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega)$ mit $f = \lim_{i\to\infty} f_i$ in $L^p(\Omega)$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche f. ü. in Ω punktweise gegen f konvergiert.*

Bemerkung 4.1: Die Aussage von Korollar 4.1 kann i. Allg. nicht verbessert werden, denn es gibt Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$, welche in keinem Punkt $x \in \Omega$ konvergieren, aber dennoch in $L^1(\Omega)$ gegen Null konvergieren. Zur Konstruktion eines Beispiels unterteilen wir für $n \in \mathbb{N}$ das Einheitsintervall $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}^1$ in 2^n Teilintervalle gemäß

$$[0,1] = \cup_{m=1}^{2^n} [(m-1)2^{-n}, m2^{-n}],$$

und ordnen jedem der Teilintervalle $[(m-1)2^{-n}, m2^{-n}]$ die zugehörige charakteristische Funktion zu:

$$f_{nm} := \chi_{[(m-1)2^{-n}, m2^{-n}]}, \quad n \in \mathbb{N},\ m = 1,\dots,2^n.$$

Sei nun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Durchnummerierung dieser Funktionen nach aufsteigendem $n = 1,2,3,\dots$ und $m = 1,\dots,2^n$. Für diese Funktionen $f_k \in L^1(0,1)$ gilt dann

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = \lim_{n,m\to\infty} \int_0^1 f_{nm}(x)\,dx = \lim_{n,m\to\infty} \int_{(m-1)2^{-n}}^{m2^{-n}} dx = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Nun ist jedes $x \in [0,1]$ sicherlich in unendlich vielen der Teilintervalle $[(m-1)2^{-n}, m2^{-n}]$ enthalten. Für eine Teilfolge $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist dann $f_{k_i}(x) = 1$, d. h.: Die gesamte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in x nicht gegen Null.

Für $p = 2$ steht die Norm $\|\cdot\|_2$ in engem Zusammenhang mit dem L^2-Produkt

$$(f,g)_2 := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \qquad \|f\|_2 = (f,f)_2^{1/2}.$$

Dieses ist ein Skalarprodukt auf dem Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$, der damit zu einem sog. „Hilbert-Raum“ wird.

Ein wichtiges Hilfsmittel der Variationsrechnung und der Theorie partieller Differentialgleichungen ist die Approximierbarkeit von L^p-Funktionen durch glatte Funktionen. Der folgende Satz stellt ein solches Resultat für den Funktionenraum

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \text{ mit kompaktem Träger } \operatorname{supp}(f) \subset \Omega\}$$

bereit. Dabei ist der „Träger“ einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \ne 0\}} \subset \overline{\Omega}.$$

Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ wird als Teilraum von $L^p(\Omega)$ aufgefasst.

Satz 4.2 (Approximationssatz): *Der Teilraum* $C_0^\infty(\Omega)$ *ist dicht in* $L^p(\Omega)$ *, d. h.: Zu jedem* $f \in L^p(\Omega)$ *gibt es eine Folge* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *mit* $\|f_k - f\|_p \to 0 \ (k \to \infty)$ *.*

Beweis: Sei $f \in L^p(\Omega)$. Wegen $f = f^+ + f^-$ genügt es, die Behauptung für nicht-negatives f zu beweisen. Ferner können wir o.B.d.A. wieder $f(x) < \infty$ annehmen. Der Beweis wird nun in mehreren Schritten geführt.

i) Wir konstruieren zunächst eine approximierende Folge von Treppenfunktionen. Dazu definieren wir für $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$M_k^\varepsilon := \{x \in \Omega : \ \varepsilon k \le f(x) < \varepsilon(k+1)\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und die zugehörige Treppenfunktion

$$t_\varepsilon(x) := \sum_{k=1}^\infty m_k \chi_{M_K^\varepsilon}, \qquad m_k := \inf_{x\in M_k^\varepsilon} f(x).$$

Mit letzterer gilt nach Konstruktion $0 \le t_\varepsilon \le f \le t_\varepsilon + \varepsilon$. Dieselbe Definition mit $\varepsilon/2$ ergibt Mengen $M_k^{\varepsilon/2}$ und eine zugehörige Treppenfunktion $t_{\varepsilon/2}$ mit $t_\varepsilon \le t_{\varepsilon/2}$. Anwendung dieser Konstruktion für $\varepsilon_k := 2^{-k}$ ergibt dann eine Folge von Treppenfunktionen $t_k := t_{\varepsilon_k}$ mit den Eigenschaften $0 \le t_1 \le \dots \le t_k \le f$ und $\lim_{k\to\infty} t_k(x) = f(x)$. Die durch

$$s_k(x) := \min\{k, t_k(x)\}, \ \ |x| \le k, \quad s_k(x) := 0, \ \ |x| > k,$$

definierten Treppenfunktionen nehmen nun nur endlich viele Werte an, und erfüllen ebenfalls $0 \le s_k \le f$ und $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$. Nach dem Satz von Lebesgue folgt also

$$\int_\Omega |s_k - f|^p \, dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Die Treppenfunktionen s_k sind endliche Superpositionen von charakteristischen Funktionen χ_A zu beschränkten Mengen $A \subset \Omega$. Es genügt also zu zeigen, dass solche charakteristische Funktionen in $L^p(\Omega)$ durch Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ approximiert werden können.

ii) Sei $A \subset \Omega$ meßbar und beschränkt. Nach Satz 3.2 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O mit $A \subset O \subset \Omega$ und $\mu(O \setminus A) < \varepsilon^p$. Für die zugehörigen charakteristischen Funktionen folgt

$$\|\chi_O - \chi_A\|_p = \Big(\int_{O\setminus A} dx \Big)^{1/p} = \mu(O \setminus A)^{1/p} < \varepsilon.$$

Es genügt also, die charakteristische Funktion χ_O zur offenen Menge $O \subset \Omega$ zu approximieren. Die Mengen

$$A_k := \{x \in O : \ \operatorname{dist}(x, \partial O) \ge 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

sind kompakt, und erfüllen $\cup_{k=1}^\infty A_k = O$. Unten werden wir zeigen, dass es zu jedem A_k eine Funktion $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt mit den Eigenschaften $0 \le \varphi_k \le 1$, $\varphi_k(x) = 1, \ x \in A_k$

und $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset O$. Es gilt also $|\varphi_k| \le \chi_O$ und $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \chi_O$. Hieraus folgt wieder mit dem Satz von Lebesgue, dass $\|\varphi_k - \chi_O\|_p \to 0 \ (k \to \infty)$.

iii) Zur Vervollständigung des Beweises konstruieren wir zu einer kompakten Menge $A \subset \Omega$ eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften

$$0 \le \varphi \le 1, \quad \varphi(x) = 1, \ x \in A.$$

Die kompakte Menge $A \subset \Omega$ hat einen positiven Abstand $\delta := \operatorname{dist}(A, \partial\Omega)$ zum Rand von Ω. Wir definieren die stetigen Funktionen $d(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ und

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{3}\delta, \\ \frac{3}{\delta}t - 1, & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}\delta, \\ 1, & \frac{2}{3}\delta < t. \end{cases}$$

Die stetige Funktion $f(x) := h(d(x))$ hat dann die Eigenschaften $0 \le f \le 1$ und

$$f \equiv 0 \quad \text{in } A^c_{2\delta/3}, \qquad f \equiv 1 \quad \text{in } A_{\delta/3},$$

mit $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Damit bilden wir das sog. „Faltungsintegral“

$$\varphi(x) := \Big(\frac{\delta}{6}\Big)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi\Big(\frac{x-y}{\delta/6}\Big)\, dy$$

mit einer Funktion $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften $\psi \ge 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 1.$$

Dieses hat dann als Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ alle geforderten Eigenschaften (Übungsaufgabe), womit der Beweis vervollständigt ist. Q.E.D.

Bemerkung 4.2: Aus Satz 4.2 folgt, dass der Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ auch durch Vervollständigung des Teilraumes $C_0^\infty(\Omega)$ gewonnen werden kann. Die Menge der Äquivalenzklassen von L^p-Cauchy-Folgen in $C_0^\infty(\Omega)$ ist nach Konstruktion ein vollständiger normierter Raum und lässt sich mit dem Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ identifizieren.

Korollar 4.2: *Eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$, für die gilt*

$$(f, \varphi)_2 = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.1.4}$$

erfüllt $f = 0$ f. ü. in Ω.

Beweis: Zu der Funktion $f \in L^2(\Omega)$ gibt es nach Satz 4.2 eine approximierende Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f_k - f\|_2 \to 0 \ (k \to \infty)$. Dies impliziert

$$\|f\|_2^2 = (f, f)_2 = (f, f - f_k)_2 \le \|f\|_2 \|f - f_k\|_2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

und folglich $f = 0$ f. ü. in Ω. Q.E.D.

Bemerkung 4.3: Für den Grenzfall $p = \infty$ erhält man zunächst den Vektorraum $\tilde{L}^\infty(\Omega)$ der auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sog. „wesentlich beschränkten" Funktionen. Dies sind messbare Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, für die mit einer Konstante $K \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mu\{x \in \Omega \,|\, |f(x)| > K\} = 0,$$

d. h.: Durch geeignete Modifikation von f auf einer Nullmenge erhält man eine im klassischen Sinne beschränkte Funktion. Jedes solches K wird als „wesentliche Schranke" von f bezeichnet. Das „wesentliche Supremum" von f ist dann

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf\{K > 0 \,|\, K \text{ wesentliche Schranke}\}.$$

Auf $\tilde{L}^\infty(\Omega)$ wird durch

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad \operatorname{ess\,sup} |f - g| = 0,$$

wieder eine Äquivalenzrelation erklärt. Die Menge der Äquivalenzklassen $\{[f],\, f \in \tilde{L}^\infty(\Omega)\}$ bildet dann analog wie im Fall $1 \le p < \infty$ einen Vektorraum, dessen Elemente mit geeignet gewählten Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse identifiziert werden, $f \approx [f]$, und der mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \inf_{g \in [f]} \big\{\operatorname{ess\,sup}_\Omega |g|\big\}$$

versehen wird. Dieser normierte Raum wird mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnet; er ist ebenfalls ein Banach-Raum. Man beachte aber, dass der Teilraum $C_0^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $L^\infty(\Omega)$ liegt (Übungsaufgabe).

4.2 Fourier-Analyse

In Kapitel 7 „Fourier-Analyse" des Bandes Analysis 1 wurde die Darstellung periodischer Funktionen durch sog. „Fourier-Reihen" untersucht. Es wurde insbesondere gezeigt, dass für jede 2π-periodische, stückweise stetige (und damit Riemann-integrierbare) Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ die zugehörige „Fourier-Summen" in *reeller* Darstellung

$$F_n^f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big\{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big\} \tag{4.2.5}$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\,, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt\,,$$

oder in ihrer äquivalenten *komplexen* Darstellung

$$F_n^f(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kt} \tag{4.2.6}$$

mit den Koeffizienten

$$c_0 := \tfrac{1}{2}a_0, \qquad c_k := \tfrac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k), \quad c_{-k} := \tfrac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

im Sinne der L^2-Konvergenz gegen f konvergiert, d. h.:

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n^f - f\|_2 = 0. \tag{4.2.7}$$

Diese Analyse bediente sich der „komplexen“ Version der Lebesgue-Raumes $L^2(0, 2\pi)$ mit dem zugehörigen Skalarprodukt

$$(f, g)_2 := \int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)\, dt.$$

Hier gilt $(c_j, c_k)_2 = 2\pi\, \delta_{jk},\ j, k \in \mathbb{Z}$.

Wir wollen dieses Resultat auf Funktionen aus $L^2(0, 2\pi)$ ausdehnen. Dieser Verallgemeinerungsschritt ist vergleichsweise einfach. Der „harte“ Teil der Arbeit ist bereits beim Nachweis der Fourier-Approximierbarkeit glatter Funktionen geleistet worden.

Definition 4.2: *Eine Menge $A = \{e\} \subset L^2(0, 2\pi)$ heißt „Orthonormalsystem“ (ONS), wenn für $e, e' \in A$ gilt:*

$$(e, e)_2 = 1 \quad \text{und} \quad (e, e')_2 = 0 \ \text{ für } \ e \neq e'.$$

Sie heißt „vollständig“, wenn ihre lineare Hülle $\mathrm{span}(A)$ *dicht in $L^2(0, 2\pi)$ ist, d. h.: Wenn es für jedes $f \in L^2(0, 2\pi)$ zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $f_\varepsilon \in \mathrm{span}\, A$ gibt, so dass*

$$\|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon.$$

Lemma 4.3: *Die (abzählbare) Menge der Exponentialfunktionen $A = \{e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}\}$, bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(0, 2\pi)$.*

Beweis: Nach dem oben Gesagten konvergiert die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in R[0, 2\pi]$ im quadratischen Mittel gegen f, d. h.: Die lineare Hülle der Menge der Exponentialfunktionen ist bzgl. der L^2-Norm dicht in $R[0, 2\pi]$. Wegen $C_0^\infty(0, 2\pi) \subset R[0, 2\pi]$ und der Dichtheit von $C_0^\infty(0, 2\pi) \subset L^2(0, 2\pi)$ ist dann aber auch $\mathrm{span}(A) \subset L^2(0, 2\pi)$ dicht. Q.E.D.

Lemma 4.4: *Sei $A = \{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(0, 2\pi)$. Für ein $f \in L^2(0, 2\pi)$ seien die (verallgemeinerten) Fourier-Summen definiert durch*

$$F_n^f := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, \quad c_k := (f, e_k)_2.$$

Dann gilt bzgl. des Unterraumes $E_n := \mathrm{span}\{e_k, -n \le k \le n\} \subset L^2(0, 2\pi)$:

$$\|f - F_n^f\|_2 = \min_{g \in E_n} \|f - g\|_2, \tag{4.2.8}$$

$$\|f - F_n^f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \tag{4.2.9}$$

Beweis: Für beliebiges $g = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k \in E_n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - (f,g)_2 - (g,f)_2 + \|g\|_2^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} \overline{\alpha}_k (f,e_k)_2 - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (e_k,f)_2 + \sum_{j,k=-n}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j (e_k,e_j)_2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} \overline{\alpha}_k c_k - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \overline{c}_k + \sum_{k=-n}^{n} |\alpha_k|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \overline{\alpha}_k c_k - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \overline{c}_k + \sum_{k=-n}^{n} |\alpha_k|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \alpha_k|^2 .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite wird offenbar minimal für $\alpha_k = c_k$, d. h. für $g = F_n^f$. Für diese Wahl gilt dann auch (4.2.9). Q.E.D.

Nach diesen Vorbereitungen können wir das Hauptergebnis zur Fourier-Analyse periodischer Funktionen beweisen.

Satz 4.3 (Satz von Fischer-Riesz): *Für jede 2π-periodische Funktion $f \in L^2(0,2\pi)$ konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe im L^2-Sinne gegen f,*

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n(f) - f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} - f \Big\|_2 = 0, \tag{4.2.10}$$

und mit ihren Fourier-Koeffizienten c_k gilt die sog. „Vollständigkeitsrelation“ (auch „Parsevalsche[3] Gleichung“ genannt)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2. \tag{4.2.11}$$

Beweis: Zu jedem $f \in L^2(0,2\pi)$ gibt es wegen der Vollständigkeit des Exponentialsystems in $L^2(0,2\pi)$ zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Linearkombination $g_n = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k$ mit

$$\|f - g_n\|_2 < \varepsilon.$$

Aufgrund der Bestapproximationseigenschaft (4.2.8) der Fourier-Summe F_n^f zu f gilt dann

$$\|f - F_n^f\|_2 \le \|f - g_n\|_2 < \varepsilon.$$

Dies impliziert für $\varepsilon \to 0$ die Konvergenz (4.2.10). Durch Grenzübergang $n \to \infty$ in (4.2.9) erhalten wir bei Beachtung der Monotonie der Folge der Partialsummen $\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$ die Parsevalsche Identität. Q.E.D.

[3]Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836): Französischer Mathematiker; Arbeiten über partielle Differentialgleichungen der Physik (nur fünf mathematische Publikationen); bekannt durch die nach ihm benannte Gleichung, die er aber ohne Beweis und Bezug zu Fourier-Reihen angegeben hat.

Bemerkung 4.4: Der klassischer Satz von Fischer-Riesz besagt, dass der Raum $L^2(0, 2\pi)$ der im Lesgueschen Sinne quadrat-integrablen Funktionen isometrisch isomorph zum Raum $l^2(\mathbb{N})$ der quadrat-summierbaren Folgen ist:

$$L^2(0, 2\pi) \cong l^2(\mathbb{N}).$$

Der Isomorphismus zwischen $L^2(0, 2\pi)$ und $l^2(\mathbb{N})$ ist gerade die Transformation in eine Fourier-Reihe, d. h.: Jede L^2-Funktion lässt sich aus der Folge ihrer Fourier-Koeffizienten rekonstruieren. Dies besagt u. a., dass eine messbare Funktion genau dann in $L^2(0, 2\pi)$ liegt, wenn ihre Fourier-Reihe bezüglich der L^2-Norm konvergiert. Oftmals findet man auch folgende, allgemeinere Aussage unter dem Namen Satz von Fischer-Riesz: *Ist H ein abstrakter Hilbert-Raum und $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von H, d. h. ein abzählbares, paarweise orthonormales Erzeugendensystem (dicht liegende lineare Hülle), so ist die Abbildung*

$$\Phi:\ H \to l^2(I), \quad x \mapsto ((x, e_i)_H)_{i\in I}$$

ein isometrischer Isomorphismus. Ein Hilbert-Raum, welcher ein abzählbares Erzeugendensystem und damit auch eine Orthonormalbasis besitzt, wird „separabel“ genannt. Es gibt nicht-separable Hilbert-Räume, z. B. der Hilbert-Raum der sog. „fast-periodischen Funktionen“ (s. Literatur).

4.3 Die Fourier-Transformation

Für 2π-periodische, quadrat-integrable Funktionen ist die L^2-Konvergenz der Fourier-Reihe gesichert. Im Folgenden wollen wir diese Analyse für auf ganz $\mathbb{R}^1$ definierte, nicht notwendig periodische Funktionen erweitern. Dies führt auf „Fourier-Integrale“ und in diesem Zusammenhang auf die „Fourier-Transformation“. Dabei wird die Entwicklung nach „diskret verteilten“ Exponentialfunktionen $e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, ersetzt durch solche nach „kontinuierlich verteilten“ $e_t(x) = e^{itx}$, $t \in \mathbb{R}$.

Definition 4.3: *Für eine Funtion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist die „Fourier-Transformierte“ $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Fourier-Transformierte ist wohl definiert, da der Integrand die L^1-Majorante $|f|$ hat.

Nach dem Satz über Parameterintegrale ist die Fourier-Transformierte stetig. Ferner gilt

$$|\hat{f}(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1, \tag{4.3.12}$$

d. h.: Die Fourier-Transformierte einer L^1-Funktion ist beschränkt.

Beispiel 4.1: Die Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion $f := \chi_{[-1,1]}$ des Intervalls $[-1,1]$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\mathrm{i}xt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \big\{ \cos(-xt) + \mathrm{i} \sin(-xt) \big\}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\frac{\sin(xt)}{x} + \mathrm{i} \frac{\cos(xt)}{x} \Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass i. Allg. die Fourier-Transformierte einer L^1-Funktion nicht automatisch wieder in $L^1(\mathbb{R})$ liegt. Für allgemeine L^1-Funktionen werden wir dies daher bei der weiteren Analyse als zusätzliche Voraussetzung verwenden.

Beispiel 4.2: Für die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t) := e^{-t^2/2}$ ergibt sich mit Hilfe der Koordinatentransformation $s := t/\sqrt{2} + \mathrm{i}x/\sqrt{2}$ mit $ds = dt/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-\mathrm{i}xt}\, dt = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2/2 + \mathrm{i}xt - x^2/2)}\, dt \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/\sqrt{2} + \mathrm{i}x/\sqrt{2})^2}\, dt = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty + \mathrm{i}x/\sqrt{2}}^{\infty + \mathrm{i}x/\sqrt{2}} e^{-s^2}\, ds = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds.\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht das „Gauß-“ oder auch „Euler-Poisson-Integral“ (s. Literatur)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}.$$

Damit erhalten wir

$$\hat{f}(x) = e^{-x^2/2},$$

d. h.: In diesem speziellen Fall haben f und $\hat{f}$ dieselbe Form.

Der folgende „Umkehrsatz“ der Fourier-Transformation ist das *kontinuierliche* Analogon zur *diskreten* Entwicklung einer 2π-periodischen L^2-Funktion in eine Fourier-Reihe:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx}, \quad \text{f. f. a. } x \in [0, 2\pi], \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-\mathrm{i}kt}\, dt.$$

Satz 4.4 (Umkehrsatz): *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für fast alle $t \in \mathbb{R}$:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{\mathrm{i}tx}\, dx. \tag{4.3.13}$$

Insbesondere ist $\hat{\hat{f}}(t) = f(-t)$. Gleichheit besteht in jedem Punkt t, in dem f stetig ist.

Beweis: i) Wir verwenden die spezielle „Dirac-Folge“

$$\delta_1(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \qquad \delta_k(t) := k\delta_1(kt), \quad k \in \mathbb{N},$$

mit der Normierungseigenschaft (Koordinatentransformation $s := kt/\sqrt{2}$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(t)\,dt = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2}\,ds = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

und der Invarianzeigenschaft $\hat{\delta}_1 = \delta_1$ (Koordinatentransformation $s := kt$), d. h.:

$$\delta_k(x) = k\delta_1(kx) = k\hat{\delta}_1(kx) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-\mathrm{i}kxt}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(2k^2)} e^{-\mathrm{i}xs}\,ds.$$

Faltung von f mit δ_k ergibt dann bei Beachtung von $\delta_k(t-x) = \delta_k(x-t)$:

$$\begin{aligned}
(f * \delta_k)(t) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\delta_k(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_k(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_k(x-t)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(2k^2)} e^{-\mathrm{i}(x-t)s}\,ds\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-s^2/(2k^2)} e^{-\mathrm{i}(x-t)s}\,ds\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

Der (messbare) Integrand dieses Doppelintegrals hat als Funktion von $(s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ die integrierbare Majorante $|f(x)|e^{-s^2}$. Folglich kann nach dem Satz von Fubini die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden und wir erhalten durch Auswertung des inneren Integrals:

$$\begin{aligned}
(f * \delta_k)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-s^2/(2k^2)} e^{-\mathrm{i}(x-t)s}\,dx\Big)\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}xs}\,dx\Big) e^{-s^2/(2k^2)} e^{its}\,ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{-s^2/(2k^2)} e^{\mathrm{i}ts}\,ds.
\end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ konvergieren die Integranden punktweise gegen $\hat{f}(s)e^{\mathrm{i}ts}$ und werden durch die integrierbare Funktion $\hat{f}$ majorisiert. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz (Satz von Lebesgue) konvergiert also

$$(f * \delta_k)(t) \to_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{\mathrm{i}ts}\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Andererseits konvergiert die linke Seite im L^1-Sinne

$$\|f * \delta_k - f\|_1 \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{4.3.14}$$

Nach dem Korollar 4.1 zum Satz von Riesz-Fischer existiert eine Teilfolge $(f * \delta_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$, welche f. ü. gegen f konvergiert. Dies impliziert die erste Behauptung.

ii) Die Konvergenzaussage (4.3.14) sieht man wie folgt: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da der Teilraum $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, gibt es ein $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon * \delta_k - f_\varepsilon\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\delta_k(t-x)\,dx - f_\varepsilon(t)\Big|\,dt \\ &\le \|f_\varepsilon\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\delta_k(t-x) - \delta_k(x)|\,dx\,dt \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\,\|f_\varepsilon\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big|e^{-k^2(t-x)^2/2} - e^{-k^2x^2/2}\big|\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Die Koordinatentransformationen $y = kx,\ s = kt$ ergeben dann mit einer gewissen Konstante $C > 0$:

$$\|f_\varepsilon * \delta_k - f_\varepsilon\|_1 = \frac{1}{k\sqrt{2\pi}}\,\|f_\varepsilon\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big|e^{-(s-y)^2/2} - e^{-y^2/2}\big|\,dy\,ds \le \frac{C}{k}\|f_\varepsilon\|_\infty.$$

Für hinreichend großes $k \ge k_\varepsilon$ gilt dann $\|f_\varepsilon * \delta_k - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Mit Hilfe der Abschätzung

$$\begin{aligned}\|f * \delta_k\|_1 &\le \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_k(t-x)\,dx\Big|\,dt \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\delta_k(t-x)\,dx\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(t-x)\,dt\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \|f\|_1\end{aligned}$$

erschließen wir weiter für $k \ge k_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\|f * \delta_k - f\|_1 &\le \|(f - f_\varepsilon) * \delta_k\|_1 + \|f_\varepsilon * \delta_k - f_\varepsilon\|_1 + \|f_\varepsilon - f\|_1 \\ &\le \|(f - f_\varepsilon)\|_1 + \|f_\varepsilon * \delta_k - f_\varepsilon\|_1 + \|f_\varepsilon - f\|_1 < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist, folgt die behauptete Konvergenzaussage (4.3.14).

iii) Sei f stetig in $t_* \in \mathbb{R}$. Da die Gleichung (4.3.13) f. ü. gilt, gibt es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \to t_*\ (k \to \infty)$, so dass in allen t_k die Gleichung (4.3.13) gilt. Ferner definiert das Integral in (4.3.13) als parameterabhängiges Integral eine in t_* stetige Funktion. Damit folgt die Gültigkeit von (4.3.13) in t_*. Q.E.D.

Wir haben schon gesehen, dass die Fourier-Transformierte einer L^1-Funktion nicht unbedingt wieder in $L^1(\mathbb{R})$ liegen muss. Dies ist aber für L^2-Funktionen der Fall. Zum Studium der Eigenschaften der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ betrachten wir zunächst die folgende Funktionenklasse.

Definition 4.4: *Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ heißt „schnell abfallend“, wenn für beliebige $k, m \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen $t^k f^{(m)}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig beschränkt sind. Der Vektorraum der schnell abfallenden Funtionen wird „Schwartz[4]-Raum“ genannt und mit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bezeichnet.*

[4]Laurent Schwartz (1915–2002: Französischer Mathematiker; Fields-Medaille 1950, Begründer der Theorie der „Distributionen“; wirkte an der Universität Nancy und an der Sorbonne und Ecole Polytechnique in Paris.

Beispiele „schnell abfallender" Funktionen sind alle C_0^∞-Funktionen sowie die Funktion $f(t) := e^{-ct^2}$, $c > 0$. Mit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sind auch die Funktionen fg, $t^r f$, $f^{(s)}$, $fe^{\mathrm{i}xt}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ferner ist jede Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ integrierbar, d. h. $f \in L^1(\mathbb{R})$, da f auf kompakten (messbaren) Teilmengen glatt ist und für $|t| > 1$ eine integrable Majorante der Form $|t|^{-2}$ hat. Der Schwarz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ versehen mit der L^2-Norm ist als Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$ nicht vollständig.

Lemma 4.5: *i) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $t^k f \in L^1(\mathbb{R})$ für $0 \le k \le m$. Dann existieren die Ableitungen $\mathrm{d}_x^k \hat{f} := \hat{f}^{(k)}$, $0 \le k \le m$, und es gilt*

$$\mathrm{d}_x^k \hat{f} = (-\mathrm{i})^k \widehat{t^k f}, \quad \widehat{t^k f} = (\mathrm{id}_x)^k \hat{f}, \quad 0 \le k \le m. \tag{4.3.15}$$

ii) Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{d}_t^k f \in L^1(\mathbb{R})$ für $0 \le k \le m$. Dann gilt

$$\widehat{\mathrm{d}_t^k f} = (\mathrm{i}x)^k \hat{f}, \quad 0 \le k \le m; \tag{4.3.16}$$

insbesondere sind die gewichteten Fourier-Transformierten $x^k \hat{f}$ beschränkt.

Beweis: Es genügt, die Behauptungen jeweils für eine Ableitung zu zeigen.
i) Differentiation unter dem Integral ergibt

$$d_x \hat{f}(t) = d_x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}xt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}t) f(t) e^{-\mathrm{i}xt}\, dt = (-\mathrm{i}) \widehat{tf}(x).$$

Dies ist erlaubt, da der entstehende Integrand die in x gleichmäßige Majorante $|tf(t)|$ besitzt.

ii) Aus der Darstellung

$$f(t) = f(0) + \int_0^t d_t f'(s)\, ds$$

und der Voraussetzung $d_t f \in L^1(\mathbb{R})$ folgt, dass f für $t \to \pm\infty$ Grenzwerte hat. Beide sind Null, da sonst f nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar wäre. Mittels partieller Integration ergibt sich daher

$$\widehat{d_t f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d_t f(t) e^{-\mathrm{i}xt}\, dt = \frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}xt}\, dt = \mathrm{i}x \hat{f}(x),$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Satz 4.5: *Die Fourier-Transformation definiert einen isometrischen Isomorphismus des Schwartz-Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf sich. Insbesondere gilt die sog. „Formel von Plancherel[5]"*

$$(\hat{f}, \hat{g})_2 = (f, g)_2, \qquad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2. \tag{4.3.17}$$

[5]Michel Plancherel (1903–1967): Schweizer Mathematiker; wirkte an den Universitäten Genf, Freiburg und Zürich; Beiträge zur Analysis, mathematischen Physik und Algebra.

Beweis: i) Zunächst zeigen wir, dass die Fourier-Transformation den Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in sich abbildet. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $\hat{f}$ nach Lemma 4.5 beliebig oft stetig differenzierbar, und für beliebige $k, m \in \mathbb{N}_0$ ist $t^k d_t^m \hat{f}$ beschränkt. Also ist $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

ii) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist die Funktion $h(x,t) := \hat{f}(x) g(t) e^{\mathrm{i}xt}$ über $\mathbb{R}^2$ integrierbar. Daher folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini und des Umkehrsatzes für die Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned}(\hat{f}, \hat{g})_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\Big(\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-\mathrm{i}xt}\, dt \Big)}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{\mathrm{i}xt}\, dx \Big) \overline{g(t)}\, dt = (f, g)_2.\end{aligned}$$

Speziell gilt also $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, d. h.: Die Fourier-Transformation ist eine Isometrie.

iii) Nach dem Umkehrsatz 4.4 gilt $\hat{\hat{f}}(t) = f(-t)$, d. h.: Jedes $f(\cdot) \in \mathcal{S}$ ist Fourier-Transformation von $\hat{f}(-\cdot) \in \mathcal{S}$. Folglich ist die Fourier-Transformation auch surjektiv und damit ein Isomorphismus des Schwartz-Raumes auf sich. Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Bemerkung 4.5: Die Aussage von Satz 4.5 lässt sich erweitern zu: *Die Fourier-Transformation definiert einen isometrischen Isomorphismus des Lebesgue-Raumes* $L^2(\mathbb{R})$ *auf sich.* Dies ergibt sich aus der Dichtheit des Teilraums $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$. (Beweis Übungsaufgabe)

Bemerkung 4.6: Nach Lemma 4.5 transformiert die Fourier-Transformation die Anwendung von Ableitungen d_t^k einer Funktion in die Multiplikation ihrer Fourier-Transformierten mit $(\mathrm{i}x)^k$. Diese „Algebraisierung“ macht die Fourier-Transformation zu einem wichtigen Werkzeug in der Theorie der Differentialgleichungen. Dieser Kalkül hat eine natürliche Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen, d. h. auf *partielle* Ableitungen.

4.4 Der abstrakte Hilbert-Raum

Sei H ein allgemeiner Hilbert-Raum, d. h. ein vollständiger (reeller oder komplexer) Vektorraum mit einem Skalarprodukt $(x,y)_H : H \times H \to \mathbb{C}$ und der zugehörigen Norm $\|x\|_H := (x,x)_H^{1/2}$. Für jedes $x \in H$ wird durch

$$l_x(y) := (y, x)_H, \quad y \in H,$$

ein lineares „Funktional“ auf H definiert. Aufgrund der Schwarzschen Ungleichung gilt

$$|l_x(y)| = |(y,x)_H| \le \|y\|_H \|x\|_H, \quad x, y \in H.$$

Dies impliziert die „Beschränktheit“ des Funktionals l_x:

$$\|l_x\|_{H^*} := \sup_{y \in H} \frac{|l_x(y)|}{\|y\|_H} = \sup_{y \in H} \frac{|(y,x)_H|}{\|y\|} \le \|x\|_H, \quad x \in H. \tag{4.4.18}$$

Beschränkte *lineare* Funktionale $l(\cdot)$ sind automatisch stetig (sogar Lipschitz-stetig):

$$|l(y) - l(y')| = |l(y - y')| \le \|l\|_{H^*}\|y - y'\|_H, \quad , y, y' \in H.$$

Die Menge der beschränkten linearen Funktionale auf H bildet einen Vektorraum, den sog. „Dualraum“ H^* von H. Durch (4.4.18) wird auf H^* eine Norm $\|\cdot\|_{H^*}$ definiert. Der folgende „Darstellungssatz von Frechét[6]-Riesz ist die Ausdehnung des klassischen Riesz'schen Darstellungssatzes, der zunächst für die L^p-Räume bewiesen worden war, auf allgemeine Hilbert-Räume.

Satz 4.6 (Darstellungssatz von Frechét-Riesz): *Sei H ein Hilbert-Raum mit Dualraum H^*. Versehen mit der natürlichen Norm $\|\cdot\|_{H^*}$ wird H^* zu einem Banach-Raum. Dieser ist in folgendem Sinne (anti-linear) isometrisch isomorph zum Raum H selbst: Zu jedem Funktional $l \in H^*$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element $x \in H$, so dass*

$$l(y) = (y, x)_H, \quad y \in H, \tag{4.4.19}$$

und $\|x\|_H = \|l\|_{H^*}$.

Beweis: i) Wir zeigen als erstes die Vollständigkeit von H^*. Sei $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H^*. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gebe es also ein k_ε, so dass $\|l_k - l_j\|_{H^*} < \varepsilon$ für $k, j \ge k_\varepsilon$. Für jedes $y \in H$ gilt dann auch

$$|l_k(y) - l_j(y)| = |(l_k - l_j)(y)| \le \|l_k - l_j\|_{H^*}\|y\| < \varepsilon\|y\|,$$

d. h.: $(l_k(y))_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Durch die Setzung $l(y) := \lim_{k\to\infty} l_k(y)$ erhält man dann ein lineares Funktional auf H, welches wegen

$$l(y) = \lim_{k\to\infty} l_k(y) \le \limsup_{k\to\infty} \|l_k\|_{H^*}\|y\| \le c\|y\|$$

auch beschränkt ist und damit in H^* liegt. (Bemerkung: Diese Argumentation basiert auf dem allgemeinen Prinzip, dass der punktweise Limes einer gleichmäßig konvergierenden Folge stetiger Abbildungen ebenfalls stetig ist.)

ii) Als nächstes zeigen wir, dass die durch

$$x \in H \to l_x \in H^*$$

definierte lineare Abbildung $J : H \to H^*$ eine Bijektion ist. Wegen der Implikation

$$l_x(y) - l_{x'}(y) = (y, x - x')_H = 0, \quad y \in H \quad \Rightarrow \quad x = x',$$

ist J injektiv. Sei nun ein $l \in H^*$ fixiert. Wir haben ein zugehöriges $x \in H$ zu bestimmen, mit dem (4.4.19) gilt. Dazu definieren wir das (quadratische) Funktional

$$f(y) := (y, y)_H - 2\mathrm{Re}\, l(y) \in \mathbb{R}, \quad y \in H,$$

[6]Maurice René Fréchet (1878–1973): Französischer Mathematiker; Prof. in Poitiers, Straßburg und Paris; Beiträge zur Topologie von Punktmengen (Konzept des “metrischen Raumes”) und zur Wahrscheinlichkeitstheorie.

und betrachten die Variationsaufgabe: *Minimiere* $f(y)$ *für* $y \in H$. Aus der Beziehung

$$f(y) = \|y\|_H^2 - 2\mathrm{Re}\, l(y) \geq \|y\|_H^2 - 2|l(y)| \geq \|y\|_H^2 - 2\|l\|_{H^*}\|y\|$$

erschließen wir mit Hilfe der Abschätzung $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$:

$$f(y) \geq -\|l\|_{H^*}^2, \quad y \in H,$$

d. h. die Beschränktheit von $f(\cdot)$ nach unten. Es existiert also

$$\alpha := \inf_{y \in H} f(y) > -\infty.$$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ ein Minimalfolge, d. h.: $\alpha = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$. Mit Hilfe der Parallelogrammregel auf Hilbert-Räumen,

$$\|x - y\|_H^2 + \|x + y\|_H^2 = 2\|x\|_H^2 + 2\|y\|_H^2, \quad x, y \in H,$$

folgt

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l\|_H^2 &= 2\|x_k\|_H^2 + 2\|x_l\|_H^2 - \|x_k + x_l\|_H^2 \\ &= 2\|x_k\|_H^2 - 4\mathrm{Re}\, l(x_k) + 2\|x_l\|_H^2 - 4\mathrm{Re}\, l(x_l) - 4\Big\|\frac{x_k + x_l}{2}\Big\|_H^2 + 8\mathrm{Re}\, l\Big(\frac{x_k + x_l}{2}\Big).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l\|_H^2 &= 2f(x_k) + 2f(x_l) - 4f\Big(\frac{x_k + x_l}{2}\Big) \leq 2f(x_k) + 2f(x_l) - 4\alpha \\ &\to 0 \quad (k, l \to \infty).\end{aligned}$$

Also ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Hilbert-Raum H und besitzt folglich einen Limes $x := \lim_{k\to\infty} x_k \in H$. Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} (x_k) = \alpha,$$

und x ist ein Minimum von f auf H. Insbesondere gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ und $y \in H$:

$$f(x) = \|x\|_H^2 - 2\mathrm{Re}\, l(x) \leq f(x + ty) = (x + ty, x + ty)_H - 2\mathrm{Re}\, l(x + ty)$$

und folglich

$$\begin{aligned}0 &\leq t(y, x)_H + \bar{t}(x, y)_H + t\bar{t}(y, y)_H - 2\mathrm{Re}\, l(ty) \\ &= 2\mathrm{Re}\{t(y, x)_H\} - 2\mathrm{Re}\,\{tl(y)\} + |t|^2\|y\|_H^2.\end{aligned}$$

Wir wählen $t = \pm s$, $s \in \mathbb{R}_+$, und erhalten nach Division der Gleichung durch s im Limes $s \to 0$:

$$2\mathrm{Re}\,(y, x)_H - 2\mathrm{Re}\, l(y) \leq 0 \leq 2\mathrm{Re}\,(y, x)_H - 2\mathrm{Re}\, l(y).$$

Wählen wir $t = \pm is$, $s \in \mathbb{R}_+$, so ergibt sich analog

$$2\mathrm{Im}\,(y, x)_H - 2\mathrm{Im}\, l(y) \leq 0 \leq 2\mathrm{Im}\,(y, x)_H - 2\mathrm{Im}\, l(y).$$

Also ist

$$(y,x)_H = l(y), \quad y \in H,$$

bzw. $l(\cdot) = (x,\cdot)_H$. Wegen der Injektivität der Abbildung J ist das erzeugende Element $x \in H$ zu $l(\cdot)$ eindeutig bestimmt. Weiter gelten die Beziehungen

$$\|l\|_{H^*} = \sup_{y\in H} \frac{l(y)}{\|y\|_H} = \sup_{y\in H} \frac{(y,x)_H}{\|y\|_H} \le \|x\|_H,$$
$$\|x\|_H^2 = (x,x)_H = l(x) \le \|l\|_{H^*}\|x\|_H,$$

d. h.: $\|x\|_H = \|l\|_{H^*}$. Die Bijektion $J: H \to H^*$ ist also eine Isometrie. Sie ist antilinear, weil das Skalarprodukt antilinear ist im zweiten Argument:

$$(x, \beta y + \gamma z)_H = \overline{\beta}(x,y)_H + \overline{\gamma}(x,z)_H, \quad x,y \in H, \alpha,\beta \in \mathbb{C}. \tag{4.4.20}$$

Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Für *reelle* Hilbert-Räume ist der Isomorphismus J aus dem Beweis von Satz 4.6 linear und damit eine im strengen Sinne isometrische Isomorphie zwischen H und seinem Dualraum H^*; diese können also identifiziert werden. Der Riesz'sche Darstellungssatz besitzt eine sehr nützliche Verallgemeinerung das sog. „Lemma von Lax[7]-Milgram[8]", für nicht notwendig symmetrische Sesquilinearformen.

Satz 4.7 (Lemma von Lax-Milgram): *Sei $b(\cdot,\cdot)$ eine Sesquilinearform auf einem (reellen oder komplexen) Hilbert-Raum H mit den folgenden Eigenschaften (α, $\beta \in \mathbb{R}_+$):*

$$b(\cdot,y) \;\; \textit{linear}, \quad b(x,\cdot) \;\; \textit{antilinear (s. (4.4.20))}, \tag{4.4.21}$$
$$|b(x,y)| \le \beta\|x\|_H\|y\|_H, \;\; x,y \in H \quad \textit{(Beschränktheit)}, \tag{4.4.22}$$
$$b(x,x) \in \mathbb{R}, \;\; b(x,x) \ge \alpha\|x\|_H^2, \;\; x \in H \quad \textit{(Definitheit)}. \tag{4.4.23}$$

Dann gibt es eine Bijektion $R: H \to H$, $x \mapsto Rx$, so dass

$$b(y,Rx) = (y,x)_H, \quad y \in H. \tag{4.4.24}$$

Insbesondere besitzt für jedes Funktional $l \in H^*$ die Aufgabe

$$b(y,x) = l(y), \quad y \in H, \tag{4.4.25}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in H$, und diese genügt der Abschätzung

$$\|x\|_H \le \alpha^{-1}\|l\|_{H^*}. \tag{4.4.26}$$

[7]Peter David Lax (1926–): Ungarischer Mathematiker und Träger des Wolf-Preises für Mathematik von 1987, sowie des Abelpreises 2005; derzeit am Courant Institute of Mathematical Sciences an der New York; grundlegende Beiträge zur Theorie partieller Differentialgleichungen und deren Numerik.

[8]Arthur Norton Milgram (1912–1961): US-amerikanischer Mathematiker, wirkte seit 1951 an der University of Minnesota in Minneapolis; Beiträge zu partiellen Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Kombinatorik, Differentialgeometrie und Topologie.

Beweis: Für jedes feste $v \in H$ definiert $l_v(\cdot) := b(\cdot, v)$ ein Funktional $l_v \in H^*$:

$$|l_v(y)| = |b(y,v)| \leq \beta \|y\|_H \|v\|_H, \quad y \in H.$$

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existieren Elemente $Bv \in H$ und $f \in H$, so dass

$$b(\varphi, v) = (\varphi, Bv)_H, \qquad l(\varphi) = (\varphi, f)_H, \quad \varphi \in H.$$

Die Zuordnung $v \mapsto Bv$ definiert eine antilineare Abbildung mit der Eigenschaft

$$\|Bv\|_H = \|l_v\|_{H^*} = \sup_{y \in H} \frac{l_v(y)}{\|y\|_H} = \sup_{y \in H} \frac{b(y,v)}{\|y\|_H} \leq \beta \|v\|_H,$$

d. h.: B ist beschränkt. Die Aufgabe (4.4.25) ist offenbar äquivalent zu der Gleichung

$$Bu = f\,. \tag{4.4.27}$$

Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$v \in H \;\mapsto\; T_\delta v := v - \delta(Bv - f) \in H$$

für einen geeigneten Wert $\delta > 0$ eine Kontraktion auf ganz H ist. Dann besitzt die Fixpunktgleichung

$$T_\delta v = v$$

eine eindeutige Lösung $u \in H$, welche wegen $0 = u - T_\delta u = \delta(Bu - f)$ dann auch (eindeutige) Lösung von (4.4.27) bzw. (4.4.25) ist. Die Kontraktionseigenschaft ergibt sich für $w = v - v'$ und $T_\delta v - T_\delta v' = v - \delta(Bv - f) - v' + \delta(Bv' - f) = w - T_\delta w$ aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \|w - \delta Bw\|_H^2 &= \|w\|_H^2 - 2\delta\, b(w,w) + \delta^2 \|Bw\|_H^2 \\ &\leq (1 - 2\delta\alpha + \delta^2\beta^2)\|w\|_H^2, \end{aligned}$$

für $0 < \delta < 2\alpha/\beta^2$. Die Abschätzung (4.4.26) ergibt sich dann direkt durch Testen mit $\varphi := u$ in der Variationsgleichung (4.4.25). Q.E.D.

4.5 Das Dirichletsche Prinzip

Im Kapitel 2 waren wir mit der Frage konfrontiert worden, ob das „Dirichlet-Integral"

$$D[v] := \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2 \, dx$$

über einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (offene und zusammenhängende Teilmenge) auf einem geeigneten Funktionenraum ein Minimum besitzt. Die Minimierung des Dirichlet-Integrals $D[\cdot]$ sollte dabei für Funktionen mit Randvorgaben $v_{|\partial\Omega} = g$ erfolgen. Das „Dirichletsche Prinzip" postuliert nun die Existenz einer solchen minimierenden Funktion, welche im Falle ausreichender Glattheit notwendig Lösung der folgenden sog. „Poisson-Gleichung“ (spezielle „1. Randwertaufgabe des Laplace-Operators“) ist:

$$\Delta v = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \quad v = g \ \text{ auf } \ \partial\Omega. \tag{4.5.28}$$

Zum Nachweis der Existenz einer solchen minimierenden Funktion hatten wir zunächst den folgenden Funktionenraum zugrunde gelegt:

$$V(\Omega) := \big\{ v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega),\ \nabla u \in L^2(\Omega) \big\}, \qquad V_0(\Omega) := \big\{ v \in V(\Omega) :\ v_{|\partial\Omega} = 0 \big\},$$

welcher mit der Norm

$$\|u\|_E := \Big(\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\, dx \Big)^{1/2}$$

versehen wurde. Durch Anwendung der „direkten Methode der Variationsrechnung“ für die auf $V_0(\Omega)$ definierten Funktionale $D[u+g]$ waren wir zu Minimalfolgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $V_0(\Omega)$ gelangt,

$$D[u_k + g] \to \inf_{u\in V_0(\Omega)} D[u+g] \quad (k \to \infty),$$

die sich als Cauchy-Folgen in $V_0(\Omega)$ erwiesen. Die Randwerte g auf $\partial\Omega$ werden dabei als sog. „Spur“ einer auf ganz Ω definierten Funktion $g \in V(\Omega)$ angenommen. An dieser Stelle musste die Argumentation abbrechen, da mit den seinerzeit zur Verfügung stehenden Mitteln diesen Cauchy-Folgen keine Limiten zugeordnet werden konnten. Denn der Funktionenraum $V_0(\Omega)$ ist nicht vollständig bzgl. der durch die Norm $\|\cdot\|_E$ induzierten Konvergenz. Mit Hilfe der nun verfügbaren Theorie des Lebesgue-Integrals und insbesondere des Lebesgue-Raumes $L^2(\Omega)$ können wir diese Argumentation vervollständigen.

Als erstes Hilfsmittel stellen wir die folgende sog. „Poincarésche Ungleichung“ bereit.

Lemma 4.6 (Poincarésche Ungleichung): *Auf dem Funktionenraum $V_0(\Omega)$ gilt die Poincarésche Ungleichung*

$$\int_\Omega |v(x)|^2\, dx \le d_\Omega^2 \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\, dx, \quad v \in V_0(\Omega). \tag{4.5.29}$$

mit $d_\Omega := \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis: Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein parallel zu den kartesischen Achsen orienter (abgeschlossener) Würfel mit Kantenlänge $L = d_\Omega$, der die Menge G enthält. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $Q = [0, L]^n$. Wir setzen die Funktion $v \in V_0(\Omega)$ sowie ihren Gradienten durch Null zu Funktionen $\overline{v} : Q \to \mathbb{R}$ bzw. $\overline{\nabla v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ fort. Für einen Punkt $x \in \Omega$ gilt mit dem Richtungsvektor $e^{(1)}$:

$$v(x + te^{(1)}) - v(x) = \int_0^t \frac{d}{ds} v(x + se^{(1)})\, ds = \int_0^t \partial_1 v(x + se^{(1)})\, ds.$$

Sei nun $t_1 \in \mathbb{R}_+$ die kleinste Zahl mit $x + t_1 e^{(1)} \in \partial\Omega$, d. h.: $v(x + t_1 e^{(1)}) = 0$. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|v(x)|^2 \le \Big(\int_0^{t_1} \partial_1 v(x + se^{(1)})\, ds \Big)^2 \le L \int_0^L \|\overline{\nabla v}(\xi_1, x_2 \dots, x_n)\|^2\, d\xi_1.$$

Wir integrieren diese Ungleichung unter Verwendung des Satzes von Fubini nacheinander bzgl. der Variablen $x_1,\dots,x_n$:

$$\begin{aligned}
\int_Q |\overline{v}(x)|^2\,dx &= \int_0^L \dots \int_0^L |\overline{v}(x_1,\dots,x_n)|^2\,dx_1\dots dx_n \\
&\le L\int_0^L \dots \int_0^L \Big(\int_0^L \|\overline{\nabla v}(\xi_1,x_2\dots,x_n)\|^2\,d\xi_1\Big)\,dx_1\dots dx_n \\
&= L^2\int_0^L \dots \int_0^L \Big(\int_0^L \|\overline{\nabla v}(\xi_1,x_2\dots,x_n)\|^2\,d\xi_1\Big)\,dx_2\dots dx_n \\
&= L^2\int_Q \|\overline{\nabla v}(x)\|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Definition von $\overline{v}$ und $\overline{\nabla v}$ vervollständigt dies den Beweis. Q.E.D.

Die Cauchy-Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $V_0(\Omega)$ ist wegen der Poincaréschen Ungleichung auch Cauchy-Folge im Hilbert-Raum $L^2(\Omega)$:

$$\|u_k-u_j\|_2 \le d_\Omega\|\nabla(u_k-u_j)\|_2 \to 0 \quad (k,j\to\infty).$$

Folglich existiert ein Limes $u\in L^2(\Omega)$ mit

$$\|u_k-u\|_2 \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Weiter sind die Folgen der partiellen Ableitungen $(\partial_i u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $L^2(\Omega)$ und besitzen daher ebenfalls Limiten $u^{(i)}\in L^2(\Omega)$ mit

$$\|\partial_i u_k-u^{(i)}\|_2 \to 0 \quad (k\to\infty),\quad i=1,\dots,n.$$

Diese Beobachtung legt die folgende Definition nahe.

Definition 4.5 (Sobolew-Raum $H_0^1(\Omega)$): *Der „Sobolew-Raum“ $H_0^1(\Omega)$ ist definiert als der Teilraum aller Funktionen $u\in L^2(\Omega)$, zu denen es approximierende Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset V_0(\Omega)$ gibt, so dass mit gewissen $u^{(i)}\in L^2(\Omega),\ i=1,\dots,n$, gilt:*

$$\|u_k-u\|_2 \to 0,\quad \|\partial_i u_k-u^{(i)}\|_2 \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Der Vektor $(u^{(i)})_{i=1}^n\in L^2(\Omega)^n$ wird der „verallgemeinerte Gradient“ von u genannt und ebenfalls mit ∇u bezeichnet.

Durch ein Stetigkeitsargument überträgt sich die Poincarésche Ungleichung auch auf Funktionen in $H_0^1(\Omega)$, d. h.: Für jedes $u\in H_0^1(\Omega)$ gilt mit einer approximierenden Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset V_0(\Omega)$ gemäß Definition 4.5:

$$\|u\|_2 = \lim_{k\to\infty}\|u_k\|_2 \le d_\Omega \lim_{k\in\mathbb{N}}\|\nabla u_k\|_2 = d_\Omega\|\nabla u\|_2. \tag{4.5.30}$$

Lemma 4.7: *Für eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ ist der verallgemeinerte Gradient $\nabla u \in L^2(\Omega)^n$ eindeutig bestimmt. Die Menge $H_0^1(\Omega)$ ist ein Vektorraum, der mit der Norm*

$$\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_2$$

sogar ein Banach-Raum ist.

Beweis: i) Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit approximierender Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$ und zugehörigem verallgemeinertem Gradienten $\nabla u = (u^{(i)})_{i=1}^n \in L^2(\Omega)^n$. Ist nun $(\tilde{u}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$ eine zweite approximierende Folge zu u, so folgt mit Hilfe partieller Integration (Satz von Gauß) für beliebiges $\varphi \in V_0(\Omega)$:

$$\begin{aligned}(\tilde{u}^{(i)} - u^{(i)}, \varphi)_2 &= \lim_{k\to\infty} (\partial_i \tilde{u}_k, \varphi)_2 - \lim_{k\to\infty} (\partial_i u_k, \varphi)_2 \\ &= -\lim_{k\to\infty} (\tilde{u}_k, \partial_i\varphi)_2 + \lim_{k\to\infty} (u_k, \partial_i\varphi)_2 = -(u, \partial_i\varphi)_2 + (u, \partial_i\varphi)_2 = 0.\end{aligned}$$

Nach Korollar 4.2 folgt also $\tilde{u}^{(i)} = u^{(i)}$ f. ü. in Ω. Der verallgemeinerte Gradient ist also eindeutig bestimmt.

ii) Seien $u, v \in H_0^1(\Omega)$ mit zugehörigen approximierenden Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}, (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $V_0(\Omega)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\alpha u_k + \beta v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$ eine approximierende Folge für $\alpha u + \beta v$. Folglich ist $\alpha u + \beta v \in H_0^1(\Omega)$ mit dem verallgemeinerten Gradienten $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$. Also ist $H_0^1(\Omega)$ ein Vektorraum.

iii) Durch $\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_2 \geq 0$ ist auf $H_0^1(\Omega)$ einen Norm erklärt. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit approximierender Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$. Im Fall $\|u\|_{H_0^1} = 0$ ist also

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|\partial_i u_k\|_2 = \|u^{(i)}\|_2,$$

und folglich $u^{(i)} = 0$. Mit Hilfe der Poincaréschen Ungleichung folgt dann auch $u = 0$. Die Homogenität sowie die Dreiecksungleichung ergibt sich für $\|\cdot\|_{H_0^1}$ ebenfalls durch Stetigkeit aus den entsprechenden Eigenschaften auf $V_0(\Omega)$.

iv) Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H_0^1(\Omega)$. Die zugehörigen approximierenden Folgen aus $V_0(\Omega)$ seien $(u_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir $j_k \in \mathbb{N}$ mit $\|u_{k,j_k} - u_k\|_{H^1} < 1/k$. Dann gilt für $l \geq k$:

$$\|u_{k,j_k} - u_{l,j_l}\|_{H^1} \leq \|u_{k,j_k} - u_k\|_{H_0^1} + \|u_k - u_l\|_{H_0^1} + \|u_l - u_{l,j_l}\|_{H_0^1} \leq \frac{2}{k} + \|u_k - u_l\|_{H_0^1}.$$

Dies impliziert, dass die Folge $(u_{k,j_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$ eine Cauchy-Folge bzgl. der H_0^1-Norm ist. Diese besitzt definitionsgemäß einen Limes in $H_0^1(\Omega)$. Q.E.D.

Bemerkung 4.7: Für die verallgemeinerten Ableitungen $\partial_i u := u^{(i)}$ einer Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit approximierender Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$ gilt definitionsgemäß

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{(i)}\varphi\,dx &= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} \partial_i u_k \varphi\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \partial_i u_k \varphi\,dx \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \partial_i\varphi\,dx = -\int_\Omega \lim_{k\to\infty} u_k \partial_i\varphi\,dx \\ &= -\int_\Omega u\partial_i\varphi\,dx, \quad \varphi \in V_0(\Omega).\end{aligned}$$

Diese Beziehung kann auch zur direkten Definition der verallgemeinerten Ableitung verwendet werden. Man spricht dann von einer „schwachen“ oder auch „distributionellen Ableitung“. Der auf diese Weise über das Konzept der Funktionen mit „verallgemeinerten Ableitungen“ in $L^2(\Omega)$ definierte mit $H_0^1(\Omega) =: H_0^{1,2}(\Omega)$ identische Sobolew-Raum wird in der Regel mit $W_0^{1,2}(\Omega)$ bezeichnet. Die entsprechenden Funktionenräume ohne Einbeziehung von Nullrandwerten sind $H^1(\Omega)$ bzw. $W^{1,2}(\Omega)$. Diese Notation lässt offensichtliche Erweiterungen für allgemeine Integrierbarkeitspotenzen $1 \le p < \infty$ und Ableitungsordnungen $m \in \mathbb{N}$ zu $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. Die Gültigkeit dieser Gleichheit, d. h. die Äquivalenz der obigen Konstruktion von Sobolew-Räumen über den Vervollständigungsprozess mit dem Konzept der „schwachen Differenzierbarkeit“ ist ein fundamentales, aber nicht-triviales Resultat der Analysis von Funktionenräumen. Dabei bedarf der Grenzfall $p = \infty$ einer gesonderten Betrachtung (s. Übungsaufgabe).

Satz 4.8 (Dirichletsches Prinzip): *Das Dirichlet-Integral besitzt für jede Randvorgabe $g \in V(\Omega)$ ein eindeutiges Minimum in der Menge $H_g^1(\Omega) := g + H_0^1(\Omega)$, d. h.: Das Dirichletsche Prinzip gilt, wenn als Minima Funktionen mit verallgemeinerten Gradienten zugelassen werden. Dieses Minimum $v \in H_g^1(\Omega)$ ist charakterisiert als die eindeutige Lösung der „Variationsgleichung“*

$$(\nabla v, \nabla \varphi)_2 = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.5.31}$$

Beweis: i) *Existenz:* Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(\Omega)$ eine Minimalfolge des Funktionals $D[u+g]$ mit Limes $u \in H_0^1(\Omega)$, d. h.:

$$D[u+g] = \lim_{k\to\infty} D[u_k+g] = \inf_{w\in V_0(\Omega)} D[w+g].$$

Dann gilt für beliebiges $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ und $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 \le D[u+t\varphi+g] - D[u+g] &= D[u+g] + 2t(\nabla(u+g), \nabla\varphi)_2 + t^2\|\nabla\varphi\|_2^2 - D[u+g] \\ &= 2t(\nabla(u+g), \nabla\varphi)_2 + t^2\|\nabla\varphi\|_2^2. \end{aligned}$$

Dies kann für festes $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ nur dann für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gelten, wenn

$$(\nabla v, \nabla\varphi)_2 = (\nabla(u+g), \nabla\varphi)_2 = 0, \quad \varphi \in V_0(\Omega).$$

Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit dieser Gleichung für ein $u \in H_0^1(\Omega)$ und $t = 1$ notwendig

$$D[u+\varphi+g] - D[u+g] = \|\nabla\varphi\|_2^2 \ge 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

d. h.: $D[u+g] = \min_{w\in H_0^1(\Omega)} D[w+g]$.

ii) *Eindeutigkeit:* Ist nun $u' \in H_0^1(\Omega)$ ein zweites Minimum von $D[\cdot + g]$ bzw. eine zweite Lösung von (4.5.31), so gilt

$$(\nabla(u-u'), \nabla\varphi)_2 = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mit $\varphi := u - u'$ ergibt sich $\|\nabla(u-u')\|_2 = 0$ und folglich $u = u'$. Q.E.D.

Bemerkung 4.8: Die Randwerte g in Satz 4.8 werden als „Spur“ einer Funkion aus $V(\Omega)$ angenommen. Dies kann offensichtlich verallgemeinert werden zu $g \in H^1(\Omega)$.

Bemerkung 4.9: Beim Vergleich des Beweises von Satz 4.8 (Dirichletsches Prinzip) mit dem Beweis des Darstellungssatzes von Frechét-Riesz (Satz 4.6) stellt man starke Parallelen fest; beide verwenden u. a. die „direkte Methode der Variationsrechnung“. Daher ist es nicht überraschend, dass man die Aussage von Satz 4.8 im Rahmen eines geeigneten abstrakten Rahmens auch mit Hilfe von Satz 4.6 erhalten kann. Dazu wählen wir den Hilbert-Raum $H := H_0^1(\Omega)$ mit dem speziellen Skalarprodukt $(u, v)_H := (\nabla u, \nabla v)_2$ und definieren ein Funktional $l(\cdot) \in H^*$ durch

$$l(\varphi) := -(g, \varphi)_H, \quad \varphi \in H,$$

wobei $g \in V(\Omega)$ die gegebenen Randdaten sind. Mit Hilfe des allgemeinen Darstellungssatzes von Frechét-Riesz (in seiner „reellen“ Variante) folgt dann die Existenz eines Elements $v \in H$ mit der Eigenschaft

$$(v, \varphi)_H = l(\varphi), \quad \varphi \in H.$$

bzw.

$$(\nabla v, \nabla \varphi)_2 = -(\nabla g, \nabla \varphi)_2, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Die Funktion $u := v + g \in V(\Omega)$ erfüllt dann

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_2 = (\nabla(v + g), \nabla \varphi)_2 = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

und ist folglich Minimum des Dirichlet-Integrals.

Das Dirichletsche Prinzip entspricht der Frage nach der Existenz von Lösungen der speziellen „1. Randwertaufgabe des Laplace-Operators“ („Poisson-Gleichung“)

$$\Delta v = 0 \quad in \ \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g. \tag{4.5.32}$$

Die durch die Minimierung des Dirichlet-Integrals gewonnene (eindeutige) „Lösung“ $v \in H_g^1(\Omega)$ wird „verallgemeinerte“ (oder auch „variationelle“ oder „schwache“) Lösung genannt. Ist eine solche „schwache“ Lösung ausreichend glatt, etwa $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, so ist sie auch „klassische“ Lösung, d. h. erfüllt (4.5.32) im üblichen Sinne. Der Nachweis der höheren Glattheit der schwachen Lösung ist schwierig und Gegenstand eigener Texte über partielle Differentialgleichungen.

Anwendung der entsprechenden Argumentation auf das „Energiefunktional“

$$F(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx - \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$ liefert die Existenz einer eindeutigen Lösung $v \in H_g^1(\Omega)$ der Variationsgleichung

$$(\nabla v, \nabla \varphi)_2 = (f, \varphi)_2, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{4.5.33}$$

bzw. einer „schwachen“ Lösung der Randwertaufgabe (allgemeine „1. Randwertaufgabe des Laplace-Operators“):

$$-\Delta v = f \quad in \;\; \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g. \tag{4.5.34}$$

Um hier den Riesz'schen Darstellungssatz anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass das durch

$$l(\varphi) := (f, \varphi)_2, \quad \varphi \in L^2(\Omega),$$

auf $H = H_0^1(\Omega)$ definierte lineare Funktion auch stetig bzw. beschränkt ist, d. h.: $l \in H^*$. Dies folgt aber direkt mit Hilfe der Poincaréschen Ungleichung:

$$|l(\varphi)| = |(f, \varphi)_2| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \leq c_\Omega \|f\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 = c_\Omega \|f\|_2 \|\varphi\|_H, \quad \varphi \in H.$$

Eine weitere Verallgemeinerung der Argumentation erfordert die Berücksichtigung eines sog. „Transportterms“ in (4.5.34):

$$-\Delta v + b \cdot \nabla v = f \quad in \;\; \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g. \tag{4.5.35}$$

Dabei sei für das „Transportfeld“ $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ angenommen, dass $b \in C^1(\overline{\Omega})^n$ und $\nabla \cdot b \leq 0$ in Ω. Solche sog. „Diffusions-Transport-Probleme“ spielen eine zentrale Rolle in der Strömungsmechanik. Zum Nachweis der Existenz von „schwachen“ Lösungen können wir uns nicht der obigen direkten Methode der Variationsrechnung bedienen, da das zu dem Diffusions-Transport-Operator gehörende „Energiefunktional“

$$F(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx + \int_\Omega b \cdot \nabla v(x) v(x) \, dx - \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

nicht notwendig ein Minimum besitzen muss. Stattdessen verwenden wir das im vorigen Abschnitt bewiesene Lemma von Lax-Milgram.

Satz 4.9: *Das Diffusions-Transport-Problem (4.5.35) besitzt für jede rechte Seite* $f \in L^2(\Omega)$ *eine eindeutige „schwache“ Lösung* $v \in H_g^1(\Omega)$, *welche durch die folgende Variationsgleichung bestimmt ist:*

$$(\nabla v, \nabla\varphi)_2 + (b \cdot \nabla v, \varphi)_2 = (f, \varphi)_2, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.5.36}$$

Erfüllt die schwache Lösung zusätzlich $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, *so ist sie klassische Lösung von (4.5.35).*

Beweis: i) Wir betten die gegebene Situation in den allgemeinen funktionalanalytischen Rahmen des Lemmas von Lax-Milgram (Satz 4.7) ein. Als Hilbert-Raum verwenden wir wieder $H := H_0^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $(\varphi, \psi)_H := (\nabla\varphi, \nabla\psi)_2$. Auf H definieren wir die Bilinearform

$$b(\varphi, \psi) := (\nabla\varphi, \nabla\psi) + (b \cdot \nabla\varphi, \psi)$$

und die Linearform

$$l(\varphi) := (f, \varphi)_2 - (\nabla g, \nabla\varphi).$$

Für diese gelten wieder mit Hilfe der Poicaréschen Ungleichung die Abschätzungen

$$|b(\varphi,\psi)| \le \|\varphi\|_2\|\psi\|_2 + \|b\|_\infty\|\nabla\varphi\|_2\|\psi\|_2 \le \beta\|\varphi\|_H\|\psi\|_H,$$

$$b(\varphi,\varphi) = \|\nabla\varphi\|_2^2 + \tfrac{1}{2}(b,\nabla\varphi^2)_2 = \|\nabla\varphi\|_2^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla\cdot b,\varphi^2)_2 \ge \|\nabla\varphi\|_2^2 = \|\varphi\|_H^2,$$

und

$$|l(\varphi)| \le \|f\|_2\|\varphi\|_2 + \|\nabla g\|_2\|\nabla\varphi\|_2 \le c\|\nabla\varphi\|_2 = c\|\varphi||_H.$$

Also ist die Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ beschränkt und definit, und die Linearform $l(\cdot)$ ist beschränkt. Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllt und es gibt ein eindeutig bestimmtes $u\in H$ mit

$$b(u,\varphi) = l(\varphi), \quad \varphi\in H.$$

bzw.

$$(\nabla u,\nabla\varphi) + (b\cdot\nabla u,\varphi) = (f,\varphi)_2 - (\nabla g,\nabla\varphi), \quad \varphi\in H.$$

Dann erfüllt $v = u+g\in H_g^1(\Omega)$ die Gleichung (4.5.36).

ii) Sei nun die schwache Lösung $v\in H_g^1(\Omega)$ auch in $C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. Für Testfunktionen $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ kann in der Variationsgleichung (4.5.36) partiell integriert werden, und wir erhalten

$$(-\Delta v + \beta\cdot\nabla v - f,\varphi)_2 = 0, \quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Der Fundamentalsatz der Variationsrechnung (Satz 4.2) impliziert dann die Gültigkeit der Diffusions-Transport-Gleichung (4.5.35). Q.E.D.

4.6 Übungen

Übung 4.1: Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ein Gebiet (offene und zusammenhängende Teilmenge) und $\emptyset\ne K\subset\Omega$ eine kompakte Teilmenge mit positiven Abstand $\delta_K := \operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$ zum Rand von Ω. Wir definieren die stetigen Funktionen $d(x) := \operatorname{dist}(x,K)$ und, für $0 < \delta\le\delta_K$,

$$h(t) := \begin{cases} 1, & t<\frac{1}{3}\delta,\\ 2-\frac{3}{\delta}t, & \frac{1}{3}\delta\le t\le\frac{2}{3}\delta,\\ 0, & \frac{2}{3}\delta<t.\end{cases}$$

Man zeige:

a) Die stetige Funktion $f(x) := h(d(x))$ hat dann die Eigenschaften $0\le f\le 1$ und

$$f\equiv 0 \ \text{ in } K_{2\delta/3}^c, \quad f\equiv 1 \ \text{ in } K_{\delta/3},$$

mit $K_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}^n:\ \operatorname{dist}(x,K)<\varepsilon\}$.

b) Mit einer Funktion $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi\ge 0$, mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx = 1, \qquad \psi(x) = 0 \ \text{ für } \ \|x\|>1.$$

(Die Existenz einer solchen Funktion war Gegenstand einer früheren Aufgabe.) wird das sog. „Faltungsintegral“ gebildet:

$$\varphi_\delta(x) := \Big(\frac{6}{\delta}\Big)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi\Big(\frac{x-y}{\delta/6}\Big)\, dy.$$

Dieses hat dann als Funktion $\varphi_\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ und

$$0 \le \varphi_\delta \le 1, \quad \varphi_\delta(x) = 1,\ x \in K.$$

Übung 4.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man zeige, dass jede Funktion $g \in L^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

f. ü. in Ω gleich Null ist. (Hinweis: Jede messbare Teilmenge $A \subset \Omega$ lässt sich bzgl. des L-Maßes durch offene Mengen $A \subset O \subset \Omega$ und diese wiederum durch kompakte Teilmengen $K \subset O$ approximieren.)

Übung 4.3: Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird „wesentlich beschränkt“ genannt, wenn es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mu(\{x \in \Omega \,|\, |f(x)| > M\}) = 0,$$

d.h. wenn es eine Modifikation von f auf einer Nullmenge gibt, so dass die entstehende Funktion im klassischen Sinne beschränkt ist. Ein solches M wird eine „wesentliche Schranke“ genannt. Als „wesentliches Supremum“, in Zeichen $\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|$, bezeichnet man

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf\{M > 0 \,|\, M \text{ wesentliche Schranke von } f \text{ auf } \Omega\}.$$

a) Man zeige, dass die Menge der auf Ω wesentlich beschränkten Funktionen einen Vektorraum bilden, auf dem durch $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|$ eine Seminorm definiert ist, und dass der dann durch die übliche Äquivalenzklassen- bzw. Quotientenraumbildung definierte normierte Raum $L^\infty(\Omega)$ vollständig, d. h. ein Banach-Raum, ist.

b) Kann der Teilraum $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ wie im Fall der L^p-Räume für $1 \le p < \infty$ auch im Grenzfall $p = \infty$ dicht in $L^\infty(\Omega)$ liegen?

Übung 4.4: Die der Fourier-Analyse zugrunde liegende Menge der komplexen Exponentialfunktionen $\{e^{ikx},\, k \in \mathbb{Z}\}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsysteme (ONS) im Lebesgue-Raum $L^2(0, 2\pi)$.

a) Man begründe mit den Hilfsmitteln des Textes, dass eine auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ Lebesgue-integrierbare Funktion $f \in L(0, 2\pi)$ genau dann quadrat-integrabel ist, d. h. in $L^2(0, 2\pi)$ liegt, wenn die Folge ihrer (komplexen) Fourier-Koeffizienten $c_k,\ k \in \mathbb{Z}$, quadratisch summierbar ist:

$$f \in L^2(0, 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

b) Man begründe mit den Hilfsmitteln des Textes, dass die aus der Monombasis $\{x^k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren im Lebesgue-Raum $L^2(-1,1)$ gewonnene Menge orthonormaler Polynome (sog. „Legendre-Polynome") vollständig in $L^2(-1,1)$ ist. Gilt dann hierfür ebenfalls eine zu (a) analoge Äquivalenzaussage? (Hinweis: Man beachte, dass $C_0^\infty(-1,1) \subset L^2(-1,1)$ dicht liegt.)

Übung 4.5: Man entscheide mit Begründung, ob die folgenden Aussagen war oder falsch sind:

a) Eine bzgl. der L^2-Norm konvergente Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ konvergiert notwendig punktweise fast überall.

b) Eine fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ konvergente Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$, konvergiert auch bzgl. der L^2-Norm gegen f.

c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränktes Gebiet. Dann ist der Banach-Raum $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ für $1 \le p' \le p < \infty$ einbettbar in den Banach-Raum $(L^{p'}(\Omega), \|\cdot\|_{p'})$.

d) Die Aussage von (c) gilt auch für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Lebesgue-Maß, $\mu(\Omega) < \infty$.

e) Die Aussage von (c) gilt auch für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit unendlichem Lebesgue-Maß, z. B.: $\Omega = \mathbb{R}^1$.

Übung 4.6: Auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ werden für $1 \le p \le \infty$ die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ betrachtet. Man zeige:

a) Es ist $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ und für jede Funktion $f \in L^\infty(\Omega)$ konvergiert

$$\|f\|_p \to \|f\|_\infty \quad (p \to \infty).$$

b) Es gilt

$$\cap_{p\in[1,\infty)} L^p(\Omega) \neq L^\infty(\Omega).$$

Kann die Aussage (a) auch auf unbeschränkten Gebieten gelten?

Übung 4.7: Die Fourier-Transformation definiert einen isometrischen Isomorphismus des Schwartz-Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf sich. Insbesondere gilt die „Formel von Plancherel":

$$(\hat{f}, \hat{g})_2 = (f, g)_2, \qquad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Man zeige, dass sich diese Aussage erweitern lässt zu: *Die Fourier-Transformation definiert einen isometrischen Isomorphismus des Lebesgue-Raumes* $L^2(\mathbb{R})$ *auf sich.* (Hinweis: Man beachte, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ dicht liegt.)

Übung 4.8: Der Folgenraum $l^{1/2,2}(\mathbb{N})$ besteht aus allen Zahlenfolgen $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}},\ a_k \in \mathbb{R}$, mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^\infty k|a_k|^2 < \infty.$$

Dieser Vektorraum ist versehen mit der Norm $\|a\|_{1/2,2} := (\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2)^{1/2}$ ein Banach-Raum. Man zeige:

a) Der Folgenraum $l^{1/2,2}(\mathbb{N})$ ist enthalten in $l^2(\mathbb{N})$.

b) Die „Einbettung“ des Banachraumes $(l^{1/2,2}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{1/2,2})$ in $(l^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ ist kompakt, d. h.: Jede bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{1/2,2}$ beschänkte Folge $(a^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset l^{1/2,2}(\mathbb{N})$ hat eine bzgl. der Norm $\|\cdot\|_2$ in $l^2(\mathbb{N})$ konvergente Teilfolge. (Hinweis: Man rekapituliere den Beweis des Satzes von Bolzano-Weiserstrass im $\mathbb{R}^n$.)

Übung 4.9: Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der Sobolew-Raum $H_0^1(\Omega)$ definiert als die Vervollständigung des Raumes der $C_0^\infty(\Omega)$ „Testfunktionen“ bzgl. der H^1-norm $\|u\|_{1,2} := (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2}$, d. h.: $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}}$. Der Sobolew-Raum $H_0^1(\Omega)$ kann offenbar als Teilraum des Lebesgue-Raumes $L^2(\Omega)$ aufgefasst werden. Für *beschränkte* Gebiete ist diese Einbettung $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ kompakt, d. h.: Jede bzgl. der H^1-Norm beschränkte Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ besitzt eine in $L^2(\Omega)$ konvergente Teilfolge. Man beweise diese Aussage für die spezielle Situation $n = 1$ und $\Omega = (0, 2\pi)$. Dazu folge man der folgenden Argumentationskette:

i) Für 2π-periodische L^2-Funktionen gilt mit $e_k(x) := e^{-\mathrm{i}kx}$ die Parsevalsche Identität

$$u \in L^2(0,2\pi): \qquad \|u\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad c_k := (2\pi)^{-1/2}(u, e_k)_2.$$

d. h.: Der Lebesgue-Raum $L^2(0,2\pi)$ ist isometrisch isomorph zum Folgenraum $l^2(\mathbb{Z})$. Man zeige für 2π-periodische H_0^1-Funktionen die entsprechende Identität

$$u \in H_0^1(0,2\pi): \qquad \|u\|_{1,2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big\{|c_k|^2 + k^2|c_k|^2\big\},$$

d. h.: Der Sobolew-Raum $H_0^1(0,2\pi)$ ist isometrisch isomorph zum Folgenraum $l^{1,2}(\mathbb{Z})$.

ii) Der Folgenraum $l^{1,2}(\mathbb{Z})$ kompakt eingebettet in den Folgenraum $l^2(\mathbb{Z})$. Man zeige, dass dies die behauptete Kompaktheit der Einbettung $H_0^1(0,2\pi) \subset L^2(0,2\pi)$ impliziert.