3 Das Lebesgue-Integral

In diesem Kapitel wollen wir den Riemannschen Integralbegriff erweitern, um einige der bisher beobachteten Unzulänglichkeiten bei der Integration zu überwinden. Dies ist u. a. die Unvollständigkeit des Raumes der Riemann-integrierbaren Funktionen bzgl. der Konvergenz im quadratischen Mittel. Eine Beschränkung, die durch das sog. Lebesgue-Integral überwunden wird. Dieses wird im Folgenden in weitgehender Analogie zum Riemann-Integral eingeführt, wobei der wesentliche Unterschied darin besteht, dass an einigen Stellen anstatt von *endlichen* Zerlegungen *abzählbar unendliche* zugelassen sind. Ferner werden von vornherein auch unbeschränkte Integrationsgebiete und Integranden zugelassen, was die Unterscheidung in *eigentliche* und *uneigentliche* Integrale überflüssig macht. Dies erfordert aber die Ausdehnung der Arithmetik auf den Bereich $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Es gibt mehrere alternative Zugänge zum Lebesgue-Integral, welche in den Lehrbüchern der Analysis verwendet werden; alle führen aber zu denselben Ergebnissen. Der hier gewählte zeichnet sich durch eine besondere Anschaulichkeit aus und verläuft in Analogie zur Einführung des Riemann-Integrals.

3.1 Lebesgue-messbare Mengen

Wir wollen einer möglichst großen Klasse von Mengen des $\mathbb{R}^n$ einen Inhalt bzw. Maß zuordnen. Dies wird uns auf das sog. „Lebesgue-Maß“ als Verallgemeinerung des Jordan-Inhalts führen.

3.1.1 Das äußere Lebesgue-Maß

Zunächst wird in Analogie zum Jordan-Inhalt (kurz auch J-Inhalt) für beliebige Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ das sog. „äußere Lebesgue-Maß“ definiert. Dabei verwenden wir endliche oder *abzählbar unendliche* Überdeckungen $\cup_i I_i \supset A$ durch (beschränkte offene, abgeschlossene oder auch halb-offene) kartesische Intervalle $I_i = I_i^1 \times \ldots \times I_i^n \subset \mathbb{R}^n$. Dabei sind auch degenerierte Intervalle zugelassen. Der Schnitt zweier Intervalle ist wieder ein Intervall. Die Vereinigung von Intervallen führt wieder zu sog. „Intervallsummen“. Der natürliche Inhalt eines solchen Intervalls wird wieder mit $|I| := |I^1| \cdot \ldots \cdot |I^n|$ bezeichnet.

Definition 3.1 (Äußeres Lebesgue-Maß): *Das „äußere Lebesgue-Maß“ (kurz „äußeres L-Maß“) einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist definert durch*

$$\mu^*(A) := \inf \Big\{ \sum_i |I_i|,\ A \subset \cup_i I_i \Big\}.$$

Dabei darf hier die Menge im Gegensatz zur Definition des äußeren Jordan-Inhalts auch unbeschränkt sein. In diesem Fall kann das äußere L-Maß auch den Wert $\mu^*(A) = \infty$ annehmen. Es wird $\mu^*(\emptyset) := 0$ gesetzt.

Da wir beim äußeren Lebesgue-Maß sowie auch bei Funktionen im Folgenden die Werte $\pm\infty$ zulassen werden, müssen wir zunächst die Arithmetik der reellen Zahlen auf den erweiterten Zahlbereich $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ ausdehnen. Dafür werden die folgenden Rechenregeln vereinbart:

$$a + \infty := \infty \ \text{ für } \ a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad a \cdot \infty := \infty \ \text{ für } \ a \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad 0 \cdot \infty := 0,$$

mit den offensichtlichen Modifikationen bei Vertauschung der Operanden und Anwendung der Vorzeichenregeln. Damit ist die Multiplikation in $\overline{\mathbb{R}}$ immer definiert. Dagegen bleiben Ausdrücke der Form „$\infty - \infty$" undefiniert.

Das Lebesgue-Integral wird wieder mit Hilfe von Ober- und Untersummen bzgl. endlicher oder auch *abzählbar unendlicher* Zerlegungen definiert werden. Im Fall von unbeschränkten Funktionen benötigen wir hierfür Regeln für Reihen mit Gliedern aus $\overline{\mathbb{R}}$. Für $0 \le a_k \le \infty$ ist $s_\infty = \sum_{k=1}^\infty a_k$ wohl definiert mit dem Wert $s_\infty := \infty$ im Falle der Divergenz der Reihe, oder wenn ein $a_k = \infty$ ist. Für $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt dann die Formel

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^\infty a_k. \tag{3.1.1}$$

Im Folgenden werden auch unendliche Summen über doppelt indizierte Größen (sog. „Doppelreihen") mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ vorkommen. Die Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^\infty a_{ij} = \sum_{i=1}^\infty \Big(\sum_{j=1}^\infty a_{ij} \Big) = \sum_{j=1}^\infty \Big(\sum_{i=1}^\infty a_{ij} \Big), \tag{3.1.2}$$

ist gültig, möglicherweise mit den Werten $\pm\infty$, sofern eine der drei auftretenden Reihen absolut konvergent ist, oder auch im Fall $0 \le a_{ij} \le \infty$.

Das äußere Lebesgue-Maß erfüllt definitionsgemäß $0 \le \mu^*(A) \le \infty$. Insbesondere gilt für einpunktige Mengen $\mu^*(\{a\}) = 0$. Weitere Eigenschaften sind in dem folgenden Lemma zusammengefaßt.

Lemma 3.1: *Für das äußere Lebesgue-Maß gelten die folgenden Aussagen:*

i) Aus $A \subset B$ folgt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ (Monotonie).

ii) Für endliche oder abzählbare Mengenfolgen $(A_i)_i$ gilt (σ-Subadditivität)

$$\mu^*(\cup_i A_i) \le \sum_i \mu^*(A_i). \tag{3.1.3}$$

iii) Für beschränkte Mengen ist $|A|_i \le \mu^*(A) \le |A|_a$, d. h.: Für Jordan-quadrierbare Mengen ist $\mu^*(A) = |A|$.

iv) Das äußere Lebesgue-Maß ist bewegungs-invariant, d. h. invariant gegenüber Translationen und Drehungen.

Beweis: i) Da im Fall $A \subset B$ jede Intervallüberdeckung von B auch eine solche von A ist, folgt aus der Definition unmittelbar $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

ii) Wir nehmen an, dass die rechte Seite in (3.1.3) endlich ist, da sonst nichts weiter zu beweisen ist. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $(\varepsilon_i)_i$ eine Folge positiver Zahlen mit $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$. Dann gibt es zu jedem i eine Intervall-Folge $(I_{ij})_j$ mit

$$A_i \subset \cup_j I_{ij}, \qquad \sum_j |I_{ij}| \le \mu^*(A_i) + \varepsilon_i.$$

Die Doppelfolge aller Intervalle I_{ij} überdeckt die Menge $A = \cup_i A_i$, und daraus ergibt sich dann nach dem Doppelreihensatz (3.1.2)

$$\mu^*(A) \le \sum_{i,j} |I_{ij}| = \sum_i \sum_j |I_{ij}| \le \sum_i \big(\mu^*(A_i) + \varepsilon_i\big) \le \sum_i \mu^*(A_i) + \varepsilon.$$

Dies beweist (ii).

iii) Der äußere Jordan-Inhalt von A ist definiert als das Infimum des Inhalts aller endlichen Intervall-Überdeckungen von A. Da beim äußeren L-Maß allgemeine, abzählbare Intervall-Überdeckungen zugelassen sind, ergibt sich $\mu^*(A) \le |A|_a$. Zum Beweis der zweiten Ungleichung zeigen wir, dass für jede endliche, abgeschlossene Intervallsumme $S = \cup_{i=1}^m I_i$ die Ungleichung $|S| \le \mu^*(S)$ gilt. Dazu geben wir ein $\varepsilon > 0$ sowie $\varepsilon_i > 0$ mit $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$ vor und wählen eine (abzählbare) Überdeckung $\cup_i I_i \supset S$ mit

$$\sum_i |I_i| \le \mu^*(S) + \varepsilon.$$

Zu jedem der Intervalle I_i bilden wir nun ein etwas größeres, offenes Intervall $J_i \supset I_i$ mit $|J_i| \le |I_i| + \varepsilon_i$. Dann ist $(J_i)_i$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge S, und nach dem Satz von Heine-Borel wird S bereits von endlich vielen der J_i überdeckt; sei etwa $S \subset \cup_{i=1}^m J_i$. Wegen der Subadditivität des Jordan-Inhalts folgt damit

$$|S| \le \sum_{i=1}^m |J_i| \le \sum_{i=1}^m \big(|I_i| + \varepsilon_i\big) \le \sum_{i=1}^m |I_i| + \varepsilon \le \mu^*(S) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist $|S| \le \mu^*(S)$ bewiesen. Sei nun A eine beschränkte Menge und $S \subset A$ eine endliche Intervallsumme. Mit (i) folgt dann

$$|S| \le \mu^*(S) \le \mu^*(A).$$

Übergang zum Supremum bzgl. aller Intervallsummen $S \subset A$ ergibt $|A|_i \le \mu^*(A)$. Damit ist (iii) bewiesen.

iv) Die Invarianz von $\mu^*(\cdot)$ gegenüber Translationen folgt unmittelbar, da diese Intervalle in solche mit demselben Inhalt überführen. Sei nun S eine Drehung, welche durch eine gleichfalls mit S bezeichnete orthogonale $n \times n$-Matrix beschrieben ist. Aus $A \subset \cup_i I_i$ folgt $S(A) \in \cup_i S(I_i)$. Mit (ii), (iii) und der Bewegungsinvarianz des J-Inhalts ergibt sich dann

$$\mu^*(S(A)) \le \sum_i \mu^*(S(I_i)) = \sum_i |S(I_i)| = \sum_i |I_i|.$$

Da die A überdeckende Inervallsumme beliebig ist, folgt $\mu^*(A) \geq \mu^*(S(A))$. Dasselbe gilt auch für die transponierte Abbildung S^T. Wegen $S^T S = id.$ ergibt sich somit

$$\mu^*(S(A)) \geq \mu^*(S^T S(A)) = \mu^*(A).$$

Beide bewiesenen Ungleichungen zusammen ergeben $\mu^*(S(A)) = \mu^*(A)$. Q.E.D.

Definition 3.2 (Lebesgue-Nullmenge): *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit äußerem Lebesgue-Maß $\mu^*(A) = 0$ wird „Lebesgue-Nullmenge“ (kurz „L-Nullmenge“ oder einfach „Nullmenge“) genannt. Gilt eine Aussage für alle Punkte von A bis auf die aus einer Nullmenge, so sagen wir, dass sie „fast überall“ (kurz „f. ü.“) in A gilt.*

Lemma 3.2: *Die Vereinigung von abzählbar vielen Lebesgue-Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge. Insbesondere sind abzählbare Mengen Lebesgue-Nullmengen.*

Beweis: Die Aussagen ergeben sich unmittelbar aus der σ-Subadditivität des äußeren L-Maßes. Q.E.D.

Bemerkung 3.1: Bei der Definition der Jordan-Nullmenge waren nur endliche Intervall-Überdeckungen zugelassen, so dass unbeschränkte und allgemeine abzählbare Mengen nicht erfaßt werden konnten. Das Konzept der Lebesgue-Nullmenge ist also allgemeiner. Aus Lemma 3.2 folgt, dass z. B. die Menge $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ der rationalen Punkte eine Lebesgue-Nullmenge ist. Dasselbe gilt auch für jede Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ (Übungsaufgabe).

Mit Hilfe des äußeren Lebesgue-Maßes wollen wir ein Mengen-Maß $\mu(\cdot)$, das sog. „Lebesgue-Maß“, definieren, welches zusätzlich zu den Eigenschaften des Jordan-Inhalts, nämlich der Positivität, der Bewegungsinvarianz, der Normierung und der (endlichen) Additivität, noch die der σ-Additivität besitzt:

$$A_i \subset \mathbb{R}^n,\, i \in \mathbb{N}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Durch Gegenbeispiele kann gezeigt werden, dass schon das äußere Lebesgue-Maß nicht auf allen Mengen des $\mathbb{R}^n$ σ-additiv ist (Übungsaufgabe). Wir werden uns also auf eine geeignete Teilklasse von Mengen des $\mathbb{R}^n$ einschränken müssen, welche aber alle quadrierbaren Mengen (und zusätzlich noch viele weitere) enthält. Als Vorbereitung dient der folgende Abschnitt.

3.1.2 Mengenalgebren

Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge, d. h. die Menge ihrer Teilmengen. Wir betrachten gewisse Klassen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X, welche wir „Algebra“ (oder genauer „Mengenalgebra“) auf X nennen.

Definition 3.3 (Mengenalgebra): *Die (nicht-leere) Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt „Algebra" auf X, wenn sie X und $\emptyset$ enthält, und wenn mit $A, B \subset \mathcal{A}$ auch $A \setminus B$, $A \cup B$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ sind. Sie heißt „σ-Algebra", wenn zusätzlich mit $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, auch $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ sind.*

Eine Mengenalgebra ist nach Definition „abgeschlossen" bzgl. Differenzbildung sowie *endlicher* Vereinigung und Schnitt. Eine σ-Algebra ist zusätzlich noch abgeschlossen bzgl. *abzählbar unendlicher* Vereinigung und Schnitt.

Lemma 3.3: *Eine (nicht-leere) Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist bereits eine Algebra, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

i) Mit $A \in \mathcal{A}$ ist auch $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$.

ii) Mit $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Es ist eine σ-Algebra, wenn zusätzlich gilt:

iii) Für beliebige, paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Beweis: Zum Nachweis der Algebra- bzw. σ-Algebra-Eigenschaft von $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ haben wir noch zu zeigen, dass $X, \emptyset \in \mathcal{A}$ und mit $A, B \subset \mathcal{A}$ auch $A \setminus B$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ ist. Ferner muß für beliebige, abzählbar viele Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ auch $\cap_i A_i \in \mathcal{A}$ sein.

i) Da $\mathcal{A}$ nicht-leer ist, gibt es ein $A \in \mathcal{A}$. Dann ist nach Voraussetzung auch $A^c \in \mathcal{A}$ und folglich $X = (X \setminus A) \cup A = A^c \cup A \in \mathcal{A}$, sowie $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.

ii) Mit $A, B \in \mathcal{A}$ ist $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ und somit $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ und folglich auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

iii) Für $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, gilt die disjunkte Darstellung

$$\cup_i A_i = \cup_i B_i, \quad B_1 := A_1,\ B_2 := A_2 \setminus A_1,\ \dots,\ B_j := A_j \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_j.$$

Offenbar sind alle $B_i \in \mathcal{A}$ und somit auch $\cup_i A_i = \cup_i B_i \in \mathcal{A}$. Die Aussage für den Durchschnitt ergibt sich hieraus durch $\cap_i A_i = (\cup_i A_i^c)^c \in \mathcal{A}$. Q.E.D.

Beispiel 3.1: Wir geben einige Beispiele von Mengenalgebren:

i) Für eine Menge X ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ die kleinste und die Potenzmenge $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ die größte σ-Algebra auf X.

ii) Für eine Menge X und Teilmenge $A \subset X$ ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ die kleinste σ-Algebra, die A enthält.

iii) Für $X = \mathbb{R}^n$ heißt die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von X enthält, die „Borelsche σ-Algebra" („Borel-Mengen").

iv) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-quadrierbare Menge, so ist die Menge der Jordan-quadrierbaren Teilmengen von X eine Algebra (aber keine σ-Algebra).

v) Die Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ und ihre Komplemente bilden eine σ-Algebra. Dagegen bilden die Jordan-Nullmengen und ihre Komplemente nur eine Algebra.

3.1.3 Das Lebesgue-Maß

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist als Jordan-quadrierbar definiert worden, wenn ihr äußerer und ihr innerer Inhalt übereinstimmen. Die direkte Übertragung dieses Konzepts auf das äußere Lebesgue-Maß würde keine viel größere Klasse von messbaren Mengen liefern, da viele interessante Mengen zwar ein nicht-triviales äußeres Maß haben, sich aber nicht durch Intervallsummen von *innen* approximieren lassen (z. B.: $A := [0,1] \setminus \mathbb{Q}$). Dazu behilft man sich des Tricks, die Messbarkeit einer Menge mit Hilfe ihres äußeren Maßes und das ihrer Komplementmenge zu definieren.

Definition 3.4 (Lebesgue-Maß): *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt „Lebesgue-messbar“ (oder kurz „messbar“), wenn mit jeder Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{3.1.4}$$

In diesem Fall wird $\mu(A) := \mu^*(A)$ das „Lebesgesche Maß“ (oder kurz „Maß“) von A genannt. Die Menge der Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sei mit $\mathcal{L}_\mu$ bezeichnet.

Lemma 3.4: *Für die Menge $\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-messbaren Mengen des $\mathbb{R}^n$ gelten die folgenden Aussagen:*

i) Jede Lebesgue-Nullmenge ist in $\mathcal{L}_\mu$.

ii) Die Menge $\mathcal{L}_\mu$ ist eine Algebra.

iii) $\mathcal{L}_\mu$ enthält alle Jordan-quadrierbaren Mengen.

Beweis: i) Mit $\mu^*(A) = 0$ ist für jedes $E \subset \mathbb{R}^n$ auch $\mu^*(A \cap E) = 0$. Wegen der Monotonie von $\mu^*(\cdot)$ ergibt sich somit:

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A).$$

Wegen der Subadditivität von $\mu^*(\cdot)$ gilt ferner

$$\mu^*(E) = \mu^*\big((E \cap A)) \cup (E \cap A^c)\big) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Die L-Nullmenge A ist also messbar.

ii) Nach Lemma 3.3 genügt es, zu zeigen, dass mit $A, B \in \mathcal{L}_\mu$ auch $A^c \in \mathcal{L}_\mu$ und $A \cup B \in \mathcal{L}_\mu$ ist. Die Messbarkeit von A^c ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Sei weiter $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu^*(E) = \mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*\big(E \cap (A \cup B)^c\big).$$

Da A messbar ist, gilt mit $E' := E \cap (A \cup B)$:

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap (A \cup B)) &= \mu^*(E') = \mu^*(E' \cap A) + \mu^*(E' \cap A^c) \\
&= \mu^*\big(E \cap (A \cup B) \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap (A \cup B) \cap A^c\big) \\
&= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B \cap A^c).
\end{aligned}$$

Ferner ist $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und somit

$$\mu^*\big(E \cap (A \cup B)^c\big) = \mu^*(E \cap A^c \cap B^c).$$

Kombination dieser Gleichungen und Verwendung der Gleichung (3.1.4) erst für B und dann für A ergibt

$$\begin{aligned}\mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*\big(E \cap (A \cup B)^c\big) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)\\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E).\end{aligned}$$

iii) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ J-quadrierbar sowie $E \subset \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir wählen eine Intervallsumme $\cup_i I_i \supset E$ mit $\sum_i |I_i| \le \mu^*(E) + \varepsilon$. Die Mengen $J_i := I_i \cap A$ sowie $K_i := I_i \cap A^c$ sind disjunkt und J-quadrierbar, und es gilt $E \cap A \subset \cup_i J_i$ und $E \cap A^c \subset \cup_i K_i$. Wegen der σ-Subadditivität von $\mu^*(\cdot)$ folgt also mit $|I_i| = |J_i| + |K_i|$:

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \le \sum_i |J_i| + \sum_i |K_i| = \sum_i |I_i| \le \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar ist, folgt

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \le \mu^*(E),$$

und weiter wie in (i) die Messbarkeit von A. Q.E.D.

Satz 3.1: *i) Die Menge $\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-messbaren Mengen des $\mathbb{R}^n$ bildet eine σ-Algebra, d. h. mit $A, B, A_i \in \mathcal{L}_\mu$ sind auch*

$$A^c,\ A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ \cap_i A_i,\ \cup_i A_i \in \mathcal{L}_\mu.$$

Diese enthält alle Jordan-quadrierbaren Mengen.

ii) Das Lebesgue-Maß ist auf $\mathcal{L}_\mu$ bewegungs-invariant und stimmt auf den Jordan-quadrierbaren Mengen mit dem Jordan-Inhalt überein. Für $A, B, A_i \in \mathcal{L}_\mu$ gilt ferner:

$$\begin{aligned}\mu(A \setminus B) &= \mu(A) - \mu(B), \quad \textit{für } B \subset A,\ \mu(B) < \infty,\\ \mu(\cup_i A_i) &= \sum_i \mu(A_i), \quad \textit{für } A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \ne j),\\ \mu(\cup_i A_i) &= \lim_{i\to\infty} \mu(A_i), \quad \textit{für } A_i \subset A_{i+1},\\ \mu(\cap_i A_i) &= \lim_{i\to\infty} \mu(A_i), \quad \textit{für } A_i \supset A_{i+1},\ \mu(A_1) < \infty.\end{aligned}$$

Beweis: i) Wir haben in Lemma 3.4 bereits gezeigt, dass $\mathcal{L}_\mu$ eine Algebra ist. Es bleibt, die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_\mu$ bzgl. abzählbar unendlicher, disjunkter Vereinigung zu zeigen. O.b.d.A. seien $A_i \in \mathcal{L}_\mu, \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt und $S := \cup_{i=1}^\infty A_i$. Für beliebiges $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt dann wegen der σ-Subadditvität des äußeren L-Maßes:

$$\mu^*(E \cap S) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i). \tag{3.1.5}$$

Wir stellen nun ein Hilfsresultat bereit. Für disjunkte $A, B \in \mathcal{L}_\mu$, $A \cap B = \emptyset$, gilt mit $E' := E \cap (A \cup B)$ wegen $A \in \mathcal{L}_\mu$ und $B \cap A^c = B$:

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap (A \cup B)) &= \mu^*(E') \\ &= \mu^*(E' \cap A) + \mu^*(E' \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*(E \cap (A \cup B) \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B \cap A^c) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B).\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion erschließen wir damit für $S_m := \cup_{i=1}^m A_i$ die Gleichung

$$\mu^*(E \cap S_m) = \mu^*(E \cap A_1) + \ldots + \mu^*(E \cap A_m).$$

Weiter gilt wegen $S_m \in \mathcal{L}_\mu$ und der Monotonie von $\mu^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\mu^*(E) = \mu^*(E \cap S_m) + \mu^*(E \cap S_m^c) &\geq \mu^*(E \cap S_m) + \mu^*(E \cap S^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_1) + \ldots + \mu^*(E \cap A_m) + \mu^*(E \cap S^c).\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ ergibt sich

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap S^c).$$

Aus der σ-Subadditivität von $\mu^*(\cdot)$ folgt weiter

$$\mu^*(E) = \mu^*((E \cap S) \cup (E \cap S^c)) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap S^c)$$

und damit

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap S^c). \tag{3.1.6}$$

Kombination von (3.1.5) mit (3.1.6) ergibt nun

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap S) + \mu^*(E \cap S^c).$$

Mit der Umkehrung

$$\mu^*(E) = \mu^*((E \cap S) \cup (E \cap S^c)) \leq \mu^*(E \cap S) + \mu^*(E \cap S^c)$$

folgt schließlich

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap S) + \mu^*(E \cap S^c),$$

d. h.: $S \in \mathcal{L}_\mu$.

ii) Setzt man in (3.1.6) $E := S = \cup_{i=1}^\infty A_i$ ergibt sich die σ-Additivität des L-Maßes:

$$\mu^*(S) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(S \cap A_i) + \mu^*(S \cap S^c) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i).$$

Die Bewegungsinvarianz des L-Maßes folgt unmittelbar aus der des äußeren L-Maßes. Da J-quadrierbare Mengen A nach Lemma 3.4 in $\mathcal{L}_\mu$ sind, gilt für diese $|A| = \mu^*(A) = \mu(A)$. Aus der Additivität von $\mu(\cdot)$ folgt für $B \subset A \in \mathcal{L}_\mu$ direkt

$$\mu(A) = \mu((A \setminus B) \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$$

und somit $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. Ist die Mengenfolge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so sind die Mengen $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1, \ldots$, $B_m := A_m \setminus A_{m-1}$, $\ldots$, messbar und paarweise disjunkt. Aus $A_m = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ folgt also

$$\mu(A_m) = \mu(B_1) + \ldots + \mu(B_m),$$

und aus $S := \cup_{i=1}^\infty B_i$ ergibt sich

$$\mu(S) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

Sei nun die Mengenfolge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Für Teilmengen $A \subset A_1$ definieren wir $A' := A_1 \setminus A$. Für $D = \cap_{i=1}^\infty A_i \subset A_1$ ist $D' = A_1 \setminus D = \cup_{i=1}^\infty A_i'$, also

$$\mu(D') = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i'),$$

da die Folge $(A_i')_{i\in\mathbb{N}}$ monoton wachsen ist. Mit Hilfe der Identität $\mu(A') = \mu(A_1) - \mu(A)$ angewendet für D und A_i folgt hieraus

$$\mu(A_1) - \mu(D) = \mu(D') = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i') = \lim_{i\to\infty} \{\mu(A_1) - \mu(A_i)\}$$

bzw. $\mu(D) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

Bemerkung: Auf die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ in der letzten Aussage von (ii) kann nicht verzichtet werden, wie das Beispiel $A_i := \mathbb{R} \times (0, 1/i) \subset \mathbb{R}^2$ zeigt. Q.E.D.

Lemma 3.5: *i) Für die Differenz beliebiger Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine endliche, disjunkte Darstellung $I \setminus J = \cup_{i=1}^m I_i$ als Intervallsumme.*

ii) Jede endliche oder abzählbar unendliche Vereinigung von Intervallen $S = \cup_i I_i$ besitzt eine Darstellung als Vereinigung $S = \cup_j J_j$ endlich bzw. abzählbar unendlich vieler paarweise disjunkter Intervalle J_j

Beweis: i) Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension n. Für $n = 1$ ist die Richtigkeit der Behauptung klar. Sei nun $n = 2$ und entsprechend $I = I^1 \times I^2$, $J = J^1 \times J^2$. Dann ist $I \cap J = (I^1 \cap J^1) \times (I^2 \cap J^2)$ und $I \setminus J = I \setminus I_0$ mit $I_0 = I_0^1 \times I_0^2 := I \cap J \subset I$. Nach dem Ergebnis für $n = 1$ gibt es disjunkten Darstellungen $I^1 \setminus I_0^1 = \cup_{i=1}^{m_1} I_i^1$ und $I^2 \setminus I_0^2 = \cup_{i=1}^{m_2} I_i^2$ durch eindimensionale Intervalle. O.B.d.A. kann hier $m_1 = m_2$ angenommen werden. Also ist $I \setminus I_0$ die disjunkte Vereinigung aller Intervalle $I_i^1 \times I_j^2$ $(i, j = 0, 1, \ldots, m)$, $(i, j) \neq (0, 0)$, und für $i = j = 0$ ergibt sich I_0. Dies beweist die Richtigkeit der Behauptung für $n = 2$. Dieses Argument lässt sich fortführen für $n \geq 3$, wobei dann die I^1, J^1 als $(n-1)$-dimensionale und die I^2, J^2 als eindimensionale Intervalle gewählt werden.

ii) Sei $S = \cup_i I_i$ eine Intervallsumme. Dann besteht auch die Darstellung

$$S = \cup_i K_i, \quad K_1 := I_1, K_2 := I_2 \setminus I_1, \dots, K_m = I_m \setminus \cup_{i=1}^{m-1} I_i.$$

Es genügt zu zeigen, dass jede der Mengen K_i Vereinigung von endlich vielen, paarweise disjunkten Intervallen ist. Das ist für K_1 klar und folgt für K_2 aus (i). Durch mehrmalige Anwendung von (i) ergibt sich dies auch für $K_3 = I_3 \setminus (I_1 \cup I_2) = (I_3 \setminus I_1) \setminus I_2$ und genauso für alle weiteren K_i. Q.E.D.

Lemma 3.6: *Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen, paarweise disjunkten Intervallen I_i darstellen, so dass gilt:*

$$A = \cup_i I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \ \ (i \neq j), \quad \overline{I}_i \subset A. \tag{3.1.7}$$

Beweis: Wir betrachten Intervalle $I = [a,b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ mit rationalen Eckpunkten $a, b \in \mathbb{Q}^n$. Es gibt abzählbar viele solcher „rationaler" Intervalle. Zu jedem Punkt $x \in A$ gibt es eine ε-Kugel $K_\varepsilon(x) \subset A$. Also gibt es auch ein rationales Intervall $I \subset A$ mit $x \in I$. Folglich ist A die Vereinigung aller in A enthaltenen rationalen Intervalle, $A = \cup_i I_i$. Nach Lemma 3.5 ist dann A auch Vereinigung von abzählbar vielen, paarweise disjunkten Intervallen. Q.E.D.

Korollar 3.1: *Die Menge $\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ enthält alle offenen und abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sowie deren abzählbaren Schnitte (sog. „G_δ-Mengen") und Vereinigungen (sog. „F_σ-Mengen").*

Beweis: Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich mit Hilfe von Lemma 3.6 aus der Tatsache, dass $\mathcal{L}_\mu$ σ-Algebra ist. Q.E.D.

Satz 3.2: *Für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(O),\ O \supset A \text{ offen}\}. \tag{3.1.8}$$

Die Menge A ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $O_\varepsilon \supset A$ existiert mit

$$\mu^*(O_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon. \tag{3.1.9}$$

Beweis: i) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Intervallsumme $\cup_k I_k \supset A$ mit $\sum_k |I_k| \le \mu^*(A) + \varepsilon$. Zu jedem I_k gibt es ein etwas größeres *offenes* Intervall $J_k \supset I_k$ mit $|J_k| \le |I_k| + \varepsilon_k$ und $\sum_k \varepsilon_k = \varepsilon$. Die offene Menge $G := \cup_k J_k$ enthält dann A, und es gilt

$$\mu^*(G) \le \sum_k \mu^*(J_k) \le \sum_k \big(|I_k| + \varepsilon_k\big) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Für jede offene Obermenge G von A ist wegen der Monotonie des äußeren Lebesgue-Maßes $\mu^*(A) \le \mu^*(G)$. Dies impliziert mit dem eben Gezeigten $\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(G) : G \supset A\}$.

ii) Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene (messbare) Menge $G \supset A$ mit $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$ existiert, so gibt es eine Folge solcher offener Mengen G_k mit $\mu^*(G_k \setminus A) \le 1/k$. Für die Menge $G := \cap_k G_k$ ist dann $\mu^*(G \setminus A) \le \mu^*(G_k \setminus A) \le 1/k$ und somit $\mu^*(G \setminus A) = 0$. Als Nullmenge ist $G \setminus A$ messbar und damit auch $A = (A \setminus G) \cup G$.

iii) Sei umgekehrt A messbar und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für unbeschränktes A gibt es eine Zerlegung $A = \cup_k A_k$, wobei die A_k messbar und beschränkt sind. Sei weiter $\varepsilon_k > 0$ mit $\sum_k \varepsilon_k = \varepsilon$. Zu jedem k gibt es nach (i) eine offene Menge $G_k \supset A_k$ mit

$$\mu^*(G_k) < \mu^*(A_k) + \varepsilon_k, \qquad \mu^*(G_k \setminus A_k) < \varepsilon_k.$$

Hier wird eine Aussage aus Satz 3.1 (ii) verwendet, für die $\mu^*(A_k) < \infty$ benötigt wird. Die Menge $G := \cup_k G_k$ ist offen und enthält A. Aus $G \setminus A \subset \cup_k (G_k \setminus A_k)$ folgt

$$\mu^*(G \setminus A) \le \sum_k \mu^*(G_k \setminus A_k) < \sum_k \varepsilon_k = \varepsilon.$$

Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Bemerkung 3.2: Es ist $\mathcal{L}_\mu \ne \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, d. h.: Es gibt nicht-messbare Mengen. Der Beweis dieser Aussage, d. h. die Konstruktion von nicht-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$ erfordert aber die Verwendung eines Arguments über unendliche Mengen, das sog. „Auswahlaxiom“ (Übungsaufgabe).

3.2 Das Lebesgue-Integral

Das Lebesgue-Integral wird nun ganz analog wie das Riemann-Integral mit Hilfe von Unter- und Obersummen eingeführt, wobei die Arithmentik in $\overline{\mathbb{R}}$ stattfindet, und Zerlegungen in abzählbar viele *messbare* Mengen anstelle von nur endlich vielen *quadrierbaren* verwendet werden.

3.2.1 Lebesgue-integrierbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge. Wir betrachten abzählbare Zerlegungen $Z = \{B_i\}$ von D in messbare Teilmengen $B_i \subset M$, welche paarweise disjunkt sind, d. h.:

$$D = \cup_i^\infty B_i, \qquad B_i \cap B_j = \emptyset, \;\; i \ne j.$$

Die Menge aller solcher Zerlegungen von D sei mit $\mathcal{Z}(D)$ bezeichnet. Dabei sind natürlich auch *endliche* Zerlegungen zugelassen; dieser „endliche“ Fall wird aber notationsmäßig nicht vom „unendlichen“ unterschieden. Für eine Zerlegung $Z = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$ ist die

„Feinheit“ $|Z|$ definiert durch $|Z| := \sup_{B_i \in Z} \mu(B_i)$. Eine Zerlegung $Z' = \{B'_j\}$ ist eine „Verfeinerung“ von $Z = \{B_i\}$, wenn alle B'_j Teilmengen gewisser der B_i sind; in Symbolen wird dies durch $Z' \succ Z$ (bzw. $Z \prec Z'$) ausgedrückt. Für zwei Zerlegungen $Z = \{B_i\}$, $Z' = \{B'_j\} \in \mathcal{Z}(D)$ bezeichnet $Z * Z' := \{B_i \cap B'_j\}$ die durch Schnittbildung entstehende gemeinsame Verfeinerung.

Sei nun $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine gegebene Funktion und $Z \in \mathcal{Z}(D)$. Wir definieren die zugehörige „Untersumme“ und „Obersumme“

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in B_i} f(x)\mu(B_i), \qquad \overline{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x \in B_i} f(x)\mu(B_i),$$

sowie mit gewissen Folgen $\xi = (\xi_i)$ von Punkten $\xi_i \in B_i$, die „Lebesguesche Summe“

$$LS_Z(f, \xi) := \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\mu(B_i).$$

Dabei sind für die einzelnen Summanden und die Summen die Werte $\pm\infty$ möglich, wobei allerdings das Auftreten von Ausdrücken der Art „$\infty - \infty$“ ausgeschlossen ist.

Die Werte der Unter- und Obersummen sollen unabhängig von der Reihenfolge, d. h. der Indizierung, der Summanden sein. Daher werden wir die *absolute* Konvergenz der Reihen fordern. Die Lebesgue-Integrierbarkeit einer Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ wird dann wieder über den Vergleich von Ober- und Untersummen definiert werden. Dabei ergibt sich das Problem, dass es für eine durchaus „harmlose“ (unbeschränkte) Funktion f Zerlegungsfolgen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|Z_k| \to 0$, geben kann, bzgl. derer die Obersummen $\overline{S}_{Z_k}(f) = \infty$ sind, während für andere Zerlegungsfolgen $(Z'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|Z'_k| \to 0$, durchaus $\sup_{k\in\mathbb{N}} \overline{S}_{Z_k}(f) < \infty$ sein kann. Ein Beispiel ist im Folgenden beschrieben.

Beispiel 3.2: Auf dem Intervall $D = (0, 1]$ wird die Funktion $f(x) := 1/\sqrt{x}$ betrachtet. I. Allg. wird $\overline{S}_Z(f) = \infty$ sein; dies gilt insbesondere für jede Zerlegung, welche ein Intervall der Form $(0, b]$ enthält, insbesondere also für jede endliche Zerlegung. Für die Zerlegung

$$Z^* := \Big\{B_i = \Big(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\Big], \, i \in \mathbb{N}\Big\}, \qquad \sup_{x \in B_i} f(x) = \sqrt{i+1},$$

ist jedoch

$$\overline{S}_{Z^*}(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\Big)\sqrt{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\sqrt{i+1}} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} < \infty.$$

Die Einbeziehung unbeschränkter Funktionen erfordert also besondere Vorkehrungen, um zu einem sinnvollen Integralbegriff zu kommen. Dies wird durch die folgende Bedingung geleistet.

Definition 3.5 (Bedingung (Z)): *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ die Eigenschaft (Z) besitzt, wenn es eine Zerlegung $Z^* = \{B_i^*\} \in \mathcal{Z}(D)$ gibt, so dass die zugehörige Obersumme von $|f|$ endlich ist:*

$$\overline{S}_{Z^*}(|f|) < \infty.$$

Damit sind dann auch die Ober- und Untersummen von f zu jeder Verfeinerung von Z^* endlich und konvergieren absolut. Die Klasse aller Zerlegungen $Z^* \in \mathcal{Z}(D)$ mit dieser Eigenschaft wird mit $\mathcal{Z}_f^*(D)$ bezeichnet.

Lemma 3.7: *a) Die Eigenschaft (Z) einer Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ impliziert, dass die Menge der Singularitäten $\Sigma_f := \{x \in D : f(x) = \pm\infty\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, d. h.: $\mu^*(\Sigma_f) = 0$.*

b) Ferner gilt mit einer Zerlegung Z^* aus $\mathcal{Z}_f^*(D)$:

i) Für Verfeinerungen $Z, Z' \in \mathcal{Z}(D)$ von Z^* mit $Z' \succ Z$ gilt:

$$-\infty < \underline{S}_Z(f) \le \underline{S}_{Z'}(f) \le \overline{S}_{Z'}(f) \le \overline{S}_Z(f) < \infty.$$

ii) Für beliebige Verfeinerungen $Z, Z' \in \mathcal{Z}(D)$ von Z^* gilt:

$$\underline{S}_Z(f) \le \overline{S}_{Z'}(f).$$

iii) Für jede Verfeinerung $Z \in \mathcal{Z}(D)$ von Z^* gilt:

$$\underline{S}_Z(f) \le LS_Z(f, \xi) \le \overline{S}_Z(f),$$

und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Sätze von Punkten $\xi_i \in B_i^*$ und $\eta_i \in B_i^*$, so dass für die zugehörigen Lebesgue-Summen gilt:

$$\overline{S}_Z(f) - LS_Z(f; \xi) < \varepsilon, \qquad LS_Z(f; \eta) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon.$$

Beweis: a) Ist $Z^* \in \mathcal{Z}_f^*(D)$ und $\sup_{x\in B_i^*} f(x) = \infty$ für ein $B_i^* \in Z^*$, so muss $\mu^*(B_i^*) = 0$ sein. Die Singularitätenmenge Σ_f ist also in der Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Nullmengen enthalten und damit wegen der σ-Subadditvität des äußeren L-Maßes selbst eine Nullmenge.

b) Der Beweis für (i) und (ii) ist evident. Zum Beweis von (iii) wählen wir $\varepsilon_i > 0$ mit $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i = \varepsilon$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $0 < \mu(B_i) < \infty$ die Punkte $\xi_i, \eta_i \in B_i$ derart dass

$$\sup_{x\in B_i} f(x) - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon_i}{\mu(B_i)}, \qquad f(\eta_i) - \inf_{x\in B_i} f(x) < \frac{\varepsilon_i}{\mu(B_i)}.$$

Aus $\mu(B_i) = \infty$ würde $f \equiv 0$ auf B_i folgen, denn andernfalls wäre $\overline{S}_Z(|f|) = \infty$. Summanden mit $\mu(B_i) = 0$ oder $\mu(B_i) = \infty$ sind also Null. Damit erhalten wir die zweite Ungleichung

$$LS_Z(f; \eta) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{i=1}^\infty \big(f(\eta_i) - \inf_{B_i} f(x)\big)\mu(B_i) \le \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i = \varepsilon$$

und analog auch die erste. Q.E.D.

Mit den obigen Bezeichnungen werden nun für Funktionen f mit der Eigenschaft (Z) wieder das „Unterintegral“ und das „Oberintegral“ definiert durch

$$\underline{J}(f) = \underline{\int_D} f(x)\,dx := \sup_{Z\in\mathcal{Z}(D),Z\succ Z^*} \underline{S}_Z, \qquad \overline{J}(f) = \overline{\int_D} f(x)\,dx := \inf_{Z\in\mathcal{Z}(D),Z\succ Z^*} \overline{S}_Z.$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$\underline{J}(f) \le \overline{J}(f), \qquad \overline{J}(f) = -\underline{J}(-f). \tag{3.2.10}$$

Die Definition des Unter- und Oberintegerals ist unabhängig von der speziellen Wahl der Zerlegung $Z^* \in \mathcal{Z}_f^*(D)$, denn zu jeder anderen Zerlegung $Z^{**} \in \mathcal{Z}_f^*(D)$ ist $Z^{**} * Z^*$ gemeinsame Verfeinerung von Z^{**} und Z^*, d. h.:

$$\sup_{Z\succ Z^*} \underline{S}_Z = \sup_{Z\succ Z^{**}} \underline{S}_Z, \qquad \inf_{Z\succ Z^*} \overline{S}_Z = \inf_{Z\succ Z^{**}} \overline{S}_Z.$$

Definition 3.6 (Lebesgue-Integral): *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ L-messbar. Sind für eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft (Z) ihr Ober- und Unterintegral gleich, so heißt der gemeinsame (endliche) Wert das „Lebesgue-Integral“ (kurz „L-Integral“) von f über D,*

$$\int_D f(x)\,dx := J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f), \tag{3.2.11}$$

und die Funktion f wird „Lebesgue-integrierbar“ (kurz „L-integrierbar“) genannt. Die Menge der über D Lebesgue-integrierbaren Funktionen wird mit $L(D)$ bezeichnet. Im Folgenden beinhaltet die Annahme der „Lebesgue-Integrierbarkeit“ einer Funktion implizit auch das Vorliegen der Eigenschaft (Z).

Die folgenden Aussagen werden ganz anlog wie die entsprechenden für das Riemann-Integral bewiesen.

Lemma 3.8: *Das Lebesgue-Integral hat die folgenden Eigenschaften:*

i) Es ist $f \in L(D)$ genau dann, wenn die Bedingung (Z) gilt und zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z_\varepsilon \in \mathcal{Z}(D)$ existiert mit (Lebesguesche Integrabilitätskriterium):

$$\overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) < \varepsilon. \tag{3.2.12}$$

ii) Ist $f \in L(D)$ f.ü. in D gleich einer Funktion $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$, so ist auch $g \in L(D)$, und es gilt:

$$J(f) = J(g). \tag{3.2.13}$$

iii) Für $f, g \in L(D)$ mit $f \le g$ f.ü. in D gilt (Monotonie)

$$J(f) \le J(g). \tag{3.2.14}$$

iv) Die Menge $L(D)$ ist ein Vektorraum, und das Lebesgue-Integral ist ein lineares Funktional auf $L(D)$, d. h.: Für $f, g \in L(D)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in L(D)$, und es gilt:

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g). \tag{3.2.15}$$

v) Ist $f \in L(D)$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $\varphi(0) = 0$, so ist $\varphi \circ f \in L(D)$. Speziell sind auch $|f|$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \min\{f, 0\} \in L(D)$. Hieraus folgt insbesondere, dass eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann in $L(D)$ ist, wenn $f^+, f^- \in L(D)$ sind, und es gilt dann

$$\int_D f(x)\,dx = \int_D f^+(x)\,dx + \int_D f^-(x)\,dx. \tag{3.2.16}$$

vi) Sei $Z = \{B_k\} \in \mathcal{Z}(D)$ eine (disjunkte) Zerlegung und $f : D \to \overline{R}_+ \cup \{0\}$ eine beliebige Funktion. Ist $f \in L(D)$, so ist auch $f \in L(B_k)$, $k \in \mathbb{N}$, und umgekehrt, und in diesem Falle gilt

$$\int_D f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f(x)\,dx. \tag{3.2.17}$$

Beweis: i) Der Beweis verläuft analog wie beim entsprechenden Integrabilitätskriterium für das R-Integral, wobei anstelle der Linearität *endlicher Sumen* die von *absolut konvergenten Reihen* verwendet wird.

ii) Die Menge $N := \{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ ist eine L-Nullmenge. Für eine Zerlegung $Z = \{A_i\} \succ \{N, D \setminus N\}$ ist entweder $A_i \subset N$ oder $A_i \subset D \setminus N$. Im ersten Fall ist $\mu^*(A_i) = 0$, und der entsprechende Summand tritt in den zugehörigen Lebesgueschen Summen $LS_Z(f, \xi)$ und $LS_Z(g, \xi)$ nicht auf. Im zweiten Fall ist $f(\xi_i) = g(\xi_i)$. Also ist $LS_Z(f, \xi) = LS_Z(g, \xi)$. Dies impliziert

$$J(f) = \lim_{|Z| \to 0} LS_Z(f, \xi) = \lim_{|Z| \to 0} LS_Z(f, \xi) = J(g).$$

iii) Die Monotonie des L-Integrals ergibt sich wieder analog wie die des R-Integrals.

iv) Es sei $N := \{x \in D : |f(x)| = \infty \text{ oder } |g(x)| = \infty\}$. Ähnlich wie in (ii) folgt für jede Zerlegung $Z = \{A_i\} \succ \{N, D \setminus N\}$ für die zugehörigen L-Summen:

$$LS_Z(\alpha f + \beta g, \xi) = \alpha LS_Z(f, \xi) + \beta LS_Z(g, \xi).$$

Die Behauptung folgt nun wieder aus der Konvergenz dieser L-Summen für $|Z| \to 0$ gegen die entsprechenden L-Integrale.

v) Nach (ii) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $|f(x)| < \infty$ auf D ist. Aus $\varphi(0) = 0$ und

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \gamma |s - t|$$

folgt zunächst $|\varphi(s)| \leq \gamma |s|$, und damit für die Zerlegung Z^* aus Bedingung (Z):

$$\overline{S}_{Z^*}(|\varphi \circ f|) \leq \gamma \overline{S}_{Z^*}(|f|) < \infty.$$

Nach (i) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z_\varepsilon \in \mathcal{Z}(D)$ mit $\overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) < \varepsilon$. Wegen

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| \le \gamma |f(x) - f(y)| \le \gamma\big(\sup_{x\in A_i} f(x) - \inf_{x\in A_i} f(x)\big), \quad x, y \in A_i,$$

gilt

$$\sup_{x\in A_i}(\varphi \circ f)(x) - \inf_{x\in A_i}(\varphi \circ f)(x) \le \gamma\big(\sup_{x\in A_i} f(x) - \inf_{x\in A_i} f(x)\big)$$

und folglich $\overline{S}_{Z_\varepsilon}(\varphi \circ f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(\varphi \circ f) < \gamma\varepsilon$. Also ist $\varphi \circ f \in L(D)$, wieder nach (i). Die Aussagen für die speziellen Fälle erhalten wir mit $\varphi(s) = |s|, s^+, s^-$.

vi) Aus Zerlegungen $Z_k = \{B_i^k\} \in \mathcal{Z}(B_k)$, $k \in \mathbb{N}$, lässt sich eine Zerlegung $Z = \{B_i^k\}_{ik} \in \mathcal{Z}(D)$ zusammensetzen, und umgekehrt induziert jede Zerlegung $Z = \{A_i\} \in \mathcal{Z}(D)$, welche Verfeinerung von $\{B_k\}$ ist, Zerlegungen $Z^k = \{A_i \cap B_k\} \in \mathcal{Z}(B_k)$. Aufgrund des Doppelreihensatzes (3.1.2) gilt dann in beiden Fällen:

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{S}_{Z_k}(f), \qquad \overline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{S}_{Z_k}(f).$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\underline{S}_Z(f) \le \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\int}_{B_k} f(x)\,dx, \qquad \underline{\int}_D f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\int}_{B_k} f(x)\,dx,$$

da Z beliebig ist. Umgekehrt erhält man aus obiger Beziehung für beliebiges $m \in \mathbb{N}$:

$$\underline{\int}_D f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{m} \underline{S}_{Z_k}(f).$$

Da hier die Zerlegungen Z_k beliebig sind, folgt

$$\underline{\int}_D f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{m} \underline{\int}_{B_k} f(x)\,dx.$$

Dies impliziert zusammen mit dem eben Bewiesenen

$$\underline{\int}_D f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\int}_{B_k} f(x)\,dx \ge \underline{\int}_D f(x)\,dx.$$

Auf analoge Weise gewinnt man die entsprechende Aussage auch für die Oberintegrale, woraus dann die Behauptung folgt. Q.E.D.

Satz 3.3: *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f auf D auch Lebesgue-integrierbar, und die entsprechenden Integrale haben denselben Wert.*

Beweis: Bei der hier verwendeten Definition von R-Integral und L-Integral ist die Aussage des Satzes eine Trivialität. Für jede endliche Zerlegung Z von D in quadrierbare Mengen ist das untere R-Integral kleiner oder gleich dem unteren L-Integral und das obere R-Integral größer oder gleich dem oberen L-Integral. Die Gleichheit von unterem und oberem R-Integral impliziert also auch die Gleichheit von unterem und oberem L-Integral. Q.E.D.

Bemerkung 3.3: Das Lebesgue-Integral ist eine echte Erweiterung des (eigentlichen) Riemann-Integrals und für nicht-negative Funktionen in einer Dimension auch des *uneigentlichen* Riemann-Integrals. Die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist nicht Riemann-integrierbar (Übungsaufgabe), aber wegen $f = 0$ f. ü. Lebesgue-integrierbar mit dem Integralwert

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Bemerkung 3.4: Beim Lebesgue-Integral wird nicht zwischen *eigentlich* und *uneigentlich* integerierbar unterschieden. Dies wird dadurch erreicht, dass von vornherein unbeschränkte Integrationsbereiche sowie unbeschränkte Integranden zugelassen sind. Die notwendige Beschränkung auf sinnvolle Situationen wird durch die Bedingung (Z) erreicht. Diese führt zu einigen Besonderheiten des Lebesgue-Integrals:

i) Mit $f \in L(D)$ ist notwendig auch $|f| \in L(D)$. Das ist beim uneigentlichen Riemann-Integral in einer Dimension anders. Die Funktion $f(x) = \sin(x)/x$ ist auf dem Intervall $[0, \infty)$, wie wir schon gesehen haben, *uneigentlich* Riemann-integrierbar, ihr Absolutbetrag $|f|$ ist es aber nicht (Übungsaufgabe).

ii) Beim Lebesgue-Integral folgt aus $f \in L(D)$ i. Allg. nicht, dass auch $f^2 \in L(D)$. Ein Beispiel bietet die über dem Intervall $(0,1]$ uneigentlich Riemann-integrierbare (und Lebesgue-integrierbare) Funktion $f(x) = 1/\sqrt{x}$, deren Quadrat $f^2(x) = 1/x$, wie wir wissen, nicht integrierbar ist.

Das Lebesgue-Integral lässt sich analog zum Riemann-Integral auch für vektorwertige Funktionen $f = (f_1, \dots, f_d) : D \to \overline{\mathbb{R}}^d$ definieren. Eine solche Funktion ist L-integrierbar, wenn es ihre Komponenten sind, und als Integral wird der Vektor $J(f) := (J(f_1), \dots, J(f_d))$ bezeichnet.

Satz 3.4 (Dreiecksungleichung): *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und die Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}^d$ Lebesgue-integrierbar, so ist für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^d$ auch die Funktion $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\Big\| \int_D f(x)\, dx \Big\| \le \int_D \|f(x)\|\, dx. \tag{3.2.18}$$

Beweis: Es sei $f = (f_1, \dots, f_d)$. Sind die Komponenten $f_i(\cdot)$ integrierbar, so sind es auch die Betragsfunktionen $|f_i(\cdot)|$ und somit auch $\|f(\cdot)\|_\infty$. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^d$ ist dann auch die Funktion $\|f(\cdot)\|$ L-integrierbar. Für jede Zerlegung $Z \succ Z^* \in \mathcal{Z}_f^*(D)$ ist wegen der Dreicksungleichung:

$$\|LS_Z(f,\xi)\| = \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\,\mu(B_i) \Big\| \le \sum_{i=1}^{\infty} \|f(\xi_i)\|\,\mu(B_i) = LS_Z(\|f\|,\xi).$$

Durch Grenzübergang $|Z| \to 0$ folgt damit die behauptete Ungleichung. Q.E.D.

3.2.2 Integrabilitätskriterien

Die folgende Untersuchung des Lebesgue-Integrals und seiner Eigenschaften erfordert möglichst einfache Kriterien für die Lebesgue-Integrierbarkeit. Dazu dient das Konzept der „Messbarkeit“ von Funktionen.

Definition 3.7 (messbare Funktion): *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Eine Funktion $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt „Lebesgue-messbar (oder kurz „messbar“), wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Mengen Lebesgue-messbar sind:*

$$N_\alpha^>(f) := \{x \in D:\ f(x) > \alpha\}.$$

Aufgrund der Eigenschaften messbarer Mengen kann dies äquivalent auch mit $\ge$, $<$ und $\le$ definiert werden.

Lemma 3.9: *Sind die Funktionen $f_k: D \to \mathbb{R}$ messbar, so sind auch die folgenden Funktionen messbar:*

$$f_{\inf}(x) := \inf_k f_k(x), \qquad f_{\sup}(x) := \sup_k f_k(x),$$
$$f_{\liminf}(x) := \liminf_k f_k(x), \qquad f_{\limsup}(x) := \limsup_k f_k(x).$$

Beweis: Aufgrund der Beziehungen

$$\{x \in D:\ f_{\inf}(x) > \alpha\} = \cap_k \{x \in D:\ f_k(x) > \alpha\}$$
$$\{x \in D:\ f_{\sup}(x) > \alpha\} = \cup_k \{x \in D:\ f_k(x) > \alpha\}$$

und der σ-Algebra-Eigenschaft von $\mathcal{L}_\mu$ folgt die Messbarkeit von $f_{\inf}$ und $f_{\sup}$. Mit

$$f_{\liminf}(x) = \sup_k \inf_{i \ge k} f_i(x), \qquad f_{\limsup}(x) = \inf_k \sup_{i \ge k} f_i(x)$$

ergibt sich weiter auch die Messbarkeit von $f_{\liminf}$ und $f_{\limsup}$. Q.E.D.

Lemma 3.10: *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und die Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, so ist f messbar.*

Beweis: Da f L-integrierbar ist, gibt es aufgrund der Bedingung (Z) eine Zerlegung $Z^* = \{B_i^*\}$ von D mit $\overline{S}_{Z^*}(|f|) < \infty$. Seien $Z_k = \{B_i^k\}_i$ Zerlegungen mit $Z^* \prec Z_1 \prec Z_2 \prec \dots$ und $\overline{S}_{Z_k}(f) - \underline{S}_{Z_k}(f) < 1/k$. Es ist dann

$$\lim_{k\to\infty} \underline{S}_{Z_k}(f) = J(f) = \lim_{k\to\infty} \overline{S}_{Z_k}(f).$$

Den Zerlegungen Z_k ordnen wir die folgenden beiden Treppenfunktionen zu (χ_B die charakteristische Funktion der Menge B):

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \inf\nolimits_{B_i^k} f\ \chi_{B_i^k}(x), \qquad G_k(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \sup\nolimits_{B_i^k} f\ \chi_{B_i^k}(x).$$

Für diese sind $N_\alpha^>(g_k)$ und $N_\alpha^>(G_k)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ L-messbar, d. h.: g_k und G_k sind messbar. Ferner gilt:

$$\underline{S}_{Z_k}(f) = \underline{S}_{Z_k}(g_k), \qquad \overline{S}_{Z_k}(f) = \overline{S}_{Z_k}(G_k).$$

Die Treppenfunktionen g_k und G_k bilden monoton wachsende bzw. fallende Folgen. Ihre punktweisen Grenzwerte $g := \lim_{k\to\infty} g_k$ und $G := \lim_{k\to\infty} G_k$ sind nach Lemma 3.9 ebenfalls messbar. Es ist $g \le f \le G$ und

$$\underline{S}_{Z_k}(f) = \underline{S}_{Z_k}(g_k) \le \underline{S}_{Z_k}(g) \le \overline{S_{Z_k}}(g) = \underline{S_{Z_k}}(G) \le \overline{S}_{Z_k}(G) \le \overline{S}_{Z_k}(G_k) = \overline{S}_{Z_k}(f).$$

Dies impliziert, dass $g, G \in L(D)$ mit $J(f) = J(g) = J(G)$. Aus $0 \le G - g \in L(D)$ und $J(G-g) = 0$ folgt $G - g = 0$ f.ü. in D (Übungsaufgabe). Also ist $f = g$ f. ü. in D und folglich ebenfalls messbar. Q.E.D.

Lemma 3.11: *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ messbar und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig, so ist die Komposition $\varphi \circ f$ ebenfalls messbar. Damit sind für messbare Funktionen $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ auch die folgenden Funktionen messbar (Sofern sie als Funktionen von D nach $\overline{\mathbb{R}}$ wohl definiert sind.).*

$$f^+,\ \ f^-,\ |f|^p\ (p>0),\ \ \alpha f\ (\alpha \in \mathbb{R}),\ \ 1/f\ (\textit{für } f \ne 0),\ \ f+g,\ \ fg.$$

Beweis: i) Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die Mengen

$$B_k^\varepsilon := \{x \in D : \varepsilon k < f(x) \le \varepsilon(k+1)\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und bilden die messbaren Treppenfunktion

$$t_\varepsilon(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k^\varepsilon\, \chi_{B_k^\varepsilon}(x), \quad m_k^\varepsilon := \inf\nolimits_{x \in B_k^\varepsilon} f(x).$$

Für diese gilt $t_\varepsilon \le f \le t_\varepsilon + \varepsilon$ und folglich $t_\varepsilon(x) \to f(x)$ $(\varepsilon \to 0)$. Nun ist

$$\{x \in D : (\varphi \circ t_\varepsilon)(x) > \alpha\} = \cup\{B_k^\varepsilon : \varphi(m_k^\varepsilon) > \alpha\},$$

woraus die Messbarkeit von $\varphi \circ t_\varepsilon$ folgt. Wegen der Stetigkeit von φ konvergiert auch $(\varphi \circ t_\varepsilon)(x) \to (\varphi \circ f)(x)$ $(\varepsilon \to 0)$. Nach Lemma 3.9 ist also auch $\varphi \circ f$ messbar.

ii) Die Mengen $D' := \{x \in D : |f(x)| < \infty\}$ und $\Sigma_{\pm\infty} := \{x \in D : f(x) = \pm\infty\}$ sind messbar. Die Messbarkeit der anderen Funktionen ergibt sich dann aus Teil (i) (angewendet für $f : D' \to \mathbb{R}$) mit den entsprechenden stetigen Funktionen $\varphi(\cdot)$. Dieses Argument ist aber nicht auf den Fall $1/f$ anwendbar, wenn f nicht von Null wegbeschränkt ist. In diesem Fall ist eine subtilere Argumentation unter Verwendung von Lemma 3.9 erforderlich. Diese wird als Übungsaufgabe gestellt. Q.E.D.

Satz 3.5: *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Eine messbare Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft (Z), für die $\underline{J}(f) < \infty$ gilt, ist Lebesgue-integrierbar. Insbesondere ist eine messbare Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar, wenn sie eine Lebesgue-integrierbare Majorante $g \in L(D)$, besitzt, d. h.: $|f| \le g$.*

Beweis: i) Zunächst wird $\mu(D) < \infty$ angenommen. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und

$$B_k^\varepsilon := \{x \in D : \varepsilon k \le f(x) < \varepsilon(k+1)\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad B_\infty := \{x \in D : |f(x)| = \infty\}.$$

Die Mengen B_k^ε sind messbar, und die Menge B_∞ ist wegen Bedingung (Z) L-Nullmenge. Die Mengen B_k^ε und B_∞ bilden eine (disjunkte) Zerlegung Z_ε der Menge D, und es gilt

$$\varepsilon k \le \inf_{x \in B_k^\varepsilon} f(x) \le \sup_{x \in B_k^\varepsilon} f(x) \le \varepsilon(k+1).$$

Wegen der σ-Additivität des L-Maßes folgt

$$\overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in B_k^\varepsilon} f(x)\, \mu(B_k^\varepsilon) \le \sum_{k \in \mathbb{Z}} \big(\inf_{x \in B_k^\varepsilon} f(x) + \varepsilon\big)\, \mu(B_k^\varepsilon) \le \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) + \varepsilon\, \mu(D).$$

Wegen der Voraussetzung $\sup_Z \underline{S}_Z(f) = \underline{J}(f) < \infty$ ist f nach dem Integrabilitätskriterium aus Lemma 3.8(i) also L-integrierbar.

ii) Im Fall $\mu(D) = \infty$ sei $\{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$ eine Zerlegung in L-messbare Mengen $B_i \subset D$ mit $\mu(B_i) < \infty$. Die auf D messbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist auch auf jeder Teilmenge B_i messbar, und das zugehörige Unterintegral ist kleiner ∞. Anwendung von Teil (i) auf die einzelnen B_i ergibt $f|_{B_i} \in L(B_i)$. Die Behauptung folgt dann mit Hilfe der Aussage von Lemma 3.8(vi). Q.E.D.

3.2.3 Konvergenzsätze

Im Folgenden untersuchen wir die Vertauschbarkeit des Lebesgue-Integrals mit Konvergenzprozessen. Wir beginnen mit einem fundamentalen Satz von Beppo Levi[1]

[1] Beppo Levi (1875–1961): Italienischer Mathematiker; Professor in Cagliari und später in Rosario (Argentinien); Beiträge zur Geometrie, Logik und Analysis, u.a. zur Begründung des Dirichletschen Prinzips.

Satz 3.6 (Satz von Beppo Levi: montone Konvergenz): *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht negativer Funktionen $f_k \in L(D)$ mit*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_D f_k(x)\,dx < \infty. \tag{3.2.19}$$

Dann konvergieren die f_k f.ü. in D gegen eine Lebesgue-integrierbare Grenzfunktion $f \in L(D)$, und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\,dx = \int_D \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx. \tag{3.2.20}$$

Beweis: a) Aus der Monotonie der Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in D$ folgt die Existenz der Limiten $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$, wodurch eine messbare Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f \geq 0$ definiert ist. Nach Voraussetzung ist, wegen der Monotonie des L-Integrals,

$$\beta := \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_D f_k\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_D f_k\,dx < \infty.$$

b) Wir stellen folgendes Hilfsresultat bereit: Sei $A \subset D$ messbar und $f(x) \geq m \geq 0$ für $x \in A$. Dann gilt:

$$m\mu(A) \leq \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dx := \beta(A). \tag{3.2.21}$$

Für $m = 0$ ist dies trivial. Sei also $m > 0$. Für $0 < \alpha < m$ setzen wir

$$Q_k^\alpha := \{x \in D : f_k(x) > \alpha\} \cap A.$$

Die Mengen Q_k^α sind wegen $f_k \in L(D)$ messbar, und es gilt:

$$\alpha\mu(Q_k^\alpha) \leq \int_{Q_k^\alpha} f_k\,dx \leq \int_A f_k\,dx \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_A f_k\,dx = \beta(A).$$

Die Mengenfolge $(Q_k^\alpha)_{k\in\mathrm{n}}$ ist monoton zunehmend mit $\cup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^\alpha = A$. Für $k \to \infty$ folgt daher mit Hilfe von Satz 3.1 $\alpha\mu(A) \leq \beta(A)$, und somit (3.2.21) für $\alpha \to m$.

c) Sei nun $Z = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$ eine (disjunkte) Zerlegung und $\underline{S}_Z(f) = \sum_i m_i\mu(B_i)$ die zugehörige Untersumme mit $m_i := \inf_{x\in B_i} f(x)$. Durch Anwendung von (3.2.21) auf B_i ergibt sich mit $D_j := \cup_{i=1}^j B_i$:

$$\sum_{i=1}^j m_i\mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^j \lim_{k\to\infty} \int_{B_i} f_k\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^j \int_{B_i} f_k\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{D_j} f_k\,dx \leq \beta.$$

Für $j \to \infty$ folgt hieraus $\underline{S}_Z(f) \leq \beta$ und damit, da die Zerlegung Z beliebig gewählt ist, $\underline{J}(f) = \sup_{Z\in\mathcal{Z}(D)} \underline{S}_Z(f) \leq \beta$. Nach Satz 3.5 ist dann f L-integrierbar, und es gilt wegen $f_k \leq f$:

$$\beta = \lim_{k\to\infty} \int_D f_k\,dx \leq \int_D f\,dx = \underline{\int}_D f\,dx \leq \beta.$$

Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Der Satz von Beppo Levi hat einige wichtige Folgerungen. Als erstes ergibt sich die folgende Aussage über die Vertauschbarkeit von Integration und Summation.

Korollar 3.2: *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_k : D \to \overline{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_D \sum_{k=1}^n f_k(x)\,dx < \infty\,.$$

Dann stellt die Reihe $s(x) := \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ eine Funktion aus $L(D)$ dar, und es gilt:

$$\int_D s(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_D f_k(x)\,dx. \tag{3.2.22}$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Satz von Beppo Levi. Q.E.D.

Weiter haben wir die folgende Variante des Satz von Beppo Levi für allgemeine Funktionen ohne Vorzeichenbedingung.

Korollar 3.3: *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge von Funktionen $f_k \in L(D)$ mit*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \Big| \int_D f_k(x)\,dx \Big| < \infty. \tag{3.2.23}$$

Dann ist $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\,dx = \int_D \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx. \tag{3.2.24}$$

Beweis: Sei o.B.d.A. die Folge $(f_k)_k$ monoton wachsend; andernfalls wird die Folge $(-f_k)_k$ betrachtet. Die Singularitätenmenge $U_1 := \{x \in D : f_1(x) = \pm\infty\}$ ist L-Nullmenge. Durch die Setzung

$$g_k(x) := f_k(x) - f_1(x), \;\; x \in D \setminus U_1, \quad g_k(x) := 0, \;\; x \in U_1,$$

erhalten wir eine monoton wachsende Folge $(g_k)_k$ nicht-negativer, L-integrierbarer Funktionen. Die zugehörige Folge von L-Integralen $J(g_k) = J(f_k) - J(f_1)$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi ist also $g := \lim_{k\to\infty} g_k$ L-integrierbar, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_D g_k(x)\,dx = \int_D g(x)\,dx.$$

Hieraus folgt die L-Integrabilität von $f = g + f_1$ und die Beziehung

$$\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx,$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Das folgende sog. Lemma von Fatou[2] ist eine etwas tiefer gehende Folgerung des Satz von Beppo Levi.

[2]Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929): Französischer Mathematiker und Astronom; wirkte an der Pariser Sternwarte; wichtige Beiträge zur Analysis, insbesondere zur Integrations- und komplexen Funktionentheorie sowie zur Theorie des Mehrkörperproblems der Planetenbahnen.

Korollar 3.4 (Lemma von Fatou): *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *messbar und* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge nicht negativer Funktionen* $f_k \in L(D)$ *mit der Eigenschaft*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_D f_k(x)\,dx < \infty\,.$$

Dann gilt:

$$\int_D \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\,dx. \tag{3.2.25}$$

Ist zusätzlich $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \le g$ *mit einem* $g \in L(D)$*, so gilt*

$$\int_D \limsup_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \ge \limsup_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\,dx. \tag{3.2.26}$$

Beweis: Da dieses Lemma im Folgenden nicht verwendet wird, verzichten wir auf die Angabe seines Beweises und verweisen hierfür auf die einschlägige Literatur. Q.E.D.

Der wichtigste Konvergenzsatz für das Lebesgue-Integral ist der folgende Satz über die majorisierte Konvergenz nach Lebesgue.

Satz 3.7 (Satz von Lebesgue zur majorisierten Konvergenz): *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *messbar und* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Funktionen* $f_k \in L(D)$*, die f. ü. gegen eine Funktion* f *auf* D *konvergieren. Die Folge* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *besitze eine Lebesgue-integrierbare Majorante, d. h. eine Funktion* g *auf* D *mit* $|f_k| \le g$*, f. ü. auf* D*. Dann ist auch der Limes* $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ *Lebesgue-integrierbar auf* D*, und es gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x) = \int_D \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx. \tag{3.2.27}$$

Beweis: Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, dass die Funktionen f_k und g überall in D endlich sind, und dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ überall gegen f konvergiert. Andernfalls werden die betreffenden Funktionswerte in Null umgeändert, was die Werte der auftretenden L-Integrale nicht ändert. Der Limes f ist messbar, durch $g \in L(D)$ beschränkt und daher nach Satz 3.5 L-integrierbar. Die nicht-negativen Funktionen

$$h_m(x) := \sup\{|f_k(x) - f(x)| :\ k \ge m\}$$

sind dann wegen $|h_m(x)| \le 2g(x)$ ebenfalls L-integrierbar, und streben monoton fallend gegen Null. Nach dem Korollar 3.3 zum Satz von Beppo Levi folgt

$$|J(f_k) - J(f)| = |J(f_k - f)| \le J(|f_k - f|) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

was den Beweis vervollständigt. Q.E.D.

3.2.4 Satz von Fubini und Transformationsregeln

Die wichtigsten Sätze zur praktischen Berechnung von Integralen sind der Satz von Fubini und der Transformationssatz (Substitutionsregel). Im Folgenden formulieren wir diese Sätze in ihrer Version für das Lebesgue-Integral. Auf die Ausarbeitung der Beweise wird aber verzichtet, da in Anwendungen meist nur ihre Versionen für das Riemann-Integral benötigt werden.

Satz 3.8 (Satz von Fubini): *Seien $I_x \subset \mathbb{R}^n$ und $I_y \subset \mathbb{R}^m$ (möglicherweise unbeschränkte) Intervalle mit dem kartesischen Produkt $I = I_x \times I_y \in \mathbb{R}^{n+m}$ und $f \in L(I)$. Dann gilt:*

i) Für fast alle $x \in I_x$ ist die Funktion $f(x,\cdot) : I_y \to \mathbb{R}$ auf I_y Lebesgue-integrierbar.

ii) Die Funktion $\int_{I_y} f(\cdot,y)\,dy : I_x \to \mathbb{R}$ ist Lebsgue-integrierbar auf I_x.

iii) Es gilt:

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_{I_x}\left(\int_{I_y} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{I_y}\left(\int_{I_x} f(x,y)\,dx\right)dy. \tag{3.2.28}$$

Beweis: Der Beweis wird ausgelassen. Q.E.D.

Bemerkung 3.5: Die Lebesguesche Version des Satzes von Fubini unterscheidet sich von der Riemannschen im wesentlichen in den folgenden Punkten:

1. Integrationsintervall sowie Integrand dürfen beim L-Integral unbeschränkt sein.
2. Die Funktion $f(x,\cdot) : I_y \to \mathbb{R}$ ist i. Allg. nicht R-integrierbar; es existieren aber ihre Unter- und Oberintegrale.
3. Für das R-Integral gilt

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_{I_x}\left(\overline{\int}_{I_y} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{I_y}\left(\underline{\int}_{I_x} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Der folgende Satz von Tonelli[3] beinhaltet in gewissem Sinne die Umkehrung der Aussage des Satzes von Fubini.

Satz 3.9 (Satz von Tonelli): *Seien $I_x \subset \mathbb{R}^n$ und $I_y \subset \mathbb{R}^m$ Intervalle mit dem kartesischen Produkt $I = I_x \times I_y \in \mathbb{R}^{n+m}$ und f messbar auf I. Existiert mindestens eines der beiden iterierten Integrale*

$$\int_{I_y}\left(\int_{I_x} |f(x,y)|\,dx\right)dy, \qquad \int_{I_x}\left(\int_{I_y} |f(x,y)|\,dy\right)dx,$$

so ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt die Aussage des Satzes von Fubini.

[3]Leonida Tonelli (1885–1946): Italienische Mathematiker; Prof. in Cagliari, Parma, Bologna und Pisa; Beiträge zur Analysis, zur Integrationstheorie und Varationsrechnung.

Beweis: Der Beweis wird ausgelassen. Q.E.D.

Als nächstes diskutieren wir die Substitutionsregel für das Lebesgue-Integral. Beim Riemann-Integral erfordert die Formulierung der Voraussetzungen der Substitutionsregel einige Subtilität. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ der messbare (bzw. quadrierbare) Integrationsbereich.

– Die starke, aber beweistechnisch bequemste Bedingung verlangt, dass die Transformation Φ auf einer offenen Umgebung $O \supset \overline{D}$ von $\overline{D}$ injektiv und regulär, d. h. stetig differenzierbar mit $\det \Phi' \neq 0$, ist. Damit werden aber die Transformation auf Polar- und Kugelkoordinaten nicht erfasst.

– Die praktisch leichter anwendbare Bedingung verlangt, dass die Transformation Φ auf der offenen Menge D injektiv, regulär und *Lipschitz-stetig* ist.

Im Falle des Lebesgue-Integrals ergeben sich die Voraussetzungen der Substitutionsregel dagegen auf ganz natürliche Weise.

Satz 3.10 (Substitutionsregel): *Sei die Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ eine injektive und stetig differenzierbare Abbildung mit $\det \Phi' \neq 0$ in D. Dann ist auch die Bildmenge $\Phi(D)$ offen und damit L-messbar. Ist $f : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ L-integrierbar, so ist auch die Funktion $(f \circ \Phi)|\det \Phi'| : D \to \mathbb{R}$ L-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\Phi(D)} f(y)\, dy = \int_D f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\, dx. \tag{3.2.29}$$

Beweis: Der Beweis wird ausgelassen. Q.E.D.

Zum Schluss betrachten wir noch parameterabhängige Lebesgue-Integrale.

Satz 3.11 (Parameterintegral): *Sei $B \subset \mathbb{R}^m$ messbar und $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ferner sei die Funktion $f : A \times B \to \mathbb{R}$ für jedes feste $x \in A$ L-integrierbar auf B und für fast alle $y \in B$ auf A nach x stetig differenzierbar. Weiter gebe es eine auf B L-integrierbare Funktion $g : B \to \mathbb{R}$ mit $\|\nabla_x f(x, y)\| \leq g(y)$ für alle $x \in A$ und für fast alle $y \in B$. Dann gilt:*

i) $\nabla_x f(x, y)$ ist für jedes feste $x \in A$ L-integrierbar auf B.

ii) Das Parameterintegral $F(x) = \int_B f(x, y)\, dy$ ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\nabla F(x) = \int_B \nabla_x f(x, y)\, dy. \tag{3.2.30}$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für höhere Ableitungen.

Beweis: Der Beweis wird ausgelassen. Q.E.D.

3.2.5 Lebesgue-integrierbare Funktionen in $\mathbb{R}^1$

Wir wollen noch zwei fundamentale Aspekte der Lebesgueschen Integrationstheorie behandeln: den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und die Charakterisierung der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Definition 3.8 (absolut-stetig): *Auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ „absolut-stetig", wenn zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für jede endliche Menge $\{I_k = (a_k, b_k),\, k = 1, \dots, m\}$ von offenen, disjunkten Intervallen $I_k \subset I$ gilt:*

$$\sum_{k=1}^{m} |I_k| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{3.2.31}$$

Lemma 3.12: *Es gelten die folgenden Aussagen:*

i) Absolut-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig.

ii) Lipschitz-stetige Funktionen sind absolut-stetig.

iii) Die Komposition $\varphi \circ f$ einer absolut-stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und einer auf $f(I)$ Lipschitz-stetigen Funktion φ ist wieder absolut-stetig.

iv) Eine absolut-stetige Funktion f ist von beschränkter Variation und folglich darstellbar als Differenz $f = g - h$ zweier monotoner Funktionen g, h.

Beweis: Der Beweis wird ausgelassen. Q.E.D.

Satz 3.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): *Für beliebige Funktionen $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:*

i) Ist f absolut-stetig, so ist es fast f. ü. in I differenzierbar, f' ist Lebesgue-integrierbar, und es ist:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx. \tag{3.2.32}$$

ii) Ist f Lebesgue-integrierbar, so ist die Funktion $F(t) := \int_a^t f(s)\, ds$ absolut-stetig mit $f = F'$ f. ü. in I, d. h.: Es ist:

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds \quad \Rightarrow \quad F'(t) = f(t). \tag{3.2.33}$$

Beweis: Der Beweis wird ausgelassen. Q.E.D.

3.3 Übungen

Übung 3.1: Man zeige, dass jede Hyperebene $H(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a + b \cdot x = 0\}$ mit $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Lebesgue-Nullmenge (bzgl. $\mathbb{R}^n$) ist. (Hinweis: Man beachte die Argumentation im Beweis der entsprechenden Aussage für abzählbare Mengen.)

Übung 3.2: Sei X eine beliebige unendliche Menge und

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : \ A \text{ oder } X \setminus A \text{ sind endlich.}\}.$$

Man zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Mengen-Algebra, aber keine σ-Algebra ist.

Übung 3.3: a) Man zeige die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

i) Durch $x \sim y \ :\Leftrightarrow \ x - y \in \mathbb{Q}^n$ wird eine Äquivalenzrelation im $\mathbb{R}^n$ erklärt.

ii) Der Einheitswürfel $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ enthält aus jeder der Äquivalenzklassen von $\sim$ abzählbar unendlich viele Elemente.

b) Sei $A \subset [0,1]^n$ eine Menge, die aus jeder der Äquivalenzklassen von $\sim$ genau ein Element enthält (Die Annahme der Existenz einer solchen Menge folgt aus einem eigenständigen mengentheoretischen Axiom, dem sog. „Auswahlaxiom“, dessen Verwendung unter Mathematikern umstritten ist.). Man zeige die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

iii) Für $r, s \in \mathbb{Q}^n$ mit $r \neq s$ gilt: $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$.

iv) Für die Menge $S := \cup\{r + A : \ r \in \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n\}$ gilt: $[0,1]^n \subset S \subset [-1,2]^n$.

v) Die Menge A ist nicht Lebesgue-messbar. (Hinweis: Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant.)

Übung 3.4: Man begründe die folgenden Aussagen aus dem Text:

i) Die Menge $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar aber nicht Jordan-quadrierbar.

ii) Die durch $f(x) := 1$ für $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $f(x) := 0$ für $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\}$ definierte beschränkte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist nicht Riemann-integrierbar.

iii) Die Ordinatenmenge der auf dem Intervall $(0,1]$ definierten unbeschränkten Funktion $f(x) := x^{-1/2}$ ist Lebesgue-messbar. Wie groß ist ihr Maß?

Übung 3.5: Man bestimme das äußere Maß der folgenden Mengen und entscheide ob diese Lebesgue-messbar sind:

i) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, \ -e^{-x} \leq y \leq e^{-x}\}$

ii) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}$

iii) $A := [0,1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

Übung 3.6: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Lebesgue-messbare Menge mit $\mu(D) > 0$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Man zeige, dass die folgende Implikation gilt:

$$f(x) > 0 \ \text{ f. ü. auf } D \quad \Rightarrow \quad \int_D f(x)\,dx > 0,$$

und dass dies die folgende Äquivalenz impliziert:

$$f(x) = 0 \ \text{ f. ü. auf } D \quad \Leftrightarrow \quad \int_D |f(x)|\,dx = 0.$$

(Hinweis: Man betrachte die Mengen $B_k := \{x \in D : f(x) \geq 1/k\}$ und zeige, dass $\mu(B_k) > 0$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Die erste Behauptung folgt dann mit Hilfe der Monotonie des L-Integrals.)

Übung 3.7: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ L-messbar mit $\mu(D) > 0$, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ L-integrierbare Funktionen. Man beweise oder widerlege die folgende Aussage: *Stimmen f und g auf einer dichten Teilmenge von D überein, so sind ihre Integrale gleich.*

Übung 3.8: Man betrachte die folgenden Beispiele von Funktionenfolgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf den Definitionsbereichen $D \subset \mathbb{R}^n$:

i) Sei $D = [0, 1]$ und $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in D und $f_k : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(r_i) = 1 \ \text{ für } \ i = 1, \ldots, k, \quad \text{und} \quad f_k(x) = 0 \ \text{ sonst.}$$

ii) Sei $D = \mathbb{R}$ und $f_k : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) = 1/k \ \text{ für } \ -k \leq x \leq k, \quad \text{und} \quad f_k(x) = 0 \ \text{ sonst.}$$

iii) Sei $D = [0, 1]$ und $f_k : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) = k \ \text{ für } \ 0 \leq x \leq 1/k, \quad \text{und} \quad f_k(x) = 0 \ \text{ sonst.}$$

Welche Voraussetzungen der Sätze von Beppo Levi und Lebesgue und des Lemmas von Fatou werden in diesen Beispielen erfüllt und welche nicht. Man überprüfe anhand dieser Beispiele, ob die Konvergenzsätze auch für das Riemann-Integral gelten.

Übung 3.9: Man zeige, dass die durch

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}, \quad x > 0, \qquad f(0) := 1,$$

definierte Funktion auf dem Intervall $D = [0, \infty)$ zwar im Sinne der eindimensionalen Integrationstheorie (s. Band Analysis 1) *uneigentlich* Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar ist. Man diskutiere dieselbe Frage im Rahmen der mehrdimensionalen Integrationstheorie (s. Band Analysis 2)

Übung 3.10: Sind für eine auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ L-integrierbare Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ auch $|f|$, f^2, $\sin(f)$ und fg mit einem $g \in C(\overline{\Omega})$ L-integrierbar?

Übung 3.11: Sei $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die im Text konstruierte „Dirac-Folge“, $\delta_k(x) := k\delta_1(kx)$, $\delta_1(x) := (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$. Man zeige, dass damit für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$, die im Punkt $x = 0$ stetig ist, gilt $(f, \delta_k)_2 \to f(0) \quad (k \to \infty)$. Im Limes $k \to \infty$ hat diese Folge also die Wirkung der „Dirac-Distribution“, die einer stetigen Funktion den Wert in $x = 0$ zuordnet, was die Bezeichnung „Dirac-Folge“ erklärt.