2 Variationsaufgaben

2.1 Eindimensionale Variationsprobleme

In diesem Kapitel betrachten wir einfachste sog. „Variationsaufgaben“. Dabei handelt es sich um Optimierungsaufgaben, bei denen die zu optimierende Größe ein Integralausdruck und die zur „Variation“ stehende Variable eine Funktion ist. In einer Dimension lautet dies etwa wie folgt:

$$F(u) = \int_a^b f(t, u(t), u'(t))\, dt \;\to\; \min,$$

wobei zur Konkurrenz etwa alle stetig differenzierbaren Funktionen $u(\cdot)$ auf dem Intervall $[a, b]$ zugelassen sind. Variationsaufgaben dieser Art treten u. a. in der theoretischen Mechanik auf.

2.1.1 Euler-Lagrangesche Gleichungen

Wir betrachten die folgende Situation. Sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und

$$f(t, x, q) : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Wir bezeichnen wieder mit $C^2[a, b]$ den Vektorraum aller auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen und für beliebig gegebene $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit K die Teilmenge

$$K(\alpha, \beta) := \{v \in C^2[a, b] :\ v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}.$$

Für Funktionen $u \in K(\alpha, \beta)$ betrachten wir die durch

$$F(v) := \int_a^b f(t, v(t), v'(t))\, dt$$

definierte Abbildung $F(\cdot) : K(\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$. Eine „Variationsaufgabe“ besteht nun darin, ein $u \in K(\alpha, \beta)$ zu finden, so dass

$$F(u) = \inf\{F(v) :\ v \in K(\alpha, \beta)\}. \tag{2.1.1}$$

Satz 2.1 (Euler-Lagrangesche Differentialgleichung): *Besitzt $u \in K(\alpha, \beta)$ die Minimalitätseigenschaft (2.1.1), so gilt notwendig die sog. „Euler-Lagrangesche Differentialgleichung“*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}(t, u(t), u'(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad t \in [a, b]. \tag{2.1.2}$$

Beweis: Sei $u \in K(\alpha, \beta)$ eine Funktion, welche (2.1.1) erfüllt. Für eine beliebige Funktion $\varphi \in K(0,0)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$F(u) \le F(u + \varepsilon\varphi).$$

Die Funktion $\Phi(\varepsilon) := F(u+\varepsilon\varphi)$ besitzt also bei $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Mit dem Satz über die Ableitung von parameterabhängigen Integralen (s. Kapitel 4 im Band Analysis 2) folgt, dass $\Phi(\cdot)$ stetig differenzierbar ist. Es gilt also $d\Phi/d\varepsilon(0) = 0$. Wir berechnen diese Ableitung zu (Zur Vereinfachung wird das Argument t weggelassen.)

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon} f(t, u + \varepsilon\varphi, u' + \varepsilon\varphi'))\, dt = \int_a^b \Big\{ \frac{\partial f}{\partial x}(\dots)\varphi + \frac{\partial f}{\partial q}(\dots)\varphi' \Big\}\, dt.$$

Also folgt für beliebiges $\varphi \in K(0,0)$:

$$\int_a^b \Big\{ \frac{\partial f}{\partial x}(t,u,u')\varphi + \frac{\partial f}{\partial q}(t,u,u')\varphi' \Big\}\, dt = 0.$$

Partielle Integration und Beachtung von $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ergibt:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial q}(\dots)\varphi'\, dt = \frac{\partial f}{\partial q}(\dots)\varphi\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}(\dots)\varphi\, dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}(\dots)\varphi\, dt.$$

Wir finden also, dass für beliebiges $\varphi \in K(0,0)$ gilt:

$$\int_a^b \Big\{ \frac{\partial f}{\partial x}(t,u,u') - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}(t,u,u') \Big\} \varphi\, dt = 0.$$

Mit Hilfe des „Fundamentallemmas“ der Variationsrechnung (Lemma 2.1) ergibt sich damit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,u,u') - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q}(t,u,u') \equiv 0,$$

d. h. die behauptete Euler-Lagrangesche Differentialgleichung. Q.E.D.

Lemma 2.1 (Fundamentallemma in $\mathbb{R}^1$): *Auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ gelte für eine Funktion $g \in C[a,b]$*

$$\int_a^b g(t)\varphi(t)\, dt = 0 \tag{2.1.3}$$

für jede Funktion $\varphi \in K(0,0)$. Dann ist $g \equiv 0$.

Beweis: Wegen der Stetigkeit von g genügt es zu zeigen, dass $g(t) = 0$ für $t \in (a,b)$. Angenommen es existiert ein $t_0 \in (a,b)$, so dass $g(t_0) = \varepsilon > 0$. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a,b)$ und $g(t) \ge \varepsilon/2$ für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Wir definieren die Funktion $\varphi_\delta \in C^1[a,b]$ durch

$$\varphi_\delta(t) := \exp\Big(-\frac{(t-t_0)^2}{\delta^2 - (t-t_0)^2} \Big) > 0, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta),$$

$$\varphi_\delta(t) := 0, \quad t \notin (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Diese ist unendlich oft differenzierbar. Damit ergibt sich der Widerspruch

$$0 = \int_a^b g(t)\varphi_\delta(t)\,dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g(t)\varphi_\delta(t)\,dt \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi_\delta(t)\,dt > 0.$$

Also ist $g(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$. Q.E.D.

Beispiel 2.1: Durch die Parametrisierung $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine ebene Kurve

$$\Gamma := \{(t,\varphi(t)) : t \in [a,b]\}$$

gegeben. Ist $\varphi \in C^1[a,b]$, so erhält man die Länge dieser Kurve mit der Formel

$$|\Gamma| = F(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1+\varphi'(t)^2}\,dt.$$

Für gegebenen Werte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wollen wir eine Kurve mit Parametrisierung $\varphi \in C^2[a,b]$ durch die Punkte (a,α) und (b,β) mit minimaler Länge bestimmen; d. h.: Wir suchen ein $u \in K(\alpha,\beta)$ mit

$$F(u) = \inf\{F(\varphi) : \varphi \in K(\alpha,\beta)\}.$$

Zur Anwendung von Satz 2.1 setzen wir $f(t,x,q) := \sqrt{1+q^2}$; in diesem Fall hängt die Funktion f also weder von t noch von x ab. Daher ist

$$\partial_x f(t,x,q) = 0, \quad \partial_q f(t,x,q) = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Die Euler-Lagrangesche Gleichung, d. h. die notwendigen Optimalitätsbedingung, hat also die Form:

$$\frac{d}{dt}\frac{u'(t)}{\sqrt{1+u'(t)^2}} = 0,$$

d. h.:

$$\frac{u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{1/2}} - u'(t)\frac{u'(t)u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{3/2}} = \frac{u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{3/2}} = 0.$$

Dies bedeutet, dass $u''(t) = 0$. Eine Minimallösung in $K(\alpha,\beta)$ muss also ein Polynom 1-ten Grades sein, d. h. die Form $u(t) = c_1 t + c_0$ haben. Zur Bestimmung der Konstanten c_1, c_2 verwenden wir die Randbedingungen $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$. Es ergibt sich

$$u(t) = \frac{b-t}{b-a}\,a + \frac{t-a}{b-a}\,b\,.$$

Dies bedeutet, dass die Lösung dieses Problems, wenn sie überhaupt existiert, gerade die Verbindungsgerade der Punkte (a,α) und (b,β) ist. Dass dies wirklich die Minimierungsaufgabe löst, ist aufgrund einfacher geometrischer Überlegungen klar. I. Allg. ist es bei derartigen Variationsaufgaben aber schwierig zu zeigen, dass Minima wirklich in der gegebenen Funktionenklasse existieren. Wir werden später im Zusammenhang mit mehrdimensionalen Variationsaufgaben Situationen kennenlernen, in denen eine solche „Lösung“ nur in einer geeignet vergrößerten Menge von Vergleichsfunktionen existiert.

Bemerkung 2.1: Die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen stellen lediglich eine notwendige Bedingung dar, welche eine Lösung der Variationsaufgabe erfüllen muss. I. Allg. ist die Existenz von Lösungen aber nicht gesichert; siehe das Gegenbeispiel von Weierstraß in Abschnitt 2.2.

Satz 2.1 lässt sich direkt für vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei

$$f(t,x,p) : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Wir bezeichnen wieder mit $C^2[a,b]^d$ den Vektorraum aller auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbaren Vektorfunktionen und für beliebig gegebene $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$ mit K die Teilmenge

$$K(\alpha,\beta) := \{v \in C^2[a,b]^d : \, v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}.$$

Für Funktionen $u \in K(\alpha,\beta)$ betrachten wir die durch

$$F(v) := \int_a^b f(t, v(t), v'(t))\, dt$$

definierte Abbildung $F(\cdot) : K(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$. Ist nun $u \in K(\alpha,\beta)$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$F(u) = \inf\{F(v) : \, v \in K(\alpha,\beta)\},$$

so genügt diese notwendig dem folgenden System von Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i}(t,u(t),u'(t)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,u(t),u'(t)) = 0, \quad t \in [a,b], \quad i = 1,\dots,d. \tag{2.1.4}$$

2.1.2 Physikalische Anwendung

Wir wollen die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen zur Herleitung des Hamiltonschen[1] Prinzips der „kleinsten Wirkung" verwenden. Hier ist t die Zeitkoordinate, die Funktionen $u_1(t), \dots, u_d(t)$ beschreiben den Zustand eines physikalischen Systems, und $L(t, u(t), u'(t))$ ist die sog. „Lagrange-Funktion". Bei mechanischen Systemen, in denen Reibung keine Rolle spielt, ist L gleich der Differenz $T(t) - U(t)$ aus kinetischer Energie $T(t)$ und potentieller Energie $U(t)$. Der Ausdruck

$$W(u) := \int_a^b L(t, u(t), u'(t))\, dt$$

ist das sog. „Wirkungsintegral". Das sog. *Hamiltonsche Prinzip* besagt nun, dass für den tatsächlich ablaufenden Vorgang $W(u)$ minimal ist.

[1] Sir William Rowan Hamilton (1805–1865): Irischer Mathematiker und Astronom; Prof. in Dublin; fundamentale Arbeiten u. a. zur Vektorrechnung und Theoretischen Mechanik.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Massepunktes mit Masse m im $\mathbb{R}^3$ in einem stationären, d. h. nicht von der Zeit abhängigen, Potentialfeld $U(x)$. Die Bewegung des Massepunkts wird beschrieben durch eine Vektorfunktion $x(t) \in \mathbb{R}^3$; seine Geschwindigkeit ist $v(t) = x'(t)$. (In der Physik ist es seit Newton üblich, die Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt zu kennzeichen, d. h.: $v(t) = \dot{x}(t)$.) Die kinetische Energie des Massepunktes ist

$$T(t) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)^2.$$

Für die Lagrange-Funktion ergibt sich also

$$L(t, x(t), v(t)) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i'(t)^2 - U(x).$$

Wegen

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial v_i} = m v_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

lauten die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen in diesem Fall

$$\frac{d}{dt}(m x_i'(t)) + \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

bzw.

$$m x_i''(t) = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)), \quad i = 1, 2, 3.$$

In vektorieller Schreibweise lautet dies (Newtonsches Gesetz)

$$m x''(t) = -\nabla U(x(t)). \tag{2.1.5}$$

Für spezielle Potentialfunktionen kann man dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen explizit lösen. Die Gesamtenergie des Massenpunkts ist

$$E(t) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} x_i'(t)^2 + U(x(t)).$$

Wegen der Beziehung (2.1.5) folgt

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= m \sum_{i=1}^{3} x_i'(t) x''(t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) x_i'(t) \\ &= \big(m x''(t) + \nabla U(x(t))\big) \cdot x'(t) = 0, \end{aligned}$$

d. h.: Die totale Energie ist konstant in der Zeit und damit eine sog. „Erhaltungsgröße“. Dies ist in Übereinstimmung mit dem fundamentalen physikalischen Prinzip der „Energieerhaltung“, d. h.: In einem geschlossenen physikalischen System (ohne externe Energiequellen oder -senken) kann keine Energie entstehen oder verschwinden. Das Hamiltonsche Prinzip von der „minimalen Wirkung“ und das Prinzip von der „Erhaltung der Energie“ sind also verträglich (offenbar sogar äquivalent).

2.2 Mehrdimensionale Variationsaufgaben (Dirichlet-Prinzip)

Ein klassisches Problem der Variationsrechnung in $\mathbb{R}^n$ ist die Rechtfertigung des folgenden nach Dirichlet[2] benannten Prinzips über die Existenz einer Funktion, welche dem sog. „Dirichletschen Integral“

$$D[u] := \int_G |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

einen minimalen Wert verleiht unter allen Vergleichsfunktionen, welche entlang des Randes ∂G vorgegebene Werte annehmen. Dabei soll das Integral wenigstens als *uneigentliches* R-Integral existieren, was durch die Schreibweise $\nabla u \in L^2(G)^n$ ausgedrückt wird. Die Menge G sei hier und im Folgenden offen, beschränkt, quadrierbar und derart stückweise glatt berandet, dass der Satz von Gauß sowie die Greenschen Formeln gelten.

Definition 2.1 (Dirichletsches Prinzip): *Das sog. „Dirichletsche Prinzip“ besagt: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet und $g : \partial G \to \mathbb{R}$ irgendeine stetige Randfunktion. Dann gibt es unter den Funktionen der Menge*

$$V_g(G) := \left\{ \varphi \in C^1(G) \cap C(\overline{G}),\ \nabla u \in L^2(G)^n,\ \varphi_{|\partial G} = g \right\}$$

eine, $u \in V_g(G)$, welche dem Dirichletschen Integral den kleinsten Wert verleiht, d. h.

$$D[u] = \inf\{D[\varphi],\ \varphi \in V_g(G)\}, \tag{2.2.6}$$

und u ist eine sog. „Potentialfunktion“, d. h. Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u = 0 \quad \textit{in } G, \qquad u = g \quad \textit{auf } \partial G. \tag{2.2.7}$$

Die Bezeichnung dieser Schlussweise als „Dirichletsches Prinzip“ geht auf Riemann zurück, welcher seinerzeit die Existenz einer solchen Minimalfunktion $u \in V_g(G)$ als aus physikalischen Gründen evident angesehen hat. Aber schon Weierstraß (1870) kritisierte die unkritische Verwendung des Dirichletschen Prinzips. Er wies darauf hin, dass im Unterschied zu Minimierungsproblemen für stetige Funktionen ein Variationsproblem auch mit glattem Integranden nicht unbedingt eine Lösung zu haben braucht. Als Beispiel diente:

$$J(u) := \int_{-1}^{1} x^2 u'(x)^2 \, dx \ \to \ \min, \quad u \in C^1[-1,1],\ u(-1) = 2,\ u(1) = 0.$$

Die Funktionen

$$u_k(x) = 1 - \frac{\arctan(kx)}{\arctan(k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad u_k'(x) = -\frac{1}{\arctan(k)} \frac{k}{1 + (kx)^2},$$

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) geb. in Düren (damals bei Frankreich): Wirkte in Berlin und als Prof. in Göttingen (Nachfolger von Gauß); wichtige Beiträge zur Zahlentheorie, Analysis und Differentialgleichungen („Dirichletsches Prinzip“).

genügen wegen $\arctan(-k) = -\arctan(k)$ den Randbedingungen $u_k(-1) = 2,\ u_k(1) = 0$, und es gilt:

$$
\begin{aligned}
J(u_k) &= \int_{-1}^{1} x^2 u_k'(x)^2\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{k^2x^2}{\arctan(k)^2(1+k^2x^2)^2}\, dx \\
&\le \frac{1}{\arctan(k)^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+k^2x^2}\, dx = \frac{1}{\arctan(k)^2} \frac{\arctan(kx)}{k}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{k\arctan(k)} \ \to\ 0 \quad (k \to \infty).
\end{aligned}
$$

Wegen $J(\varphi) \ge 0$ für alle zulässige Funktionen folgt $\inf\{J(\varphi),\ \varphi \text{ zulässig}\} = 0$. Dieses Infimum wird aber von keiner zulässigen Funktion angenommen, denn $J(u) = 0$ impliziert $u \equiv 0$, so dass die linke Randbedingung $u(-1) = 2$ nicht erfüllt werden kann.

Die Kritik von Weierstraß bedeutete einen wichtigen Einschnitt bei der Entwicklung der Riemannschen Theorie komplexer Funktionen. Dieses Dilemma wurde später u. a. von Poincaré durch den direkten Nachweis der Existenz einer Lösung der Randwertaufgabe (2.2.7) behoben. Die Rechtfertigung des ursprünglichen Dirichletschen Prinzips blieb ein berühmtes offenes Problem der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Im Jahre 1900 gelang Hilbert diese Rechtfertigung mit Hilfe neuartiger Methoden der Funktionalanalysis. Dabei erwies es sich als wichtig, die Funktionenmenge, in der die Minimallösung gesucht wird, geeignet zu erweitern. Dies führte auf Klassen sog. „verallgemeinert" differenzierbarer Funktionen, die wir später noch näher studieren werden. Im Augenblick fehlen uns noch einige hierzu erforderliche analytische Techniken.

Der zweiten Teil der Aussage des Dirichletschen Prinzips kann dagegen leicht gerechtfertigt werden.

Satz 2.2: *Ist $u \in V_g(G)$ eine Funktion mit der Eigenschaft*

$$D[u] = \min_{v \in V_g(G)} D[v], \tag{2.2.8}$$

so ist u im Fall $u \in C^2(G)$ in G harmonisch, d. h. hat die Laplace-Gleichung $\Delta u \equiv 0$ als Euler-Lagrange-Gleichung.

Beweis: Sei $x_0 \in G$ ein beliebiger Punkt und $B_\varepsilon(x_0)$ eine (offene) ε-Umgebung, deren Abschluß $\overline{B_\varepsilon(x_0)})$ noch ganz in G enthalten ist. Dann ist $u \in C^1(\overline{B_\varepsilon(x_0)})$. Mit $u \in V_g(G)$ ist auch $u + t\varphi \in V_g(G)$ für $\varphi \in V_0(B_\varepsilon(x_0))$. Wegen der Minimalitätseigenschaft von u nimmt dann die Funktion

$$F_\varphi(t) := D[u + t\varphi], \quad t \in \mathbb{R}$$

ihr Minimum in $t = 0$ an. Folglich gilt nach dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen:

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt} F_\varphi(t)\Big|_{t=0} &= \int_G \frac{d}{dt} |\nabla(u + t\varphi)|^2\, dx\Big|_{t=0} = \int_G 2\nabla(u + t\varphi) \cdot \nabla\varphi\, dx\Big|_{t=0} \\
&= 2\int_G \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx,
\end{aligned}
$$

für beliebiges $\varphi \in V_0(B_\varepsilon(x_0))$. Ferner ist $\Delta u \in C(\overline{B_\varepsilon(x_0)})$. Durch partielle Integration und Beachtung von $\varphi_{|\partial B_\varepsilon(x_0)} = 0$ ergibt sich so

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} \Delta u \varphi \, dx = 0. \tag{2.2.9}$$

Mit Hilfe des unten bewiesenen Fundamentallemmas 2.2 folgt also $\Delta u(x_0) = 0$. Q.E.D.

Lemma 2.2 (Fundamentallemma in $\mathbb{R}^n$): *Auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ gelte für eine Funktion $g \in C(\overline{G})$*

$$\int_G g(x)\varphi(x)\, dx = 0 \tag{2.2.10}$$

für jede Funktion $\varphi \in V_0(G)$. Dann ist $g \equiv 0$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog wie im eindimensionalen Fall. Wegen der Stetigkeit von g genügt es zu zeigen, dass $g(x) = 0$ für $x \in G$. Angenommen es existiert ein $x_0 \in G$, so dass $g(x_0) = \varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Umgebung $B_\delta(x_0)$ von x_0 ganz in G enthalten ist, und $g(x) \geq \varepsilon/2$ für $x \in B_\delta(x_0)$ ist. Wir definieren die Funktion $\varphi_\delta \in V_0(G))$ durch

$$\varphi_\delta(x) := \exp\Big(- \frac{\|x - x_0\|^2}{\delta^2 - \|x - x_0\|^2} \Big) > 0, \quad x \in B_\delta(x_0), \qquad \varphi_\delta(x) = 0, \quad x \notin B_\delta(x_0).$$

Diese ist unendlich oft differenzierbar und erfüllt $\varphi_{\delta|\partial G} = 0$. Damit ergibt sich dann der Widerspruch

$$0 = \int_G g(x)\varphi_\delta(x)\, dx = \int_{B_\delta(x_0)} g(x)\varphi_\delta(x)\, dx \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_\delta(x_0)} \varphi_\delta(x)\, dx > 0.$$

Also ist $g(x) = 0$ für alle $x \in G$. Q.E.D.

„Satz“ [Dirichletsches Prinzip]: *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂G und $g \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, $|\nabla g| \in L^2(G)$, eine gegebene Randfunktion. Dann gibt es eine sog. „Minimalfolge“ $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $V_g(G)$-Funktionen mit der Eigenschaft*

$$D[u^k] \to \inf_{v \in V_g(G)} D[v] \geq 0. \tag{2.2.11}$$

Diese Folge konvergiert in einem noch zu bestimmenden Sinne gegen eine Grenzfunktion u in einem ebenfalls noch zu definierenden größeren Funktionenraum $H^1(G)$.

Beweis: i) Mit der Randfunktion g setzen wir $v := u - g$ und

$$E(v) := D[v + g].$$

Die Minimierung von $D[u]$ über $V_g(G)$ ist also äquivalent zur Minimierung von $E(v)$ über $V_0(G)$. Auf dem Vektorraum $V_0(G)$ ist durch

$$\|v\|_E := D[v]^{1/2} = \Big(\int_G |\nabla v(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

eine Norm definiert. Die Homogenität und die Dreiecksungleichung ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der L^2-Norm. Die Definitheit folgt aus den Implikationen $\|v\|_E = 0 \;\Rightarrow\; \nabla v \equiv 0 \;\Rightarrow\; v \equiv$ konst. $\Rightarrow\; v \equiv 0$.

ii) Das Funktional $E(\cdot)$ ist offensichtlich durch Null nach unten beschränkt. Sei $(v^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0(G)$ eine „Minimalfolge“, d. h.:

$$E(v^k) \to \inf_{v\in V_0(G)} E(v) =: d \geq 0 \quad (k \to \infty).$$

Wir wollen zeigen, dass $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der obigen Norm ist. Wichtiges Hilfsmittel dazu ist die sog. „Parallelogrammidentität“

$$D[v-w] + D[v+w] = 2D[v] + 2D[w],$$

die man durch direktes Nachrechnen verifiziert. Für beliebige Indizes $n, m \in \mathbb{N}$ erschließen wir damit

$$\begin{aligned}\|v^n - v^m\|_E^2 &= D[v^n - v^m] = 2D[v^n + g] + 2D[v^m + g] - D[v^n + g + v^m + g]\\ &= 2E(v^n) + 2E(v^m) - 4E(\tfrac{1}{2}(v^n + v^m)).\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{n,m\to\infty}\{E(v^n) + E(v^m)\} = 2d, \qquad E(\tfrac{1}{2}(v^n + v^m)) \geq d,$$

folgt damit

$$\limsup_{n,m\to\infty} \|v^n - v^m\|_E \leq 0,$$

d. h.: $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wie behauptet eine Cauchy-Folge.

iii) Die Cauchy-Folge $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt i. Allg. keinen Limes im normierten (unvollständigen) Raum $V_0(G)$ (s. das unten angeführte Beispiel). Durch Vervollständigung von $V_0(G)$ erhält man den sog. „Sobolew-Raum“ $H_0^1(G)$. Die Elemente von $H_0^1(G)$ sind zunächst als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen (analog wie bei der Konstruktion der reelen Zahlen aus den rationalen) definiert; sie lassen sich aber wieder als Funktionen interpretieren. Hierzu benötigen wir aber Hilfsmittel, die erst im folgenden Kapitel 3 entwickelt werden. Wir können den Beweis des Satzes also an dieser Stelle nicht weiterführen. Die hier verwendete Methode zum Nachweis der Lösbarkeit von Variationsaufgaben wird als „direkte Methode der Variationsrechnung“ bezeichnet. Q.E.D.

Beispiel 2.2: Auf der Einheitskugel $G := K_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ die wie folgt definierten Funktionen

$$v^k(x) := \begin{cases} \log(\|x\|), & \frac{1}{k} < \|x\| \leq 1,\\ \frac{1}{2}k^2\|x\|^2 + \log(1/k) - \frac{1}{2}, & 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{k}.\end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht, dass $v^k \in V_0(G)$ ist. Ferner gilt

$$|\nabla v^k(x)| \le \frac{1}{\|x\|}, \quad x \in G \setminus \{0\}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V_0 bzgl. der Dirichlet-Norm $\|v\|_E := D[v]^{1/2}$ ist. Dazu schätzen wir mit Hilfe der Transformation of Polarkoordinaten und unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie der Funktionen v^k wie folgt ab (o.B.d.A. sei $m > n$):

$$\begin{aligned}\|v^n - v^m\|_E^2 &= \int_G |\nabla(v^n - v^m)|^2\,dx = 4\pi \int_0^1 |\partial_r(v^n - v^m)|^2 r^2\,dr \\ &\le 4\pi \int_0^{1/n} 4r^{-2}r^2\,dr = \frac{16\pi}{n} \;\to\; 0 \quad (n, m \to \infty)..\end{aligned}$$

Wir wollen nun den möglichen Limes der Folge $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ identifizieren. Die v^k konvergieren offensichtlich in allen Punkten $x \in G \setminus \{0\}$ gegen die Grenzfunktion

$$v(x) := \begin{cases} \log(\|x\|), & x \in G \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

welche aber nicht in V_0 ist. Ihr Gradient $\nabla v(x) = x\|x\|^{-2}$, $x \in G \setminus \{0\}$, $\nabla v(0) := 0$ ist über G im Riemannschen Sinne uneigentlich quadrat-integrierbar:

$$\int_G \|\nabla v(x)\|^2\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{G\setminus K_\varepsilon(0)} \|\nabla v(x)\|^2\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi \int_\varepsilon^1 r^{-2}r^2\,dr = 4\pi.$$

In diesem Sinn konvergiert dann auch

$$\int_G \|\nabla(v^k - v)\|^2\,dx \le 4\pi \int_0^{1/k} 4r^{-2}r^2\,dr = \frac{16\pi}{k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Die Cauchy-Folge $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat also im Sinne der Konvergenz bzgl. der Norm $\|\cdot\|_E$ eine Limesfunktion v, welche aber nicht im Raum V_0 liegt.

2.3 Übungen

Übung 2.1: Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die durch

$$g(x,y) := \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \ne (0,0), \qquad g(0,0) := 0,$$

definierte Funktion. Man zeige, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) = \int_0^1 g(x,y)\,dx, \qquad f^*(y) = \int_0^1 \partial_y g(x,y)\,dx$$

wohldefiniert sind und dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch

$$f'(0) \neq f^*(0).$$

Dieses Beispiel zeigt, dass bei der Differentiation von parameterabhängigen Integralen nicht ohne weiteres auf die Annahme der Stetigkeit der Funktionen verzichtet werden kann.

Übung 2.2: Seien f und $\partial_y f$ im Rechteck $D = [a,b] \times [c,d]$ stetig und $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $a \le \varphi(y) \le \psi(y) \le b$. Man zeige, dass dann gilt:

$$\frac{d}{dy} \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)\,dx = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \partial_y f(x,y)\,dx + \varphi'(y) f(\varphi(y),y) - \psi'(y) f(\psi(y),y).$$

(Hinweis: Man untersuche die Konvergenz der zugehörigen Differenzenquotienten.)

Übung 2.3: Auf dem Funktionenraum $V_0 := \{v \in C^1[a,b],\ v(a) = v(b) = 0\}$ ist für eine gegebene Funktion $f \in C[a,b]$ das folgende Funktional zu minimieren:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_a^b \big\{ p(t)|u'(t)|^2 + r(t)u(t)^2 \big\}\,dt - \int_a^b f(t)u(t)\,dt$$

mit Koeffizientenfunktionen $p \in C^1[a,b],\ p(t) \ge \rho > 0$, und $r \in C[a,b],\ r(t) \ge 0$. Man bestimme die zugehörige Euler-Lagrangesche Gleichung. Ist die entstehende RWA lösbar?

Übung 2.4: Für $\delta > 0$ sei $B_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$. Man zeige, dass die durch

$$\varphi_\delta(x) := \exp\Big(- \frac{\|x - x_0\|^2}{\delta^2 - \|x - x_0\|^2} \Big), \quad x \in B_\delta(x_0), \qquad \varphi_\delta(x) := 0, \quad x \notin B_\delta(x_0),$$

definierte Funktion $\varphi_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist. (Hinweis: Es genügt den Fall $x_0 = 0$ und $\delta = 1$ zu betrachten.)

Übung 2.5: Man beweise die folgende Verallgemeinerung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung: Auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ gelte für eine Riemann-integrierbare Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b g(t)\varphi(t)\,dt = 0 \tag{2.3.12}$$

für jede Funktion $\varphi \in C^1[a,b]$ mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Dann ist $g = 0$ in jedem Stetigkeitspunkt von g.

Übung 2.6: Auf dem Funktionenraum $V := \{v \in C^2[a,b] \,|\, v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta\}$ ist für ein $p \in [1,\infty)$ das folgende Funktional zu minimieren:

$$F(u) = \frac{1}{p} \int_a^b \big(1 + u'(t)^2\big)^{p/2} \, dt.$$

Man bestimme die zugehörige Euler-Lagrangesche Gleichung und bestimme deren Lösung. Welche Sonderfälle ergeben sich für $p = 2$ und $p = 1$?

Übung 2.7: Man formuliere das Dirichletsche Prinzip. Dieses ist in seiner „klassischen“ Formulierung i. Allg. nicht gültig. Man zeige, dass seine Aussage für spezielle Konfigurationen aber sehr wohl richtig sein kann, z. B. auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ für die Randdaten $g(x,0) = g(0,y) = 0$, $g(x,1) = x$, $g(1,y) = y$.