

# 1 Integralsätze

In diesem Kapitel führen wir das Riemann-Integral für Funktionen auf Kurven und Flächen ein. Dies liefert die Grundlage zur Formulierung der fundamentalen Integralsätze von Gauß und Stokes. Für stetig differenzierbare Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  einer Variablen gilt der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Wir wollen uns mit Verallgemeinerungen dieser Aussage auf Integrale in mehreren Dimensionen beschäftigen. Als Ergebnis erhalten wir Beziehungen der Form

$$\int_{\Gamma} \nabla f(x) \cdot ds = f(x^b) - f(x^a)$$

mit einem Integral über die Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  mit Anfangspunkt  $x^a$ , Endpunkt  $x^b$  und gerichtetem Linienelement  $ds$ , sowie

$$\int_G \nabla f(x) \cdot e dx = \int_{\partial G} f(x)n \cdot e do$$

mit einem Integral über den Rand  $\partial G$  des Integrationsbereichs  $G$  und einem Richtungsvektor  $e \in \mathbb{R}^n$ . Dabei ist  $n = (n_1, \dots, n_n)$  der Einheitsvektor in Richtung der nach außen weisenden Normalen entlang des Randes.

Als Integrationsbereiche werden im Folgenden in der Regel sog. „Gebiete“, d. h. offene und zusammenhängende Mengen, auftreten (s. Abschnitt 2.1 des Bandes Analysis 2).

Als Vorbereitung für diese Untersuchung müssen wir zunächst einmal das Riemann-Integral über Kurven und Flächen einführen. Da solche Integrale, insbesondere die „Kurvenintegrale“ auch von eigenem Interesse sind, werden wir letztere in etwas allgemeinerer Form als Integrale über Kurven im  $\mathbb{R}^n$  behandeln.

## 1.1 Integrale über Kurven und Flächen

In Kapitel 6 des Bandes Analysis 1 hatten wir bereits den Begriff der „Länge“ einer ebenen Kurve eingeführt. Wir wollen dies im Folgenden auf Kurven und Flächen im  $\mathbb{R}^n$  erweitern.

### 1.1.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Wir haben eine anschauliche Vorstellung davon, was eine „Kurve“ im  $\mathbb{R}^n$  ist, etwa in der Ebene der Graph einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Auch der Rand eines Gebiets des  $\mathbb{R}^2$ , z. B. die Einheitskreislinie, ist eine Kurve. Diese ist aber nicht als Graph darstellbar, sondern als Zusammensetzung von Graphen. Bei der Definition, was eine allgemeine Kurve

sein soll, hilft die kinematische Vorstellung eines physikalischen Partikels, das in einem Zeitintervall  $[a, b]$  einen Weg  $\{x(t), t \in [a, b]\}$  in  $\mathbb{R}^n$  durchläuft. Dabei kann es passieren, dass die Bahnkurve gewisse Punkte mehrfach durchläuft, z.B. die ebenen Bahnkurven

$$x(t) = (t^2 - 1, t^3 - t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi];$$

die erste hat einen sog. „Doppelpunkt“  $x(1) = x(-1)$  (siehe Abbildung 1.1), und bei der zweiten durchläuft der Punkt den Einheitskreis zweimal. Wir müssen also unterscheiden zwischen dem „Weg“, den ein Partikel in dem Zeitintervall durchläuft und der entstehenden „Kurve“ als Punktmenge in  $\mathbb{R}^n$ . Ein solcher *Weg* hat eine natürliche „Orientierung“, gegeben durch die zeitliche Bewegung des Partikels.

**Definition 1.1:** *i) Unter einem „Weg“ verstehen wir eine stetige Abbildung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einem abgeschlossenen (nicht degenerierten) Intervall  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . (Die Fälle  $I = (-\infty, b], I = [a, \infty)$  und  $I = (-\infty, \infty)$  sind gelegentlich zugelassen.)*

*ii) Die Bildmenge*

$$\Gamma_\varphi = \{\varphi(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n,$$

*eines Weges  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird als „Kurve“ in  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet, mit „Parameterdarstellung“  $\varphi$ . Im Falle  $I = [a, b]$  nennen wir  $\varphi(a)$  und  $\varphi(b)$  den „Anfangspunkt“ sowie den „Endpunkt“ der Kurve. Im Falle  $\varphi(a) = \varphi(b)$  heißt diese „geschlossen“. Ist  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  für zwei Parameterwerte  $t_1 \neq t_2$ , so hat die Kurve dort einen „Doppelpunkt“.*

Wir werden im Folgenden von einer Kurve als einem geometrischen Objekt bzw. Punktmenge in  $\mathbb{R}^n$  sprechen, die durch einen Weg  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisiert ist. Dabei können unterschiedliche Parametrisierungen durchaus dieselbe Kurve erzeugen; z. B. gehört zu den Wegen

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (\cos(t), \sin(t)), & t \in [0, 2\pi], \\ \varphi(t) &= (\cos(t), -\sin(t)), & t \in [0, 2\pi], \\ \varphi(t) &= (\cos(2t), \sin(2t)), & t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

als Kurve jeweils die Einheitskreislinie, nur auf unterschiedliche Weise durchlaufen. Häufig hat man für eine geometrische Kurve keine vollständige Parameterdarstellung gegeben, sondern nur für Teilstücke, aus denen die Kurve zusammengesetzt ist. Durch Aneinanderfügung von endlich vielen Kurvenstücken  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$  erhält man eine „Kurve“; diese heißt „geschlossen“, wenn der Endpunkt von  $\Gamma_r$  gleich dem Anfangspunkt von  $\Gamma_1$  ist (siehe Abb. 1.3).

**Beispiel 1.1:** Wir geben weitere einfache Beispiele von Wegen und Kurven:

1. Für eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kann die Abbildung  $\varphi(t) := (t, f(t)), t \in [a, b]$ , als Weg in  $\mathbb{R}^2$  aufgefasst werden; die zugehörige Kurve ist der Graph der Funktion  $f$ .
2. Der Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi(t) = (a_1 + v_1 t, a_2 + v_2 t) = a + vt$  beschreibt eine Gerade in der Ebene durch den Punkt  $a = (a_1, a_2)$  in Richtung des Vektors  $v = (v_1, v_2)$ .

3. Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$  beschreibt eine sog. „Schraubenlinie“ in  $\mathbb{R}^3$  (s. Abb. 1.1).

4. Neben den bisher aufgeführten „normalen“ Kurven gibt es auch sehr pathologische, sog. „degenerierte“ Kurven sowie „flächenfüllende Kurven“. Die stetige Parametrisierung  $\varphi(t) \equiv \varphi_0 = \text{konst.}, t \in [a, b]$ , ergibt eine einpunktige Menge  $\{\varphi_0\} \in \mathbb{R}^3$ , die wir nicht als „Kurve“ im eigentlichen Sinne ansehen wollen. Ein Beispiel für den letzteren Kurventyp, eine sog. „Peano-Kurve“, wird im Folgenden gegeben.

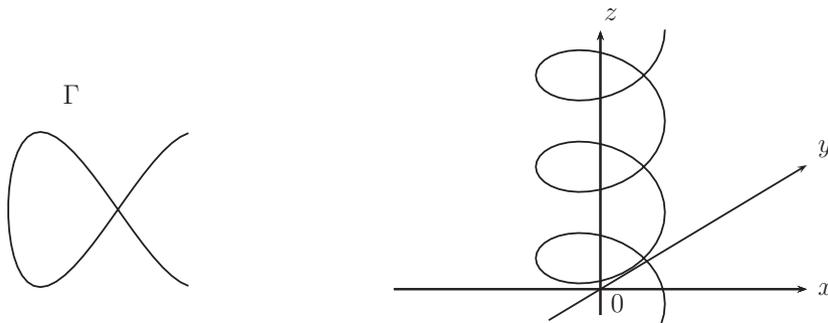


Abbildung 1.1: Kurve mit Doppelpunkt (links) und Schraubenlinie in  $\mathbb{R}^3$  (rechts).

**Beispiel 1.2 (Peano-Kurve):** Wir geben ein Beispiel für eine ebene Kurve, welche das ganze Einheitsquadrat ausfüllt. Solche Kurven wurden erstmals von Peano<sup>1</sup> (1890) konstruiert und werden daher „Peano-Kurven“ genannt. Die Entdeckung solcher pathologischen Kurven (mit stetiger Parametrisierung) im 19. Jahrhundert erschütterte das Vertrauen in die bis dahin viel auf geometrischer Anschauung basierte Argumentation in der Analysis. Außerdem zeigte dies, dass das Konzept der „Stetigkeit“ allein zu schwach zur sinnvollen Charakterisierung geometrischer Objekte wie Kurven, Flächen und Körpern ist. Die 2-periodische Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch (Man mache sich eine Skizze dieser Funktion.)

$$g(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ 3t - 1, & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leq t < \frac{4}{3} \\ 5 - 3t, & \frac{4}{3} \leq t < \frac{5}{3} \\ 0, & \frac{5}{3} \leq t < 2. \end{cases}$$

Die Funktion  $g$  ist stetig und beschränkt,  $0 \leq g(t) \leq 1, t \in \mathbb{R}$ .

Damit definieren wir die Abbildung  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$\varphi(t) := \left( \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k-1}t), \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k}t) \right).$$

<sup>1</sup>Giuseppe Peano (1858–1932): Italienischer Mathematiker; Prof. in Turin; Beiträge zur Analysis, gewöhnlichen Differentialgleichungen, einer der Väter der Mathematischen Logik

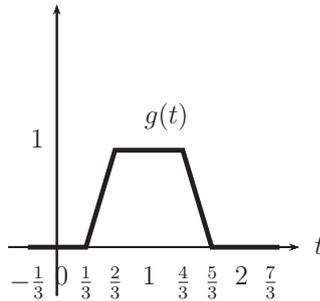


Abbildung 1.2: Basiselement der Peano-Kurve.

Die Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig, so dass die Limesfunktion  $\varphi$  stetig ist. Die zugehörige Kurve wird „Peano-Kurve“ genannt. Diese hat die überraschende Eigenschaft, das Einheitsquadrat auszufüllen, d. h.  $\varphi$  bildet das Intervall  $[0, 1]$  stetig *auf* das Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  ab. Dies sieht man wie folgt: Wegen  $0 \leq g \leq 1$  ist

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k}t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

d. h.  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ . Wir wollen zeigen, dass  $\varphi$  surjektiv ist. Dazu beachten wir, dass jede reelle Zahl  $a \in [0, 1]$  eine sog. „dyadische Entwicklung“ besitzt:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k 2^{-k}, \quad \delta_k \in \{0, 1\}.$$

Also gibt es zu jedem Punkt  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  eine  $(0, 1)$ -Folge  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  derart, dass

$$(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k-2} 2^{-k}, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k-1} 2^{-k} \right).$$

Dieser  $(0, 1)$ -Folge ordnen wir die folgende Zahl zu:

$$t := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta_j}{4^{j+1}} \in [0, 1].$$

Für jedes feste  $k \in \mathbb{N}_0$  ist dann

$$4^{k+1}t = \sum_{j=0}^{k-1} 4^{k-j} \delta_j + \delta_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\delta_j}{4^{j-k}}.$$

Die erste Summe ist ein Vielfaches von 2, und für die letzte gilt

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\delta_j}{4^{j-k}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Also ist  $g(4^{k+1}t) = \delta_k$  gemäss der Konstruktion von  $g$ . Dies ergibt wie gewünscht

$$\varphi(t) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k-1}t), \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(4^{2k}t) \right) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{2k-2}, \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{2k-1} \right) = (x, y).$$

Wir sehen, dass die bloße Annahme der Stetigkeit der Parametrisierung einer Kurve auch sehr pathologische Objekte zulässt. Wir werden den Begriff der „Kurve“ also etwas schärfer fassen müssen, um solche „Monster“ auszuschließen.

**Definition 1.2:** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve mit Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $\varphi$  injektiv, so nennen wir die Kurve eine „Jordan-Kurve“ und die Parametrisierung einen „Jordan-Weg“. Ist  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv mit  $\varphi(a) = \varphi(b)$  als einzigem Doppelpunkt, so sprechen wir von einer „geschlossenen Jordan-Kurve“.

Es scheint anschaulich klar, dass zu einer geschlossenen ebenen Jordan-Kurve immer ein wohldefiniertes von dieser umschlossenes Gebiet existiert. Dies ist die Aussage des sog. „Jordanschen Kurvensatzes“. Im Hinblick auf das Beispiel der pathologischen Peano-Kurve ist es nicht verwunderlich, dass der Beweis dieser Aussage sehr schwierig ist und hier nicht gegeben werden kann.

**Satz 1.1 (Jordanscher Kurvensatz):** Jede geschlossene ebene Jordan-Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  zerlegt  $\mathbb{R}^2$  in zwei Gebiete, die von ihr berandet werden:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = G_1 \cup G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad \partial G_1 = \partial G_2 = \Gamma.$$

Genau eines dieser beiden Gebiete ist beschränkt; dieses wird als das „Innengebiet“ von  $\Gamma$  bezeichnet.

**Definition 1.3:** Eine Kurve heißt „stetig differenzierbar“, wenn für sie eine stetig differenzierbare Parametrisierung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (kurz eine „ $C^1$ -Parametrisierung“) existiert. Eine  $C^1$ -Parametrisierung mit der Eigenschaft  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  wird als „regulär“ (oder „glatt“) bezeichnet. „Singuläre“ Parameterwerte  $t \in [a, b]$  bzw. die zugehörigen Punkte  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$  sind solche mit  $\varphi'(t) = 0$ . Eine Kurve heißt „stückweise differenzierbar“, wenn sie aus endlich vielen differenzierbaren Kurvenstücken besteht.

**Beispiel 1.3:** Die sog. „Neilesche<sup>2</sup> Parabel“ hat die Parametrisierung  $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ . Die zugehörige Kurve ist (siehe Abb. 1.3)

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \pm x^{3/2}\}.$$

Wegen  $\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$  liegt für  $t = 0$  in der Spitze der Kurve ein singulärer Punkt.

<sup>2</sup>William Neile (1637–1670): Englischer Mathematiker; Mitglied der Royal Society und des Ratgebervereins König Charles II; Beiträge zur Rektifizierung algebraischer Kurven und Theorie der Bewegung.

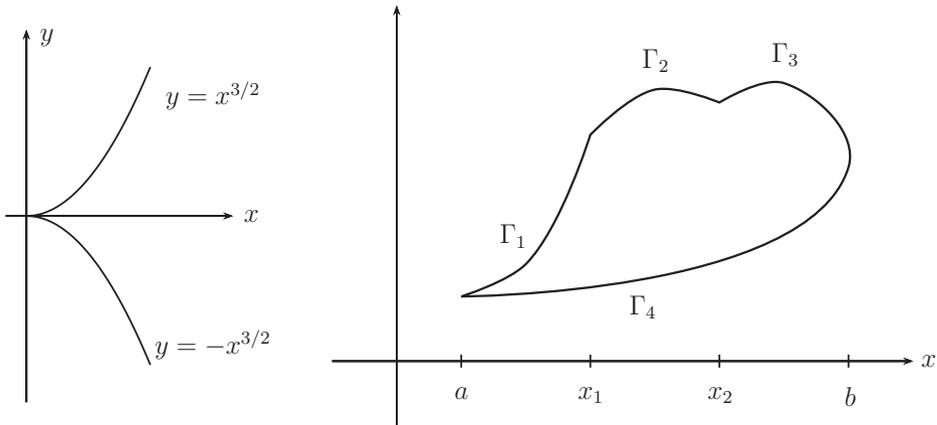


Abbildung 1.3: Neilesche Parabel (links) und stückweise differenzierbare Kurve (rechts).

Eine injektive Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Kurve  $\Gamma$  prägt dieser eine „Orientierung“ auf, d. h. eine Reihenfolge, in der ihre Punkte für wachsenden Parameter  $t$  erreicht werden. Das folgende Lemma zeigt, dass alle regulären, injektiven Parametrisierungen einer Kurve isomorph sind.

**Lemma 1.1:** Seien  $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\varphi^* : I^* = [a^*, b^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei reguläre, injektive Parametrisierungen derselben Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es genau eine bijektive Abbildung  $h : I^* \rightarrow I$  derart, dass gilt:

$$\varphi^* = \varphi \circ h. \quad (1.1.1)$$

Sind die Parametrisierungen  $\varphi$  und  $\varphi^*$  (stückweise) stetig differenzierbar, so auch  $h$ , und es ist  $h' \neq 0$ , wo die Ableitung existiert. Also ist  $h$  monoton steigend oder monoton fallend; im letzteren Fall durchlaufen die Punkte  $\varphi^*(t)$ ,  $t \in I^*$ , und die Punkte  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ , die Kurve zueinander im entgegengesetzten Sinn, d. h. die zugehörigen Wege haben entgegengesetzte Orientierungen.

**Beweis:** i) Die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  existiert und ist stetig. Folglich ist auch die Abbildung  $h := \varphi^{-1} \circ \varphi^* : I^* \rightarrow I$  stetig und bijektiv. Ferner ist  $\varphi \circ h = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi^* = \varphi^*$ . Gilt nun  $\varphi^* = \varphi \circ h^*$  mit einer zweiten bijektiven Abbildung  $h^* : I^* \rightarrow I$ , so ist  $h = \varphi^{-1} \circ \varphi^* = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ h^* = h^*$ , d. h.  $h$  ist eindeutig bestimmt. Die stetige und bijektive Abbildung  $h : I^* \rightarrow I$  ist notwendig streng monoton.

ii) Es bleibt die Differenzierbarkeit von  $h$  zu zeigen. Sei  $t_0^* \in I^*$  und  $t_0 := h(t_0^*) \in I$ . Wegen  $\varphi'(t_0) \neq 0$  muss für eine Komponente  $\varphi_j(t_0) \neq 0$  sein. Sei etwa  $\varphi_j(t_0) > 0$ . Dann ist auch  $\varphi_j(t) > 0$  in einer ganzen Intervallumgebung  $I_0 \subset I$  von  $t_0$ . Dazu gehört ein Intervall  $I_0^* := h^{-1}(I_0) \subset I^*$ . In  $I_0$  ist  $\varphi_j$  streng monoton wachsend, und die

Umkehrfunktion  $\varphi_j^{-1}$  ist im Intervall  $\varphi_j(I_0)$  ebenfalls (stückweise) stetig differenzierbar. Wegen  $\varphi_j^* = \varphi_j \circ h$  ist  $h = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j^*$  in  $I_0^*$ . Also ist  $h$  in  $I_0^*$  (stückweise) stetig differenzierbar. Aus  $\varphi^* = \varphi \circ h$  folgt dann  $\varphi^{*'} = \varphi'(h)h'$  und, wegen  $\varphi^{*'} \neq 0$ , schließlich  $h' \neq 0$ . Q.E.D.

## Kurvenlänge

Zur Definition der „Länge“ einer Kurve als Punktmenge des  $\mathbb{R}^n$  beschränken wir uns auf die Teilklasse der „Jordan-Kurven“ mit Parametrisierungen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf kompakten Intervallen  $I = [a, b]$ . Der Zusatz „Jordan“ wird daher meist weglassen. Wir wollen die „Länge“ einer solchen Kurve  $\Gamma$  in  $\mathbb{R}^n$  bestimmen. Dabei verfahren wir analog wie in Abschnitt 6.2.3 des Bandes Analysis 1, wo der Spezialfall *ebener* Kurven behandelt wurde. Sei  $Z$  eine Zerlegung des Parameterintervalls  $[a, b]$  in Teilpunkte  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ , mit Feinheit  $|Z| = \max_{k=1, \dots, m} (t_k - t_{k-1})$ . Die Menge solcher Zerlegungen wird wieder mit  $\mathcal{Z}(a, b)$  bezeichnet. Wir approximieren das Kurvenstück durch einen Polygonzug  $p_Z(\Gamma)$  (aneinander gefügte lineare Kurvenstücke) zu den Stützpunkten  $\varphi(t_k)$ ,  $k = 0, \dots, m$ . Die Länge  $|p_Z(\Gamma)|$  des Polygonzugs ist die Summe der Längen seiner einzelnen linearen Teilstücke, welche wiederum als die euklidischen Abstände ihrer Endpunkte definiert sind, d.h.:

$$|p_Z(\Gamma)| := \sum_{k=1}^m \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\|.$$

Die Länge des Polygonzugs nimmt bei Hinzunahme eines weiteren Punktes  $t \in (t_{k-1}, t_k)$  wegen  $|t_k - t_{k-1}| \leq |t_k - t| + |t - t_{k-1}|$  nicht ab. Hieraus folgt wie beim Riemanschen Integral, dass im Falle

$$L := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} |p_Z(\Gamma)| < \infty$$

für jede Zerlegungsfolge  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}(a, b)$ , mit  $|Z_k| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) die zugehörigen Polygonzuglängen gegen  $L$  konvergieren.

**Definition 1.4:** Ein Kurvenstück  $\Gamma$  heißt „rektifizierbar“ mit der „Länge“  $|\Gamma|$ , wenn die Längen aller Polygonzüge  $p_Z(\Gamma)$  gleichmäßig beschränkt sind mit

$$|\Gamma| := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} |p_Z(\Gamma)| = \lim_{Z \in \mathcal{Z}(a, b), |Z| \rightarrow 0} |p_Z(\Gamma)|.$$

**Satz 1.2 (Kurvenlänge):** Ist die Parameterdarstellung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Kurvenstücks  $\Gamma$  stetig differenzierbar, so ist es rektifizierbar, und seine Länge ist gegeben durch

$$|\Gamma| = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt. \tag{1.1.2}$$

Diese Definition der Kurvenlänge ist unabhängig von der (stetig differenzierbaren) Parametrisierung des Kurvenstücks  $\Gamma$ .

**Beweis:** i) Mit  $\varphi'$  ist auch  $\|\varphi'\|$  stetig und folglich Riemann-integrierbar über  $[a, b]$ . Das Integral in (1.1.2) existiert daher als Limes Riemanscher Summen. Sei  $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$  eine Zerlegung und  $p_Z(\Gamma)$  der zugehörige Polygonzug. Für die Länge  $|p_Z(\Gamma)|$  erhalten wir mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} |p_Z(\Gamma)| &= \sum_{k=1}^m \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\left(\frac{\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varphi_n(t_k) - \varphi_n(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} \\ &= \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\varphi'_1(\tau_{k,1})^2 + \cdots + \varphi'_n(\tau_{k,n})^2}, \end{aligned}$$

mit gewissen Zwischenstellen  $\tau_{k,i} \in [t_{k-1}, t_k]$ . Dies sieht fast aus wie eine Riemansche Summe für das Integral in (1.1.2), ist es aber nicht, da i. Allg. die  $\tau_{k,i}$  verschieden sind. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\varphi'$  auf  $[a, b]$  existiert nun zu beliebig gewähltem  $\varepsilon > 0$  ein  $h_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , so dass für jede Zerlegung  $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit Feinheit  $h \leq h_\varepsilon$  gilt:

$$\max_{k=1, \dots, m} |\varphi'_i(\tau_{k,1}) - \varphi'_i(\tau_{k,i})| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass für  $h \leq h_\varepsilon$  auch gilt:

$$\left| \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt - \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \|\varphi'(\tau_{k,1})\| \right| < \varepsilon.$$

Dies zusammengenommen impliziert dann auch

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt - \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\varphi'_1(\tau_{k,1})^2 + \cdots + \varphi'_n(\tau_{k,n})^2} \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt - \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \|\varphi'(\tau_{k,1})\| \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \left( \|\varphi'(\tau_{k,1})\| - \sqrt{\varphi'_1(\tau_{k,1})^2 + \cdots + \varphi'_n(\tau_{k,n})^2} \right) \right| \\ &< \varepsilon + \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \sum_{i=1}^n |\varphi'(\tau_{k,1}) - \varphi'(\tau_{k,i})| \leq \varepsilon + |b - a|n\varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon$  folgt die Konvergenz

$$|p_Z(\Gamma)| \rightarrow \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \quad (h \rightarrow 0),$$

was zu zeigen war.

ii) Sei  $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zweite injektive, stetig differenzierbare Parametrisierung des Kurvenstücks  $\Gamma$ . Dann ist nach Lemma 1.1 die Abbildung

$$h := \psi^{-1} \circ \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad h(a) = c, \quad h(b) = d,$$

bijektiv und stetig differenzierbar. Nach dem Transformationssatz für eindimensionale Riemann-Integrale gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt &= \int_a^b \|(\psi \circ h)'(t)\| dt = \int_a^b \|\psi'(h(t))h'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\psi'(h(t))\| |h'(t)| dt = \int_c^d \|\psi'(s)\| ds. \end{aligned}$$

Die Länge des Kurvenstücks  $\Gamma$  ist also unabhängig von der Parametrisierung. Q.E.D.

Ist die Kurve  $\Gamma$  aus endlich vielen Kurvenstücken  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  zusammengesetzt, welche eine gemeinsame stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  haben, d. h.:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_N = b, \quad \Gamma_k = \{\varphi(t), t \in [t_{k-1}, t_k]\},$$

so bleibt die Integraldarstellung (1.1.2) in folgendem Sinne gültig:

$$|\Gamma| = \sum_{j=1}^N |\Gamma_j| = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\varphi'(t)\| dt. \quad (1.1.3)$$

**Beispiel 1.4 (Nicht rektifizierbare Jordan-Kurve):** Die durch

$$\varphi(t) = (t, t^2 \cos(\pi/t^2)), \quad t \in (0, 1], \quad \varphi(0) := 0,$$

definierte Abbildung  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  beschreibt eine ebene Jordan-Kurve  $\Gamma$ . Diese ist der Graph der Funktion  $y = x^2 \cos(\pi/x^2)$  (s. Abb. 1.4).

Die Abbildung  $\varphi$  ist offenbar stetig und wegen

$$\varphi'(t) = (1, 2t \cos(\pi/t^2) + 2\pi \sin(\pi/t^2)/t)$$

auch in  $(0, 1]$  differenzierbar aber mit nicht beschränkter Ableitung. Wir betrachten die Zerlegung

$$Z_m = \{t_0 = 0, t_1 = 1/\sqrt{m}, t_2 = 1/\sqrt{m-1}, \dots, t_{m-1} = 1/\sqrt{2}, t_m = 1\}$$

von  $[0, 1]$  mit den Funktionswerten

$$\varphi(t_k) = (1/\sqrt{k}, 1/k \cos(\pi k)) = (1/\sqrt{k}, (-1)^k/k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Für den zugehörigen Polygonzug gilt:

$$\begin{aligned} |p_{Z_m}(\Gamma)| &= \sum_{k=1}^m \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=2}^m \left( \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right)^2 + \left( \frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

und somit  $\lim_{m \rightarrow \infty} |p_Z(\Gamma)| = \infty$ . Die Kurve  $\Gamma$  ist also nicht rektifizierbar.

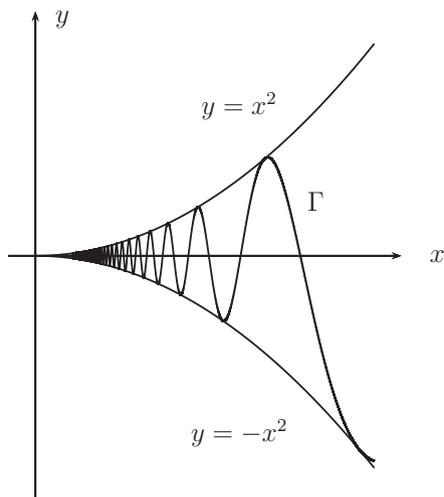


Abbildung 1.4: Eine nicht rektifizierbare Jordan-Kurve.

**Bemerkung 1.1:** Bei der Definition der „Länge“ eines Polygonzugs wurde als Maß für die Länge von deren Teilstrecken der euklidische Abstand  $|\Gamma_k| := \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\|$  der jeweiligen Endpunkte verwendet. Die Wahl dieser Norm ist „natürlich“, da sie im Gegensatz zu anderen Normen, wie z. B. der Maximumnorm oder der  $l_p$ -Normen für  $p \neq 2$ , invariant gegenüber Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (d. h. unitären Transformationen) des verwendeten Koordinatensystems ist:

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : Q^T Q = I \quad \Rightarrow \quad \|Qx\|_2^2 = (Qx, Qx)_2 = (Q^T Qx, x)_2 = \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist eine unabdingbare Bedingung an einen sinnvollen „Längenbegriff“ für Kurven.

Es stellt sich die Frage nach einer Charakterisierung der Rektifizierbarkeit von Jordan-Kurven. Dazu wird der folgende Begriff der „Variation“ einer Funktion eingeführt.

**Definition 1.5 (Beschränkte Variation):** Für eine Funktion  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und Zerlegung  $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$  von  $[a, b]$  definieren wir die „Variation“

$$V_a^b(f; Z) := \sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

und die „totale Variation“

$$V_a^b(f) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} V_a^b(f; Z).$$

Im Falle  $V_a^b(f) < \infty$  wird  $f$  von „beschränkter Variation“ genannt. Die Menge der Funktionen von beschränkter Variation auf  $I$  wird mit  $BV(I)$  bezeichnet.

**Lemma 1.2:** Wir listen einige Eigenschaften von Funktionen  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit beschränkter Variation:

i) Eine monotone Funktion ist in  $BV(I)$ , und es gilt

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|. \quad (1.1.4)$$

ii) Eine Lipschitz-stetige Funktion ist in  $BV(I)$ , und mit ihrer  $L$ -Konstante  $L$  gilt:

$$V_a^b(f) \leq L(b - a). \quad (1.1.5)$$

iii) Eine stetig differenzierbare Funktion ist in  $BV(I)$ , und es gilt:

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt. \quad (1.1.6)$$

iv) Stückweise monotone oder stückweise stetig differenzierbare Funktionen sowie endliche Summen und Produkte solcher Funktionen sind in  $BV(I)$ .

v) Für  $f \in BV(I)$  gilt auf jeder nicht überlappende Zerlegung  $I = [a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ :

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

**Beweis:** i) Für eine monoton wachsende Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$V_a^b(f; Z) = \sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^m (f(t_k) - f(t_{k-1})) = f(b) - f(a),$$

woraus durch Supremumsbildung  $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$  folgt. Für eine monoton fallende Funktion wird analog argumentiert.

ii) Für eine Lipschitz-stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$V_a^b(f; Z) = \sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq L \sum_{k=1}^m |t_k - t_{k-1}| = L(b - a),$$

woraus wieder durch Supremumsbildung  $V_a^b(f) \leq L(b - a)$  folgt.

Die Beweise der Aussagen (iii) – (v) werden als Übungsaufgabe gestellt. Q.E.D.

**Bemerkung 1.2:** Aus der obigen Definition ergibt sich, dass die Menge der auf einem Intervall  $I = [a, b]$  definierten Funktionen mit beschränkter Variation einen Vektorraum (über dem Körper  $\mathbb{R}$ ) bildet. Auf diesem wird durch

$$\|f\|_{BV} := |f(a)| + V_a^b(f)$$

eine Norm definiert. Der so entstehende normierte Raum  $BV(I)$  ist dann *vollständig*, d. h. ein Banach-Raum. Der Beweis dieser Aussagen wird als Übungsaufgabe gestellt.

**Lemma 1.3:** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann von beschränkter Variation in  $[a, b]$ , wenn sie als Differenz  $f = g - h$  zweier monoton wachsender Funktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  darstellbar ist.

**Beweis:** Dass die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen in  $BV(I)$  ist, folgt aus Lemma 1.2 (iv). Sei nun  $f \in BV(I)$ . Für  $t \in [a, b]$  ist dann

$$g(t) := V_a^t(f)$$

die totale Variation auf dem Intervall  $[a, t]$ . Diese Funktion ist offensichtlich auf  $[a, b]$  definiert und monoton wachsend. Weiter ist für  $a \leq c < d \leq b$ :

$$f(d) - f(c) \leq V_c^d(f) = V_a^d(f) - V_a^c(f) = g(d) - g(c),$$

bzw.  $(g - f)(c) \leq (g - f)(d)$ . Die Funktion  $h := g - f$  ist also monoton wachsend, und  $f = g - h$  ist die behauptete Darstellung. Q.E.D.

**Satz 1.3:** Eine Kurve  $\Gamma$  mit Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von beschränkter Variation sind.

**Beweis:** Sei  $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$  eine beliebige Zerlegung von  $[a, b]$ . Für den zugehörigen Polygonzug gilt aufgrund der Beziehung  $|x_i| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$ :

$$\begin{aligned} \max_{i=1, \dots, n} V_a^b(\varphi_i; Z) &= \max_{i=1, \dots, n} \sum_{k=1}^m |\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^m \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \\ &= |p_Z(\varphi)| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})| = \sum_{i=1}^n V_a^b(\varphi_i; Z). \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Betrachtung des Grenzübergangs  $|Z| \rightarrow 0$ , die behauptete Charakterisierung. Q.E.D.

## Tangente an eine Kurve

Im Folgenden wollen wir einige geometrische Eigenschaften von Kurven studieren. Da wir uns dabei der Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Kurve bedienen, müssen wir darauf achten, inwieweit die gefundenen Eigenschaften eventuell von der gewählten Parametrisierung abhängen.

**Definition 1.6 (Tangente):** Sei  $\Gamma$  eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve mit Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für  $t_0 \in [a, b]$  wird der Vektor  $\varphi'(t_0)$  „Tangentenvektor“ an die Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $\varphi(t_0)$  und die Gerade durch  $\varphi(t_0)$  in Richtung  $\varphi'(t_0)$  „Tangente“ genannt. Falls  $\varphi'(t_0) \neq 0$  ist, ist der „Tangenten-Einheitsvektor“ gegeben durch

$$\tau(t_0) := \|\varphi'(t_0)\|^{-1} \varphi'(t_0).$$

Der Tangentenvektor an eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve lässt sich als Limes von Sekantenvektoren auffassen (s. Abb. 1.5):

$$\varphi'(t_0) = \lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h}. \quad (1.1.7)$$

Eine Parameterdarstellung der Tangente lautet:

$$x(t) = \varphi(t_0) + t\varphi'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1.8)$$

Ist nun  $\varphi^* : [a^*, b^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zweite Parametrisierung der Kurve  $\Gamma$ , so gibt es nach Lemma 1.1 einen Diffeomorphismus  $h : [a^*, b^*] \rightarrow [a, b]$  derart, dass  $\varphi^*(t^*) = \varphi(h(t^*))$ ,  $t^* \in [a^*, b^*]$ . Nach der Kettenregel gilt dann  $\varphi^{*\prime}(t_0^*) = \varphi'(h(t_0^*))h'(t_0^*)$ , d.h. die durch die beiden Parametrisierungen  $\varphi$  und  $\varphi^*$  der Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $\varphi(t_0) = \varphi^*(t_0^*)$  erzeugten Tangenten stimmen überein.

**Definition 1.7 (Normalenebene):** Sei  $\Gamma$  eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve mit Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die zum Tangentenvektor  $\varphi'(t_0)$  orthogonale Hyperebene durch den Punkt  $\varphi(t_0)$  heißt „Normalenebene“, und jeder im Punkt  $\varphi(t_0)$  angeheftete Vektor in dieser Ebene heißt „Normalenvektor“ zur Kurve  $\Gamma$ .

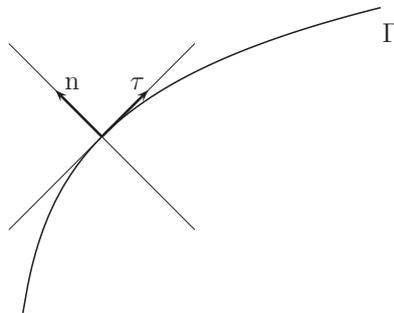


Abbildung 1.5: Tangenten- und Normalenvektor an eine Kurve.

### Parametrisierung mit der Bogenlänge

Sei  $\Gamma$  eine rektifizierbare Kurve mit regulärer Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für  $t \in [a, b]$  bezeichnen wir mit  $\Gamma_{[a,t]}$  die Teilkurve mit der Parametrisierung  $\varphi|_{[a,t]}$ . Die sog. „Bogenlängenfunktion“

$$s(t) := |\Gamma_{[a,t]}| = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b],$$

ist stetig und wegen  $\|\varphi'(t)\| > 0$  streng monoton wachsend. Die Integraldarstellung gilt auch, wenn die Parametrisierung  $\varphi$  nur stückweise stetig differenzierbar ist. In diesem Sinne ist dann auch  $s(t)$  stückweise stetig differenzierbar mit der (stückweisen) Ableitung

$$s'(t) = \|\varphi'(t)\| > 0, \quad t \in [a, b].$$

Also existiert die Umkehrung  $t(s)$  mit denselben Eigenschaften. Die Parametrisierung

$$\psi(s) := \varphi(t(s)), \quad s \in [0, |\Gamma|],$$

beschreibt ebenfalls die Kurve  $\Gamma$ ; sie wird als die Parametrisierung von  $\Gamma$  mit der Bogenlänge bezeichnet.

**Lemma 1.4 (Bogenlänge):** Für die Parametrisierung  $\psi : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Kurve mit der Bogenlänge gilt

$$\|\psi'(s)\| = 1. \tag{1.1.9}$$

**Beweis:** Es gilt

$$\psi'(s) = \varphi'(t) \frac{d}{ds} t(s) = \varphi'(t) \left( \frac{d}{dt} s(t) \right)^{-1} = \varphi'(t) \|\varphi'(t)\|^{-1}$$

und folglich  $\|\psi'(s)\| = 1$ . Q.E.D.

Die zur Parametrisierung mit der Bogenlänge gehörende Bogenlängenfunktion ist

$$|\Gamma_{[a,s]}| = \int_0^s \|\psi'(\tau)\| d\tau = s,$$

was nach Konstruktion zu erwarten war. Die Parametrisierung einer Kurve mit der Bogenlänge ist die natürlichste unter vielen anderen Parametrisierungsmöglichkeiten; sie bietet manchmal theoretische Vorteile, ist aber praktisch kaum nutzbar. Der Parameter  $s$  hat eine nur von der Kurve und der ihr aufgeprägten Orientierung abhängige Bedeutung, und die Darstellung  $\psi(s)$  ist wegen des Ausschlusses von Doppelpunkten eindeutig bestimmt (bei geschlossenen Kurven bis auf den Anfangspunkt).

**Beispiel 1.5:** In der von zwei zueinander orthogonalen Einheitsvektoren  $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$  aufgespannten Ebene wird der Kreis  $K_r(0) \subset \mathbb{R}^n$  mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $r > 0$  betrachtet. Dieser besitzt die Parametrisierung

$$\varphi(t) = r(\eta \cos t + \xi \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Durch Übergang zur Bogenlänge ergibt sich die Darstellung

$$\psi(s) = r \left( \eta \cos \frac{s}{r} + \xi \sin \frac{s}{r} \right), \quad s \in [0, 2\pi r].$$

## Krümmung einer Kurve

Verläuft eine Kurve in der Umgebung eines ihrer Punkte nicht geradlinig, so spricht man von einer „gekrümmten“ Kurve. Um ein Maß für die Krümmung einer Kurve in jedem ihrer Punkte zu gewinnen, gehen wir von ihrer natürlichen Parametrisierung mit der Bogenlänge aus. Die Definition soll mit der Vorstellung verträglich sein, dass eine Gerade die Krümmung Null und ein Kreis eine konstante Krümmung hat, und dass bei Kreisen mit zunehmendem Radius die Krümmung abnimmt.

**Definition 1.8 (Krümmung):** Für eine Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  mit zweimal stetig differenzierbarer Parametrisierung  $\psi : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Bogenlänge ist die „Krümmung“ definiert durch

$$\kappa(s) := \|\psi''(s)\|, \quad s \in [0, |\Gamma|]. \quad (1.1.10)$$

**Beispiel 1.6:** Die Kreiskurve in der  $(x, y)$ -Ebene um den Nullpunkt mit Radius  $r$  hat die Länge  $2\pi r$ . Ihre Parametrisierung mit der Bogenlänge lautet also

$$x(s) = r \cos(s/r), \quad y(s) = r \sin(s/r), \quad s \in [0, 2\pi r].$$

Die zugehörige Formel für die Krümmung ist

$$\kappa(s) = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2} = \frac{1}{r}.$$

Die Krümmung der Kreiskurve ist also konstant  $\kappa \equiv 1/r$  und wächst mit abnehmendem Radius.

Differentiation der Beziehung  $1 = \psi'(s) \cdot \psi'(s)$  ergibt  $\psi''(s) \cdot \psi'(s) = 0$ , d. h.: Der Vektor  $\psi''(s)$  steht senkrecht zum Tangentenvektor  $\psi'(s)$ . Im Fall  $\psi''(s) \neq 0$  heißt der Einheitsvektor

$$\mathbf{n}(s) := \|\psi''(s)\|^{-1} \psi''(s)$$

„Hauptnormalvektor“ zur Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $\psi(t)$ . Die Größen

$$r(s) := \frac{1}{\|\psi''(s)\|}, \quad m(s) := \psi(s) + \frac{\psi''(s)}{\|\psi''(s)\|^2}$$

werden „Krümmungsradius“ sowie „Krümmungsmittelpunkt“ genannt. Diese Bezeichnung ist dadurch motiviert, dass der sog. „Krümmungskreis“  $K(s)$ , d. h. der Kreis in der von Tangenten- und Hauptnormalenvektor  $\tau(s)$  bzw.  $\mathbf{n}(s)$  aufgespannten Ebene mit Mittelpunkt  $m(s)$  und Radius  $r(s)$ , die Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $\psi(s)$  berührt und dort dieselbe Tangente und Krümmung besitzt. Um dies zu sehen, sei ein Wert  $s_0$  fixiert und  $r_0 := r(s_0)$ ,  $m_0 := m(s_0)$ ,  $\tau_0 := \tau(s_0)$ ,  $\mathbf{n}_0 := \mathbf{n}(s_0)$  gesetzt. Die Parameterdarstellung des zugehörigen Krümmungskreises mit der Bogenlänge lautet nach Beispiel 1.5:

$$\omega(s) = m_0 + r_0 \left( -\mathbf{n}_0 \cos \frac{s-s_0}{r_0} + \tau_0 \sin \frac{s-s_0}{r_0} \right), \quad s \in [0, 2\pi r_0].$$

Für  $s = s_0$  ist  $\omega(s_0) = m_0 - r_0 \mathbf{n}_0 = \psi(s_0)$ , d. h.: Der Krümmungskreis berührt die Kurve im Punkt  $\psi(s_0)$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned}\omega'(s_0) &= \mathbf{n}_0 \sin \frac{s - s_0}{r_0} + \tau_0 \cos \frac{s - s_0}{r_0} = \tau_0 = \psi'(s_0), \\ \omega''(s_0) &= \frac{\mathbf{n}_0}{r_0} \cos \frac{s - s_0}{r_0} - \frac{\tau_0}{r_0} \sin \frac{s - s_0}{r_0} = \frac{\mathbf{n}_0}{r_0} = \mathbf{n}_0 \|\psi''(s_0)\|,\end{aligned}$$

d. h.: Krümmungskreis und Kurve haben in  $\psi(s_0)$  die gleiche Tangente und Krümmung.

### 1.1.2 Kurvenintegrale

Sei  $\Gamma$  eine rektifizierbare Jordan-Kurve in  $\mathbb{R}^n$  mit einer  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und Bogenlängenfunktion  $s(t)$ . Für eine Funktion  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  wird das Integral

$$\int_{\Gamma} f(x(s)) ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt, \quad (1.1.11)$$

sofern es existiert, das „Kurvenintegral“ von  $f$  über  $\Gamma$  genannt. Man nennt  $ds = \|\varphi'(t)\| dt$  das „Streckenelement“ entlang der Kurve  $\Gamma$ .

**Satz 1.4 (Kurvenintegral):** *Ist  $f$  entlang  $\Gamma$  stückweise stetig, so existiert das Kurvenintegral (1.1.11) und hat für alle  $C^1$ -Parametrisierungen von  $\Gamma$  denselben Wert.*

**Beweis:** i) Ist  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Parametrisierung der Kurve  $\Gamma$  und  $f$  stückweise stetig, so ist die Funktion  $F(t) := f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\|$  auf dem Intervall  $[a, b]$  stückweise stetig und damit R-integrierbar. Das Kurvenintegral (1.1.11) existiert also.

ii) Sei  $\psi : [0, |\Gamma|] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Parametrisierung der Kurve  $\Gamma$  mit der Bodenlänge. Nach Lemma 1.1 gibt es eine Bijektion  $h : [0, |\Gamma|] \rightarrow [a, b]$ , derart, dass  $\varphi(t) = \psi(h(t))$ . Ferner gilt  $\varphi'(t) = \psi'(h(t))h'(t)$  und folglich wegen  $\|\psi'(s)\| = 1$ :

$$\|\varphi'(t)\| = \|\psi'(h(t))\| |h'(t)| = |h'(t)|.$$

Der Transformationssatz für eindimensionale R-Integrale ergibt dann

$$\int_0^{|\Gamma|} f(x(s)) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) |h'(t)| dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt,$$

was zu zeigen war.

Q.E.D.

Das Kurvenintegral lässt sich auch im Sinne eines Riemann-Integrals als Limes zugehöriger Riemannscher Summen erklären. Seien

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$  mit Feinheit  $|Z| := \max_{k=1, \dots, m} |t_m - t_{m-1}|$ . Dann gilt mit beliebige Punkte  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ :

$$\int_{\Gamma} f(x) ds = \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\tau_k) \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\|.$$

Für das Kurvenintegral gelten dieselben Regeln wie für das Riemann-Integral über Intervalle, wobei die Beweise analog sind. Die drei wichtigsten Eigenschaften sind:

1. *Linearität:* Integrierbare Funktionen  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{\Gamma} (\alpha f(x) + \beta g(x)) ds = \alpha \int_{\Gamma} f(x) ds + \beta \int_{\Gamma} g(x) ds. \quad (1.1.12)$$

2. *Additivität:*  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  Zerlegung in rektifizierbare Teilkurven:

$$\int_{\Gamma} f(x) ds = \int_{\Gamma_1} f(x) ds + \int_{\Gamma_2} f(x) ds, \quad (1.1.13)$$

d. h.:  $f$  ist über  $\Gamma$  integrierbar genau dann, wenn es über  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  integrierbar ist.

3. *Beschränktheit:*  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar:

$$\left| \int_{\Gamma} f(x) ds \right| \leq |\Gamma| \sup_{x \in \Gamma} |f(x)|. \quad (1.1.14)$$

**Beispiel 1.7:** Wir geben einige einfache Beispiel von Kurvenintegralen:

1. Das Kurvenintegral über die konstante Funktion  $f \equiv 1$  ergibt nach Satz 1.2:

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = |\Gamma|.$$

2. Ist die Kurve mit einer Masse der Dichte  $\rho(x)$  belegt, so ergibt sich als Gesamtmasse

$$\mu(\Gamma) = \int_{\Gamma} \rho(x) ds = \int_a^b \rho(x(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

Der Schwerpunkt dieser massebelegten Kurve ist im Punkt

$$S = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \rho(x) ds = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_a^b x(t) \rho(x(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

3. Das Parabelstück

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$$

hat die Parametrisierung  $\varphi(t) := (t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Das Kurvenintegral einer Funktion  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$\int_{\Gamma} f(x) ds = \int_0^1 f(x(t)) \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Für  $f \equiv 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{4} \left[ u\sqrt{1 + u^2} + \log \left( u + \sqrt{1 + u^2} \right) \right]_0^2 = \frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})) = 1,46894\dots \end{aligned}$$

Wir wollen den Schwerpunkt des mit der Massedichte  $\rho \equiv 1$  belegten Kurvenstücks bestimmen:

$$S = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} x ds = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} x(t) \|\varphi'(t)\| ds = \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^1 (t, t^2) \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

Die  $x$ - und die  $y$ -Komponenten von  $S$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{4|\Gamma|} \int_0^2 u \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{12|\Gamma|} \left[ (1 + u^2)^{3/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{5^{3/2} - 1}{12|\Gamma|} = \frac{0,84836\dots}{|\Gamma|} \\ S_y &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^1 t^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{8|\Gamma|} \int_0^2 u^2 \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{64|\Gamma|} \left[ u(2u^2 + 1)\sqrt{1 + u^2} - \log(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} (18\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})) = \frac{0,65145\dots}{|\Gamma|} \end{aligned}$$

und somit  $S = (0,57363\dots, 0,44048\dots)$ .

Als nächstes betrachten wir sog. „Wegintegrale“ von Vektorfeldern, wie sie etwa in der Physik auftreten, z. B. Kraftfelder, elektrische Felder, Geschwindigkeitsfelder, u.s.w.

**Definition 1.9 (Wegintegral):** Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbarer Jordan-Weg und  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  das durch diesen parametrisierte (und orientierte) Jordan-Kurvenstück. Für ein stetiges Vektorfeld  $v = (v_1, \dots, v_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot ds := \int_a^b v(x(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b v_i(x(t)) \varphi'_i(t) dt$$

das „Wegintegral“ („Zirkulationsintegral“ oder „Arbeitsintegral“) von  $v$  über  $\Gamma$ . Das Vorzeichen des Wegintegrals hängt dabei von der Orientierung des Weges ab, d. h. von der Reihenfolge, in der die Punkte der zugehörigen Kurve durchlaufen werden.

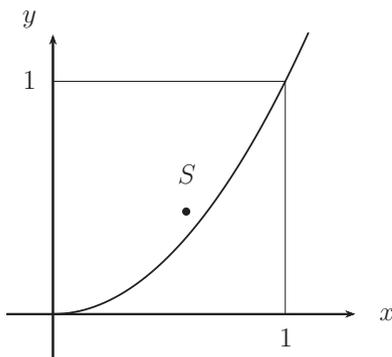


Abbildung 1.6: Parabelkurvenstück mit Massebelegung  $\rho \equiv 1$  und Schwerpunkt  $S$ .

**Bemerkung 1.3:** Das Wegintegral eines Vektorfeldes  $v$  über eine Kurve  $\Gamma$  ist das Integral der sog. „Pfaffschen Form“ (Differentialform 1. Ordnung)

$$v \cdot dx = \sum_{i=1}^n v_i(x) dx_i$$

über die durch  $\Gamma$  definierte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Zwischen dem Zirkulationsintegral eines Vektorfeldes und dem Kurvenintegral einer skalaren Funktion besteht eine enge Beziehung. Der Tangentialeinheitsvektor zur Kurve im Punkt  $x \in \Gamma$  ist gegeben durch

$$\tau = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}, \quad x = \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

Mit der Tangentialkomponente  $v_\tau := v \cdot \tau$  eines Vektorfeldes  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt daher

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot ds = \int_a^b v(x(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b v_\tau(x) \|\varphi'(t)\| dt = \int_{\Gamma} v_\tau(x) ds. \quad (1.1.15)$$

Das Wegintegral hat wie das Kurvenintegral die folgenden Eigenschaften:

1. *Linearität:* Für integrierbare Vektorfelder  $v, w : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{\Gamma} (\alpha v(x) + \beta w(x)) \cdot ds = \alpha \int_{\Gamma} v(x) \cdot ds + \beta \int_{\Gamma} w(x) \cdot ds. \quad (1.1.16)$$

2. *Additivität:* Für eine disjunkte Zerlegung  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  gilt:

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot ds = \int_{\Gamma_1} v(x) \cdot ds + \int_{\Gamma_2} v(x) \cdot ds. \quad (1.1.17)$$

3. *Beschränktheit*: Für beschränkte Vektorfelder gilt:

$$\left| \int_{\Gamma} v(x) \cdot ds \right| \leq |\Gamma| \sup_{x \in \Gamma} \|v(x)\|. \quad (1.1.18)$$

**Bemerkung 1.4:** Ist  $v$  ein Kraftfeld, so bedeutet das Wegintegral  $\int_{\Gamma} v(x) \cdot ds$  über eine Kurve die Arbeit, welche von dem Kraftfeld an einem Massepunkt entlang der Kurve  $\Gamma$  geleistet wird. Nach Satz 1.4 ist der Wert des Wegintegrals unabhängig von der Parametrisierung der Kurve gleicher Orientierung, d. h. unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der die Kurve durchlaufen wird. Dies gilt i. Allg. aber nur bei „stationären“, d. h. zeitunabhängigen Kraftfeldern. Für ein konstantes Feld  $v \equiv \hat{v}$  gilt

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot ds = \sum_{i=1}^n \hat{v}_i \int_a^b \varphi'_i(t) dt = \hat{v} \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)),$$

d. h.: Das Arbeitsintegral hängt nur von Endpunkten der Kurve  $\Gamma$  und nicht von der diese verbindenden Kurve ab. Z. B. gilt für das Schwerfeld  $v(x) := (0, 0, -g)$  in einem Punkt  $x$  an der Erdoberfläche:

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot ds = - \int_a^b g \varphi'_3(t) dt = g(\varphi_3(a) - \varphi_3(b)),$$

d. h.: Die vom Schwerfeld geleistete Arbeit hängt nur von der Höhendifferenz von Anfangs- und Endpunkt ab. Im Folgenden werden wir untersuchen, welche Vektorfelder diese Eigenschaft haben, dass ihr Wegintegral nur von den Endpunkten der Kurve abhängt.

**Definition 1.10 (Gradientenfelder):** Ein Vektorfeld  $v : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt „Gradientenfeld“, wenn es Gradient einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist:

$$v = \nabla f;$$

diese wird als „Stammfunktion“ von  $v$  bezeichnet. In physikalischem Kontext wird  $v$  auch „Potentialfeld“ und  $U = -f$  das „Potential“ von  $v$  genannt.

Nicht jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $v$  hat eine Stammfunktion. Für die Stammfunktion des Vektorfelds  $v(x, y) := (y, 0)$  müsste zum Beispiel  $\partial_x f = y$  und  $\partial_y f = 0$  bzw.  $\partial_y \partial_x f = 1$  und  $\partial_x \partial_y f = 0$  gelten, was der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von  $f$  widerspricht. Der folgende Satz ist die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung.

**Satz 1.5 (Wegunabhängigkeit):** *i) Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet (nicht leere, offene und zusammenhängende Teilmenge) und  $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Für eine beliebige orientierte Jordan-Kurve  $\Gamma \subset G$  ist das Wegintegral*

$$I_{\Gamma}(v) = \int_{\Gamma} v(x) \cdot ds$$

genau dann wegunabhängig, wenn  $v$  ein Gradientenfeld ist.

ii) Ist  $f$  eine Stammfunktion von  $v$ , so hat das Wegintegral über ein beliebiges Kurvenstück  $\Gamma$  mit Anfangspunkt  $x^a$  und Endpunkt  $x^b$  den Wert

$$I_{\Gamma}(v) = f(x^b) - f(x^a). \quad (1.1.19)$$

Insbesondere ist für jeden geschlossene Kurve  $I_{\Gamma}(v) = 0$ .

iii) Umgekehrt erhält man ausgehend von einem festen Punkt  $a \in G$  durch die Formel

$$f(x) := \int_{\Gamma(a,x)} v(x) \cdot ds, \quad x \in G, \quad (1.1.20)$$

eine Stammfunktion des Vektorfelds  $v$ . Dabei ist  $\Gamma(a, x) \subset G$  irgendeine Jordan-Kurve, welche  $a$  mit dem Punkt  $x \in G$  verbindet.

iv) Die Stammfunktion eines Vektorfelds ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Die Kurve  $\Gamma \subset G$  habe die Endpunkte  $x^a$  und  $x^b$ .

a) Sei  $v$  ein Gradientenfeld und  $f$  eine Stammfunktion. Dann gilt mit einer beliebigen  $C^1$ -Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $\Gamma$  nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\varphi(t)) \varphi'_i(t) = \sum_{i=1}^n v_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) = v(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

und somit

$$\int_{\Gamma} v(x) \cdot ds = \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) dt = f(x^b) - f(x^a).$$

Dies beweist auch die Aussage (ii).

b) Sei nun umgekehrt das Wegintegral unabhängig von der seine Endpunkte  $x^a$  und  $x^b$  verbindenden Kurve. Dann ist die Funktion

$$f(x) := \int_{\Gamma(x^a, x)} v(x) \cdot ds, \quad x \in G,$$

wohl definiert. Für  $\xi \in G$  und hinreichend kleines  $h \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\int_{x^a}^{\xi+h} v(x) \cdot ds = \int_{x^a}^{\xi} v(x) \cdot ds + \int_{\xi}^{\xi+h} v(x) \cdot ds$$

und

$$\int_{\xi}^{\xi+h} v(x) \cdot ds = v(\xi) \cdot h.$$

Also ist bei Verwendung eines geradlinigen Weges von  $\xi$  nach  $\xi + h$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} |f(\xi + h) - f(\xi) - v(\xi) \cdot h| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{\xi}^{\xi+h} (v(y) - v(\xi)) \cdot dy \right| \\ &\leq \max \{ |v(y) - v(\xi)|, |y - \xi| \leq h \}. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite für  $h \rightarrow 0$  gegen Null geht, ist  $f$  in  $\xi$  total differenzierbar mit der Ableitung  $\nabla f(\xi) = v(\xi)$ . Dies beweist auch die Aussage (iii).

c) Zum Nachweis von (iv) beachten wir, dass für die Differenz  $\delta f = f - g$  zweier Stammfunktionen von  $v$  gilt  $\nabla \delta f = 0$ . Für zwei Punkte  $x^a, x^b \in G$ , deren Verbindungsstrecke  $\Gamma(x^a, x^b)$  im Gebiet  $G$  liegt, gilt nach dem Mittelwertsatz

$$f(x^a) - f(x^b) = \nabla f(\xi) \cdot (x^b - x^a) = 0.$$

Also ist  $f$  auch entlang eines jeden Polygonzugs und folglich in ganz  $G$  konstant. Q.E.D.

Es bleibt, die Frage zu klären wie man einem Vektorfeld ansieht, ob es ein Gradientenfeld ist. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $v$  mit Stammfunktion  $f$  muss notwendigerweise die Bedingung

$$\partial_i v_j = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = \partial_j v_i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.1.21)$$

erfüllt sein. Damit kann man im konkreten Fall leicht überprüfen, ob ein gegebenes Vektorfeld Gradientenfeld sein kann. Die Bedingung (1.1.21) kann in zwei Dimensionen als Verschwinden der *skalaren* Rotation

$$\text{rot } v := \partial_y v_x - \partial_x v_y = 0, \quad (1.1.22)$$

und in drei Dimensionen als Verschwinden der *vektoriellen* Rotation

$$\text{rot } v := \nabla \times v = (\partial_y v_z - \partial_z v_y, \partial_z v_x - \partial_x v_z, \partial_x v_y - \partial_y v_x) = 0 \quad (1.1.23)$$

interpretiert werden. Die Beziehung (1.1.21) ist auch hinreichend für die *lokale* Existenz einer Stammfunktion, d. h. in der hinreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes  $x \in G$ , in dem (1.1.21) gilt. Sie ist aber i. Allg. nicht hinreichend für die *globale* Existenz einer Stammfunktion auf dem ganzen Definitionsgebiet des Vektorfelds.

**Beispiel 1.8:** Wir geben einige einfache Beispiele:

1. Für das Vektorfeld  $v = (ye^{xy}, xe^{xy} + 2y)$  gilt:

$$\partial_x v_y = e^{xy} + xye^{xy} = \partial_y v_x.$$

Tatsächlich ist, wie man leicht nachrechnet,  $f = e^{xy} + y^2$  eine Stammfunktion von  $v$ . Dagegen kann das Vektorfeld  $v = (ye^{xy}, xe^{xy} + 2x)$  wegen

$$\partial_x v_y = e^{xy} + xye^{xy} + 2 \neq \partial_y v_x.$$

keine Stammfunktion haben.

2. Das durch

$$v = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

definierte Vektorfeld  $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  erfüllt zwar die Verträglichkeitsbedingung (1.1.21),

$$\partial_y v_x = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x v_y,$$

ist aber in der gelochten Ebene  $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  kein Gradientenfeld. Das Wegintegral entlang des geschlossenen Einheitskreises  $\Gamma$  mit der Parametrisierung  $\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ist nämlich nicht Null sondern

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} v(x) \cdot ds &= \int_0^{2\pi} v(x) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{y \sin t}{x^2 + y^2} + \frac{x \cos t}{x^2 + y^2} \right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

In einer hinreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes von  $G$ , welche keinen Punkt der  $y$ -Achse enthält, existiert dagegen die Stammfunktion  $f := \arctan(y/x)$  mit

$$\nabla f = \left( \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2}, \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} \right) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Auf speziellen Gebieten kann aber die Existenz auch einer *globalen* Stammfunktion gesichert werden.

**Definition 1.11 (Sterngebiet):** Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  wird „sternförmig“ (bzw. „Sterngebiet“) genannt, wenn es einen Punkt  $\hat{x} \in G$  gibt, so dass für jeden Punkt  $x \in G$  die Verbindungsstrecke  $\{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda \hat{x} + (1 - \lambda)x, \lambda \in [0, 1]\}$  mit  $\hat{x}$  ganz in  $G$  liegt.

Jedes *konvexe* Gebiet ist automatisch Sterngebiet. Die gelochte Kreisscheibe

$$G = K_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist kein Sterngebiet. Dagegen ist die aufgeschnittene Scheibe

$$G = K_1(0) \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

Sterngebiet.

**Satz 1.6 (Stammfunktion):** Ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Sterngebiet und  $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, welches der Verträglichkeitsbedingung (1.1.21) genügt. Dann ist  $v$  ein Gradientenfeld.

**Beweis:** O.B.d.A. kann angenommen werden, dass  $G$  Sterngebiet bzgl. des Nullpunkts ist. Für einen Punkt  $x \in G$  liegt die zu dem geradlinigen Weg  $\varphi(t) := tx$ ,  $t \in [0, 1]$ , gehörende Kurve  $\Gamma$  ganz in  $G$ , und wir können definieren

$$f(x) := \int_{\Gamma} v(y) \cdot ds = \int_0^1 v(tx) \cdot x dt.$$

Es gilt, wegen  $\partial_i v_j = \partial_j v_i$ , für  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (v(tx) \cdot x) &= \sum_{j=1}^n \partial_i v_j(tx) t x_j + v_i(tx) \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j v_i(tx) t x_j + v_i(tx) = \nabla v_i(tx) \cdot (tx) + v_i(tx), \end{aligned}$$

und ebenso

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_i(tx)t) = \sum_{j=1}^n \partial_j v_i(tx) t x_j + v_i(tx) = \nabla v_i(tx) \cdot (tx) + v_i(tx).$$

Nach dem Satz über Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation bei parameterabhängigen Integralen (s. Kapitel 3 in diesem Band) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} (v(tx) \cdot x) dt = \int_0^1 (\nabla v_i(tx) \cdot (tx) + v_i(tx)) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (v_i(tx)t) dt = t v_i(tx) \Big|_0^1 = v_i(x). \end{aligned}$$

Also ist  $\nabla f(x) = v(x)$ .

Q.E.D.

**Bemerkung 1.5:** Satz 1.6 lässt sich verallgemeinern auf sog. „einfach zusammenhängende“ Gebiete. Dies sind solche, bei denen sich jede geschlossene Kurve durch eine stetige Deformation auf einen Punkt des Gebiets zusammenziehen lässt (kurz: In  $\mathbb{R}^2$  hat das Gebiet keine „Löcher“ und in  $\mathbb{R}^3$  hat es keine durchgehenden „Wurmlöcher“); die formale Definition dieser anschaulich klaren Eigenschaft wird hier nicht gegeben. Jedes Sterngebiete ist in diesem Sinne einfach zusammenhängend. In Abschnitt 2.1 von Analysis 2 hatten wir für „zusammenhängend“ eine topologische Definition gegeben:

*Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt „zusammenhängend“, wenn sie nicht als Vereinigung zweier (nicht leerer) relativ-offener und disjunkter Mengen darstellbar ist.*

Für die jetzigen Zwecke erweist sich eine alternative Definition als praktischer:

*Eine Menge  $M \subset \mathbb{K}^n$  heißt „weg-zusammenhängend“, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in M$  eine verbindende Jordan-Kurve gibt, die ganz in  $M$  verläuft.*

Statt einer Jordan-Kurve kann hier auch ein verbindender Polygonzug verwendet werden. Man überlegt sich leicht, dass eine *weg-zusammenhängende* Menge auch topologisch *zusammenhängend* ist. Die Umkehrung dieser Aussage gilt aber nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}_+, y = \sin(1/x)\} \cup \{0\}.$$

Ist die Menge  $M$  aber *offen*, dann sind die beiden Zusammenhangsbegriffe äquivalent. Dies sieht man wie folgt: Für einen beliebigen Punkt  $a \in M$  definieren wir die Menge

$$U := \{x \in M : \text{Es gibt einen Streckenzug in } M \text{ von } a \text{ nach } x.\}.$$

Mit  $M$  ist offensichtlich auch die Menge  $U$  offen. Ferner ist auch die Menge  $V := M \setminus U$  offen. Also ist  $M = U \cup V$  eine disjunkte, offene Zerlegung. Da  $M$  nach Voraussetzung zusammenhängend ist, können nicht beide Komponenten  $U, V$  nicht leer sein. Wegen  $a \in U$  ist folglich  $V = \emptyset$ , d. h.:  $M = U$ , was zu zeigen war. Die Details dieser Argumentation seien als Übungsaufgabe gestellt.

**Beispiel 1.9:** Wir kommen wieder auf den physikalischen Kontext zurück. Ein Kraftfeld  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird „konservativ“ genannt, wenn die von ihm entlang einer Kurve geleistete Arbeit nur von den Endpunkten abhängt, d. h. wenn die entlang einer geschlossenen Kurve geleistete Arbeit Null ist. Nach Satz 1.5 ist ein Kraftfeld konservativ genau dann, wenn es ein Gradientenfeld ist. Betrachten wir als Beispiel die Schwerkraft, welche von einer im Ursprung befindlichen Masse  $\mu$  erzeugt wird. Nach dem Newtonschen Gesetz hat dieses die Gestalt

$$F(x) = -\gamma \frac{\mu x}{\|x\|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

mit der „Gravitationskonstante“  $\gamma > 0$ . Zur Berechnung von  $\nabla \times F$  betrachten wir

$$\partial_i \frac{x_j}{\|x\|^3} = \frac{\|x\|^3 \delta_{ij} - 3\|x\|^2 x_j x_i \|x\|^{-1}}{\|x\|^6} = \frac{\|x\|^2 \delta_{ij} - 3x_j x_i}{\|x\|^5}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Unter Beachtung von  $\operatorname{rot} F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)^T$  ergibt dies

$$\left( \operatorname{rot} \frac{x}{\|x\|^3} \right)_1 = \frac{\|x\|^2 \delta_{23} - 3x_3 x_2}{\|x\|^5} - \frac{\|x\|^2 \delta_{32} - 3x_2 x_3}{\|x\|^5} = 0,$$

und analog für die anderen beiden Komponenten. Der aufgeschnittene Raum  $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3, x_2 = x_3 = 0, x_1 \leq 0\}$  ist sternförmig, so dass nach Satz 1.6 auf  $G$  ein Potential von  $F$  existiert. Dieses hat, wie man leicht verifiziert, die Form

$$U(x) := -\gamma \frac{\mu}{\|x\|}, \quad x \in G.$$

Da sich  $U$  stetig differenzierbar auf die Menge  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  fortsetzen lässt, ist es Potential von  $F$  auf ganz  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Also ist das Schwerfeld konservativ. Da sich mehrere Kraftfelder linear überlagern, erzeugen mehrere Massen  $\mu_i, i = 1, \dots, N$ , in Punkten  $x_i, i = 1, \dots, N$ , folgendes Kraftfeld mit zugehörigem Potential:

$$F(x) = -\gamma \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i (x - x_i)}{\|x - x_i\|^3}, \quad U(x) = -\gamma \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\|x - x_i\|}.$$

### 1.1.3 Flächen in $\mathbb{R}^3$

Im Folgenden betrachten wir Flächen in  $\mathbb{R}^n$ , wobei wir uns im Interesse der Übersichtlichkeit und im Hinblick auf die relevanten physikalischen Anwendungen auf den  $\mathbb{R}^3$  beschränken. Zur Beschreibung von solchen Flächen verwenden wir wie bei Kurven Parameterdarstellungen, wobei die Parameterbereiche nun zweidimensional sind. Diese Parameterbereiche sind quadrierbare Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ , deren Variablen mit  $u = (u, v)$

bezeichnet werden. Für die Punkte im  $\mathbb{R}^3$  wird in der Regel die koordinatenorientierte Bezeichnung  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  verwendet. Wir hatten schon bei der Betrachtung von Kurven in  $\mathbb{R}^n$  gesehen, dass die bloße Voraussetzung der *Stetigkeit* der Parametrisierung sehr pathologische Kurvengebilde zulässt, z. B. die beiden Extremfälle der *einpunktigen* Kurve und der *gebietsfüllenden* Peano-Kurve. Um solche Pathologien bei Flächen auszuschließen, werden wir hier nur stetig differenzierbare (oder wenigstens stückweise stetig differenzierbare) und in einem gewissen Sinne „reguläre“ Parametrisierungen zulassen.

**Definition 1.12 (Fläche in  $\mathbb{R}^3$ ):** *i) Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  ein quadrierbarer, offene Parameterbereich und  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine injektive, stetig differenzierbare und L-stetige Abbildung mit der Eigenschaft*

$$\text{Rang } \varphi'(u, v) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_x & \partial_u \varphi_y & \partial_u \varphi_z \\ \partial_v \varphi_x & \partial_v \varphi_y & \partial_v \varphi_z \end{pmatrix} = 2, \quad (u, v) \in M. \quad (1.1.24)$$

*Dann wird die Bildmenge  $\Gamma = \varphi(M)$  eine „offene reguläre Fläche“ mit Parametrisierung  $\varphi$  genannt. (Dabei sind die Mengen  $M$  und  $\Gamma$  nicht notwendig zusammenhängend.)*

*ii) Die L-stetige Parameterabbildung  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  lässt sich zu einer gleichfalls L-stetigen Abbildung  $\bar{\varphi} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  fortsetzen. Im Falle*

$$\varphi(M) \cap \bar{\varphi}(\partial M) = \emptyset \quad (1.1.25)$$

*heißt dann  $\bar{\Gamma} := \bar{\varphi}(\bar{M})$  eine „abgeschlossene Fläche“. Eine abgeschlossenen Fläche ohne (relativen) Rand heißt „geschlossen“.*

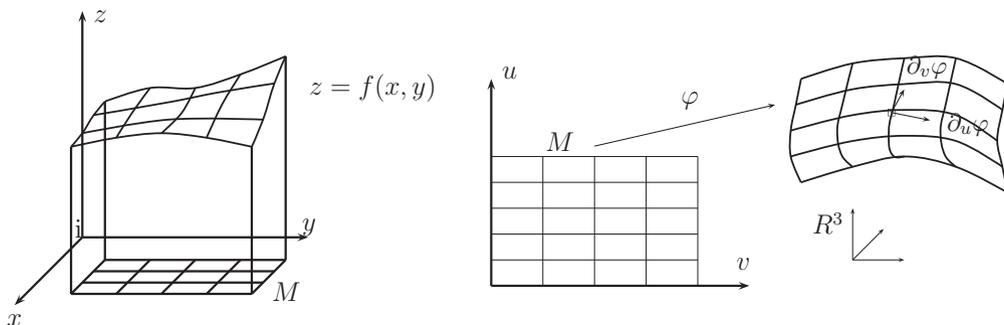


Abbildung 1.7: Darstellung einer Fläche in  $\mathbb{R}^3$  als Funktionsgraph (links) und mit Hilfe einer Parameterabbildung (rechts).

Die Bedingung (1.1.25) besagt, dass die abgeschlossene Fläche  $\bar{\Gamma}$  sich nicht selbst berührt in dem Sinne, dass kein (relativer) Randpunkt gleichzeitig (relativer) innerer

Punkt sein kann. Die Rangbedingung (1.1.24) an die Funktionalmatrix der Parametrisierung  $\varphi$  besagt, dass stets eine der drei möglichen  $(2 \times 2)$ -Unterdeterminanten von  $\varphi'(u, v)$  ungleich Null ist. Sei etwa

$$\det \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_x & \partial_u \varphi_y \\ \partial_v \varphi_x & \partial_v \varphi_y \end{pmatrix} \neq 0$$

in einem Punkt  $(u_0, v_0) \in M$ . Wegen der Stetigkeit der Ableitungen von  $\varphi$  gilt dies auch in einer ganzen Umgebung  $U(u_0, v_0) \subset M$ . Dann existiert nach dem Satz über reguläre Abbildungen in einer Umgebung  $V(x_0, y_0)$  von  $(x_0, y_0) := (\varphi_x(u_0, v_0), \varphi_y(u_0, v_0))$  die Umkehrabbildung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_u(x, y) \\ \psi_v(x, y) \end{pmatrix}.$$

In einer Umgebung von  $\varphi(u_0, v_0)$  lässt sich das Flächenstück  $\Gamma$  also als Graph einer Funktion  $F(x, y)$  darstellen:

$$z = F(x, y) := \varphi_z(\psi_u(x, y), \psi_v(x, y)).$$

Eine analoge Aussage gilt offenbar für alle Punkte der Fläche  $\Gamma$ . Die obige Beziehung besagt in anderen Worten, dass sich das Flächenstück  $\Gamma$  lokal auch als sog. „Null-Niveaulinie“ der Funktion  $\Phi(x, y, z) := z - F(x, y)$  interpretieren lässt.

Flächen bzw. Flächenstücke  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  können also auf die folgende Weise gegeben sein:

- Durch eine Parameterdarstellung  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\Gamma = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in M\}.$$

- Als Graph einer Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\Gamma = \{(u, v, F(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in M\}.$$

- Als Null-Niveaulinie einer Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x, y, z) = 0\}.$$

- Als Rand eines Gebiets  $G \subset \mathbb{R}^3$ :  $\Gamma := \partial G$ .

**Beispiel 1.10:** Die Oberfläche  $\Gamma(a, b, c)$  des Ellipsoiden mit Halbachsen  $a, b, c > 0$  in  $\mathbb{R}^3$  hat die folgenden Darstellungen:

1. Parameterdarstellung (Kugelkoordinaten):  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$

$$\varphi(u, v) := \begin{pmatrix} a \cos u \sin v \\ b \sin u \sin v \\ c \cos v \end{pmatrix}.$$

2. Darstellung als Funktionsgraph:  $(x, y) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u/a)^2 + (v/b)^2 \leq 1\}$

$$z = F(x, y) := \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

3. Darstellung als Null-Niveaulinie:  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\Phi(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

**Bemerkung 1.6:** Nicht jeder Rand eines Gebiets  $G \subset \mathbb{R}^3$  ist eine „offene Fläche“ im Sinn von Definition 1.12. Zum Beispiel lässt sich der (geschlossenen) Rand  $\partial W$  des Einheitswürfels

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\},$$

nicht stetig differenzierbar parametrisieren. Dieses Beispiel verdeutlicht den Zweck der hier verwendeten, etwas umständlichen Definition von „Fläche“. In diesem Sinne ist der Rand des Einheitswürfels eine *abgeschlossene* Fläche mit stückweise stetig differenzierbarer und L-stetiger Parametrisierung; sie ist aus den Abschlüssen der sechs ebenen, regulären Seitenflächen (*offene* Flächenstücke) zusammengesetzt.

**Bemerkung 1.7:** Der hier eingeführte geometrische Begriff einer „Fläche“ im  $\mathbb{R}^3$  ist verwandt zu dem einer „differenzierbaren Mannigfaltigkeit“. Dies ist der allgemeine topologische Oberbegriff für Kurven, Flächen und anderer geometrischer Objekte, die lokal aussehen wie ein euklidischer Raum. Im Unterschied zu allgemeinen „topologischen“ Mannigfaltigkeiten ist es auf *differenzierbaren* Mannigfaltigkeiten möglich, über Ableitungen und verwandte Konzepte zu sprechen. Solche spezielle Mannigfaltigkeiten sind Hauptgegenstand der sog „Differentialgeometrie“. Mannigfaltigkeiten sind als „topologische Räume“ naturgemäß (*relativ*) *offen*, während der geometrische Flächenbegriff auch abgeschlossene Strukturen zulässt. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten spielen eine zentrale Rolle in der theoretischen Physik, insbesondere in der klassischen Mechanik bei Systemen, die Zwangsbedingungen unterliegen, und bei der Beschreibung der Raumzeit in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Für Flächen sind die anschaulichen Begriffe wie Tangentialebene, Flächeninhalt u.s.w. wieder unter Zuhilfenahme von Parametrisierungen definiert, dabei aber unabhängig gegenüber Parametertransformationen.

**Definition 1.13 (Koordinatenlinie, Tangentialebene, Normale):** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  eine offene reguläre Fläche mit Parametrisierung  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

i) Für festes  $v$  ist  $\varphi(\cdot, v)$  die Parametrisierung einer Kurve, welche in der Fläche verläuft und „Koordinatenlinie“ bzw. „ $u$ -Linie“ genannt wird. Entsprechend ist die  $v$ -Linie für festes  $u$  definiert.

ii) Der Tangentialvektor der  $u$ -Linie im Flächenpunkt  $\hat{x} = \varphi(\hat{u}) \in \Gamma$  ist gegeben durch  $\partial_u \varphi(\hat{u})$ . Entsprechend ist  $\partial_v \varphi(\hat{u})$  Tangentialvektor der  $v$ -Linie. Aufgrund der Rangbedingung (1.1.24) sind die beiden Tangentialvektoren linear unabhängig und spannen die sog. „Tangentialebene“ im Flächenpunkt  $\hat{x}$  auf:

$$T(\hat{x}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \hat{x} + \lambda \partial_u \varphi(\hat{u}) + \mu \partial_v \varphi(\hat{u}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

iii) Jeder im Flächenpunkt  $\hat{x}$  auf der Tangentialebene senkrecht stehende Vektor  $n \neq 0$  heißt „Normalenvektor“ oder „Normale“. Ein Normalenvektor mit Norm  $\|n\| = 1$  heißt „Einheitsnormale“. Eine Einheitsnormale erhält man als normiertes äußeres Produkt der beiden Tangentialvektoren durch

$$n(\hat{u}) = \frac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|}(\hat{u}). \quad (1.1.26)$$

Zur Erklärung der Formel (1.1.26) für die Flächennormalen rekapitulieren einige Eigenschaften des „äußeren Produkts“ zweier Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^3$ :

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Dieses Bildungsgesetz lässt sich leicht durch die folgende formale Darstellung als Determinante merken:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^{(1)} & a_1 & b_1 \\ e^{(2)} & a_2 & b_2 \\ e^{(3)} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = e^{(1)} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - e^{(2)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e^{(3)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (1.1.27)$$

mit den kartesischen Einheitsvektoren  $e^{(i)}$ . Aus dieser Darstellung und den üblichen Eigenschaften von Determinanten leiten wir die folgende Regeln ab:

$$a \times b = -b \times a, \quad a \times a = 0, \quad (1.1.28)$$

sowie für  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha a \times c + \beta b \times c. \quad (1.1.29)$$

Durch direktes Nachrechnen bestätigt man

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2. \quad (1.1.30)$$

**Lemma 1.5:** i) Das Vektorprodukt  $a \times b$  steht senkrecht auf beiden Vektoren  $a$  und  $b$ :

$$a \times b \perp \text{span}\{a, b\}. \quad (1.1.31)$$

ii) Mit dem Winkel  $\theta \in [0, \pi]$  zwischen zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta. \quad (1.1.32)$$

Dies ist gerade der Inhalt des von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms.

iii) Seien  $a, b \in \mathbb{R}^3$  zwei Vektoren und  $A = [a, b] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  die mit diesen gebildete Spaltenmatrix. Dann gilt mit einer beliebigen Matrix  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  für die Spalten der Matrix  $AC = [\bar{a}, \bar{b}]$ :

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|a \times b\| |\det C|. \quad (1.1.33)$$

**Beweis:** i) Für Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  gilt (Übungsaufgabe):

$$c \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(a, b, c),$$

wobei die Vektoren als Spaltenvektoren zu verstehen sind. Hieraus folgt, dass

$$a \cdot (a \times b) = 0 = b \cdot (a \times b).$$

ii) Der Winkel  $\theta$  zwischen zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^3$  ist bestimmt durch

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}.$$

Also folgt mit (1.1.30)

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2 \theta = \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2 \theta.$$

iii) Nach Definition gelten die vektoriellen Beziehungen (nachrechnen!)

$$\bar{a} = c_{11}a + c_{21}b, \quad \bar{b} = c_{12}a + c_{22}b.$$

Durch Ausmultiplizieren folgt unter Ausnutzung von (1.1.28):

$$\begin{aligned} \|\bar{a} \times \bar{b}\| &= \|(c_{11}a + c_{21}b) \times (c_{12}a + c_{22}b)\| \\ &= \|c_{11}c_{12}a \times a + c_{11}c_{22}a \times b + c_{21}c_{12}b \times a + c_{21}c_{22}b \times b\| \\ &= \|(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12})a \times b\| = \|a \times b\| |\det C|, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Q.E.D.

Das folgende Lemma ist das Analogon von Lemma 1.1 für Flächen.

**Lemma 1.6:** Sind  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\varphi^* : M^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei Parametrisierungen derselben offenen, regulären Fläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ , so gibt es einen Diffeomorphismus  $h : M^* \rightarrow M$ , so dass

$$\varphi^* = \varphi \circ h. \quad (1.1.34)$$

**Beweis:** Der Beweis bedient sich analoger Argumente wie für die entsprechende Aussage für die Parametrisierungen von Kurven (Lemma 1.1). Q.E.D.

**Definition 1.14:** Eine offene reguläre Fläche  $\Gamma$  heißt „orientierbar“, wenn es möglich ist, auf ihr eine (bzgl. der Flächenpunkte) stetige Einheitsnormalenfunktion

$$n : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \|n(x)\| = 1, \quad x \in \Gamma,$$

zu definieren. Damit wird dann eine Seite der Fläche als die „positive“ ausgezeichnet.

**Lemma 1.7:** Es sei  $\bar{\Gamma}$  eine abgeschlossene Fläche mit Parametrisierung  $\varphi : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf einem zusammenhängenden Parameterbereich  $\bar{M}$ . Die Parameterabbildung  $\varphi$  sei auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $\bar{M}$  definiert, stetig differenzierbar und injektiv. Dann ist die abgeschlossene Fläche  $\bar{\Gamma}$  orientierbar, d. h. besitzt eine stetige Einheitsnormalenfunktion  $n : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Jede andere Einheitsnormalenfunktion zu  $\bar{\Gamma}$  ist entweder gleich  $n$  oder gleich  $-n$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Normalenfunktion zur Fläche  $\bar{\Gamma} = \{x = \varphi(u), u \in \bar{M}\}$ :

$$\bar{n}(u) = \frac{\partial_u \varphi(u) \times \partial_v \varphi(u)}{\|\partial_u \varphi(u) \times \partial_v \varphi(u)\|}, \quad u \in \bar{M}.$$

Diese ist in  $\bar{M}$  stetig. Da auch die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1} : \bar{\Gamma} \rightarrow \bar{M}$  stetig ist, wird durch

$$n(x) := \bar{n}(\varphi^{-1}(x))$$

eine auf  $\bar{\Gamma}$  stetige Normalenfunktion definiert. Ist  $n^*$  eine weitere solche Funktion, so ist  $n(x) = \pm n^*(x)$ , also  $\delta(x) := \|n(x) - n^*(x)\| = 0$  oder  $2$ . Wir wählen einen festen Punkt  $\hat{x} \in \bar{\Gamma}$ . Da  $\bar{M}$  zusammenhängend ist, kann man einen beliebigen Punkt  $x \in \bar{\Gamma}$  mit  $\hat{x}$  durch einen in  $\bar{\Gamma}$  verlaufende Jordan-Kurve  $\gamma$  mit Parametrisierung  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  verbinden. Die Funktion  $\delta(\varphi(t))$  ist stetig und, da sie nur die Werte  $2$  und  $0$  annehmen kann, ist sie konstant. Hieraus folgt  $\delta(x) \equiv \delta(\hat{x})$  auf  $\bar{\Gamma}$ . Im Falle  $\delta(\hat{x}) = 0$  ist  $n = n^*$ ; im Fall  $\delta(\hat{x}) = 2$  ist  $n = -n^*$ . Q.E.D.

Das klassische Beispiel einer *nicht orientierbaren* Fläche ist das sog. „Möbius<sup>3</sup>-Band“, welches eine abgeschlossene Fläche im Sinne von Definition 1.12 darstellt. Auf dieses Beispiel ist Lemma 1.7 nicht anwendbar, da die zugehörige Parametrisierung  $\varphi : [-a, a] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  nicht injektiv ist. Dies gilt aber z. B. auch für ein nicht gedrehtes Band oder eine ganze Kugeloberfläche, welche sehr wohl orientierbar sind.

---

<sup>3</sup>August Ferdinand Möbius (1790–1868): Deutscher Mathematiker und Astronom; Professor in Leipzig; Beiträge zur Analytischen Geometrie und zur Himmelsmechanik.

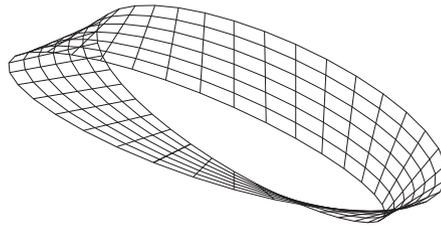


Abbildung 1.8: Möbius-Band als Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche.

### Flächeninhalt

Zur Definition des Inhalts  $|\Gamma|$  einer regulären Fläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  mit Parametrisierung  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  stellen wir folgende Vorbetrachtung an. Sei

$$R = [u, u + h] \times [v, v + k] \subset M \quad (h, k > 0)$$

ein kleines Rechteck. Nach der Taylor-Formel gilt dann für  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ :

$$\varphi(u + \alpha h, v + \beta k) \approx \varphi(u, v) + \alpha h \partial_u \varphi(u, v) + \beta k \partial_v \varphi(u, v).$$

Stünde hier das Gleichheitszeichen, d. h.: Wäre die Funktion  $\varphi$  auf  $K$  linear, so wäre die Bildmenge  $\varphi(K)$  gerade das von den (linear unabhängigen) Vektoren  $h \partial_u \varphi(u, v)$  und  $k \partial_v \varphi(u, v)$  aufgespannte und um den Vektor  $\varphi(u, v)$  verschobene Parallelogramm

$$P := \{x = \alpha h \partial_u \varphi(u, v) + \beta k \partial_v \varphi(u, v), \alpha, \beta \in [0, 1]\}.$$

Dieses hat nach Lemma 1.5 (ii) den Flächeninhalt

$$|P| = \|h \partial_u \varphi \times k \partial_v \varphi\| = hk \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|.$$

Zerlegt man nun die Menge  $M$  in kleine Rechtecke  $R_i$  zu Punkten  $(u_i, v_i)$ , so kann die entsprechende Riemannsche Summe gedeutet werden als Summe der Flächeninhalte der den einzelnen Rechtecken entsprechenden Bild-Parallelogramme, welche annähernd gleich den Flächen  $\varphi(K_i)$  sind:

$$\sum_{i=1}^m |\varphi(K_i)| \approx \sum_{i=1}^m \|\partial_u \varphi(u_i, v_i) \times \partial_v \varphi(u_i, v_i)\| h_i k_i$$

Dies legt die folgende Definition nahe.

**Definition 1.15:** Für eine abgeschlossene reguläre Fläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  mit Parametrisierung  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist der „Flächeninhalt“  $|\Gamma|$  definiert durch

$$|\Gamma| := \int_M \|\partial_u \varphi(u, v) \times \partial_v \varphi(u, v)\| d(u, v).$$

Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von  $\varphi$  existiert das Riemannsche Integral.

**Satz 1.7 (Flächeninhalt):** *Der Inhalt  $|\Gamma|$  einer regulären Fläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  ist unabhängig von ihrer (stetig differenzierbaren) Parametrisierung.*

**Beweis:** i) Wir beweisen die Behauptung zunächst unter der stärkeren Annahme, dass die Parametrisierung  $\varphi$  in einer (offenen) Umgebung des Abschlusses  $\overline{M}$  erklärt und  $\varphi|_M$  eine offene Fläche beschreibt. Seien  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\varphi^* : M^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei stetig differenzierbare Parametrisierungen derselben Fläche  $\Gamma$ . Dann gibt es nach Lemma 1.6 einen Diffeomorphismus  $h : M^* \rightarrow M$  mit  $\varphi^* = \varphi \circ h$ . Aus der Beziehung  $\varphi^{*\prime}(\cdot) = \varphi'(h(\cdot))h'(\cdot)$  folgt nach Lemma 1.5 (iii):

$$\|\partial_{u^*}\varphi^* \times \partial_{v^*}\varphi^*\| = \|\partial_u\varphi \circ h \times \partial_v\varphi \circ h\| |\det h'|.$$

Die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale liefert dann

$$\begin{aligned} \int_M \|\partial_u\varphi \times \partial_v\varphi\| d(u, v) &= \int_{M^*} \|\partial_u\varphi \circ h \times \partial_v\varphi \circ h\| |\det h'| d(u^*, v^*) \\ &= \int_{M^*} \|\partial_{u^*}\varphi^* \times \partial_{v^*}\varphi^*\| d(u^*, v^*). \end{aligned}$$

Dies ist der Beweis unter den obigen starken Voraussetzungen.

ii) Ist die Fläche  $\Gamma$  von dem in der Definition 1.12 beschriebenen Typ, so ist die Parameterabbildung  $\varphi$  auf  $\overline{M}$  i. Allg. nur L-stetig und kein Diffeomorphismus. Die Schließung dieser Lücke erfordert eine ähnlich aufwendige Argumentation wie im Beweis des Transformationsatzes unter ähnlichen Bedingungen. Da diese Argumentation wenig zum Verständnis der folgenden Zusammenhänge beiträgt verzichten wir hier auf ihre Darstellung. Der interessierte Leser sei auf die Literatur verwiesen, z. B. W. Walter: Analysis II (Abschnitt 8.4), Springer, 1990. Q.E.D.

## Rotationsflächen

Es sei  $C$  eine Jordan-Kurve in der  $(x, z)$ -Ebene mit Parametrisierung

$$(x, z) = (x(t), z(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Die Kurve sei stückweise glatt und  $x(t) > 0$  bis auf endlich viele  $t \in [a, b]$ . Durch Rotation von  $C$  um die  $z$ -Achse entsteht eine abgeschlossene „Rotationsfläche“  $\Gamma_C$ . Diese hat die Parametrisierung

$$\varphi(t, \theta) := (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)), \quad (t, \theta) \in \overline{M} := [a, b] \times [0, 2\pi].$$

Für den Flächeninhalt von Rotationsflächen gilt die folgende „2. Guldinsche<sup>4</sup> Regel“.

---

<sup>4</sup>Paul Guldin (1577–1643): Schweizer Mathematiker; gelernter Goldschmied, als Jesuit Ausbildung in Mathematik; Lehrer und Prof. in Graz und Wien; Arbeiten zur Berechnung von Kurvenlängen; fand die nach ihm benannten Regeln.

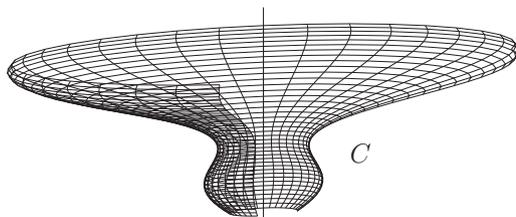


Abbildung 1.9: Eine Rotationsfläche mit erzeugender Kurve  $C$ .

**Korollar 1.1 (2. Guldinsche Regel):** Der Flächeninhalt einer Rotationsfläche  $\Gamma_C$  ist gleich dem Produkt der Länge der erzeugenden Kurve  $C$  mit der Länge  $2\pi r_C$  des Weges, den ihr Schwerpunkt zurücklegt:

$$|\Gamma_C| = 2\pi r_C |C|. \quad (1.1.35)$$

**Beweis:** Es ist  $\partial_t \varphi = (x' \cos \theta, x' \sin \theta, z')$ ,  $\partial_\theta \varphi = (-x \sin \theta, x \cos \theta, 0)$  und somit

$$\|\partial_t \varphi\| = \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad \|\partial_\theta \varphi\| = x(t), \quad \partial_t \varphi(t) \cdot \partial_\theta \varphi(t) = 0.$$

Also wird nach (1.1.30)

$$\|\partial_t \varphi \times \partial_\theta \varphi\| = x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Der Inhalt der Rotationsfläche ergibt sich folglich nach Satz 1.7 zu

$$\begin{aligned} |\Gamma_C| &= \int_M \|\partial_t \varphi \times \partial_\theta \varphi\| d(t, \theta) = \int_a^b \int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} d\theta dt \\ &= 2\pi \int_a^b x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

Dasselbe Integral tritt auch auf bei der Berechnung des Schwerpunkts der Kurve  $C$  bei konstanter Massebelegung  $\rho \equiv \rho_0$ :

$$S_x = \frac{1}{\mu(C)} \int_a^b \rho x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt, \quad \mu(C) = \rho_0 |C|.$$

Kombination der letzten beiden Beziehungen ergibt die Gleichung (1.1.35). Q.E.D.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die sog. „1. Guldinsche Regel“ zum Volumen von „Rotationskörpern“ an.

**Korollar 1.2 (1. Guldinsche Regel):** Das Volumen eines Rotationskörpers  $V_F$  ist gleich dem Produkt des Inhalts der erzeugenden Fläche  $F$  mit der Länge  $2\pi r_F$  des Weges, den sein Schwerpunkt zurücklegt:

$$|V_F| = 2\pi r_F |F|. \quad (1.1.37)$$

**Beweis:** Der Beweis wird als Übungsaufgabe gestellt. Q.E.D.

### 1.1.4 Flächenintegrale

Sei  $\Gamma$  ein (offenes, reguläres) Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$  mit der Parametrisierung  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte (stückweise stetige) Funktion. Ein „Flächenintegral“ von  $f$  über  $\Gamma$  ist erklärt durch

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) \, do := \int_M f(\varphi(u, v)) \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| \, d(u, v), \quad (1.1.38)$$

falls das rechte Integral existiert. Da  $\partial M$  eine Nullmenge ist, spielt es dabei keine Rolle, ob über  $M$  oder  $\overline{M}$  integriert wird.

**Satz 1.8 (Flächenintegral):** *Der Wert des Flächenintegrals (1.1.38) ist unabhängig von der speziellen Parametrisierung.*

**Beweis:** Der Beweis verläuft analog wie beim Flächeninhalt mit derselben Einschränkung hinsichtlich der Voraussetzungen an die Parametrisierung der betrachteten Fläche. Q.E.D.

Das Flächenintegral lässt sich wieder im Sinne eines Riemann-Integrals als Limes zugehöriger Riemannscher Summen erklären. Seien

$$Z = \{B_k, k = 1, \dots, m\}$$

zulässige Zerlegungen des Parameterbereichs  $M$  mit Feinheit  $|Z| := \max_{k=1, \dots, m} \text{diam}(B_k)$  und  $\Gamma_k := \varphi(B_k)$  die zugehörigen Flächenstücke. Mit beliebigen Punkten  $(u_k, v_k) \in B_k$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, do &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\varphi(u_k, v_k)) |\Gamma_k| \\ &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\varphi(u_k, v_k)) \|(\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi)(u_k, v_k)\| |B_k|. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich analog zum Kurvenintegral auch für das Flächenintegral die folgenden für das Riemann-Integral üblichen Eigenschaften:

1. *Linearität:* Integrierbare Funktionen  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g) \, do = \alpha \int_{\Gamma} f \, do + \beta \int_{\Gamma} g \, do. \quad (1.1.39)$$

2. *Additivität:*  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  Zerlegung in rektifizierbare Teilflächen:

$$\int_{\Gamma} f \, do = \int_{\Gamma_1} f \, do + \int_{\Gamma_2} f \, do. \quad (1.1.40)$$

3. *Beschränktheit*:  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar:

$$\left| \int_{\Gamma} f \, do \right| \leq |\Gamma| \sup_{\Gamma} |f|. \quad (1.1.41)$$

**Korollar 1.3:** Ist das Flächenstück  $\Gamma$  als Graph einer Funktion  $z = \psi(x, y)$ ,  $(x, y) \in M$ , gegeben, so lautet die Formel für das Flächenintegral

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) \, do = \int_M f(x, y, \psi(x, y)) \sqrt{1 + \partial_x \psi^2 + \partial_y \psi^2} \, d(x, y). \quad (1.1.42)$$

**Beweis:** Für das Flächenintegral mit allgemeiner Parametrisierung  $\varphi = \varphi(u, v)$  ist

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) \, do = \int_M f(\varphi(u, v)) \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| \, d(u, v).$$

Für die spezielle Parametrisierung  $\varphi(x, y) := (x, y, \psi(x, y))$  gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_x \varphi \times \partial_y \varphi\| &= \|(1, 0, \partial_x \psi) \times (0, 1, \partial_y \psi)\| \\ &= \|(-\partial_x \psi, -\partial_y \psi, 1)\| = \sqrt{\partial_x \psi^2 + \partial_y \psi^2 + 1}. \end{aligned}$$

Dies beweist die Darstellung (1.1.42).

Q.E.D.

**Beispiel 1.11:** Wir wollen die Funktion  $f(x, y, z) = z^2$  über die Oberfläche der Kugel  $K_R(0)$  des  $\mathbb{R}^3$  integrieren. Wegen der Symmetrie von  $f$  bzgl. der  $(x, y)$ -Achse genügt es hierfür, die obere Halbkugel  $\Gamma$  zu betrachten. Diese ist Limes für  $\varepsilon \rightarrow 0$  der Graphen  $\Gamma_{\varepsilon}$  der Funktion

$$z = \psi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in M_{\varepsilon} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq R - \varepsilon\}.$$

Nach Formel (1.1.42) ergibt sich also für das Flächenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} z^2 \, do &= \int_{M_{\varepsilon}} (R^2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \, d(x, y) \\ &= \int_{M_{\varepsilon}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} R \, d(x, y) \end{aligned}$$

und nach Einführung von Polarkoordinaten

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} z^2 \, do = \int_0^{2\pi} \int_0^{R-\varepsilon} R \sqrt{R^2 - r^2} r \, dr \, d\theta = -\frac{2}{3} \pi R (R^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{R-\varepsilon} = \frac{2}{3} \pi R^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}).$$

Also ist

$$\int_{\partial K_R(0)} z^2 \, do = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} z^2 \, do = \frac{4}{3} \pi R^4.$$

## 1.2 Integralsatz von Gauß

Nach den bisherigen Vorbereitungen können wir nun die Verallgemeinerungen des eindimensionalen Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad (1.2.43)$$

formulieren. Wir beginnen mit dem Integralsatz von Gauß<sup>5</sup> in  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.2.1 Gaußscher Satz in $\mathbb{R}^2$

**Definition 1.16 (Normalbereich):** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  heißt „ $y$ -Normalbereich“, wenn es ein Intervall  $[a, b]$  und zwei stetige Funktionen  $\varphi_*, \varphi^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi_* \leq \varphi^*$  gibt, so dass

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi_*(x) \leq y \leq \varphi^*(x)\}.$$

Entsprechend ist ein  $x$ -Normalbereich definiert. Eine Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$  heißt einfach „Normalbereich“, wenn sie sowohl  $x$ -Normalbereich als auch  $y$ -Normalbereich ist.

Ein Normalbereich  $M$  ist definitionsgemäß abgeschlossen (sowie natürlich beschränkt) und quadrierbar. Konvexe Mengen mit stückweise glatten Rändern sind stets in endlich viele Normalbereiche zerlegbar, wobei die einzelnen Zerlegungsmengen eventuell Normalbereiche bzgl. geeignet gedrehter Koordinatensysteme sind. Dazu gehören z. B. Dreiecke, Rechtecke, Kreise, Ellipsen u.s.w..

**Satz 1.9 (Gaußscher Integralsatz in  $\mathbb{R}^2$ ):** Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich, dessen Rand  $\partial M$  eine stückweise glatte (rektifizierbare) Jordan-Kurve ist, und  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_M \nabla \cdot v(x) dx = \int_{\partial M} v(x(s)) \cdot n(x(s)) ds, \quad (1.2.44)$$

wobei  $n$  der äußere Normaleneinheitsvektor zu  $\partial M$  ist, und das Kurvenintegral gegebenenfalls stückweise zu verstehen ist. Diese Aussage gilt auch, wenn sich  $M$  durch endlich viele glatte Jordan-Kurvenstücke in Normalbereiche zerlegen lässt.

**Beweis:** i) Als Ordinatenmengen (s. Abschnitt 4.2 des Bandes Analysis 2) ist ein  $y$ -Normalbereich  $M$  quadrierbar, und für das Integral einer Funktion  $f \in C(M)$  gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\int_M f(x) dx = \int_a^b \int_{\varphi_*(x)}^{\varphi^*(x)} f(x, y) dy dx. \quad (1.2.45)$$

---

<sup>5</sup>Carl Friedrich Gauß (1777–1855): Bedeutender deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker; wirkte in Göttingen; fundamentale Beiträge zur Arithmetik, Algebra und Geometrie, Begründer der modernen Zahlentheorie, Bestimmung von Planetenbahnen durch „Gauß-Ausgleich“, Arbeiten zum Erdmagnetismus und Konstruktion eines elektromagnetischen Telegraphen.

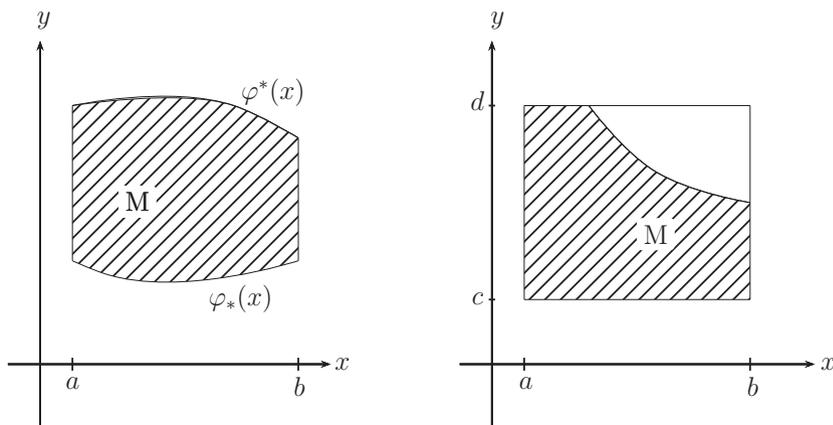


Abbildung 1.10: Ein  $y$ -Normalbereich (links) und ein  $x, y$ -Normalbereich (rechts) in  $\mathbb{R}^2$ .

Die geschlossene Randkurve  $\partial M$  besteht aus den folgenden vier Jordan-Kurvenstücken:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = \varphi_*(x)\}, \\ \Gamma_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : x = b, y \in [\varphi_*(b), \varphi^*(b)]\}, \\ \Gamma_3^- &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = \varphi^*(x)\}, \\ \Gamma_4^- &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : x = a, y \in [\varphi_*(a), \varphi^*(a)]\},\end{aligned}$$

wobei das hoch gestellte Minuszeichen bedeutet, dass der Weg in negativer Richtung durchlaufen wird. Dadurch wird sichergestellt, dass die vier Kurvenstücke zusammengesetzt eine geschlossene Jordan-Kurve ergeben,  $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3^- \cup \Gamma_4^-$ , welche im „positiven Sinne“ (d. h. im Gegenuhrzeigersinn) durchlaufen wird, so dass das Innere von  $M$  stets zur Linken liegt.

Seien nun  $f \in C(M)$  und  $\partial_y f \in C(M)$ . Durch Anwendung des Satzes von Fubini sowie des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$\int_M \partial_y f(x) dx = \int_a^b \int_{\varphi_*(x)}^{\varphi^*(x)} \partial_y f(x, y) dy dx = \int_a^b f(x, \varphi^*(x)) dx - \int_a^b f(x, \varphi_*(x)) dx.$$

Der Ausdruck rechts kann als ein Kurvenintegral entlang der Randkomponente  $\Gamma_1 \cup \Gamma_3^-$  (im Uhrzeigersinn durchlaufen) interpretiert werden. Die Randkomponente  $\Gamma_1$  sei mit der Abbildung  $\varphi(x) := (x, \varphi_*(x))$ ,  $x \in [a, b]$ , parametrisiert. Bezüglich dieser Parametrisierung ist der äußere Normaleneinheitsvektor zu  $\Gamma_1$  (gegebenenfalls stückweise) gegeben durch

$$\mathbf{n} = \frac{(\varphi'_y, -\varphi'_x)}{\|\varphi'\|} = \frac{(\varphi'_*, -1)}{\sqrt{1 + |\varphi'_*|^2}}.$$

Also ist nach Definition des Kurvenintegrals

$$\int_{\Gamma_1} f(x(s))n_y(s) ds = \int_a^b f(x, \varphi_*(x))n_y(x)\|\varphi'(x)\| dx = - \int_a^b f(x, \varphi_*(x)) dx.$$

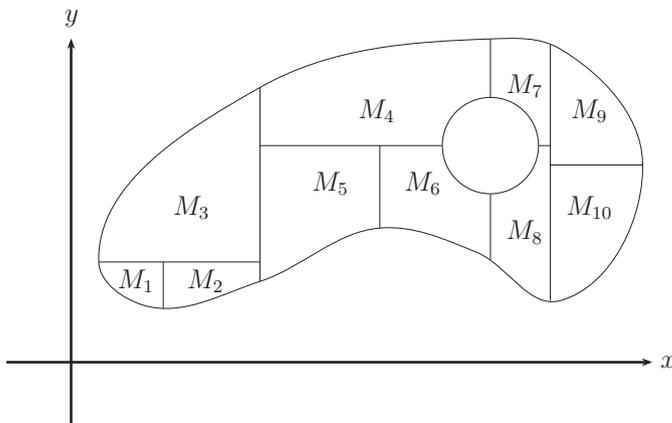


Abbildung 1.11: Ein in Normalbereiche zerschnittenes Gebiet in  $\mathbb{R}^2$ .

Analog finden wir wegen der Orientierung der äußeren Normalen entlang  $\Gamma_3^-$  nach „oben“:

$$\int_{\Gamma_3^-} f(x(s))n_y(s) ds = \int_a^b f(x, \varphi^*(x))n_y(x)\|\varphi'(x)\| dx = \int_a^b f(x, \varphi^*(x)) dx.$$

Entlang der vertikalen Randkomponente  $\Gamma_2 \cup \Gamma_4^-$  ist  $n_y \equiv 0$ , so dass wir das bisherige Ergebnis auch in der folgenden Form schreiben können:

$$\int_M \partial_y f(x) dx = \int_{\partial M} f(x(s))n_y(s) ds. \tag{1.2.46}$$

Da  $M$  auch  $x$ -Normalbereich ist, erschließen wir analog für die  $x$ -Ableitung einer Funktion  $g \in C(M)$  mit  $\partial_x g \in C(M)$ :

$$\int_M \partial_x g(x) dx = \int_{\partial M} g(x(t))n_x(s) ds. \tag{1.2.47}$$

Ist nun  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so erhalten wir durch Addition der Zwischenresultate (1.2.46) und (1.2.47) für  $f := v_x$  bzw.  $g = v_y$  die Gaußsche Integralformel für Normalbereiche:

$$\int_M (\partial_x v_x + \partial_y v_y)(x) dx = \int_{\partial M} \{v_x(x(s))n_x(s) + v_y(x(s))n_y(s)\} ds.$$

ii) Sei  $M$  durch endlich viele glatte Jordan-Kurvenstücke in Normalbereiche zerlegbar. Dann gilt die Gaußsche Integralformel für jedes einzelne dieser Normalgebiete. In diesem Fall heben sich die Beiträge der Schnittwege zum Gesamtintegral weg, da sie doppelt jeweils mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Damit gilt der Gaußsche Integralsatz auch in diesem Fall. Q.E.D.

**Bemerkung 1.8:** Das hier als „Satz von Gauß“ angegebene Resultat wird in der russischen Literatur in der Regel als „Satz von Ostrogradski“<sup>6</sup> bezeichnet.

**Bemerkung 1.9:** Der Gaußsche Integralsatz gilt in der oben angegebenen Form für praktisch alle in Anwendungssituationen auftretenden Gebiete des  $\mathbb{R}^2$ . Dazu gehören u. a. stückweise glatt berandete Gebiete, also insbesondere reguläre Polygonegebiete. Diese brauchen nicht „einfach zusammenhängend“ zu sein, d. h. dürfen auch Löcher haben. Es sind sogar Gebiete mit Pathologien des Randes wie z. B. „Schlitzgebiete“ und „Horngebiete“ zugelassen.

Der Vollständigkeit halber geben wir den folgenden „Zerschneidungssatz“ an, dessen sehr technischer Beweis hier aber nicht angegeben werden kann.

**Lemma 1.8 (Zerschneidungssatz):** Jede Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$ , deren Rand aus endlich vielen glatten Kurvenstücken besteht, lässt sich durch endlich viele glatte Jordan-Kurvenstücke in Normalbereiche (eventuell bzgl. gedrehter Koordinatensysteme) zerschneiden.

**Beweis:** Den Beweis findet man z. B. in A. Ostrowski: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Band III, Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1967. Q.E.D.



Abbildung 1.12: „Reguläres“ Polygonegebiet mit Loch (links) und Gebiet mit Schlitz und Horn (rechts).

**Beispiel 1.12:** Auf einer kompakten Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  mit glattem Rand wird das Vektorfeld  $v(x) = x$  betrachtet. Für dieses ist  $\nabla \cdot v = \partial_x x + \partial_y y \equiv 2$  und somit nach dem Satz von Gauß

$$|M| = \frac{1}{2} \int_M \nabla \cdot v(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial M} x \cdot n \, ds.$$

Speziell für den Einheitskreis  $K_1(0)$  ist  $n = x$  entlang  $\partial K_1(0)$  und somit, wie erwartet:

$$|K_1(0)| = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1(0)} x \cdot n \, ds = \frac{1}{2} \int_{\partial K_1(0)} \|x\|^2 \, ds = \pi.$$

---

<sup>6</sup>Michail Wassiljewitsch Ostrogradski (1802–1862): Ukrainisch-russischer Mathematiker; Prof. in St. Petersburg; Mitbegründer der berühmten Petersburger Mathematikerschule; Arbeiten zu verschiedenen Gebieten der Mathematischen Physik und Mechanik sowie zur Integral- und Variationsrechnung.

### 1.2.2 Gaußscher Satz in $\mathbb{R}^3$

**Definition 1.17 (Normalgebiet):** Eine offene Menge  $G \subset \mathbb{R}^3$  heißt „ $z$ -Normalgebiet“, wenn es eine offene, quadrierbare Menge  $G_z$  der  $(x, y)$ -Ebene mit stückweise glatter Randkurve  $\partial G_z$  und zwei stetig (stückweise) differenzierbare,  $L$ -stetige Funktionen  $\varphi_*, \varphi^* : \overline{G}_z \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi_* < \varphi^*$  gibt, so dass

$$G = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G_z, \varphi_*(x) < z < \varphi^*(x)\}.$$

Entsprechend sind  $x$ - und  $y$ -Normalbereiche definiert. Eine offene Menge  $G \subset \mathbb{R}^3$  heißt einfach „Normalbereich“, wenn sie Normalbereich bzgl. aller drei Raumrichtungen ist.

Ein dreidimensionales Normalgebiet  $G$  ist definitionsgemäß offen (sowie natürlich beschränkt) und quadrierbar. Offene Mengen mit stückweise glatten Rändern sind in endlich viele Normalgebiete zerlegbar. Dazu gehören z. B. wieder (offene) Tetraeder, Quader, Kugeln, Ellipsoide u.s.w..

**Satz 1.10 (Gaußscher Integralsatz in  $\mathbb{R}^3$ ):** Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  offen und Normalgebiet bzgl. aller drei Achsen und  $v : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges und in  $G$  stetig differenzierbares Vektorfeld mit beschränkten Ableitungen. Dann gilt:

$$\int_G \nabla \cdot v(x) \, dx = \int_{\partial G} v(x) \cdot n(x) \, do. \quad (1.2.48)$$

wobei  $n$  der äußere Normaleneinheitsvektor zu  $\partial G$  und das Flächenintegral gegebenenfalls stückweise zu verstehen ist. Diese Aussage gilt auch, wenn sich  $G$  durch endlich viele reguläre Flächenstücke in Normalgebiete zerlegen lässt.

**Beweis:** Der Beweis folgt denselben Ideen wie derjenige im zweidimensionalen Fall.

i) Wir betrachten das Gebiet  $G$  zunächst als  $z$ -Normalgebiet:

$$G = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G_z, \varphi_* < z < \varphi^*\}.$$

Zur Berechnung von Integralen über die Deck- und Bodenflächen dieser Menge,

$$\begin{aligned} F_* &:= \text{Graph}(\varphi_*) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G_z, z = \varphi_*(x, y)\}, \\ F^* &:= \text{Graph}(\varphi^*) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G_z, z = \varphi^*(x, y)\}, \end{aligned}$$

nach der Formel (1.1.38) notieren wir für deren Parametrisierungen  $\Phi_* := (x, y, \varphi_*(x, y))$  und  $\Phi^* := (x, y, \varphi^*(x, y))$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi_{*y} \partial_y \Phi_{*z} - \partial_x \Phi_{*z} \partial_y \Phi_{*y} &= -\partial_x \varphi_*, \\ \partial_x \Phi_{*z} \partial_y \Phi_{*x} - \partial_x \Phi_{*x} \partial_y \Phi_{*z} &= -\partial_y \varphi_*, \\ \partial_x \Phi_{*x} \partial_y \Phi_{*y} - \partial_x \Phi_{*y} \partial_y \Phi_{*x} &= 1, \end{aligned}$$

und analog für  $\varphi^*$ . Damit gilt:

$$\|\partial_x \Phi_* \times \partial_y \Phi_*\| = \sqrt{|\partial_x \varphi_*|^2 + |\partial_y \varphi_*|^2 + 1}, \quad \|\partial_x \Phi^* \times \partial_y \Phi^*\| = \sqrt{|\partial_x \varphi^*|^2 + |\partial_y \varphi^*|^2 + 1}.$$

Die Mengen  $F_*$  und  $F^*$  sind offene Flächen im Sinne von Definition 1.12. Für eine auf  $G$  stetig differenzierbare Funktion  $f$  gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_G \partial_z f \, dx &= \int_{G_z} \int_{\varphi_*(x,y)}^{\varphi^*(x,y)} \partial_z f \, dz \, d(x,y) \\ &= \int_{G_z} \{f(x,y,\varphi^*(x,y)) - f(x,y,\varphi_*(x,y))\} \, d(x,y). \end{aligned}$$

Wir wollen das letzte Integral in ein Flächenintegral umformen. Auf der Deck- und Bodenfläche  $F_*$  und  $F^*$  ist die äußere Einheitsnormale zu  $G$  gegeben durch (nachrechnen)

$$\mathbf{n} = \frac{(\partial_x \varphi_*, \partial_y \varphi_*, -1)}{\sqrt{1 + |\partial_x \varphi_*|^2 + |\partial_y \varphi_*|^2}} \quad \text{auf } F_*, \quad \mathbf{n} = \frac{(-\partial_x \varphi^*, -\partial_y \varphi^*, 1)}{\sqrt{1 + |\partial_x \varphi^*|^2 + |\partial_y \varphi^*|^2}} \quad \text{auf } F^*.$$

Also gilt nach Definition des Flächenintegrals für eine beliebige Funktion  $f \in C(\overline{G})$ :

$$\begin{aligned} \int_{F_*} f n_z \, do &= - \int_{F_*} \frac{f}{\sqrt{1 + |\partial_x \varphi_*|^2 + |\partial_y \varphi_*|^2}} \, do = - \int_{G_z} f(x,y,\varphi_*(x,y)) \, d(x,y), \\ \int_{F^*} f n_z \, do &= \int_{F^*} \frac{f}{\sqrt{1 + |\partial_x \varphi^*|^2 + |\partial_y \varphi^*|^2}} \, do = \int_{G_z} f(x,y,\varphi^*(x,y)) \, d(x,y). \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Mantelfläche  $F_M$  von  $G$ . Auf  $F_M$  ist die  $z$ -Komponente des Normaleneinheitsvektors  $n_z = 0$ . (Diese der Anschauung entnommene Tatsache kann auch analytisch nachgerechnet werden.) Also folgt

$$\int_G \partial_z f \, dx = \int_{\partial G} f n_z \, do.$$

Da  $G$  Normalgebiet bzgl. aller drei Raumrichtungen sein soll, kann die obige Argumentation für alle drei Ableitungen  $\partial_x f$ ,  $\partial_y f$ ,  $\partial_z f$  angewendet werden. Damit erhalten wir für  $\nabla \cdot v = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$  die gewünschte Gleichung

$$\begin{aligned} \int_G \nabla \cdot v \, dx &= \int_G \{\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z\} \, dx \\ &= \int_{\partial G} \{v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z\} \, do = \int_{\partial G} v \cdot \mathbf{n} \, do. \end{aligned}$$

ii) Sei  $G$  durch endlich viele reguläre Flächenstücke in Normalgebiet zerlegbar. Dann gilt die Gaußsche Integralformel für jedes einzelne dieser Normalgebiete. In diesem Fall heben sich die Beiträge der Schnittflächen zum Gesamtintegral weg, da sie doppelt jeweils mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Damit gilt der Gaußsche Integralsatz auch in diesem Fall. Q.E.D.

**Bemerkung 1.10:** Der Inhalt des Gaußschen Integralsatz kann auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Die in der Literatur übliche Form wird in den Sätzen 1.9 und 1.10 benutzt. Alternativ zur Verwendung der Divergenz eines Vektorfeldes  $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  kann auch mit einer skalaren Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  die folgende Schreibweise verwendet werden:

$$\int_G \partial_i f(x) dx = \int_{\partial G} f(x) n_i(x) do \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.2.49)$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ . Hieraus ergibt sich für einen beliebigen Richtungsvektor  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$  noch die gradientenorientierte Formulierung

$$\int_G \nabla f(x) \cdot \mathbf{e} dx = \int_{\partial G} f(x) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} do. \quad (1.2.50)$$

Alle diese Formulierungen des Gaußschen Satzes sind natürlich völlig äquivalent.

**Bemerkung 1.11 (Physikalische Anwendung):** Als Beispiel für die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf physikalische Prozesse betrachten wir die „Wärmeleitung“. Die Temperaturverteilung  $f = f(x, t)$  in einem festen Körper  $K$  mit der Massedichte  $\rho$  wird durch zwei von der Erfahrung gestützte physikalische Annahmen bestimmt:

i) Um die im Volumen  $\delta V$  enthaltene Masse  $\delta\mu = \rho \delta V$  von der Temperatur  $f$  auf die Temperatur  $f + h$  zu erwärmen, wird die Wärmemenge (Energie)  $E = ch \delta\mu = ch\rho \delta V$  benötigt, wobei  $c$  die sog. „spezifische Wärme“ ist (eine Materialkonstante).

ii) Die Temperaturdifferenzen gleichen sich aus, d. h.: Es findet eine Wärmeströmung von Orten höherer nach Orten tieferer Temperatur statt. Dieser Wärmefluss ist am stärksten in der Richtung  $-\nabla f$  der stärksten Temperaturabnahme.

Diese Annahme besagt, dass durch ein Flächenelement  $\delta F$  in Richtung einer Normale  $\mathbf{n}$  pro Sekunde die Wärmemenge

$$E = -k(\mathbf{n} \cdot \nabla f) |\delta F|$$

fließt, wobei  $k$  die sog. „Wärmeleitfähigkeit“ des Stoffes bezeichnet. Durch die Oberfläche des Körpers  $K$  fließt also pro Sekunde die Wärmemenge

$$\int_{\partial K} k(\mathbf{n} \cdot \nabla f) do.$$

Die resultierende Temperaturzunahme pro Sekunde ist gleich  $\partial_t f$ , die Änderung der Wärmemenge in einem Volumen  $V \subset K$  also gleich

$$\int_V \rho c \partial_t f dx.$$

Aus der Energiebilanz ergibt sich mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes also

$$\int_V \rho c \partial_t f dx = \int_{\partial V} k \mathbf{n} \cdot \nabla f do = \int_V k \nabla \cdot \nabla f dx = \int_V k \Delta f dx.$$

Diese Beziehung soll für beliebige Volumina  $V \subset K$  gelten. Dies ergibt für einmal stetig nach  $t$  und zweimal stetig nach  $x$  differenzierbare Temperaturverteilung  $f(x, t)$  die punktweise Gleichung

$$c\rho \partial_t f(x, t) = k \Delta f(x, t), \quad x \in K, t \geq 0. \quad (1.2.51)$$

Dies ist eine Folgerung des sog. „Fundamentalsatzes der Variationsrechnung“, den wir später diskutieren werden. Die differenzielle Beziehung (1.2.51) wird „Wärmeleitungsgleichung“ genannt.

**Korollar 1.4 (Greensche Formeln):** *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.10 seien  $f, g : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkten stetigen zweiten Ableitungen auf  $G$ . Dann gelten die „1. Greensche Formel“*

$$\int_G \Delta f(x) g(x) dx = \int_{\partial G} \partial_n f(x) g(x) do - \int_G \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx \quad (1.2.52)$$

und die „2. Greensche Formel“

$$\int_G (\Delta f(x) g(x) - f(x) \Delta g(x)) dx = \int_{\partial G} (\partial_n f(x) g(x) - f(x) \partial_n g(x)) do. \quad (1.2.53)$$

**Beweis:** Zum Beweis der 1. Greenschen Formel wenden wir den Gaußschen Satz auf die stetige Vektorfunktion  $v := \nabla f g$  an:

$$\int_G \nabla \cdot (\nabla f g) dx = \int_G (g \Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dx = \int_{\partial G} g n \cdot \nabla f do = \int_{\partial G} g \partial_n f do.$$

Die 2. Greensche Formel erhalten wir durch zweimalige Anwendung der ersten:

$$\begin{aligned} \int_G (g \Delta f - f \Delta g) dx &= \int_{\partial G} g \partial_n f do - \int_G \nabla f \cdot \nabla g dx \\ &- \int_{\partial G} f \partial_n g do + \int_G \nabla f \cdot \nabla g dx = \int_{\partial G} (g \partial_n f - f \partial_n g) do. \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Beispiel 1.13:** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) ein Normalgebiet mit glattem Rand und äußerem Normaleinheitsvektor  $n(x)$ . Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf die Vektorfelder  $v := e^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (kartesische Einheitsvektoren) ergibt die Vektorgleichung

$$\int_{\partial G} n(x) do = 0. \quad (1.2.54)$$

**Beispiel 1.14:** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) ein Normalgebiet mit glattem Rand und äußerem Normaleinheitsvektor  $n(x)$ . Anwendung der 1. Greenschen Formel auf eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit beschränkten Ableitungen  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  und die Funktion  $g \equiv 1$  ergibt die Gleichung

$$\int_G \Delta f(x) dx = \int_{\partial G} \partial_n f(x) do. \quad (1.2.55)$$

**Anwendung 1.2.1 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen):** Sei  $f$  eine „harmonische“ Funktion in  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < R\}$ , d. h.:  $f$  ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt

$$\Delta f(x) = 0, \quad x \in B_R. \quad (1.2.56)$$

Dann gilt für  $0 < \rho < R$  mit der Kugelsphäre  $S_\rho := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = \rho\}$ :

$$f(0) = \frac{1}{\omega_2 \rho^2} \int_{S_\rho} f(x) \, d\omega, \quad (1.2.57)$$

wobei  $|S_\rho| = \omega_2 \rho^2$  der Inhalt von  $S_\rho$  ist. Diese Beziehung wird als „Mittelwerteigenschaft“ harmonischer Funktionen bezeichnet. Zum Beweis von (1.2.57) betrachten wir für  $0 < \varepsilon < \rho < R$  die Kugelschale  $B_{\varepsilon, \rho} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon \leq \|x\| \leq \rho\}$ . Auf  $B_{\varepsilon, \rho}$  ist die Funktion  $g(x) = \|x\|^{-1}$  harmonisch, d. h.:  $\Delta g = 0$ , und auf den Kugelsphären  $S_\rho$  und  $S_\varepsilon$  gilt

$$\partial_n g = \pm \partial_r r^{-1} = \mp r^{-2}.$$

Da  $f$  in  $B_R$  harmonisch ist, ergibt sich mit Hilfe von (1.2.55):

$$0 = \int_{S_\varepsilon} \partial_n f \, d\omega = \int_{S_\rho} \partial_n f \, d\omega.$$

Die 2. Greensche Formel (1.2.53) liefert daher mit  $g(x) = \|x\|^{-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{\varepsilon, \rho}} \{\Delta f g - f \Delta g\} \, dx = \int_{\partial B_{\varepsilon, \rho}} \{\partial_n f g - f \partial_n g\} \, d\omega \\ &= \int_{S_\rho} \partial_n f g \, d\omega + \int_{S_\varepsilon} \partial_n f g \, d\omega + \int_{S_\rho} f \partial_n g \, d\omega + \int_{S_\varepsilon} f \partial_n g \, d\omega \\ &= \rho^{-1} \int_{S_\rho} \partial_n f \, d\omega + \varepsilon^{-1} \int_{S_\varepsilon} \partial_n f \, d\omega + -\rho^{-2} \int_{S_\rho} f \, d\omega + \varepsilon^{-2} \int_{S_\varepsilon} f \, d\omega \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{1}{\omega_2 \varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} f \, d\omega = \frac{1}{\omega_2 \rho^2} \int_{S_\rho} f \, d\omega.$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert das linke Integral gegen  $f(0)$ . Dies ersieht man wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  aus der Beziehung

$$\left| \int_{S_\varepsilon} f \, d\omega - f(0) \right| = \left| \int_{S_\varepsilon} (f - f(0)) \, d\omega \right| \leq |S_\varepsilon| \max_{x \in S_\varepsilon} |f(x) - f(0)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

## 1.3 Integralsatz von Stokes

Der oben abgeleitete Integralsatz von Gauß gestattet es, Gebiets- oder Volumenintegrale in Randlinien- bzw. Oberflächenintegrale umzuformen. Der im Folgenden betrachtete Integralsatz von Stokes<sup>7</sup> verwandelt Flächenintegrale in  $\mathbb{R}^3$  in ein Linienintegral über den Rand der Fläche um.

<sup>7</sup>Sir Georg Gabriel Stokes (1819–1903): Englischer Mathematiker und Physiker; Prof. in Cambridge; Beiträge zur Differential- und Integralrechnung, zur Hydrodynamik und zur Theorie des Lichts, Spektralanalyse und Fluoreszenz.

Die im Folgenden benötigten Voraussetzungen sind etwas schärfer als die bisherigen. In der Parameter- $(u, v)$ -Ebene sei  $G$  ein Gebiet, das von einer stückweise glatten geschlossenen Jordan-Kurve  $\gamma = \partial G$  berandet wird;  $G$  hat also keine Löcher. Weiter sei  $\psi(s) = (u(s), v(s))$ ,  $0 \leq s \leq |\gamma|$ , eine Parametrisierung von  $\gamma$  mit der Bogenlänge, welche eine positive Orientierung (im Gegenuhreigersinn) von  $\gamma$  erzeugt. Auf einer offenen Umgebung  $U$  des Abschlusses  $\overline{G}$  sei  $\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetige Abbildung derart, dass  $\Phi(U)$  eine offene Fläche in  $\mathbb{R}^3$  ist. Wir betrachten die abgeschlossene Fläche  $\Gamma = \Phi(\overline{G})$ . Der Rand von  $\Gamma$  ist dann eine geschlossene, stückweise glatte Jordan-Kurve  $C = \partial\Gamma$  mit der Parametrisierung (s. Abb. 1.13)

$$x = \Psi(s) := \Phi(\psi(s)), \quad 0 \leq s \leq |\gamma|.$$

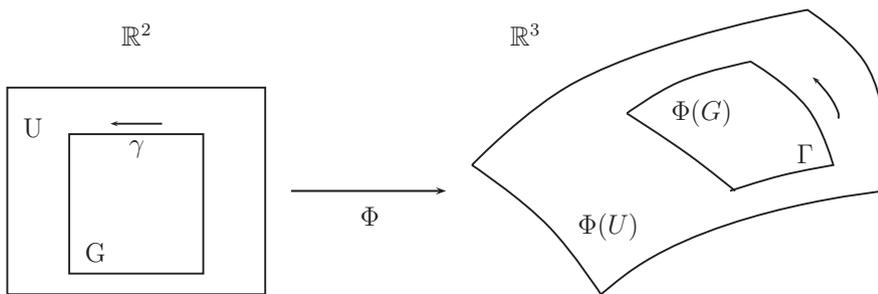


Abbildung 1.13: Skizze zum Integralsatz von Stokes.

**Satz 1.11 (Stokes'scher Integralsatz):** Für eine abgeschlossene Fläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  mit zweimal stetig differenzierbarer Parametrisierung  $\Phi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sollen die obigen Voraussetzungen gelten. Für ein auf einer offenen Umgebung  $V$  von  $\Gamma$  stetig differenzierbares Vektorfeld  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt dann:

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times f(x)) \cdot n(x) \, do = \int_{\partial\Gamma} f(x) \cdot ds, \quad (1.3.58)$$

bzw.

$$\int_G (\nabla \times f)(\Phi(u, v)) \cdot (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi)(u, v) \, d(u, v) = \int_0^{|\gamma|} f(\Psi(s)) \cdot \Psi'(s) \, ds. \quad (1.3.59)$$

**Beweis:** Der Beweis wird durch Zurückführung auf den Gaußschen Integralsatz für das Parametergebiet  $G$  der  $(u, v)$ -Ebene geführt. Der Übersichtlichkeit halber lassen wir im Folgenden Argumente von Funktionen weg.

Wir betrachten zunächst die drei Komponenten des Wegintegrals rechts in (1.3.59):

$$\begin{aligned} \int_0^{|\gamma|} \{f_x \Psi'_x + f_y \Psi'_y + f_z \Psi'_z\} ds &= \int_0^{|\gamma|} \{f_x \Phi_x(\psi)' + f_y \Phi_y(\psi)' + f_z \Phi_z(\psi)'\} ds \\ &= \int_0^{|\gamma|} \{f_x (\partial_u \Phi_x u' + \partial_v \Phi_x v') + f_y (\partial_u \Phi_y u' + \partial_v \Phi_y v') + f_z (\partial_u \Phi_z u' + \partial_v \Phi_z v')\} ds. \end{aligned}$$

Der (positive) Tangenten- und der äußere Normaleneinheitsvektor an die Kurve  $\gamma = \partial G$  ist bzgl. der Parametrisierung mit der Bogenlänge gegeben durch  $\tau = (u', v')$  bzw.  $\mathbf{n} = (v', -u')$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} \partial_u \Phi_x u' + \partial_v \Phi_x v' &= (\partial_v \Phi_x, -\partial_u \Phi_x) \cdot \mathbf{n}, \\ \partial_u \Phi_y u' + \partial_v \Phi_y v' &= (\partial_v \Phi_y, -\partial_u \Phi_y) \cdot \mathbf{n}, \\ \partial_u \Phi_z u' + \partial_v \Phi_z v' &= (\partial_v \Phi_z, -\partial_u \Phi_z) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

und wir erhalten mit dem Gaußschen Integralsatz:

$$\begin{aligned} A &:= \int_0^{|\gamma|} f \cdot \Psi' ds = \int_{\partial G} ((f_x \partial_v \Phi_x, -f_x \partial_u \Phi_x) + (f_y \partial_v \Phi_y, -f_y \partial_u \Phi_y) \\ &\quad + (f_z \partial_v \Phi_z, -f_z \partial_u \Phi_z)) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_G \nabla \cdot ((f_x \partial_v \Phi_x, -f_x \partial_u \Phi_x) + (f_y \partial_v \Phi_y, -f_y \partial_u \Phi_y) \\ &\quad + (f_z \partial_v \Phi_z, -f_z \partial_u \Phi_z)) d(u, v). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f_x \partial_v \Phi_x, -f_x \partial_u \Phi_x) &= \partial_u (f_x \partial_v \Phi_x) - \partial_v (f_x \partial_u \Phi_x), \\ \nabla \cdot (f_y \partial_v \Phi_y, -f_y \partial_u \Phi_y) &= \partial_u (f_y \partial_v \Phi_y) - \partial_v (f_y \partial_u \Phi_y), \\ \nabla \cdot (f_z \partial_v \Phi_z, -f_z \partial_u \Phi_z) &= \partial_u (f_z \partial_v \Phi_z) - \partial_v (f_z \partial_u \Phi_z), \end{aligned}$$

und folglich wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} A &= \int_G \{ \partial_u (f_x \partial_v \Phi_x) - \partial_v (f_x \partial_u \Phi_x) + \partial_u (f_y \partial_v \Phi_y) - \partial_v (f_y \partial_u \Phi_y) \\ &\quad + \partial_u (f_z \partial_v \Phi_z) - \partial_v (f_z \partial_u \Phi_z) \} d(u, v) \\ &= \int_G \{ \partial_u f_x \partial_v \Phi_x + f_x \partial_u \partial_v \Phi_x - \partial_v f_x \partial_u \Phi_x - f_x \partial_v \partial_u \Phi_x \\ &\quad + \partial_u f_y \partial_v \Phi_y + f_y \partial_u \partial_v \Phi_y - \partial_v f_y \partial_u \Phi_y - f_y \partial_v \partial_u \Phi_y \\ &\quad + \partial_u f_z \partial_v \Phi_z + f_z \partial_u \partial_v \Phi_z - \partial_v f_z \partial_u \Phi_z - f_z \partial_v \partial_u \Phi_z \} d(u, v) \\ &= \int_G \{ \partial_u f_x \partial_v \Phi_x - \partial_v f_x \partial_u \Phi_x + \partial_u f_y \partial_v \Phi_y - \partial_v f_y \partial_u \Phi_y \\ &\quad + \partial_u f_z \partial_v \Phi_z - \partial_v f_z \partial_u \Phi_z \} d(u, v). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Kettenregel, angewendet auf  $f = f(\Phi(u, v))$ , ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
 A = \int_G \{ & (\underline{\partial_x f_x \partial_u \Phi_x} + \partial_y f_x \partial_u \Phi_y + \partial_z f_x \partial_u \Phi_z) \partial_v \Phi_x \\
 & - (\underline{\partial_x f_x \partial_v \Phi_x} + \partial_y f_x \partial_v \Phi_y + \partial_z f_x \partial_v \Phi_z) \partial_u \Phi_x \\
 & + (\partial_x f_y \partial_u \Phi_x + \underline{\partial_y f_y \partial_u \Phi_y} + \partial_z f_y \partial_u \Phi_z) \partial_v \Phi_y \\
 & - (\partial_x f_y \partial_v \Phi_x + \underline{\partial_y f_y \partial_v \Phi_y} + \partial_z f_y \partial_v \Phi_z) \partial_u \Phi_y \\
 & + (\partial_x f_z \partial_u \Phi_x + \partial_y f_z \partial_u \Phi_y + \underline{\partial_z f_z \partial_u \Phi_z}) \partial_v \Phi_z \\
 & - (\partial_x f_z \partial_v \Phi_x + \partial_y f_z \partial_v \Phi_y + \underline{\partial_z f_z \partial_v \Phi_z}) \partial_u \Phi_z \} d(u, v).
 \end{aligned}$$

Dies reduziert sich durch Weghebeeffekte (unterstrichene Terme) zu

$$\begin{aligned}
 A = \int_G \{ & (\partial_y f_x \partial_u \Phi_y + \partial_z f_x \partial_u \Phi_z) \partial_v \Phi_x - (\partial_y f_x \partial_v \Phi_y + \partial_z f_x \partial_v \Phi_z) \partial_u \Phi_x \\
 & + (\partial_x f_y \partial_u \Phi_x + \partial_z f_y \partial_u \Phi_z) \partial_v \Phi_y - (\partial_x f_y \partial_v \Phi_x + \partial_z f_y \partial_v \Phi_z) \partial_u \Phi_y \\
 & + (\partial_x f_z \partial_u \Phi_x + \partial_y f_z \partial_u \Phi_y) \partial_v \Phi_z - (\partial_x f_z \partial_v \Phi_x + \partial_y f_z \partial_v \Phi_y) \partial_u \Phi_z \} d(u, v).
 \end{aligned}$$

Umordnen nach Ableitungen von  $f$  ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
 A = \int_G \{ & \partial_y f_x (\partial_u \Phi_y \partial_v \Phi_x - \partial_v \Phi_y \partial_u \Phi_x) + \partial_z f_x (\partial_u \Phi_z \partial_v \Phi_x - \partial_v \Phi_z \partial_u \Phi_x) \\
 & + \partial_x f_y (\partial_u \Phi_x \partial_v \Phi_y - \partial_v \Phi_x \partial_u \Phi_y) + \partial_z f_y (\partial_u \Phi_z \partial_v \Phi_y - \partial_v \Phi_z \partial_u \Phi_y) \\
 & + \partial_x f_z (\partial_u \Phi_x \partial_v \Phi_z - \partial_v \Phi_x \partial_u \Phi_z) + \partial_y f_z (\partial_u \Phi_y \partial_v \Phi_z - \partial_v \Phi_y \partial_u \Phi_z) \} d(u, v).
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die drei Komponenten des Flächenintegrals links in (1.3.59) und ordnen nach den Beiträgen der einzelnen Komponenten von  $f$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_G (\nabla \times f) \cdot (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi) d(u, v) \\
 & = \int_G \{ (\partial_y f_z - \partial_z f_y) (\partial_u \Phi_y \partial_v \Phi_z - \partial_v \Phi_y \partial_u \Phi_z) \\
 & \quad + (\partial_z f_x - \partial_x f_z) (\partial_u \Phi_z \partial_v \Phi_x - \partial_v \Phi_z \partial_u \Phi_x) \\
 & \quad + (\partial_x f_y - \partial_y f_x) (\partial_u \Phi_x \partial_v \Phi_y - \partial_v \Phi_x \partial_u \Phi_y) \} d(u, v) \\
 & = \int_G \{ \partial_z f_x (\partial_u \Phi_z \partial_v \Phi_x - \partial_v \Phi_z \partial_u \Phi_x) - \partial_y f_x (\partial_u \Phi_x \partial_v \Phi_y - \partial_v \Phi_x \partial_u \Phi_y) \\
 & \quad - \partial_z f_y (\partial_u \Phi_y \partial_v \Phi_z - \partial_v \Phi_y \partial_u \Phi_z) + \partial_x f_y (\partial_u \Phi_x \partial_v \Phi_y - \partial_v \Phi_x \partial_u \Phi_y) \\
 & \quad + \partial_y f_z (\partial_u \Phi_y \partial_v \Phi_z - \partial_v \Phi_y \partial_u \Phi_z) - \partial_x f_z (\partial_u \Phi_z \partial_v \Phi_x - \partial_v \Phi_z \partial_u \Phi_x) \} d(u, v)
 \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Terme in den bisher abgeleiteten Identitäten erhalten wir die behauptete Beziehung (1.3.59). Q.E.D.

**Bemerkung 1.12 (Physikalische Anwendung):** Auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  sei ein Vektorfeld  $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben; z. B. ein Magnetfeld. In der Physik bezeichnet man für eine abgeschlossene Fläche  $\Gamma \subset G$  das Integral

$$F_v(\Gamma) := \int_{\Gamma} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\sigma$$

als den „Fluss“ des Feldes durch die Fläche und für eine geschlossenen Jordan-Kurve  $\gamma \subset G$  das Wegintegral

$$Z_v(\gamma) := \int_{\gamma} v(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}$$

als die „Zirkulation“ des Feldes längs der Kurve. Der Integralsatz von Stokes besagt dann in dieser Sprechweise:

*Die Zirkulation des Feldes  $v$  entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich dem Fluss des Rotationsfeldes  $\operatorname{rot} v$  durch eine in der Kurve eingespannte Fläche.*

Ist  $v$  ein Kraftfeld, so bedeutet die Zirkulation die bei der Verschiebung eines Massepunktes entlang der Kurve aufgewendete Arbeit. Ist das Feld rotationsfrei (also ein Potentialfeld bzw. konservativ), so ist demnach diese Arbeit Null, was in Übereinstimmung mit dem bereits vorher abgeleiteten Resultat über Potentialfelder steht.

Als Beispiel betrachten wir eine Situation aus der Elektrodynamik. Das elektrische Feld  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  und die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  sind in einer (festen) regulären Fläche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  mit geschlossener Randkurve  $\gamma$  durch die sog. „Induktionsgleichung“ verknüpft:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\mu}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\sigma. \quad (1.3.60)$$

Dabei bezeichnet  $\mu$  eine Materialkonstante (magnetische Permeabilität) und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Mit dem Stokes'schen Integralsatz folgt hieraus

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\sigma = -\frac{\mu}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\sigma. \quad (1.3.61)$$

Da diese Gleichung für jede reguläre Fläche  $\Gamma \subset G$  gelten soll, folgt die punktweise Beziehung mit der Rotation des elektrischen Feldes:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu}{c} \frac{d\mathbf{H}}{dt}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in G, \, t \geq 0. \quad (1.3.62)$$

Diese wird manchmal als die „2. Hauptgleichung der Elektrodynamik“ bezeichnet. Hier wird natürlich implizit vorausgesetzt, dass im betrachteten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  das elektrische Feld stetig differenzierbar und das Magnetfeld stetig ist. Die Ableitung der punktweisen Beziehung (1.3.62) aus der Integralbeziehung (1.3.61) ist plausibel, bedarf aber eines Beweises. Dies ergibt sich z. B. aus dem sog. „Fundamentalsatz der Variationsrechnung“, den wir in einem späteren Kapitel kennen lernen werden.

## 1.4 Übungen

**Übung 1.1:** Die folgenden Parametrisierungen

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (\cos t, \sin t, t), & t \in [0, 2\pi], \\ \psi(t) &= (\cos t, -\sin t, 2\pi - t), & t \in [0, 2\pi], \\ \xi(t) &= (\cos(2\pi t^3), \sin(2\pi t^3), 2\pi t^3), & t \in [0, 1],\end{aligned}$$

beschreiben dieselbe Schraubenlinie  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ . Man überprüfe, ob die auf der Basis dieser unterschiedlichen Parametrisierungen bestimmten Längen von  $\Gamma$  wirklich gleich sind.

**Übung 1.2:** Für welche Parameterwerte  $a, b > 0$  ist die durch die Parametrisierung

$$\varphi(t) := (t, t^a \cos(\pi t^{-b})), \quad t \in (0, 1], \quad \varphi(0) := (0, 0),$$

definierte Jordan-Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  rektifizierbar, und für welche nicht? (Hinweis: Im Text wurde der Spezialfall  $a = b = 2$  behandelt.)

**Übung 1.3:** Es sei  $I = [a, b]$  ein kompaktes Intervall und  $BV(I)$  die Menge der auf  $I$  definierten Funktionen mit beschränkter Variation. Man zeige, dass jede stetig differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $BV(I)$  ist, und dass gilt:

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Man zeige weiter, dass dies auch gilt, wenn  $f$  auf  $I$  stetig und in  $(a, b)$  stetig differenzierbar ist, und das Integral als uneigentliches R-Integral existiert.

**Übung 1.4:** Es sei  $I = [a, b]$  ein kompaktes Intervall. Man zeige:

a)  $BV(I)$  ist ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$ .

b) Durch

$$\|f\|_{BV} := |f(a)| + V_a^b(f)$$

ist auf  $BV(I)$  eine Norm definiert.

c) Mit dieser Norm ist  $BV(I)$  ein *vollständiger* normierter Raum, d. h. ein Banach-Raum.

**Übung 1.5:** Gegeben sei die Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  mit Parametrisierung

$$\varphi(t) = (t, t^2, \frac{4}{3}t^{3/2}), \quad t \in [0, 1].$$

i) Man gebe die zugehörige Parametrisierung bzgl. der Bogenlänge an.

ii) Man bestimme die „Krümmung“ dieser Kurve.

**Übung 1.6:** Man berechne das Kurvenintegral

$$I(a, b) := \int_{\Gamma(a, b)} xy \, ds$$

über den Ellipsenbogen ( $a, b > 0$ )

$$\Gamma(a, b) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

(Hinweis: Man gebe eine geeignete Parametrisierung von  $\Gamma(a, b)$  an.)

**Übung 1.7:** Im Text wurde gezeigt, dass das Schwerfeld eines Massepunktes im Nullpunkt des  $\mathbb{R}^3$  (Newtonsches Gravitationsgesetz),

$$F(x) = -\gamma\mu \frac{x}{\|x\|^3}, \quad x \in G := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

„konservativ“ ist, d. h.: Alle Wegintegrale über glatte geschlossene Jordan-Kurven in  $G$  sind Null.

i) Man zeige, dass auch das Schwerfeld einer Kugelkörpers  $K$  mit Radius  $R > 0$  mit homogener Massedichte  $\rho \equiv \rho_0$  überall konservativ ist:

$$F(x) = \begin{cases} -\gamma \frac{4\pi}{3} \rho_0 x, & x \in K \\ -\gamma \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \frac{x}{\|x\|^3}, & x \notin K. \end{cases}$$

ii) Gilt dies auch in einer Physik mit einem modifizierten Gravitationsgesetz der Form

$$F(x) = -\gamma\mu \left( \frac{x}{\|x\|^3} + \tilde{\gamma} \frac{x}{\|x\|^2} \right), \quad x \in G?$$

**Übung 1.8:** Ein (idealisierter) Draht mit Massedichte  $\rho \equiv 1$  verlaufe in der  $(x, y)$ -Ebene entlang des Parabelstücks  $\Gamma(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -a \leq x \leq a, y = x^2\}$ . Man berechne die Koordinaten des Schwerpunkts  $S(a)$  des Drahts als Funktion von  $a > 0$ . Was ist  $S(1)$ ?

**Übung 1.9:** Für Teilmengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  wurden die Begriffe „zusammenhängend“ und „weg-zusammenhängend“ definiert:

i) Die Menge  $M$  heißt „zusammenhängend“, wenn sie nicht als Vereinigung zweier (nicht leerer) relativ-offener und disjunkter Mengen darstellbar ist.

ii) Die Menge heißt „weg-zusammenhängend“, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in M$  eine verbindende Jordan-Kurve gibt, die ganz in  $M$  verläuft.

Diese beiden Eigenschaften sind für allgemeine Mengen nicht äquivalent, wie das Beispiel der Menge  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}_+, y = \sin(1/x)\} \cup \{0\}$  zeigt, welche zwar zusammenhängend, aber *nicht* weg-zusammenhängend ist. Man zeige, dass aber diese beiden Eigenschaften doch äquivalent sind, wenn die Menge  $M$  als *offen* angenommen wird. (Hinweis: Man vervollständige die Argumentation im Text.)

**Übung 1.10:** Man verifiziere für Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  die Identität

$$(a \times b) \cdot c = \det(a, b, c),$$

wobei die Vektoren in der Determinante als Spaltenvektoren zu verstehen sind.

**Übung 1.11:** i) Man rekapituliere aus dem Text den Beweis für die sog. „2. Guldin'sche Regel“: *Der Inhalt einer Rotationsfläche  $F_C$  zur ebenen Kurve  $C$  ist gleich dem Produkt der Länge der erzeugenden Kurve  $C$  mit der Länge  $2\pi r_C$  ( $r_C =$  Abstand des Schwerpunkts von der Rotationsachse) des Wegs, den ihr Schwerpunkt zurücklegt:*

$$|F_C| = 2\pi r_C |C|.$$

ii) Man beweise zusätzlich die sog. „1. Guldin'sche Regel“: *Das Volumen eines Rotationskörpers  $K_F$  zur ebenen Fläche  $F$  ist gleich dem Produkt des Inhalts der erzeugenden Fläche  $F$  mit der Länge  $2\pi r_F$  ( $r_F =$  Abstand des Schwerpunkts von der Rotationsachse) des Wegs, den ihr Schwerpunkt zurücklegt:*

$$|K_F| = 2\pi r_F |F|.$$

**Übung 1.12:** Man berechne die Fläche der Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^3$

a) durch Interpretation der oberen Halbkugelfläche als Graph der Funktion

$$z = \psi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1\}.$$

b) durch Interpretation der Kugeloberfläche als Rotationsfläche um die  $z$ -Achse der Kurve in der  $(x, z)$ -Ebene mit der Parametrisierung (Hinweis: 2. Guldin'sche Regel)

$$\varphi(\theta) = (x(\theta), z(\theta)) := (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

**Übung 1.13:** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  eine geschlossene Jordan-Kurve mit einer stetig differenzierbaren Parameterabbildung  $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Man leite mit dem Gaußschen Integralsatz in  $\mathbb{R}^2$  die folgende Formel für den Inhalt der von  $\Gamma$  umschlossenen ebenen Flächen  $F_\Gamma$  ab:

$$|F_\Gamma| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b \{\varphi_x(t)\varphi'_y(t) - \varphi'_x(t)\varphi_y(t)\} dt \right|.$$

**Übung 1.14:** Man versuche, den Gaußschen Integralsatz für den durch

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad F(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

definierten Normalbereich  $M \subset \mathbb{R}^2$  und Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  anzuwenden. Was geht hier schief?

**Übung 1.15:** Man verifiziere den Gaußschen Integralsatz in  $\mathbb{R}^3$  für das Zylindergebiet

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 5, x^2 + y^2 < 9\}$$

und das Vektorfeld  $v(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ . (Hinweis: Der Wert ist  $135\pi$ .)

**Übung 1.16:** Auf einem glattberandeten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  (z. B. die Einheitskugel) sei der Differentialoperator  $L$  (verallgemeinerter Laplace-Operator) durch seine Wirkung auf Funktionen  $u \in C^2(\overline{G})$  wie folgt gegeben:

$$Lu(x) := -\nabla \cdot (\rho \nabla u)(x), \quad x \in G,$$

wobei  $\rho \in C^1(\overline{G})$  mit  $\rho > 0$  eine gegebene Funktion ist. Wir betrachten  $L$  als Operator auf dem Teilraum  $V := \{v \in C^2(\overline{G}), v|_{\partial G} = 0\}$  nach  $C(\overline{G})$ . Man zeige:

- i) Der Operator  $L$  ist *linear* (definiert wie bei Endomorphismen in  $\mathbb{R}^n$ ).
- ii) Der Operator  $L$  ist bzgl. des  $L^2$ -Skalarprodukts

$$(u, v)_{L^2} := \int_G u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_{L^2} := (u, u)_{L^2}^{1/2},$$

symmetrisch, d. h.: Es gilt:

$$(Lu, v)_{L^2} = (u, Lv)_{L^2}, \quad u, v \in V.$$

(Hinweis: Man beachte den Beweis der Greenschen Formeln.)

- iii) Der Operator  $L$  ist definit, d. h.: Für  $u \in V$  mit  $u \neq 0$  gilt:

$$(Lu, u)_{L^2} > 0.$$

*Bemerkung:* Durch einen zusätzlichen Trick kann man sogar die Positiv-Definitheit in folgendem Sinne zeigen ( $\gamma$  eine geeignete positive Konstante):

$$(Lu, u)_{L^2} \geq \gamma \|u\|_{L^2}^2, \quad u \in V.$$

Dies wird aber erst mit den Mitteln aus dem zweiten Teil dieses Bandes möglich sein (sog. „Poincarésche Ungleichung“).

**Übung 1.17:** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein quadrierbares Gebiet, auf dem der Gaußsche Integralsatz gilt. Auf dem Funktionenraum  $V := \{v \in C^1(\overline{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0\}$  sei die Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \partial_{\beta} u v dx$$

gegeben mit einem Vektorfeld  $\beta \in C^1(\overline{\Omega})$  und der Richtungsableitung  $\partial_{\beta} u := \beta \cdot \nabla u$ . Man zeige, dass im Fall  $\nabla \cdot \beta \leq 0$  die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $V$  definit ist:

$$a(u, u) > 0, \quad u \in V, u \neq 0.$$

(Hinweis: Man beachte, dass  $\partial_i u^2 = 2u \partial_i u$ ,  $i = 1, 2, 3$ .)

**Übung 1.18:** Im Text wurde mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für harmonische Funktionen  $f$ ,  $\Delta f \equiv 0$ , in drei Dimensionen die sog. „Mittelwertigenschaft“ bewiesen:

$$f(0) = \frac{1}{\omega_2 \rho^2} \int_{\{\|x\|=\rho\}} f(x) \, do.$$

Man untersuche, ob eine entsprechende Aussage auch in 2 Dimensionen gilt. (Hinweis: In zwei Dimensionen ist die Funktion  $g(x) = \ln(\|x\|)$  harmonisch (nachrechnen!).)

**Übung 1.19:** Man leite das sog. „Prinzip des Archimedes“ ab: Sei  $K$  ein Körper, der einen dreidimensionalen Bereich  $M$  einnimmt, auf den der Gaußsche Integralsatz anwendbar ist. Er befindet sich in einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte  $\rho \equiv \rho_0$ . Die Flüssigkeitsoberfläche sei die Ebene  $\{z = 0\}$ . Im Punkt  $(x, y, z) \in \partial M$  übt die Flüssigkeit den Druck  $p = \rho_0 z$  aus. Man berechne die Auftriebskraft

$$F = \int_{\partial M} p(x) \mathbf{n} \, do = \int_{\partial M} \rho_0 z \mathbf{n} \, do,$$

die auf den Körper wirkt, wobei  $\mathbf{n}$  das äußere Normaleneinheitsvektorfeld von  $\partial M$  ist. (Hinweis: Das Ergebnis sollte lauten: *Auf den Körper  $K$  wirkt eine Kraft senkrecht nach oben, deren Betrag gleich dem Gewicht  $\rho_0 |M|$  der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist.*)

**Übung 1.20:** Man verifiziere die Gültigkeit des Stokes'schen Integralsatz für die Fläche

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und die Vektorfunktion  $v(x, y, z) = (y, z, x)$ . (Hinweis: Zur Parametrisierung der Randkurve verwende man  $(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) := (\cos \theta, \sin \theta, \cos(2\theta))$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .)

**Übung 1.21:** Die „Länge“ einer Jordan-Kurve im  $\mathbb{R}^n$  ist als Limes der Längen approximierender Polygonzüge definiert, wobei deren Längen wiederum die Summen der Längen der einzelnen Streckenabschnitte sind, aus denen sie zusammengesetzt sind. Die Länge eines Streckenabschnitts schließlich ist der euklidische Abstand seiner beiden Endpunkte. Warum wird hier zur Streckenmessung die euklidische Norm und nicht irgend eine der anderen, zu dieser äquivalenten Normen des  $\mathbb{R}^n$  verwendet?

**Übung 1.22:** Wann heißt ein Vektorfeld  $v : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  „Gradientenfeld“? Ist das Vektorfeld  $v(x) = (-x_2 \|x\|_2^{-2}, x_1 \|x\|_2^{-2})$  im  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ein Gradientenfeld? Man gebe eine hinreichende Bedingung dafür an, dass ein Vektorfeld auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein Gradientenfeld ist und diskutiere diese anhand des Beispiels.

**Übung 1.23:** Man formuliere den Integralsatz von Gauß für das Vektorfeld  $v(x) = x$  auf dem Einheitskreis  $K_1(0) \subset \mathbb{R}^2$  und zeige damit für dessen Inhalt und Randlänge die Beziehung  $|K_1(0)| = \frac{1}{2} |\partial K_1(0)|$ . Welches Ergebnis liefert die analoge Rechnung für die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$ ?

**Übung 1.24:** Man formuliere zunächst den Integralsatz von Stokes für allgemeine (hinreichend glatt parametrisierte) Flächen im  $\mathbb{R}^3$  und spezialisiere ihn dann für ebene Flächen in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene. In welcher Beziehung steht die resultierende Aussage zum Satz von Gauß?