

0 Vorwort

Dieser dritte Teil der Textreihe zur Analysis führt die im ersten und zweiten Teil entwickelte Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer und mehrerer reeller Variablen weiter in Richtung Kurven- und Flächenintegrale sowie die Integralsätze von Gauß und Stokes. Weiter werden der Lebesguesche Integralbegriff sowie die darauf basierenden Funktionenräume eingeführt und die bisher gewonnenen Konzepte und Methoden auf einfache Variationsaufgaben sowie partielle Differentialgleichungen angewendet.

In Kapitel 1 werden zunächst Integrale über Kurven und Flächen eingeführt und dann die Integralsätze von Gauß und Stokes für das mehrdimensionale Riemann-Integral formuliert. Diese sind Verallgemeinerungen des eindimensionalen Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung für mehrere Dimensionen:

$$\int_G \nabla \cdot v \, dx = \int_{\partial G} v \cdot n \, do, \quad \int_F \nabla \times v \, do = \int_{\partial F} v \cdot ds.$$

Damit ist der Aufbau der klassischen Analysis im Wesentlichen abgeschlossen.

Als praktische Anwendung führt dann Kapitel 2 in die Theorie der Variationsaufgaben („Variationsrechnung“) ein. Gesucht ist hier z. B. eine Funktion $u(t)$, welche in einer geeigneten Klasse von Funktionen dem Integral

$$F(u) = \int_a^b L(t, u(t), u'(t)) \, dt$$

einen minimalen Wert verleiht. Als notwendige Minimalitätsbedingung ergeben sich die sog. „Eulerschen Differentialgleichungen“. Die Anwendung auf Variationsaufgaben in mehreren Dimensionen, hier als Beispiel das sog. „Dirichletsche Prinzip“, führt auf Schwierigkeiten, die in den Unzulänglichkeiten des Riemannschen Integralbegriffs begründet sind.

In Kapitel 3 nehmen wir die Entwicklung der Analysis wieder auf. Das *Lebesguesche* Integral im \mathbb{R}^1 und im \mathbb{R}^n wird als Verallgemeinerung des *Riemannschen* Integrals eingeführt. Damit lassen sich einige der Unzulänglichkeiten des Riemann-Integrals beheben, insbesondere die Unvollständigkeit des Vektorraumes der Riemann-integrierbaren Funktionen bzgl. der Konvergenz im quadratischen Mittel.

Als Anwendungen des Lebesgue-Integrals werden in Kapitel 4 der Lebesguesche Funktionenraum $L^p(\Omega)$ und die Sobolew-Räume $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ eingeführt und in diesem Rahmen zunächst die Theorie der „Fourier-Integrale“ als natürliche Verallgemeinerung der Fourier-Entwicklung aus dem ersten Teil der Skriptenreihe und dann das sog. „Dirichletsche Prinzip“ aus der Variationsrechnung bewiesen.

Schließlich wird in Kapitel 5 ein Abriss der Theorie von partiellen Differentialgleichungen gegeben. Eine auch nur annähernd vollständige Behandlung dieses Themas übersteigt die Möglichkeiten eines einführenden Textes. Wegen ihrer Bedeutung in den Anwendungen werden wenigstens die einfachsten Prototypen partieller Differentialgleichungen, wie a) Poisson-Gleichung, b) Wärmeleitungsgleichung und c) Wellengleichung diskutiert:

$$a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad b) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$