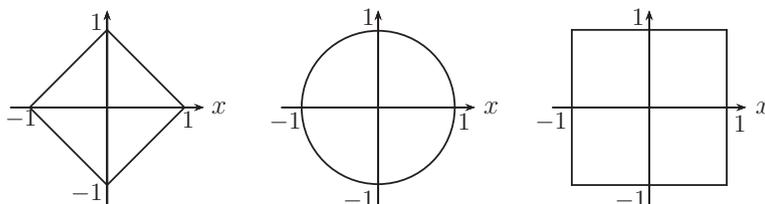


A Lösungen der Übungsaufgaben

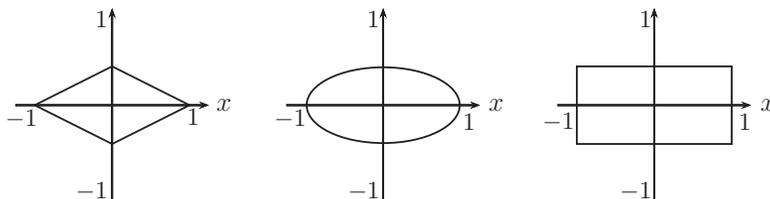
Im Folgenden sind Lösungen für die am Ende der einzelnen Kapitel formulierten Aufgaben zusammengestellt. Es handelt sich dabei nicht um „Musterlösungen“ mit vollständig ausformuliertem Lösungsweg, sondern nur um „Lösungsansätze“ in knapper Form.

A.1 Kapitel 1

Lösung A.1.1: a) Einheitssphären im \mathbb{R}^2 bzgl. der l_1 -Norm (links), der euklidischen Norm (Mitte) und der l_∞ -Norm (rechts):



b) Einheitssphären im \mathbb{R}^2 bzgl. der gewichteten l_1 -Norm (links), der euklidischen Norm (Mitte) und der l_∞ -Norm (rechts):



Lösung A.1.2: Seien $I \subset \mathbb{N}$ eine endliche und $\Lambda \subset \mathbb{R}$ eine beliebige (möglicherweise auch überabzählbare) Indexmenge.

Ia) Seien die Mengen O_i , $i \in I$, und O_λ , $\lambda \in \Lambda$, offen.

i) Zu einem Punkt $x \in \bigcap_{i \in I} O_i$ gibt es Kugelumgebungen $K_{\varepsilon_i}(x) \subset O_i$. Dann ist $K_\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon := \min_{i \in I} \varepsilon_i$ in allen O_i enthalten, d. h.: x hat eine Kugelumgebung in $\bigcap_{i \in I} O_i$.

ii) Zu einem Punkt $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ gibt es Kugelumgebungen $K_{\varepsilon_\lambda}(x) \subset O_\lambda$. Dann ist für irgend ein $\lambda \in \Lambda$ die Menge $K_{\varepsilon_\lambda}(x)$ Kugelumgebung von x in $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$.

Ib) Seien die Mengen A_i , $i \in I$ und A_λ , $\lambda \in \Lambda$, abgeschlossen.

i) Die Mengen A_i^c sind offen. Also ist nach (a) der endliche Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} A_i^c$ offen. Wegen $\bigcup_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i^c)^c$ ist dann $\bigcup_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

ii) Die Mengen A_λ^c sind abgeschlossen. Also ist nach (a) die Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ offen.

Wegen $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c)^c$ (einfach nachzurechnen) ist also $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ abgeschlossen.

IIa) Um zu zeigen, dass der Durchschnitt *unendlich* vieler offener Mengen nicht offen sein muss, betrachten wir abzählbar unendlich viele (offene) Kugelumgebungen des Nullpunktes im \mathbb{K}^n :

$$U_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad U := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k = \{0\}.$$

Die Schnittmenge ist als einpunktige Menge aber nicht offen.

IIb) Um zu zeigen, dass die Vereinigung *unendlich* vieler abgeschlossenen Mengen nicht abgeschlossen sein muss, betrachten wir abzählbar unendlich viele (abgeschlossene) Sphären im \mathbb{K}^n :

$$S_k := \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| = 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k.$$

Dann liegt die Folge $(1/k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A , ihr Limes $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/k$ aber nicht. Die Vereinigungsmenge A enthält also nicht alle ihre Häufungspunkte und ist daher nicht abgeschlossen.

Lösung A.1.3: a) Die Gleichung $(\overline{A})^\circ = A^\circ$ ist i. Allg. *falsch*. Ein Gegenbeispiel erhält man mit der punktierten (offenen) Kreisscheibe $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1\}$:

$$(\overline{A})^\circ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\} \neq A^\circ = A.$$

b) Die Gleichung $\overline{A^\circ} = \overline{A}$ ist *falsch*. Ein Gegenbeispiel erhält man mit der Strecke $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0, 1], x_2 = 0\}$:

$$A^\circ = \emptyset, \quad \overline{A^\circ} = \emptyset \neq \overline{A} = A.$$

c) Die Gleichung $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ ist *war*. Da $A^\circ \cap B^\circ$ offen ist, gibt es zu jedem $x \in A^\circ \cap B^\circ$ eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x) \subset A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. Folglich ist $x \notin \partial(A \cap B)$ bzw. $x \in (A \cap B)^\circ$. Da auch $(A \cap B)^\circ$ offen ist, gibt es umgekehrt zu jedem $x \in (A \cap B)^\circ$ eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x) \subset (A \cap B)^\circ \subset A \cap B$. Dann ist auch $K_\varepsilon(x) \subset A$ sowie $K_\varepsilon(x) \subset B$, d. h.: $x \notin \partial A$ und $x \notin \partial B$ und somit $x \in A^\circ \cap B^\circ$. d) Die Gleichung $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$ ist *falsch*. Ein Gegenbeispiel erhält man mit den Mengen $A = \{x \in \mathbb{R}^1 : x \geq 0\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^1 : x \leq 0\}$:

$$A^\circ \cup B^\circ = \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}^1 = (A \cup B)^\circ.$$

e) Die Gleichung $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ist *falsch*. Ein Gegenbeispiel erhält man mit den Mengen $A := \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$ und $B := \{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} < x \leq 1\}$, für welche $\overline{A \cap B} = \emptyset$ aber $\overline{A} \cap \overline{B} = \{\frac{1}{2}\}$ ist. f) Die Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ist *war*. Es ist offenbar $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, und da $\overline{A} \cup \overline{B}$ abgeschlossen ist, auch $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Ferner ist $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ und somit $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Lösung A.1.4: Sei $O \subset \mathbb{K}^n$ offen.

a) Die Menge $O \cap V_{n-1}$ aufgefasst als Teilmenge im \mathbb{K}^n kann *nicht* offen sein, da jede

Kugelumgebung $K_\varepsilon(x)$ eines Punktes $x \in O$ auch Punkte $\mathbb{K}^n \setminus V_{n-1}$ enthalten muss, z. B.: $x_{\pm\varepsilon} := x \pm ((0, \dots, 0, \varepsilon)$.

b) Die Menge $O \cap V_{n-1}$ aufgefasst als Teilmenge im \mathbb{K}^{n-1} ist offen. Zu jedem $x \in O$ gibt es eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x) \subset O$. Dann ist $K_\varepsilon(x) \cap V_{n-1} \subset O \cap V_{n-1}$ Kugelumgebung von x in V_{n-1} .

Lösung A.1.5: i) Für $x, y \in l_2$ gilt

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 \leq 2 \sum_{i=1}^n \{x_i^2 + y_i^2\} \leq 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty,$$

so dass auch $x + y$ quadratisch summierbar. Ebenso folgt, dass auch αx quadratisch summierbar ist. Also ist l_2 ein Vektorraum.

ii) Für $x, y \in l_2$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^n x_k y_k \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2,$$

d. h.: Die Ausdrücke $(x, y)_2$ und $\|x\|_2$ sind wohl definiert. Die Linearität, Symmetrie und Definitheit von $(\cdot, \cdot)_2$ sind evident; insbesondere gilt:

$$(x, y)_2 = (y, x)_2, \quad (x, x)_2 \geq 0, \quad \|x\|_2 = 0 \Rightarrow x_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

iii) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in l_2 . Dann sind für jedes $i \in \mathbb{N}$ auch die Folgen $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen und besitzen Limiten $x_i \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x := (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_2^2 < \varepsilon^2, \quad k, l \geq n_\varepsilon,$$

und folglich für $l \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i|^2 < \varepsilon^2, \quad k \geq n_\varepsilon.$$

Da n hier beliebig ist, folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(k)} - x_i|^2 < \varepsilon^2, \quad k \geq n_\varepsilon.$$

Also ist $x^{(k)} - x \in l_2$ und $x^{(k)} - x \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Wegen $x = x^{(k)} + x - x^{(k)}$ ist schließlich auch $x \in l_2$.

Lösung A.1.6: a) Für $x, y \in l_1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{i=1}^n \{|x_i| + |y_i|\} = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| < \infty,$$

also ist auch $x + y$ absolut summierbar. Ebenso folgt, dass auch αx absolut summierbar ist. Folglich ist l_1 ein Vektorraum. Seine Dimension ist offenbar unendlich, da die speziellen Folgen $e^{(i)} := (\delta_{ij}, j \in \mathbb{N})$ linear unabhängig sind.

b) Für $x, y \in l_1$ gilt wegen der Eigenschaften des Absolutbetrags und der Stetigkeit von Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i = 0, i \in \mathbb{N}, \quad \Leftrightarrow \quad x = 0. \\ \|\alpha x\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = |\alpha| \|x\|_1, \quad \alpha \in \mathbb{K}, \\ \|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i| + |y_i|) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Also ist mit $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf l_1 definiert.

c) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in l_1 . Dann sind für jedes $i \in \mathbb{N}$ auch die Folgen $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen und besitzen Limiten $x_i \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x := (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_1 < \varepsilon$, $k, l \geq n_\varepsilon$, und folglich für $l \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon, \quad k \geq n_\varepsilon.$$

Da n hier beliebig ist, folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon, \quad k \geq n_\varepsilon.$$

Also ist $x^{(k)} - x \in l_1$ und $x^{(k)} - x \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Wegen $x = x^{(k)} + x - x^{(k)}$ ist schließlich auch $x \in l_1$.

Lösung A.1.7: a) $O \subset \mathbb{K}^n$ ist offen genau dann, wenn es zu jedem $x \in O$ eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x) \subset O$ bzw. $K_\varepsilon(x) \cap O^c = \emptyset$ gibt. Dies wiederum ist äquivalent zu $x \notin \partial O$.

b) $A \subset \mathbb{K}^n$ ist abgeschlossen, genau dann, wenn A^c offen ist. Dies ist nach Teil (a) wiederum genau dann der Fall, wenn A^c keinen seiner Randpunkte enthält. Letzteres bedeutet aber wegen $\partial(A^c) = \partial A$ gerade, dass A alle seine Randpunkte enthält.

Lösung A.1.8: a) Die Behauptung ist falsch, denn die stetige Abbildung $\rho(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ induziert eine Metrik aber keine Norm auf \mathbb{K}^n . Zunächst ist $d(x, y) := \rho(x - y)$ eine Metrik, wobei Definitheit und Symmetrie unmittelbar klar sind. Um zu sehen das die Dreiecksungleichung gilt betrachten wir zunächst die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist

$$\rho(x) = \varphi(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Wegen $\varphi' \geq 0$ ist φ monoton wachsend, und es ist somit für beliebige $x, y, z \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \rho(x - y) = \varphi(|x - y|) \\ &\leq \varphi(|x - z| + |z - y|) \\ &= \frac{|x - z|}{1 + |x - z| + |z - y|} + \frac{|z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \\ &\leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} \\ &= \rho(x - z) + \rho(z - y) = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Folglich ist $d(\cdot, \cdot)$ eine Metrik. Sei nun $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, so ist ρ wegen

$$\rho(\alpha x) = |\alpha| \frac{|x|}{1 + |\alpha||x|} \neq |\alpha| \rho(x)$$

keine Norm.

b) Die Aussage ist wahr. Die Menge O sei offen. Enthält O einen Randpunkt $a \in \partial O$, so gibt es in jeder Umgebung von a Punkte aus dem Komplement O^c . Dies widerspricht aber der Offenheit von O . Also kann O keinen ihrer Randpunkte enthalten. Die Menge O enthalte nun keinen ihrer Randpunkte. Also gibt es zu jedem Punkt $a \in O$ eine Umgebung, welche keine Punkte aus dem Komplement O^c enthält, d. h. ganz in O liegt. Folglich ist O offen.

c) Die Aussage ist wahr, denn $\partial M = (M^o \cup (M^c)^o)^c$ und somit als Komplement der offenen Menge $(M^o \cup (M^c)^o)^c$ abgeschlossen.

d) Die Aussage ist falsch, denn für die Menge $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| \leq 1\}$ ist

$$\overline{(M)}^o = \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| < 1\} \neq \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| \leq 1\} = \overline{(M^o)}.$$

(Achtung: Die Argumentation, dass Gleichheit nicht bestünde da die eine Menge offen und die andere abgeschlossen ist, ist falsch. Man mache sich dies an der sowohl offenen wie auch abgeschlossenen Menge \mathbb{K}^n klar!)

e) Die Aussage ist falsch, denn mit $A = B$ folgt

$$A^o \cup B^o = A^o = (A \cup B)^o.$$

f) Die Aussage ist falsch, denn sei $A = \{x \in \mathbb{K}^n \mid 0 < |x| < 1\}$ und $B = \{0\}$, so folgt

$$A^o \cup B^o = A \neq \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| < 1\} = (A \cup B)^o.$$

Lösung A.1.9: Es ist:

- $M^o = \emptyset$, $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$, $\partial M = \overline{M}$.
- $M^o = \emptyset$, $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1, x_1 = 0\}$, $\partial M = \overline{M}$.
- $M = \overline{M} = \mathbb{R}^n \setminus (-1, 1)^n$, $M^o = \mathbb{R}^n \setminus [-1, 1]^n$, $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$
- $M = M^o = (-1, 1)^n$, $\overline{M} = [-1, 1]^n$, $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$

Lösung A.1.10: a) Auf dem Raum $C[0, 1]$ sind durch

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$$

Normen (sog. L^∞ - und L^1 -Norm) erklärt. Diese beiden Normen können nicht äquivalent sein, da für die durch $f_n(x) := nx^n$ definierten Funktionen $f_n \in C[0, 1]$ gilt:

$$\|f_n\|_\infty = n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad \|f_n\|_1 = n(n+1)^{-1}x^{n+1}\Big|_0^1 = n(n+1)^{-1} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Die (abgeschlossene) Einheitskugel $\overline{K_1(0)} = \{x \in l_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ des l_2 ist beschränkt und abgeschlossen. Die Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ der $x^{(k)} := (\delta_{ki})_{i \in \mathbb{N}} \in \overline{K_1(0)}$ enthält aber wegen

$$\|x^{(k)} - x^{(j)}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_{ki} - \delta_{ji}|^2 = |\delta_{kk}|^2 + |\delta_{jj}|^2 = 2, \quad k \neq j.$$

keine Cauchy-Folge. Der l_2 -Abstand aller dieser Folgen ist also $\delta := \sqrt{2}$. Die (offene) Kugelüberdeckung $\{K_\delta(x^{(k)}), k \in \mathbb{N}\}$ der Menge $\{x^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$ ist disjunkt. Sie kann somit keine endliche Teilüberdeckung enthalten, welche $\{x^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$ überdeckt.

Lösung A.1.11: a) Im Fall $x = x'$ ist $(x - x', y) = (0, y) = 0 \quad \forall y \in V$. Ferner gilt mit $y := x - x'$:

$$(x - x', x - x') = (x - x', y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - x' = 0.$$

Dies gilt auch im „Komplexen“.

b) Es ist $\|x + x'\|^2 = \|x\|^2 + (x, x') + (x', x) + \|x'\|^2$ und folglich

$$\begin{aligned} (x, x') = 0 &\quad \Rightarrow \quad \|x + x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2, \\ \|x + x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2 &\quad \Rightarrow \quad (x, x') + (x', x) = 2(x, x') = 0. \end{aligned}$$

Im „Komplexen“ kann in der letzten Zeile nur $(x, x') + (x', x) = 2\operatorname{Re}(x, x') = 0$ gefolgert werden.

c) Mit Hilfe der Linearität des Skalarprodukts ergibt sich (im „Reellen“ und „Komplexen“)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\ &= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Der „Satz von Pythagoras“ und die „Parallelogrammidentität“ im allgemeinen „prä-hilbertschen Raum“ (d. h. „Vektorraum mit Skalarprodukt“) entsprechen bekannten Aussagen der euklidischen Geometrie in der Ebene (Bild malen!).

Lösung A.1.12: a) Nach Voraussetzung ist $a(x, x) \in \mathbb{R}$. Für $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt dann

$$\begin{aligned} a(x + \alpha y, x + \alpha y) &= a(x, x) + \alpha a(y, x) + \bar{\alpha} a(x, y) + \alpha \bar{\alpha} a(y, y) \in \mathbb{R} \\ a(x - \alpha y, x - \alpha y) &= a(x, x) - \alpha a(y, x) - \bar{\alpha} a(x, y) + \alpha \bar{\alpha} a(y, y) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für $\alpha = \bar{\alpha} = 1$ können wir hieraus wegen $a(x, x), a(y, y) \in \mathbb{R}$ folgern:

$$a(x, y) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad a(y, x) \in \mathbb{R}.$$

i) Im Fall $a(x, y), a(y, x) \in \mathbb{R}$ führt die Wahl $\alpha := i, \bar{\alpha} = -i$ zu

$$ia(y, x) - ia(x, y) \in \mathbb{R}$$

und somit $a(y, x) - a(x, y) = 0$ bzw. die behauptete Beziehung $a(y, x) = \overline{a(x, y)}$.

(ii) Im Fall $a(x, y), a(y, x) \notin \mathbb{R}$ führt die Wahl $\alpha = \bar{\alpha} := 1$ zu $a(y, x) + a(x, y) \in \mathbb{R}$ bzw.

$$\operatorname{Im} a(y, x) = -\operatorname{Im} a(x, y) = \operatorname{Im} \overline{a(x, y)}.$$

Weiter ergibt die Wahl $\alpha := \overline{a(y, x)}, \bar{\alpha} = a(y, x)$:

$$|a(y, x)|^2 + a(y, x)a(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Letzteres impliziert

$$\begin{aligned} a(y, x)a(x, y) &= \operatorname{Re} a(y, x)\operatorname{Re} a(x, y) + i(\operatorname{Re} a(y, x)\operatorname{Im} a(x, y) + \operatorname{Im} a(y, x)\operatorname{Re} a(x, y)) \\ &\quad - \operatorname{Im} a(y, x)\operatorname{Im} a(x, y) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{Re} a(y, x)\operatorname{Im} a(x, y) + \operatorname{Im} a(y, x)\operatorname{Re} a(x, y) = 0$. Wegen $\operatorname{Im} a(y, x) = -\operatorname{Im} a(x, y)$ folgt

$$(\operatorname{Re} a(y, x) - \operatorname{Re} a(x, y))\operatorname{Im} a(x, y) = 0.$$

Da $\operatorname{Im} a(x, y) \neq 0$ angenommen war, impliziert dies

$$\operatorname{Re} a(y, x) = \operatorname{Re} a(x, y) = \operatorname{Re} \overline{a(x, y)}.$$

und damit schließlich die behauptete Symmetriebeziehung $a(y, x) = \overline{a(x, y)}$.

b) Die durch $a(x, y) := (x_1 + x_2)y_1 + x_2y_2$ definierte Bilinearform auf \mathbb{R}^2 ist wegen

$$a(x, x) = (x_1 + x_2)x_1 + x_2^2 \geq x_1^2 - |x_2x_1| + x_2^2 \geq (|x_1| - |x_2|)^2 + |x_1x_2|$$

für $x \neq 0$ (strikt) definit. Da aber i. Allg.

$$a(x, y) - a(y, x) = (x_1 + x_2)y_1 + x_2y_2 - (y_1 + y_2)x_1 - y_2x_2 = x_2y_1 - y_2x_1 \neq 0,$$

ist die Bilinearform nicht symmetrisch.

Lösung A.1.13: a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein *reeller* normierter Raum, dessen Norm $\|\cdot\|$ die „Parallelogrammidentität“ erfüllt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in V.$$

Dann ist durch

$$(x, y) := \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2, \quad x, y \in V,$$

auf V ein Skalarprodukt definiert. Hierzu wird für Elemente $x, y, z \in V$ gezeigt:

i) Symmetrie:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2) = (y, x).$$

ii) Definitheit:

$$\begin{aligned}(x, x) &= \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2) = \|x\|^2 \geq 0, \\ (x, x) = 0 &\Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.\end{aligned}$$

iii) Linearität (im zweiten Argument):

a) Additivität: Mit Hilfe der Parallelogrammidentität ergibt sich

$$\begin{aligned}(x, y) + (x, z) &= \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2\} \\ &= \frac{1}{4}\{\|x + \frac{1}{2}(y + z) + \frac{1}{2}(y - z)\|^2 + \|x + \frac{1}{2}(z + y) - \frac{1}{2}(y - z)\|^2\} \\ &\quad - \frac{1}{4}\{\|x - \frac{1}{2}(y + z) - \frac{1}{2}(y - z)\|^2 + \|x - \frac{1}{2}(z + y) + \frac{1}{2}(y - z)\|^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{\|x + \frac{1}{2}(y + z)\|^2 + \|\frac{1}{2}(y - z)\|^2 - \|x - \frac{1}{2}(y + z)\|^2 - \|\frac{1}{2}(y - z)\|^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{\|x + \frac{1}{2}(y + z)\|^2 - \|x - \frac{1}{2}(y + z)\|^2\} \\ &= 2(x, \frac{1}{2}(y + z)).\end{aligned}$$

Dies ist noch nicht ganz, was wir haben wollen. Bei Setzung $z = 0$ ergibt sich hieraus zunächst die Rechenregel

$$(*) \quad (x, y) = 2(x, \frac{1}{2}y),$$

womit wir schließlich doch noch das gewünschte Resultat erhalten:

$$(x, y) + (x, z) = 2(x, \frac{1}{2}(y + z)) = (x, y + z).$$

b) Homogenität: Mit Hilfe von $(*)$ und der gezeigten Additivität folgt durch Induktion:

$$(**) \quad m2^{-n}(x, y) = (x, m2^{-n}y), \quad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}_+$ besitzt eine sog. „Binärdarstellung“ (analog zur Dezimaldarstellung aber mit Basis $b = 2$):

$$\alpha = m_0 \sum_{k=1}^{\infty} m_k 2^{-k}, \quad m_0 \in \mathbb{N}, m_k \in \{0, 1\}, k \geq 1.$$

Diese Reihe ist (absolut) konvergent, d. h.: ihre Partialsummen approximieren α :

$$\alpha_n := m_0 \sum_{k=1}^n m_k 2^{-k} \rightarrow m_0 \sum_{k=1}^{\infty} m_k 2^{-k} = \alpha \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wegen der allgemein für Normen gültigen Beziehung

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

folgt

$$\left| \|x \pm \alpha_n y\| - \|x \pm \alpha y\| \right| \leq |\alpha_n - \alpha| \|y\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also gilt auch gemäß der Definition des Skalarprodukts

$$(x, \alpha_n y) \rightarrow (x, \alpha y) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit erhalten wir dann wegen (**):

$$\alpha(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x, y) = (x, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n y) = (x, \alpha y),$$

d. h.: Die Homogenitätseigenschaft zunächst für $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Für $\alpha = 0$ und für negative α ergibt sie sich dann direkt mit Hilfe der Definition des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} (x, 0) &= \frac{1}{4} \|x\|^2 - \frac{1}{4} \|x\|^2 = 0, \\ (x, -y) &= \frac{1}{4} \|x - y\|^2 - \frac{1}{4} \|x + y\|^2 = -\left\{ -\frac{1}{4} \|x - y\|^2 + \frac{1}{4} \|x + y\|^2 \right\} = -(x, y). \end{aligned}$$

Die Additivität und Homogenität zusammen implizieren die Linearität, d. h. für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z), \quad x, y, z, \in V,$$

und unter Verwendung der schon gezeigten Symmetrie auch die Linearität im ersten Argument:

$$(\alpha x + \beta y, z) = (z, \alpha x + \beta y) = \alpha(z, x) + \beta(z, y) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \quad x, y, z \in V.$$

Wegen

$$(x, x) = \frac{1}{4} (\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2) = \|x\|^2$$

wird die gegebene Norm offenbar von diesem Skalarprodukt erzeugt.

b) Wir zeigen, dass für $p \neq 2$ die l_p -Norm auf dem \mathbb{R}^n nicht die Parallelogrammidentität erfüllt, so dass sie nicht von einem Skalarprodukt erzeugt sein kann. Für die Punkte $x = (1, 0, \dots, 0)$, $y = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ gilt im Fall $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$:

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2 \cdot 2^{2/p} \neq 2 \cdot 2 = 2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2,$$

und im Fall $p = \infty$:

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\|x\|_\infty^2 + 2\|y\|_\infty^2,$$

d. h.: Die Parallelogrammidentität ist in keinem der betrachteten Fälle erfüllt.

Lösung A.1.14: a) Wir bemerken zunächst

$$\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

Dabei ist die Endlichkeit des Supremums klar, da alle Normen äquivalent sind.

i) Definitheit: Es gilt $\sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| \geq 0$. Im Falle $\sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = 0$ ist $Ax = 0 \forall x \in \mathbb{K}^n$, und folglich $A = 0$.

ii) Homogenität: Für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

iii) Dreiecksungleichung:

$$\sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|(A+B)x\| \leq \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Bx\|.$$

Wegen der Ungleichung

$$\| \|Ax\| - \|Ay\| \| \leq \|A(x-y)\| \leq \|A\| \|x-y\|, \quad x, y \in \mathbb{K}^n,$$

ist die Funktion $f(x) := \|Ax\|$ stetig (sogar Lipschitz-stetig) auf \mathbb{K}^n . Auf der kompakten Menge $\partial K_1(0) \subset \mathbb{K}^n$ nimmt sie also ihr Maximum an, d. h.:

$$\sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

b) Bezüglich jeder „natürlichen“ Matrixnorm gilt für die Einheitsmatrix

$$\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = 1.$$

Wegen

$$\|I\|_F = \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n},$$

kann die Frobenius-Norm also keine „natürliche“ Matrixnorm sein. Sie ist allerdings i) verträglich mit der euklidischen Vektornorm und (ii) submultiplikativ.

i) Für $x \in \mathbb{K}^n$ folgt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung:

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{kj}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|x\|_2^2.$$

ii) Analog folgt

$$\begin{aligned} \|AB\|_F^2 &= \sum_{k,j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik} \right|^2 \leq \sum_{k,j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ji}|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |b_{ik}|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ji}|^2 \right) \left(\sum_{i,k=1}^n |b_{ik}|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2. \end{aligned}$$

Lösung A.1.15: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch.

i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$, $\|v\|_2 = 1$. Dann gilt

$$\lambda = (\lambda v, v)_2 = (Av, v)_2 = (v, Av)_2 = (v, \lambda v)_2 = \bar{\lambda}$$

und somit $\lambda = \bar{\lambda}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ zwei Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$. O.b.d.A. sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann impliziert

$$(v_1, v_2)_2 = \lambda_1^{-1}(Av_1, v_2)_2 = \lambda_1^{-1}(v_1, Av_2)_2 = \lambda_1^{-1}\lambda_2(v_1, v_2)_2,$$

wegen $\lambda_1^{-1}\lambda_2 \neq 1$ notwendig $(v_1, v_2)_2 = 0$.

iii) Die hermitesche Matrix A besitzt genau n ihrer Vielfachheiten entsprechend oft gezählte Eigenwerte (Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms). Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($m \leq n$) die paarweise verschiedenen Eigenwerte. Dann spannen die zugehörigen (nach (ii) paarweise zu einander orthogonalen) Eigenräume E_1, \dots, E_m den \mathbb{K}^n auf,

$$E := E_1 \oplus \dots \oplus E_m = \mathbb{K}^n.$$

Um dies einzusehen betrachte man das orthogonale Komplement $E^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in E^\perp$ und $y \in E$ gilt $(Ax, y)_2 = (x, Ay)_2 = 0$, da auch $Ay \in E$ ist. Also ist E^\perp invariant unter der Anwendung von A . Als lineare Abbildung in E müsste A nun weitere Eigenwerte haben, was aber nicht möglich ist, da wir bereits alle zur Definition von E herangezogen hatten. Also ist $E^\perp = \{0\}$ bzw. $E = \mathbb{R}^n$.

Sei $m_i = \dim(E_i)$. In jedem Eigenraum E_i existiert eine Orthonormalbasis $\{v^{(i,j)}, j = 1, \dots, m_i\}$, welche etwa mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren aus einer beliebigen Basis von E_i erzeugt werden kann. Dann sind die $\sum_{i=1}^m m_i = n$ normierten Vektoren $v^{(i,j)}$, $j = 1, \dots, m_i, i = 1, \dots, m$, paarweise orthogonal und bilden somit eine Orthonormalbasis des \mathbb{K}^n .

Lösung A.1.16: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beliebig.

i) Wegen

$$(\bar{A}^T Ax, y)_2 = (Ax, Ay) = (x, \bar{A}^T Ay)_2,$$

ist $\bar{A}^T A$ hermitesch und ferner wegen

$$(\bar{A}^T Ax, x)_2 = \|Ax\|_2^2 \geq 0,$$

positiv semi.definit. Im Fall, dass A regulär ist, folgt

$$\|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow x = 0,$$

d. h.: A ist sogar positiv definit.

ii) Seien (gemäß Aufgabe 4.3) $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n =: \lambda_{\max}$ die n (ihrer Vielfachheiten entsprechend oft gezählten) Eigenwerte von $\bar{A}^T A$ und $\{w^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$ eine zugehöriges

Orthonormalsystem von Eigenvektoren, so dass $\bar{A}^T A w^{(i)} = \lambda_i w^{(i)}$. Es gilt:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^n (x, w_i)_2 \overline{(x, w_j)_2} (w^{(i)}, w^{(j)})_2 = \sum_{i=1}^n |(x, w^{(i)})_2|^2,$$

$$(x, \bar{A}^T A x)_2 = \sum_{i,j=1}^n (x, w_i)_2 \overline{(x, w_j)_2} (w^{(i)}, \bar{A}^T A w^{(j)})_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i |(x, w^{(i)})_2|^2 \leq \lambda_n \|x\|_2^2.$$

Für die Spektralnorm von A folgt damit:

$$\|A\|_2^2 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{(x, \bar{A}^T A x)_2}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_n.$$

Umgekehrt gilt

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n (w^{(n)}, w^{(n)})_2}{\|w^{(n)}\|_2^2} = \frac{(w^{(n)}, \bar{A}^T A w^{(n)})_2}{\|w^{(n)}\|_2^2} = \frac{\|A w^{(n)}\|_2^2}{\|w^{(n)}\|_2^2} \leq \sup_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \|A\|_2^2,$$

woraus sich die Richtigkeit der Behauptung (ii) ergibt.

Lösung A.1.17: a) Für die gegebenen symmetrischen (und damit diagonalisierbaren) Matrizen gilt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = BA.$$

b) Die Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ seien diagonalisierbar mit einer gemeinsamen Basis von Eigenvektoren. Wir zeigen, dass dann $AB = BA$ ist. Nach Voraussetzung existieren Ähnlichkeitstransformationen mit gemeinsamer Matrix $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (Die Spaltenvektoren sind gerade die gemeinsamen Eigenvektoren von A und B .), so dass

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_i^A) =: \Lambda_A, \quad T^{-1}BT = \text{diag}(\lambda_i^B) =: \Lambda_B,$$

mit den Eigenwerten λ_i^A von A und λ_i^B von B . Damit folgt, da Diagonalmatrizen stets kommutieren,

$$AB = T \Lambda_A T^{-1} T \Lambda_B T^{-1} = T \Lambda_A \Lambda_B T^{-1} = T \Lambda_B \Lambda_A T^{-1} = T \Lambda_B T^{-1} T \Lambda_A T^{-1} = BA.$$

Zusatz: Für die diagonalisierbaren Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gelte $AB = BA$. Wir zeigen, dass dann eine gemeinsame Basis von Eigenvektoren existiert. Seien $\lambda_i(A) \in \sigma(A)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenräumen $E_i(A) \subset \mathbb{K}^n$ der Dimension $\rho_i(A)$. Für jeden Eigenvektor $v \in E_i(A)$ ist dann

$$ABv = BAv = \lambda_i(A)Bv,$$

d. h.: $Bv \in E_i(A)$. Der Eigenraum $E_i(A)$ ist folglich ein „invarianter Unterraum“ von B . Eingeschränkt auf $E_i(A)$ besitzt B dann dort eine Teilbasis von $\rho_i(A) = \dim(E_i(A))$ Eigenvektoren, die dann automatisch auch Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_i(A)$ sind. Dieses Argument kann nun für alle Eigenwerte von A , d. h. für alle Eigenräume $E_i(A)$, durchgeführt werden. Dies ergibt dann die Existenz einer vollständigen Basis von Eigenvektoren von B , welche jeweils auch Eigenvektoren von A sind, d. h.: A und B besitzen eine gemeinsame Basis von Eigenvektoren.

Lösung A.1.18: Sei $\|\cdot\|$ irgend eine submultiplikative Matrixnorm (d. h. eine „Matrixnorm“).

a) Sei $A \in M$ gegeben, dann gilt für die Kugelumgebung von A :

$$K_{\|A^{-1}\|^{-1}}(A) = \{B \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}\} \subset M,$$

und somit ist M offen. Um dies zu sehen, sei $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ gegeben. Dann ist $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \|B\| < 1$. Nach dem Störungssatz der Vorlesung ist damit $I + A^{-1}B$ invertierbar. Daraus folgt wegen $A + B = A(I + A^{-1}B)$ die Invertierbarkeit von $A + B$.

b) Für $z, z' \in \text{Res}(A)$ mit $|z - z'|$ hinreichend klein existiert nach dem Störungssatz aus dem Text die Inverse $(I + (z - z')R(z))^{-1}$ und es konvergiert $(I + (z - z')R(z))^{-1} \rightarrow I$ für $z' \rightarrow z$. Für die Resolvente gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} R(z') &= (A - z'I)^{-1} = (A - zI + (z - z')I)^{-1} \\ &= ((A - zI)(I + (z - z')R(z)))^{-1} = (I + (z - z')R(z))^{-1}R(z), \end{aligned}$$

woraus $R(z') \rightarrow R(z)$ für $z' \rightarrow z$ folgt. Die Resolvente $R(z)$ ist also eine stetige Funktion auf $\text{Res}(A)$. Als solche ist sie auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \text{Res}(A)$ auch beschränkt,

$$\sup_{z \in K} \|R(z)\| \leq C.$$

Um fortzufahren, betrachten wir die beiden Identitäten

$$\begin{aligned} (AR(z) - zR(z))R(z') &= ((A - zI)R(z))R(z') = R(z'), \\ R(z)(AR(z') - z'R(z')) &= R(z)((A - z'I)R(z')) = R(z). \end{aligned}$$

Durch Subtraktion erhalten wir die sog. „Resolventengleichung“

$$R(z) - R(z') = (z - z')R(z)R(z').$$

Hieraus folgt für beliebige $z, z' \in K \subset \text{Res}(A)$

$$\|R(z) - R(z')\| \leq |z - z'| \|R(z)\| \|R(z')\| \leq C^2 |z' - z|,$$

d. h. die gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit von $R(z)$ auf K .

Lösung A.1.19: a) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrixnorm. Der Exponentialausdruck

$$e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\|A\|^k}{k!}$$

ist wohl definiert. Daher gibt es zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $n(\varepsilon, A) \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq m \geq n(\varepsilon, A)$ gilt:

$$\left\| \sum_{k=m}^n \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m}^n \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=m}^n \frac{\|A\|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchyschen Kriterium existiert also im Banachraum $(\mathbb{K}^{n \times n}, \|\cdot\|)$ der Limes

$$e^A := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}.$$

Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist dieser Limes auch eindeutig bestimmt.

b) Die Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ seien diagonalisierbar mit einer gemeinsamen Basis von Eigenvektoren. Nach Aufgabe 5.3 gilt dann $AB = BA$. Wir geben zwei alternative Beweise für die behauptete Gleichung.

Beweisvariante I (Anwendung des Cauchyschen Produktsatzes für Reihen): Zunächst rekapitulieren wir, dass

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}, \quad e^B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!}, \quad e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!}.$$

Ferner gilt nach der allgemeinen binomischen Formel, wofür $AB = BA$ benötigt wird,

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} A^j B^{2-j},$$

bzw. allgemein

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k}{j} := \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

Hieraus folgt, dass (analog zum Satz über das Cauchysche Produkt von Zahlenreihen)

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!k!} A^j B^{k-j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right) = e^A e^B. \end{aligned}$$

Beweisvariante II (Anwendung der Spektralzerlegung): Die gemeinsame Basis von Eigenvektoren von A und B ist ebenfalls eine Basis von Eigenvektoren der Summe $A+B$:

$$Av_i = \lambda_i(A)v_i, \quad Bv_i = \lambda_i(B)v_i, \quad (A+B)v_i = (\lambda_i(A) + \lambda_i(B))v_i = \lambda_i(A+B)v_i.$$

Hieraus entnehmen wir, dass $\lambda_i(A+B) = \lambda_i(A) + \lambda_i(B)$. Für alle drei Matrizen existiert also eine gemeinsame Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt:

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= \Lambda_A := \text{diag}(\lambda_i(A))_{i=1}^n, & \lambda_i(A) &\in \sigma(A) \\ T^{-1}BT &= \Lambda_B := \text{diag}(\lambda_i(B))_{i=1}^n, & \lambda_i(B) &\in \sigma(B) \\ T^{-1}(A+B)T &= \Lambda_{A+B} := \text{diag}(\lambda_i(A+B))_{i=1}^n, & \lambda_i(A+B) &\in \sigma(A+B). \end{aligned}$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (T \Lambda_A T^{-1})^k = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (T \Lambda_A T^{-1} T \Lambda_A T^{-1} \dots T \Lambda_A T^{-1}) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} T \Lambda_A^k T^{-1} = T \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \Lambda_A^k \right) T^{-1} \\ &= T \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \text{diag}(\lambda_i(A)^k)_{i=1}^n \right) T^{-1} = T \text{diag} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \lambda_i(A)^k \right)_{i=1}^n T^{-1}. \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} e^A &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(T \text{diag} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \lambda_i(A)^k \right)_{i=1}^n T^{-1} \right) \\ &= T \text{diag} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \lambda_i(A)^k \right)_{i=1}^n T^{-1} = T \text{diag} (e^{\lambda_i(A)})_{i=1}^n T^{-1}. \end{aligned}$$

Analoge Gleichungen gelten für e^B und e^{A+B} . Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= T \text{diag} (e^{\lambda_i(A+B)})_{i=1}^n T^{-1} = T \text{diag} (e^{\lambda_i(A)+\lambda_i(B)})_{i=1}^n T^{-1} \\ &= T \text{diag} (e^{\lambda_i(A)} e^{\lambda_i(B)})_{i=1}^n T^{-1} = T \text{diag} (e^{\lambda_i(A)})_{i=1}^n \text{diag} (e^{\lambda_i(B)})_{i=1}^n T^{-1} \\ &= T \text{diag} (e^{\lambda_i(A)})_{i=1}^n T^{-1} T \text{diag} (e^{\lambda_i(B)})_{i=1}^n T^{-1} = e^A e^B. \end{aligned}$$

A.2 Kapitel 2

Lösung A.2.1: a) Die Funktion $f(x) := \ln \ln(\|x\|_2)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 > 1$ und folglich $\ln(\|x\|_2) > 0$ definiert und als Komposition der stetigen Funktionen $\ln(x)$ und $\|x\|_2$ dort auch stetig.

b) Die Funktion $f(x)$ auf ganz \mathbb{R}^n definiert und stetig.

Lösung A.2.2: Für beliebige $x, y, x', y' \in \mathbb{K}^n$ gilt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |(x, y)_2 - (x', y')_2| &= |(x - x', y)_2 + (x' - x, y - y')_2 + (x, y - y')_2| \\ &\leq \|x - x'\|_2 \|y\|_2 + \|x' - x\|_2 \|y - y'\|_2 + \|x\|_2 \|y - y'\|_2 \\ &\leq (\|x\|_2^2 + \|x - x'\|_2^2 + \|y\|_2^2)^{1/2} (\|x - x'\|_2^2 + \|y - y'\|_2^2 + \|y - y'\|_2^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Aus $x' \rightarrow x, y' \rightarrow y$ folgt also $(x', y')_2 \rightarrow (x, y)_2$, was zu zeigen war. Die Funktion ist auf jeder beschränkten Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ Lipschitz-stetig, aber nicht gleichmäßig auf \mathbb{K}^n .

Lösung A.2.3: a) Diese Randmenge ist *nicht* zusammenhängend, da ihre äußere Komponente $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ offenbar von der inneren $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ durch eine relativ-offene Zerlegung separiert werden kann.

- b) Wegen $M = \emptyset$, ist M nach Definition nicht zusammenhängend.
- c) Die Menge ist zusammenhängend, da je zwei ihrer "benachbarten" (abgeschlossenen) Komponenten einen gemeinsamen Punkt haben. Es kann also keine separierende relativ-offene Zerlegung geben.
- d) Die Menge ist zusammenhängend, da sie als Vereinigung des Graphen $G(f)$ einer stetigen Funktion und eines Häufungspunktes von $G(f)$ nicht durch eine relativ-offene Zerlegung separiert werden kann. (Bemerkung: Dies ist ein Beispiel einer „topologisch“ zusammenhängenden Menge, welche nicht „wegzusammenhängend“ ist.)

Lösung A.2.4: a) Für beliebige $x, x' \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|, \quad \|x' - y\| \leq \|x' - x\| + \|x - y\|, \quad y \in M.$$

Übergang zum Infimum bzgl. $y \in M$ ergibt:

$$d(x) \leq \|x - x'\| + d(x'), \quad d(x') \leq \|x' - x\| + d(x).$$

Also ist $\|d(x) - d(x')\| \leq \|x - x'\|$, d.h. d ist Lipschitz-stetig mit L-Konstante $L = 1$.

b) Sei M ein Teilraum von \mathbb{R}^n und $d(\cdot)$ der euklidische Abstand. Für ein $x \in M$ ist $x_M := x$ selbst Bestapproximation. Seien nun $x \notin M$ und $y^{(k)} \in M$ Punkte mit

$$d(x) = \inf_{y \in M} \|x - y\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y^{(k)}\|_2$$

Die Folge $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat somit eine konvergente Teilfolge $(y^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$. Da M als Teilraum abgeschlossen ist, gilt für den Limes dieser Teilfolge $x_M \in M$ und somit $d(x) = \|x - x_M\|_2$. Sei nun $x_M \in M$ eine beste Approximation zu x . Für jeden zweiten Punkt $y \in M$ und beliebiges $\tau \neq 0$ ist $x_M + \tau y \in M$ und somit

$$\|x - x_M\|_2^2 \leq \|x - x_M - \tau y\|_2^2 = \|x - x_M\|_2^2 - 2\tau(x - x_M, y)_2 + \tau^2\|y\|_2^2$$

bzw. $2\tau(x - x_M, y)_2 \leq \tau^2\|y\|_2^2$. Da dies für alle $\tau \neq 0$ gilt, muss $(x - x_M, y)_2 = 0$ sein. Gäbe es noch eine zweite beste Approximation $x'_M \in M$, folgte nach dem eben Gezeigten:

$$\|x_M - x'_M\|_2^2 = (x_M - x, x_M - x'_M)_2 + (x - x'_M, x_M - x'_M)_2 = 0,$$

d. h.: $x_M = x'_M$.

Lösung A.2.5: a) Wir versehen $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ mit der Norm $\|(x, y)\| := \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$ für $x, y \in \mathbb{K}^n$. Sei nun $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K_1 \times K_2$ eine beliebige Folge. Wegen der Kompaktheit von K_1 existiert eine Teilfolge n_i und eine Element $x \in K_1$, so dass $x_{n_i} \rightarrow x$ für $i \rightarrow \infty$. Wegen der Kompaktheit von K_2 existiert eine Teilfolge n_{i_j} der Teilfolge und ein $y \in K_2$, so dass $y_{n_{i_j}} \rightarrow y$ für $j \rightarrow \infty$. Damit folgt für die Teilfolge

$$(x_{n_{i_j}}, y_{n_{i_j}}) \rightarrow (x, y) \in K_1 \times K_2 \quad (j \rightarrow \infty)$$

und somit die Kompaktheit von $K_1 \times K_2$. Um die Stetigkeit von f einzusehen, sei $(x_n, y_n) \in K_1 \times K_2$ eine Folge mit Limes (x, y) . Dann gilt:

$$|\|x - y\| - \|x_n - y_n\|| \leq \|x - y - x_n + y_n\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Folglich ist f stetig.

b) Anwendung des Satzes vom Extremum liefert die Behauptung.

ci) Zunächst betrachten wir $K_1 = (2, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$. Dann ist jedes Element der Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (1, a) \text{ } -1 \leq a \leq 1\}$ ein Minimierer des Abstandes bzgl. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. (Es gibt aber nur einen bzgl. $\|\cdot\|_2$.)

cii) Wir betrachten nun die Menge $K_1 = 0$ sowie $K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\}$. Dann ist jedes Element der Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ ein Minimierer des Abstandes bzgl. $\|\cdot\|_2$.

di) Eine mögliche Zusatzbedingung an K_2 ist die *strikte* Konvexität von K_2 , d. h. sind $x, y \in K_2$ mit $x \neq y$, so ist für jedes $\lambda \in (0, 1)$ die Konvexkombination $x_\lambda := \lambda x + (1 - \lambda)y \in K_2^\circ$. Seien nun $x, y \in K_2$ zwei Minimierer des Abstandes, dann gilt

$$\|x_\lambda - a\| \leq \lambda\|x - a\| + (1 - \lambda)\|y - a\| = \inf_{z \in K_2} \|a - z\|.$$

insbesondere ist x_λ ein Minimierer für jedes $\lambda \in [0, 1]$. Angenommen, es wäre nun $x \neq y$, so wäre wegen der strikten Konvexität $x_{1/2} \in K_2^\circ$ im Widerspruch dazu, dass jeder Minimierer von $\inf_{z \in K_2} \|a - z\|$ wegen $a \notin K_2$ notwendig in ∂K_2 liegt.

dii) Eine weitere Möglichkeit um die Eindeutigkeit der Bestapproximation zu erhalten, ist die Konvexität von K_2 sowie die strikte Konvexität der Norm $\|\cdot\|$ bezüglich derer wir den Abstand bestimmen. Dabei heißt K_2 konvex, wenn für $x, y \in K_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ auch $x_\lambda \in K_2$. Analog zu (ciii) folgert man für zwei Minimierer $x, y \in K_2$, dass für $x \neq y$ gilt

$$\|x_\lambda - a\| < \lambda\|x - a\| + (1 - \lambda)\|y - a\| = \inf_{z \in K_2} \|a - z\|$$

im Widerspruch dazu dass x und y Minimierer sind.

Lösung A.2.6: a) Der Banachsche Fixpunktsatz lautet im allgemeinen Banach-Raum $(V, \|\cdot\|)$ wie folgt: Sei $D \subset V$ eine *abgeschlossene* Menge und $g : D \rightarrow D$ eine Lipschitz-stetige *Selbstabbildung* von D . Ist g bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ eine *Kontraktion* mit L-Konstante $q < 1$, so existiert in D genau ein Fixpunkt z von g , der als Limes der *Fixpunktiteration* $x^k = g(x^{(k-1)})$ mit beliebigem Startpunkt $x^{(0)} \in D$ erhalten werden kann. Dabei gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x^{(k)} - z\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für den normierten Raum $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$ gilt der Banachsche Fixpunktsatz nicht, da dieser Raum *nicht* vollständig ist. Die Vollständigkeit des zugrunde liegenden Raumes benötigt man, um zu garantieren, dass der Limes der Fixpunktiterierten stets in der Menge D existiert; hierzu reicht die angenommene Abgeschlossenheit von D nicht aus, denn diese ist nur „relativ“ zu V zu verstehen.

b) Eine L -Konstante L der Abbildung $g(x) = Ax$ (bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n) erhält man aus der Abschätzung

$$\|g(x) - g(y)\| = \|Ax + b - Ay - b\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|$$

mit der von der Vektornorm erzeugten natürlichen Matrixnorm $\|\cdot\|$ als $L = \|A\|$.

Die gegebene Matrix A hat die Maximumnorm $\|A\|_\infty = 1$ und $\|A\|_1 = 1$; bzgl. dieser Normen ist sie also *keine* Kontraktion. Da sie symmetrisch ist, erhält man ihre Spektralnorm als Betragsmaximum ihrer Eigenwerte

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } A\}.$$

Diese sind die Nullstellen des Polynoms $q_A(z) = \det(A - zI)$, d. h.: $\lambda_\pm = \pm\sqrt{5}/3$. Also ist die Abbildung g bzgl. der Spektralnorm eine Kontraktion.

c) In einem allgemeinen metrischen Raum $(X, d(\cdot, \cdot))$ lautet der Banachsche Fixpunktsatz: *Sei $D \subset X$ ein (bzgl. $d(\cdot, \cdot)$) vollständiger metrischer Raum. Sei dann $g : D \rightarrow D$ Lipschitz-stetig mit L -Konstante $q < 1$, d. h. $d(g(x), g(y)) \leq qd(x, y)$ für alle $x, y \in D$. Dann existiert in D genau ein Fixpunkt z von g , der als Limes der Fixpunktiteration $x^k = g(x^{(k-1)})$ mit beliebigem Startpunkt $x^{(0)} \in D$ erhalten werden kann. Dabei gilt die Fehlerabschätzung*

$$d(x^{(k)}, z) \leq \frac{q^k}{1 - q} d(x^{(1)}, x^{(0)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zum Beweis:

i) Es gibt höchstens einen Fixpunkt, denn sind $x, x' \in D$ zwei Fixpunkte, so folgt aus

$$d(x, x') = d(g(x), g(x')) \leq qd(x, x')$$

wegen $q < 1$ notwendig $d(x, x') = 0$.

ii) Wegen $g : D \rightarrow D$ sind die Iterierten $x^{(k)}$ wohldefiniert. Wir zeigen nun, dass $x^{(k)}$ eine Cauchy-Folge ist. Denn für beliebige $k, m \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} d(x^{k+m}, x^k) &\leq d(x^{k+m}, x^{k+m-1}) + \dots + d(x^{k+1}, x^k) \\ &= d(g^{m-1}(x^{k+1}), g^{m-1}(x^{k+m-1})) + \dots + d(x^{k+1}, x^k) \\ &\leq (q^{m-1} + \dots + 1)d(x^{k+1}, x^k) \\ &\leq (q^{m-1} + \dots + 1)q^k d(x^{(1)}, x^{(0)}) \\ &\leq \frac{q^k}{1 - q} d(x^{(1)}, x^{(0)}). \end{aligned}$$

Wegen $q < 1$ konvergiert die rechte Seite gegen Null. Es gibt also wegen der Vollständigkeit von D einen Limes $z \in D$ der Folge $x^{(k)}$. Wegen der Stetigkeit von g ist dies der gesuchte Fixpunkt, denn

$$z = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x^{(k-1)}) = g(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k-1)}) = g(z).$$

iii) Die Fehlerabschätzung folgt aus obiger Abschätzung durch betrachten des Grenzübergangs $m \rightarrow \infty$.

Lösung A.2.7: Wir zeigen wieder, dass die Folge der durch

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x^{(0)} \in M,$$

erzeugten Iterierten eine Cauchy-Folge ist und folglich einen Limes $x \in M$ hat. Für $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$ gilt:

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| \leq \sum_{i=l}^{k-1} \|g^i(x^{(1)}) - g^i(x^{(0)})\| \leq \sum_{i=l}^{k-1} L_i \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Aufgrund der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} L_i$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{i=l}^{k-1} L_i < \varepsilon$ für $k, l \geq n_\varepsilon$. Folglich ist $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Ihr Limes x ist als Fixpunkt von g und Fixpunkt von jeder Potenz von g :

$$g^k(x) = g^{k-1}(x) = \dots = g(x) = x.$$

Die Konvergenz der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} L_k$ impliziert $L_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), d. h.: $L_k < 1$ für $k \geq k_0$. Für ein solches k ist dann x der einzige Fixpunkt von g^k , denn für einen zweiten Fixpunkt x' gilt:

$$\|x - x'\| = \|g^k(x) - g^k(x')\| \leq L_k \|x - x'\|,$$

und folglich $x = x'$. Also ist x einziger Fixpunkt von g .

Lösung A.2.8: Ein Polynom $p(x_1, \dots, x_n)$ auf dem \mathbb{R}^n mit ungeradem Grad muss bzgl. einer der Variablen (bei festgehaltenen anderen Variablen) ungeraden Grad haben. Sei o.B.d.A. x_1 diese Variable. Dann hat für beliebige (feste) $\tilde{x} := \{x_2, \dots, x_n\}$ das Polynom $q(x_1) = p(x_1, \tilde{x})$ das Verhalten $\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} q(x_1) = \pm\infty$, oder $\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} q(x_1) = \mp\infty$, d. h. besitzt einen Vorzeichenwechsel. Nach dem Zwischenwertsatz für Funktionen in einer Variable hat es also für jedes (feste) Argument \tilde{x} eine Nullstelle $\xi(x_2) \in \mathbb{R}$, und $(\xi(x_2), \tilde{x})$ ist dann Nullstelle von p .

Lösung A.2.9: a) Die Menge $\partial K_R(0)$ ist zusammenhängend. Mit $x \in \partial K_R(0)$ ist wegen $\| -x \|_2 = \|x\|_2 = R$ auch $-x \in \partial K_R(0)$. Die Funktion $f(x) := T(x) - T(-x)$ ist stetig auf $\partial K_R(0)$ und nimmt, da $\partial K_R(0)$ kompakt ist, dort ihr Maximum und Minimum an. Es ist $f(x) = -f(-x)$ und folglich entweder

$$\max_{x \in \partial K_R(0)} f(x) = \min_{x \in \partial K_R(0)} f(x) = 0$$

oder

$$\min_{x \in \partial K_R(0)} f(x) < 0 < \max_{x \in \partial K_R(0)} f(x).$$

In erstem Fall ist die Behauptung trivialerweise richtig; im zweiten Fall folgt sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes aus der Existenz eines Punktes $x \in \partial K_R(0)$ mit $f(x) = 0$.

b) Im Falle einer allgemeinen Norm $\|x\|_\omega$ ist das Problem, einen „gegenüberliegenden“ Punkt zu bestimmen. Daher begnügen wir uns damit zu zeigen, dass es zwei Punkte

$x, y \in \partial K_R^\omega(0)$, $x \neq y$, gibt, so dass an diesen die gleiche Temperatur herrscht. Um dies zu erreichen, stellen wir fest, dass es wegen der Normäquivalenz ein $r > 0$ gibt, so dass

$$K_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 < r\} \subset K_R^\omega(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_\omega < R\}$$

gilt. Wir definieren die Abbildung $\varphi : K_R^\omega(0) \rightarrow K_r(0)$ durch

$$\varphi(x) := \frac{r}{\|x\|_2} x, \quad x \in K_R^\omega(0).$$

Wegen $\|x\|_2 \neq 0$ auf $K_R^\omega(0)$ ist die Abbildung φ stetig. Ferner ist sie bijektiv:

i) surjektiv: Für $y \in K_r(0)$ existiert $x := R\|y\|_\omega^{-1}y \in K_R^\omega(0)$ mit $\varphi(x) = y$.

ii) injektiv: Für $x, x' \in K_R^\omega(0)$ mit $\varphi(x) = \varphi(x')$ gilt

$$\frac{r}{\|x\|_2} x = \frac{r}{\|x'\|_2} x' \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{\|x'\|_2}{\|x\|_2} x \quad \Rightarrow \quad R = \|x'\|_\omega = \frac{\|x'\|_2}{\|x\|_2} \|x\|_\omega = \frac{\|x'\|_2}{\|x\|_2} R,$$

und folglich $\|x'\|_2 = \|x\|_2$. Dies impliziert $x' = x$.

Damit existiert die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : K_r(0) \rightarrow K_R^\omega(0)$ und ist nach einem Satz der Vorlesung ebenfalls stetig. Anschließend folgt nun die Behauptung durch Betrachten der stetigen Abbildung $T(\varphi^{-1}(\cdot)) : K_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ und Anwendung von Teil a).

Lösung A.2.10: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die ihrer Vielfachheiten entsprechend oft gezählten Eigenwerte von A und $\{z^{(1)}, \dots, z^{(n)}\}$ eine zugehörige Orthonormalbasis von Eigenvektoren. Das Nennerpolynom $q(z)$ der rationalen Funktion

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

habe in keinem der λ_i eine Nullstelle, so dass $r(\lambda_i)$ existiert. Dann ist nach einem Satz des Textes die Matrix $q(A)$ regulär und auch $r(A) = q(A)^{-1}p(A)$ ist wohl definiert. Für $x \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$r(A)x = q(A)^{-1}p(A)x = \sum_{i=1}^n (x, z^{(i)})_2 q(A)^{-1}p(A)x = \sum_{i=1}^n (x, z^{(i)})_2 q(\lambda_i)^{-1}p(\lambda_i)x$$

und folglich

$$\|r(A)x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |(x, z^{(i)})_2|^2 |r(\lambda_i)|^2 \leq \max_{i=1, \dots, n} |r(\lambda_i)|^2 \sum_{i=1}^n |(x, z^{(i)})_2|^2 = \max_{i=1, \dots, n} |r(\lambda_i)|^2 \|x\|_2^2.$$

Also ist

$$\|r(A)\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|r(A)x\|_2}{\|x\|_2} \leq \max_{i=1, \dots, n} |r(\lambda_i)|.$$

Lösung A.2.11: i) Die Eigenwerte der symmetrischen, positiv-definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien λ_i mit zugehöriger Orthonormalbasis $\{z^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$. Die Quadratwurzel $A^{1/2}$ ist als lineare Abbildung (Endomorphismus) $A^{1/2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wohl definiert durch (s. Text):

$$A^{1/2}x := \sum_{i=1}^n \lambda_i^{1/2} (x, z^{(i)})_2 z^{(i)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Durch Anwendung dieser Abbildung auf die kartesischen Einheitsvektoren $e^{(k)}$ des \mathbb{R}^n erhält man die Elemente ihrer Matrixdarstellung $A^{1/2} = (b_{jk})_{j,k=1}^n$ als

$$b_{jk} := (A^{1/2}e^{(k)}, e^{(j)})_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{1/2} (e^{(k)}, z^{(i)})_2 (z^{(i)}, e^{(j)})_2.$$

ii) Ausgehend von $X_0 = A$ hat die erste Iterierte

$$X_1 := \frac{1}{2}(A + A^{-1}A) = \frac{1}{2}(A + I)$$

offenbar dieselben Eigenvektoren wie A bzw. $A^{1/2}$. Dasselbe gilt dann auch für alle weiteren Iterierten X_k . Folglich gilt $X_k A^{1/2} = A^{1/2} X_k$. Damit erhalten wir analog zum skalaren Fall

$$\begin{aligned} X_k - A^{1/2} &= \frac{1}{2}(X_{k-1} + X_{k-1}^{-1}A) - A^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}X_{k-1}^{-1}(X_{k-1}^2 + A - X_{k-1}A^{1/2} - A^{1/2}X_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2}X_{k-1}^{-1}(X_{k-1} - A^{1/2})^2, \end{aligned}$$

und folglich

$$\|X_k - A^{1/2}\| \leq \frac{1}{2}\|X_{k-1}^{-1}\| \|X_{k-1} - A^{1/2}\|^2.$$

Hieraus könnte man mit einiger Arbeit die Konvergenz $X_k \rightarrow A^{1/2}$ erschließen, würde aber sehr einschränkende Voraussetzungen an die Qualität der Startapproximation $\|X^{(0)} - A^{1/2}\|_2$ benötigen. Die folgende Argumentation beschreitet daher einen anderen, durch die Vorbemerkung bereits vorgezeichneten Weg.

iii) Für die Eigenwerte $\lambda_i^{(k)}$ der Iterationsmatrizen X_k gilt ebenfalls die Rekursion

$$\lambda_i^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\lambda_i^{(k-1)} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i^{(k-1)}} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_i^{(0)} = \lambda_i.$$

Hieraus erschließen wir durch Induktion (analog zum eindimensionalen Fall), dass

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} \geq \lambda_i^{(1)} \geq \dots \geq \lambda_i^{(k)} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_i}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Folgen der Eigenwerte $(\lambda_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ sind also monoton fallend und nach unten beschränkt und folglich konvergent gegen Limiten $\lambda_i^{(\infty)}$. Diese sind dann Lösungen der Fixpunktgleichungen

$$\lambda_i^{(\infty)} = \frac{1}{2} \left(\lambda_i^{(\infty)} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i^{(\infty)}} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

was äquivalent ist zu $\lambda_i^{(\infty)} = \lambda_i^{1/2}$. Da alle Matrizen X_k eine gemeinsame Orthonormalbasis von Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten $\lambda_i^{(k)}$ haben, konvergiert dann auch für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$:

$$X_k x = \sum_{i=1}^n (x, z^{(i)})_2 \lambda_i^{(k)} z^{(i)} \rightarrow \sum_{i=1}^n (x, z^{(i)})_2 \lambda_i^{1/2} z^{(i)} = A^{1/2} x \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dies impliziert $X_k \rightarrow A^{1/2}$ ($k \rightarrow \infty$) im Sinne der komponentenweisen Konvergenz oder (was äquivalent ist) bzgl. jeder Matrixnorm.

Lösung A.2.12: Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt genau n reelle Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$, (ihrer jeweiligen Vielfachheiten entsprechend oft gezählt) und eine zugehörige Orthonormalbasis von Eigenvektoren $\{w^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$, so dass $A w^{(i)} = \lambda_i w^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$.

a) Die Matrizen e^{iA} , $\sin(A)$, $\cos(A)$ können durch ihre Wirkung auf Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ definiert werden. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ mit der „Fourier-Entwicklung“

$$x = \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 w^{(j)}$$

gilt dann mit den Taylor-Entwicklungen der betrachteten Funktionen (Konvergenz der reihen und Vertauschbarkeit der Summationen begründen!):

$$\begin{aligned} e^{iA} x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iA)^k x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} A^k \left(\sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 w^{(j)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 \frac{i^k}{k!} A^k w^{(j)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 \frac{i^k}{k!} \lambda_j^k w^{(j)} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (x, w^{(j)})_2 \frac{i^k}{k!} \lambda_j^k w^{(j)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \lambda_j^k \right) w^{(j)} = \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 e^{i\lambda_j} w^{(j)}, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \sin(A)x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (A)^{2k+1} x = \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 \sin(\lambda_j) w^{(j)}, \\ \cos(A)x &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (A)^{2k} x = \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 \cos(\lambda_j) w^{(j)}. \end{aligned}$$

b) Mit dem in (a) Gezeigten folgt mit Hilfe der Eulerschen Identität für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} e^{iA}x &= \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 e^{i\lambda_j} w^{(j)} = \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 (\cos(\lambda_j) + i \sin(\lambda_j)) w^{(j)} \\ &= \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 \cos(\lambda_j) w^{(j)} + i \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 \sin(\lambda_j) w^{(j)} \\ &= \cos(A)x + i \sin(A)x. \end{aligned}$$

Dies bedeutet die Matrixidentität $e^{iA} = \cos(A) + i \sin(A)$.

c) Bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ gilt für beliebiges $x = \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2 w^{(j)} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|\sin(A)x\|_2^2 &= (\sin(A)x, \sin(A)x)_2 = \sum_{j,k} \sin(\lambda_j) \sin(\lambda_k) (x, w^{(j)})_2 (x, w^{(k)})_2 (w^{(j)}, w^{(k)})_2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sin(\lambda_j)^2 (x, w^{(j)})_2^2 \leq \sum_{j=1}^n (x, w^{(j)})_2^2 = \|x\|_2^2, \end{aligned}$$

Folglich gilt mit der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$:

$$\|\sin(A)\|_2 := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\sin(A)x\|_2}{\|x\|_2} \leq 1.$$

Das Argument für $\cos(A)$ ist analog.

A.3 Kapitel 3

Lösung A.3.1: Die partiellen Ableitungen der Abstandsfunktion $r(x)$ sind

$$\partial_i r(x) = \frac{x_i}{r(x)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Damit erhalten wir durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} a) \quad \partial_i f(x) &= \partial_i r(x)^{-n} = -nr(x)^{-n-1} \partial_i r(x) = -nr^{-n-2} x_i; \\ b) \quad \partial_i f(x) &= \partial_i e^{-1/r(x)^2} = -e^{-1/r(x)^2} \partial_i r^{-2} = 2e^{-1/r(x)^2} r(x)^{-3} \partial_i r(x) = 2e^{-1/r(x)^2} r(x)^{-4} x_i. \end{aligned}$$

Lösung A.3.2: a) Die Funktion

$$f(x, y) := \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq 0, \quad f(0, 0) := 0,$$

ist als Komposition von differenzierbaren Funktionen für $(x, y) \neq 0$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar, so dass nur noch ihr Verhalten bei $(x, y) = 0$ zu untersuchen ist.

i) Wegen $|f(x, y)| \leq |xy|$ nimmt f stetig den Wert $f(0, 0) = 0$ an. Die ersten partiellen Ableitungen von f sind:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2)(3x^2y - y^3) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \partial_y f(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) - 2y(x^3y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Wegen $|\partial_x f(x, y)| + |\partial_y f(x, y)| \leq 2(|x| + |y|)$ nimmt ∇f stetig den Wert $\nabla f(0, 0) = 0$ an.

ii) Für die gemischten zweiten partiellen Ableitungen von f gilt im Nullpunkt:

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(h, 0) - \partial_y f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1, \\ \partial_y \partial_x f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(0, h) - \partial_x f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1.\end{aligned}$$

Also existieren Gradient und Hesse-Matrix von f überall.

b) Die globale Stetigkeit von f und ∇f wurde in (a) mit gezeigt.

c) Für die zweiten Ableitungen gilt $\partial_x \partial_y f(0, 0) = 1 \neq -1 = \partial_y \partial_x f(0, 0)$, d. h.: Die Hesse-Matrix $\nabla^2 f = (\partial_i \partial_j f)_{i,j=1}^2$ ist im Nullpunkt nicht symmetrisch.

Lösung A.3.3: a) Die partiellen Ableitungen der Abstandsfunktion $r(x) = \|x\|_2$ sind

$$\partial_i r(x) = \frac{x_i}{r(x)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Damit erhalten wir durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\partial_j f_1(x) &= \partial_j (r(x)^2 + \varepsilon)^{-1} = -(r(x)^2 + \varepsilon)^{-2} \partial_j r(x)^2 \\ &= \frac{-2x_j}{(\|x\|_2 + \varepsilon)^2} \\ \partial_i \partial_j f_1(x) &= \partial_i \left(\frac{-2x_j}{(r(x)^2 + \varepsilon)^2} \right) \\ &= \frac{-2\delta_{ij}}{(\|x\|_2 + \varepsilon)^2} + x_i x_j \frac{8}{(\|x\|_2 + \varepsilon)^3}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\partial_j f_2(x) &= \partial_j e^{r(x)^2} = e^{r(x)^2} \partial_j r(x)^2 = e^{r(x)^2} \frac{2r(x)x_j}{r(x)} = 2x_j e^{\|x\|_2^2} \\ \partial_i \partial_j f_2(x) &= \partial_i (2x_j e^{\|x\|_2^2}) = (\delta_{ij} 2 + 4x_j x_i) e^{\|x\|_2^2}\end{aligned}$$

b) Die Hesse-Matrizen der beiden betrachteten Funktionen sind offenbar symmetrisch. Wir untersuchen nun Ihre Definitheit über ihre Eigenwerte.

bi) Wir betrachten die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\nabla^2 f_1 - \lambda I)$. Diese sind gerade

$$\lambda_1 = \frac{-2}{(\|x\|_2^2 + \varepsilon)^2} < 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(\|x\|_2^2 + \varepsilon)^2} \left(-2 + \frac{8\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2 + \varepsilon} \right).$$

Wegen $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{8\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2 + \varepsilon} = 0$ ist die Hessematrix in einer Umgebung der Null negativ definit. Da weiter $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{8\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2 + \varepsilon} = 8$ ist sie indefinit für $\|x\|$ hinreichend groß.

bii) Analog betrachten wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\nabla^2 f_2 - \lambda I)$. Diese sind gerade

$$\lambda_1 = 2e^{\|x\|_2^2} > 0, \quad \lambda_2 = \left(2 + 4\|x\|_2^2 \right) e^{\|x\|_2^2} > 0.$$

Die Matrix ist also positiv definit.

Lösung A.3.4: a) Der *Gradient* und die *Hesse-Matrix* der Funktion $f(x) = \|x\|_2^3 - 1$ sind:

$$\nabla f(x) = 3x\|x\|_2, \quad J_f(x) = \left(\frac{3\|x\|_2^2 \delta_{ij} + 3x_i x_j}{\|x\|_2} \right)_{i,j=1}^n.$$

b) Die *stetige* Funktion f nimmt auf der *kompakten* Menge $\overline{K_1(0)}$ ihre Extremalwerte an. Sie besitzt in $\hat{x} = 0$ eine mögliche Extremalstelle. Wegen $f(\hat{x}) = -1$ und $f(x) > -1$ für $x \neq \hat{x}$ handelt es sich dabei (trotz $J_f(0) = 0$) um eine globale Minimalstelle. Jeder Randpunkt $x \in \partial \overline{K_1(0)}$ ist Maximalstelle von f .

Lösung A.3.5: Die Jacobi-Matrix ist

$$J_v(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

und die zugehörige Jacobi-Determinante

$$\det J_v(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin \varphi.$$

Diese ist regulär für $r \neq 0$ und $\theta \neq (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lösung A.3.6: i) Wir setzen

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) =: F(r, \theta).$$

Mit Hilfe der Kettenregel gilt dann:

$$\begin{aligned}\partial_r F(r, \theta) &= \partial_1 f(x) \cos \theta + \partial_2 f(x) \sin \theta, \\ \partial_r^2 F(r, \theta) &= \partial_1^2 f(x) \cos^2 \theta + \partial_2 \partial_1 f(x) \sin \theta \cos \theta + \partial_1 \partial_2 f(x) \cos \theta \sin \theta + \partial_2^2 f(x) \sin^2 \theta, \\ \partial_\theta F(r, \theta) &= -\partial_1 f(x) r \sin \theta + \partial_2 f(x) r \cos \theta, \\ \partial_\theta^2 F(r, \theta) &= \partial_1^2 f(x) r^2 \cos^2 \theta - \partial_2 \partial_1 f(x) r^2 \sin \theta \cos \theta - \partial_1 \partial_2 f(x) r^2 \cos \theta \sin \theta \\ &\quad - \partial_1 f(x) r \cos \theta - \partial_2 f(x) r \sin \theta + \partial_2^2 f(x) r^2 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Also ist $(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2) F(r, \theta) = (\partial_1^2 + \partial_2^2) f(x)$.

ii) Wir setzen $\alpha := \pi/\omega$ und finden

$$\begin{aligned}\Delta s_\omega(r, \theta) &= (\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2)(r^\alpha \sin \theta \alpha) \\ &= (\alpha - 1) \alpha r^{\alpha-2} \sin \theta \alpha + \alpha r^{\alpha-2} \sin \theta \alpha - r^{\alpha-2} \alpha^2 \sin \theta \alpha = 0.\end{aligned}$$

Lösung A.3.7: a) Wir setzen

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) =: F(r, \theta).$$

Mit Hilfe der Kettenregel gilt dann:

$$\begin{aligned}\partial_r F(r, \theta) &= \partial_1 f(x) \cos \theta + \partial_2 f(x) \sin \theta, \\ \partial_r^2 F(r, \theta) &= \partial_1^2 f(x) \cos^2 \theta + \partial_2 \partial_1 f(x) \sin \theta \cos \theta + \partial_1 \partial_2 f(x) \cos \theta \sin \theta + \partial_2^2 f(x) \sin^2 \theta, \\ \partial_\theta F(r, \theta) &= -\partial_1 f(x) r \sin \theta + \partial_2 f(x) r \cos \theta, \\ \partial_\theta^2 F(r, \theta) &= \partial_1^2 f(x) r^2 \cos^2 \theta - \partial_2 \partial_1 f(x) r^2 \sin \theta \cos \theta - \partial_1 \partial_2 f(x) r^2 \cos \theta \sin \theta \\ &\quad - \partial_1 f(x) r \cos \theta - \partial_2 f(x) r \sin \theta + \partial_2^2 f(x) r^2 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Also ist $(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2) F(r, \theta) = (\partial_1^2 + \partial_2^2) f(x)$. Analog rechnet man den Fall $n = 3$ nach.

b) Es gilt in \mathbb{R}^n für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\Delta \log(\|x\|_2) &= \Delta \log(r) \\ &= \partial_r^2 \log(r) + \frac{1}{r} \partial_r \log(r) = 0,\end{aligned}$$

und in \mathbb{R}^3 für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\Delta(\|x\|_2^{-1}) &= \Delta r^{-1} \\ &= \partial_r^2 r^{-1} + \frac{2}{r} \partial_r r^{-1} = 0.\end{aligned}$$

c) Die Jacobi-Matrizen und zugehörigen Jacobi-Determinante der betrachteten Abbildungen sind:

$$J_v(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -r \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

mit

$$\det J_v(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin(\varphi).$$

Diese Matrix ist regulär für $r \neq 0$ und $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Die zugehörige Abbildung $v : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist bijektiv.

$$J_v(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

mit

$$\det J_v(r, \theta, \varphi) = r.$$

Diese Matrix ist regulär für $r \neq 0$. Die zugehörige Abbildung $v : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist bijektiv.

Lösung A.3.8: i) Liegt der Punkt (\hat{x}, \hat{y}) auf keiner der beiden Koordinatenachsen, so ist $f(x, y) = xy$ oder $f(x, y) = -xy$ in einer offenen Umgebung von (\hat{x}, \hat{y}) . Also ist f in solchen Punkten differenzierbar. In Punkten $(\hat{x}, 0)$ mit $\hat{x} \neq 0$ ist f nicht partiell bzgl. y differenzierbar, da $f(\hat{x}, y) = |\hat{x}||y|$ hier nicht (gewöhnlich) differenzierbar ist. Analog sieht man, daß f auch in Punkten $(0, \hat{y})$ mit $\hat{y} \neq 0$ auf der y -Achse nicht partiell bzgl. x und damit auch nicht total differenzierbar ist.

ii) Auf den Koordinatenachsen ist $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Also ist f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$. Hier ist f auch total differenzierbar, denn mit dem Gradienten $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ gilt

$$f(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \omega(x, y)$$

mit

$$\frac{|\omega(x, y)|}{\|(x, y)\|_2} = \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|_2} = \frac{|xy|}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Also ist f in $(0, 0)$ differenzierbar mit Ableitung $f'(0, 0) = \nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Lösung A.3.9: i) Liegt der Punkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ auf keiner der Koordinatenachsen (d. h. $\hat{x}_i \neq 0$), so ist $f(x) = x_1 x_2 + x_3$, $f(x) = x_1 x_2 - x_3$, $f(x) = -x_1 x_2 + x_3$, oder $f(x) = -x_1 x_2 - x_3$ in einer offenen Umgebung von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Also ist f in solchen Punkten differenzierbar.

In Punkten $(\hat{x}_1, 0, \hat{x}_3)$ mit $\hat{x}_1 \neq 0$ ist f nicht partiell bzgl. x_2 differenzierbar, da $f(\hat{x}_1, x_2) = |\hat{x}_1||x_2|$ hier nicht (gewöhnlich) differenzierbar ist. Analog sieht man, dass f auch in allen anderen Punkten $(0, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ mit $\hat{x}_2 \neq 0$ nicht partiell bzgl. x_2 und damit auch nicht total differenzierbar ist. In Punkten $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0)$ ist f nicht partiell bzgl. x_3 differenzierbar.

Es verbleibt die Untersuchung der Punkte $(0, 0, \hat{x}_3)$ mit $\hat{x}_3 \neq 0$. Da hier gilt $f(0, h, \hat{x}_3) = f(h, 0, \hat{x}_3) = f(0, 0, \hat{x}_3)$ ist f bzgl. x_1 und x_2 partiell differenzierbar. Da ferner $f(0, 0, x_3) =$

x_3 oder $f(0, 0, x_3) = -x_3$ in einer (relativ) Umgebung von \hat{x}_3 ist f auch bezüglich x_3 partiell differenzierbar. Der Gradient von f in $(0, 0, \hat{x}_3)$ ist gegeben durch

$$\nabla f(0, 0, \hat{x}_3) = (0, 0, \text{sign}(\hat{x}_3)).$$

Sei o.B.d.A. $x_3 > 0$. Dann gilt für $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ klein genug

$$f(h_1, h_2, \hat{x}_3 + h_3) = |h_1 h_2| + \hat{x}_3 + h_3 = f(0, 0, \hat{x}_3) + \nabla f(0, 0, \hat{x}_3)h + |h_1 h_2|.$$

Wegen $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|h_1 h_2|}{\|h\|} = 0$ ist f sogar total differenzierbar.

ii) Wie oben erhalten wir totale Differenzierbarkeit in allen Punkten $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ für die $x_i \neq 0$. Sein nun genau eine der Komponenten gleich Null. O.B.d.A. $\hat{x}_1 = 0$ und $\hat{x}_2, \hat{x}_3 \neq 0$. Dann ist $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ bezüglich x_1 nicht partiell differenzierbar. Im Fall zweier verschwindender Komponenten, o.B.d.A. $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0$ sowie $\hat{x}_3 \neq 0$ erhalten wir $f(h, 0, \hat{x}_3) = f(0, h, \hat{x}_3) = f(0, 0, \hat{x}_3 + h) = f(0, 0, \hat{x}_3) = 0$. Somit ist $\nabla f(0, 0, \hat{x}_3) = 0$. Wir untersuchen nun die totale Differenzierbarkeit. Es ist

$$\omega(h) = f(h_1, h_2, \hat{x}_3 + h_3) - f(0, 0, \hat{x}_3) + \nabla f(0, 0, \hat{x}_3)h = |h_1 h_2 (\hat{x}_3 + h_3)|^{1/3}$$

Für die Folge $h_n = (1/n, 1/n, 0)$ ist

$$\frac{\omega(h)}{\|h\|_2} = \frac{|\hat{x}_3|^{1/3}}{\sqrt{2}} n^{1/3} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

somit ist f in $(0, 0, \hat{x}_3)$ nicht total differenzierbar. Das selbe Argument angewendet auf die Folge $(1/n, 1/n, 1/n)$ liefert ebenso, dass f auch in $(0, 0, 0)$ zwar partiell aber nicht total differenzierbar ist.

Lösung A.3.10: i) Sei $x \in \overline{M}$ und $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f auf M gilt

$$\|f(x^{(k)}) - f(x^{(l)})\| \leq L \|x^{(k)} - x^{(l)}\|,$$

d. h. die Bildfolge $(f(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Ihr Limes sei y . Im Falle $x \neq M$ setzen wir $\overline{f(x)} := y$. Dadurch wird eine Funktion $\overline{f} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Diese Definition ist eindeutig, da für jede zweite Folge $(\xi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi^{(k)}$ die zugehörige Bildfolge wegen $\|f(x^{(k)}) - f(\xi^{(k)})\| \leq L \|x^{(k)} - \xi^{(k)}\|$ ebenfalls gegen y konvergiert. Ferner ist für $x \in M$ automatisch $\overline{f(x)} = f(x)$. Seien $x, \xi \in \overline{M}$ und $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, (\xi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ approximierende Folgen in M . Dann gilt

$$\|\overline{f(x)} - \overline{f(\xi)}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\overline{f(x^{(k)})} - \overline{f(\xi^{(k)})}\| \leq L \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - \xi^{(k)}\| = L \|x - \xi\|.$$

Die Fortsetzung \overline{f} ist also Lipschitz-stetig auf \overline{M} .

ii) Sei o.B.d.A. $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig (und damit stetig). Sei $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $f(M)$ mit Limes $y \in \mathbb{R}^n$. Die Urbildfolge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ hat in der abgeschlossenen und beschränkten Menge M eine konvergente Teilfolge $(x^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Limes $x \in M$. Für diese gilt wegen der Stetigkeit von f :

$$f(x^{(k_j)}) \rightarrow f(x) = y \quad (j \rightarrow \infty).$$

Also ist $y \in f(M)$.

Lösung A.3.11: a) Wir verwenden eine leicht modifizierte Variante der Argumentation im Beweis des Mittelwertsatzes. Für zwei Punkte $x, y \in D$ liegen wegen der Konvexität von D auch alle Zwischenpunkte $z = tx + (1-t)y$, $0 < t < 1$, in D . Wir betrachten die Funktion $g(t) := f(x + t(y-x))$ für $t \in [0, 1]$. Dafür gilt:

$$f_i(y) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(s) ds = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(x + s(y-x))(y_j - x_j) ds.$$

bzw. in vektoriellen Schreibweise

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 J_f(x + s(y-x))(y-x) ds.$$

Aufgrund der Schwarzischen Ungleichung gilt für (integrierbare) Vektorfunktionen $g = (g_i)_{i=1}^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\left| \int_0^1 g_i(s) ds \right|^2 \leq \int_0^1 |g_i(s)|^2 ds$$

und folglich

$$\left\| \int_0^1 g(s) ds \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left| \int_0^1 g_i(s) ds \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \int_0^1 |g_i(s)|^2 ds = \int_0^1 \|g(s)\|_2^2 ds.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|_2^2 &\leq \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x))(y-x)\|_2^2 ds \\ &\leq \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x))\|_2^2 ds \|y-x\|_2^2 \leq \sup_{z \in D} \|J_f(z)\|_2^2 \|y-x\|_2^2, \end{aligned}$$

woraus sich die behauptete Lipschitz-Stetigkeit mit L-Konstante $L = K$ ergibt.

b) Im Falle einer zu einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$ gehörenden (natürlichen) Matrixnorm $\|\cdot\|$ verwenden wir die Normäquivalenz auf \mathbb{R}^n ,

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Damit folgt

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \frac{1}{c_1} \|f(y) - f(x)\|_2 \leq \frac{1}{c_1} K \|x-y\|_2 \leq \frac{c_2}{c_1} K \|x-y\|,$$

d. h. Lipschitz-Stetigkeit mit der L-Konstante $L = \frac{c_2}{c_1} K$. Alternativ kann man auch die Abschätzung

$$\left\| \int_0^1 g(s) ds \right\| \leq \int_0^1 \|g(s)\| ds,$$

verwenden, welche analog wie beim Absolutbetrag über die Definition des Riemann-Integrals als Limes Riemannscher Summen und der Dreiecksungleichung bewiesen wird (Argumentation wiederholen!). Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 J_f(x + s(y-x))(y-x) ds \right\| \leq \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x))(y-x)\| ds \\ &\leq \int_0^1 \|J_f(x + s(y-x))\| ds \|y-x\| \leq \sup_{x \in D} \|J_f(x)\| \|y-x\|. \end{aligned}$$

c) Zusatzaufgabe: Nach einem Satz des Textes gilt für die Spektralnorm einer allgemeinen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$\|A\|_2 = \max \{ |\lambda|^{1/2}, \lambda \in \sigma(AA^T) \}.$$

Ferner gilt mit einer beliebigen (natürlichen) Matrixnorm $\|\cdot\|$ für den Spektralradius $\text{spr}(A) := \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$

$$\text{spr}(A) \leq \|A\| :$$

Angewendet auf $A := J_f(x)$ ergibt dies bei Beachtung von $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$:

$$\begin{aligned} \|J_f(x)\|_2^2 &= \max \{ |\lambda|^{1/2}, \lambda \in \sigma(J_f(x)J_f(x)^T) \}^2 \\ &\leq \|J_f(x)J_f(x)^T\|_\infty \leq \|J_f(x)\|_\infty \|J_f(x)^T\|_\infty = \|J_f(x)\|_\infty \|J_f(x)\|_1. \end{aligned}$$

Dies impliziert dann mit Teil (a) die Behauptung.

Lösung A.3.12: Wir setzen $x = x_0 + h$ und $s := (t - x_0)/h$. Dann ist $t = sh + x_0$ und folglich $dt = hds$. Mit dieser Substitution erhalten wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{r+1}^f(x_0; x - x_0) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_{r+1}^f(x_0; h),$$

mit den Restglieddarstellungen

$$\begin{aligned} R_{r+1}^f(x_0; h) &= \frac{1}{r!} \int_{x_0}^x (x-t)^r f^{(r+1)}(t) dt = \frac{h^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-s)^r f^{(r+1)}(x_0 + sh) ds, \\ R_{r+1}^f(x_0; h) &= \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x-x_0)^{r+1}, \quad \xi \in (x_0, x), \\ &= \frac{f^{(r+1)}(x_0 + \theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}, \quad \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Lösung A.3.13: Mit dem Gradienten $\nabla f(x)$ und der Hesse-Matrix $H_f(x)$ der Funktion f hat deren Taylor-Entwicklung um den Punkt x bis zum Restglied 3-ter Ordnung die Gestalt

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + R_3^f(x; h).$$

Der Elemente des Gradienten sind

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x) &= \frac{(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{2x_2}{(x_1 + x_2)^2}, \\ \partial_2 f(x) &= \frac{-(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{-2x_1}{(x_1 + x_2)^2}, \end{aligned}$$

und die der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned}\partial_1^2 f(x) &= \frac{-4x_2}{(x_1 + x_2)^3}, & \partial_2^2 f(x) &= \frac{-4x_1}{(x_1 + x_2)^4}, \\ \partial_1 \partial_2 f(x) &= \partial_2 \partial_1 f(x) = \frac{2(x_1 + x_2)^2 - 4x_2(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^4} = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)^3}.\end{aligned}$$

Ausgeschrieben lautet also die Taylor-Entwicklung um $x = (1, 1)$ wegen $f(1, 1) = 0$:

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) = \frac{h_1 - h_2}{2 + h_1 + h_2} = \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}h_2 - \frac{1}{8}h_1^2 - \frac{1}{8}h_2^2 + o(\|h\|^3).$$

Lösung A.3.14: Die Funktion $F(z) = \ln(1 + z)$ hat um $z = 0$ die Taylor-Reihe

$$T_\infty^F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k,$$

welche für $|z| < 1$ absolut konvergiert und die Funktion darstellt. Mit $z := x_2 - x_1$ folgt also

$$T_\infty^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x_2 - x_1)^k.$$

Diese Reihe konvergiert absolut für $|x_2 - x_1| < 1$, d. h. im Streifen

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2 - x_1| < 1\}$$

der (x_1, x_2) -Ebene und stellt die Funktion hier dar. Die Polynome P_k sind "homogen", d. h. erfüllen $P_k(tx) = t^k P_k(x)$. Nach einem Satz im Text handelt es sich hierbei also wirklich um die Taylor-Reihe der Funktion.

Lösung A.3.15: a) Die Punkte auf einer Geraden durch den Nullpunkt sind gegeben durch $\{t(a, b), t \in \mathbb{R}\}$ für beliebiges $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Zur Bestimmung des Minimums von f entlang der Geraden definieren wir $g(t) := f(ta, tb) = 2(ta)^2 - 3(ta)(tb)^2 + (tb)^4$ und berechnen

$$g'(t) = 4a^2t - 9ab^2t^2 + 4b^4t^3, \quad g''(t) = 4a^2 - 18ab^2t + 12b^4t^2.$$

Es ist $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = 4a^2 > 0$ für $a \neq 0$, so dass in $t = 0$, d. h. im Nullpunkt, ein (relatives) lokales Minimum von f auf der Geraden vorliegt. Der Fall $a = 0$ entspricht einer Geraden in x_2 -Achsenrichtung. Auf dieser Geraden ist $f(0, x_2) = x_2^4$, d. h.: Auch hier hat f ein (relatives) Minimum in $(0, 0)$.

b) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\partial_1 f(x) = 4x_1 - 3x_2^2, \quad \partial_2 f(x) = -6x_1x_2 + 4x_2^3.$$

Der Gradient ∇f verschwindet nur in $(0, 0)$. Die Hesse-Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 + 12x_2^2 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist in $(0, 0)$ aber nur semidefinit. Es ist $f(0) = 0$. In $(0, 0)$ hat f aber kein lokales Minimum, da wegen

$$f(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2^2 + x_2^4 = (x_2^2 - x_1)(x_2^2 - 2x_1)$$

in jeder Umgebung von $(0, 0)$ Punkte mit positiven wie auch solche mit negativen Funktionswerten liegen.

Lösung A.3.16: Die notwendige Extremalbedingung ergibt einen einzigen möglichen Extremalpunkt:

$$\nabla f(x) = 2 \sum_{j=1}^m (x - a^{(j)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a^{(j)}.$$

Die zugehörige Hesse-Matrix $H_f(\hat{x}) = 2mI$ ist positiv definit, so dass in \hat{x} ein Minimum vorliegt. Dieses ist wegen $f(x) \rightarrow \infty$ für $\|x\|_2 \rightarrow \infty$ auch globales Minimum.

Lösung A.3.17: a) Die notwendige Extremalbedingung ergibt genau zwei mögliche Extremalpunkte:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 9x_2 \\ 3x_2^2 - 9x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = (3, 3).$$

Die Hesse-Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -9 \\ -9 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

ist in $x^{(1)}$ indefinit (Eigenwerte $\lambda_{\pm} = \pm 9$) und in $x^{(2)}$ positiv definit (Eigenwerte $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 27$). Es liegt also in $x^{(2)}$ ein lokales Minimum und in $x^{(1)}$ ein Sattelpunkt vor. Wegen $f(-3, -3) = -108 < 0 = f(3, 3)$ ist das lokale Minimum nicht global.

b) Die notwendige Extremalbedingung ergibt unendlich viele mögliche Extremalpunkte:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (\xi, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

In allen diesen kritischen Punkten ist $\det H_f(\xi, \xi) = 0$ und daher das Optimalitätskriterium nicht anwendbar. Der Darstellung $f(x) = (x_1 - x_2)^2 + 1$ entnehmen wir $f(x) \geq 1$ sowie $f(x) = 1$. Also ist jeder Punkte (ξ, ξ) ein lokales Minimum; ein globales Minimum gibt es nicht.

Lösung A.3.18: Die partiellen Ableitungen der Funktion $F(x, y, z) = z^3 + (x^2 + y^2)z + 1$ sind

$$\partial_x F(x, y, z) = 2xz, \quad \partial_y F(x, y, z) = 2yz, \quad \partial_z F(x, y, z) = 3z^2 + x^2 + y^2.$$

Diese sind offenbar stetig auf \mathbb{R}^3 . Für einen festen Punkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ besitzt die kubische Gleichung

$$F(\hat{x}, \hat{y}, z) = z^3 + (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)z + 1 = 0$$

eine Lösung \hat{z} . Für den Punkt $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ gilt notwendig $\hat{z} < 0$, denn aus $\hat{z} \geq 0$ folgte $\hat{z}^3 \geq 0$ und folglich wegen $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 \geq 0$ der Widerspruch $0 = F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) > 0$. Also ist auch $\partial_z F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 3\hat{z}^2 + \hat{x}^2 + \hat{y}^2 > 0$. Damit ist für solche Punkte $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ der Satz über implizite Funktionen anwendbar: Es gibt eine Umgebung $U(\hat{x}, \hat{y}) \subset \mathbb{R}^2$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $f : U(\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\hat{z} = f(\hat{x}, \hat{y})$ und

$$F(x, y, f(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in U(\hat{x}, \hat{y}).$$

Diese Argumentation kann für jeden Punkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ verwendet werden. Da sich die zugehörigen Umgebungen $U(\hat{x}, \hat{y})$ überlappen, ist die Funktion $z = f(x, y)$ eindeutig bestimmt und überall stetig differenzierbar.

Lösung A.3.19: Die Funktion $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = x^y - y^x.$$

Die Funktion f hat die Werte $f(2, 4) = f(e, e) = 0$. In ihrem Definitionsbereich ist sie beliebig oft differenzierbar mit den ersten partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(x, y) = yx^{y-1} - y^x \ln(y), \quad \partial_y f(x, y) = x^y \ln(x) - xy^{x-1}.$$

Offenbar ist $\nabla f(2, 4) \neq 0$, so dass nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung in einer Umgebung von $(2, 4)$ sowohl nach x als auch nach y auflösbar ist. Weiter ist $\nabla f(e, e) = 0$, so daß der Satz über implizite Funktionen hierfür keine Aussage liefert. In der Tat ist die Gleichung bei (e, e) weder nach x noch nach y auflösbar; der Beweis ist aber recht technisch (etwas für Bastler) und wird hier nicht ausgeführt.

Lösung A.3.20: Die Abbildung ist stetig differenzierbar auf ganz \mathbb{R}^2 . Ihre Jacobi-Matrix und Jacobi-Determinante sind

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}, \quad \det J_f(x) = e^{2x} > 0.$$

Die Abbildung ist also regulär auf ganz \mathbb{R}^2 , insbesondere auf der gegebenen Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, -\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi\}$. Für $(x, y) \in M$ haben die Bildpunkte (u, v) die Eigenschaft

$$u^2 + v^2 = e^{2x} \sin^2 y + e^{2x} \cos^2 y = e^{2x},$$

d. h.: Sie liegen in dem Kreisring $K_{r_i, r_a} \subset \mathbb{R}^2$ mit innerem Radius $r_i = e$ und äußerem Radius $r_a = e^2$. Jeder Punkt $(u, v) \in K_{r_i, r_a}$ ist Bild eines Punktes $(x, y) \in M$. Diesen erhält man durch

$$\begin{aligned} u = e^x \cos y & \Rightarrow u^2 + v^2 = e^{2x} & \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \in [1, 2] \\ v = e^x \sin y & \Rightarrow v/u = \tan y & \Rightarrow y = \arctan v/u \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Die Abbildung $f : M \rightarrow K_{r_i, r_a}$ ist bijektiv. Wegen der Mehrdeutigkeit des Arcus-Tangens ist die Abbildung im Großen nicht umkehrbar.

Lösung A.3.21: Gesucht sind $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ mit $f(x, y, z) := xyz \rightarrow \max!$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x + y + z - a = 0$. Die zugehörige Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a).$$

Ihre stationären Punkte erhält man durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_x \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) &= yz + \lambda = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) &= xz + \lambda = 0, \\ \partial_z \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) &= xy + \lambda = 0, \\ \partial_\lambda \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) &= x + y + z - a = 0.\end{aligned}$$

Unter der Annahme $x, y, z \neq 0$ folgt aus den ersten drei Gleichungen $x = y = z$ und mit der vierten $x = y = z = a/3$. Jede weitere Lösung mit $xyz = 0$ ist damit kein Kandidat für ein Maximum.

Lösung A.3.22: Die Funktion f ist stetig auf der kompakten Menge K und nimmt daher dort ihre Extremwerte an.

i) Wir bestimmen zunächst eventuelle lokale Extrema im Innern der Kreisscheibe:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (0, 0).$$

Die Hesse-Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ist indefinit mit Eigenwerten $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1$; im Innern der Kreisscheibe liegt also kein lokales Extremum vor, d. h.: Die Extrema von f liegen auf dem Rand.

ii) Zur Bestimmung der Extrema von f auf dem Rand, d. h.: Unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$, wird der Lagrange-Ansatz verwendet. Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4x^2 - 3xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ihre stationären Punkte erhält man durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_x \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= 8x - 3y + 2\lambda x = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= -3x + 2\lambda y = 0, \\ \partial_\lambda \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems formen wir zunächst die ersten beiden Gleichungen um zu (für $x \neq 0, y \neq 0$)

$$8 - 3y/x + 2\lambda = 0, \quad -3x/y + 2\lambda = 0,$$

woraus durch Subtraktion für die neue Variable $a := y/x$ folgt:

$$8 - 3a + 3/a = 0 \quad \text{bzw.} \quad a^2 - \frac{8}{3}a + 1 = 0.$$

Lösung ist $a_{\pm} = \frac{1}{3}, -3$, d. h.: Potentielle Extremalstellen liegen auf den Geraden $\{y = \frac{1}{3}x\}$ sowie $\{y = -3x\}$. Berücksichtigung der Nebenbedingung ergibt daher als Kandidaten für Extremalpunkte:

$$(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = (\pm \frac{3}{\sqrt{10}}, \pm \frac{1}{\sqrt{10}}), \quad (\hat{x}_2, \hat{y}_2) = (\pm \frac{1}{\sqrt{10}}, \mp \frac{3}{\sqrt{10}}).$$

Zu diesen gehören die Funktionswerte

$$f(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = \frac{12}{10} - \frac{9}{10} = \frac{3}{10}, \quad f(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = \frac{4}{10} + \frac{9}{10} = \frac{13}{10}.$$

Folglich liegen in (\hat{x}_1, \hat{y}_1) Minima und in (\hat{x}_2, \hat{y}_2) Maxima. Dass dies wirklich Extremalpunkte sein müssen, folgt aus der Tatsache, daß einerseits solche auf dem Rand existieren müssen, und andererseits die gefundenen die einzig möglichen Kandidaten dafür sind.

Lösung A.3.23: Zunächst halten wir fest, dass es zu jedem $r \in \mathbb{N}$ weniger als n^r Multiindizes α mit $|\alpha| = r$ gibt. Ferner ist $\alpha!$ für solche α minimal, falls alle α_i gerade $\lfloor r/n \rfloor$ oder $\lceil r/n \rceil$ sind. Somit erhalten wir für $r = an + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}_0$, $b < n$ die folgende Abschätzung

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{|h^\alpha|}{\alpha!} \leq \sum_{|\alpha|=r} \frac{\|h\|_\infty^r}{(a!)^n} \leq \frac{(n\|h\|_\infty)^r}{(a!)^n} \leq \frac{(n\|h\|_\infty)^{an+b}}{a!}.$$

a) Damit ist die Exponentialreihe $\exp((n\|h\|_\infty)^n)$ eine konvergente Majorante für die formale Taylorreihe $T_\infty^f(x+h)$ und es folgt somit die absolute Konvergenz dieser Reihe. Ebenso folgt die Darstellbarkeit der Funktion durch die Reihe, da obige Formel insbesondere die Konvergenz des Restgliedes impliziert.

b) Es ist $D^\alpha f(x) = f(x)$. Damit ist die formale Taylorreihe von f gerade

$$T_\infty^f((1,0,0)+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(1,0,0)}{\alpha!} h^\alpha = e^2 \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{h^\alpha}{\alpha!}.$$

Da die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f(x) = f(x)$ auf jeder kompakten Menge (bzgl. α und x) gleichmäßig beschränkt sind, folgt die absolute Konvergenz der Reihe. Sie stellt zudem die Funktion dar.

Lösung A.3.24: a) Die notwendige Extremalbedingung ergibt genau zwei mögliche Extremalpunkte:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 16x_2 \\ 3x_2^2 - 16x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = (0,0), \quad x^{(2)} = (16/3, 16/3).$$

Die Hesse-Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -16 \\ -16 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

ist in $x^{(1)}$ indefinit (Eigenwerte $\lambda_{\pm} = \pm 16$) und in $x^{(2)}$ positiv definit (Eigenwerte $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 48$). Es liegt also in $x^{(2)}$ ein lokales Minimum und in $x^{(1)}$ ein Sattelpunkt vor. Wegen $f(-16/3, -16/3) < f(16/3, 16/3)$ ist das lokale Minimum nicht global.

b) Die notwendige Extremalbedingung ergibt genau ein mögliches Extremum

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4(x_1 - x_2)^3 \\ -4(x_1 - x_2)^3 + 4(x_2 - 1)^3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = (-1, -1).$$

Da $H_f(-1, -1) = 0$ sind die Optimalitätskriterien nicht anwendbar. Da für $(x_1, x_2) \neq (-1, -1)$ gilt $f(x_1, x_2) > 0 = f(-1, -1)$ ist $x^{(1)}$ trotzdem ein striktes globales Minimum.

Lösung A.3.25: a) Die Abbildung ist stetig differenzierbar auf M . Ihre Jacobi-Matrix und Jacobi-Determinante sind

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad \det J_f(x) = \frac{1}{x^2+y^2} > 0.$$

Die Abbildung ist also regulär.

b) Das Bild ist gerade $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, -\frac{1}{2}\pi \leq v \leq \frac{1}{2}\pi\}$. Zunächst ist klar, dass jedes Element aus M durch die Abbildung auf ein Element in B abgebildet wird. Sei nun umgekehrt u, v in B gegeben, so ist durch

$$x = -e^u \cos(v), \quad y = -e^u \sin(v)$$

die Umkehrabbildung gegeben. Denn seien $(u, v) \in B$, so ist zunächst $x^2 + y^2 = e^{2u}(\cos^2(v) + \sin^2(v)) \in [0, e^2]$ und $x \leq 0$, d. h.: $(x, y) \in M$. Ferner ist

$$\arctan(y/x) = \arctan(\sin(v)/\cos(v)) = v, \\ \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = u.$$

Also handelt es sich tatsächlich um die Umkehrabbildung.

Lösung A.3.26: a) Der Lagrange-Formalismus besteht in der Aufstellung der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ und der Bestimmung stationärer Punkte von \mathcal{L} als möglicher Extrempunkte, d. h.: $\nabla_x \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) + \nabla_\lambda \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$.

b) Zur Bestimmung der Extrema von $f(x, y) = x - y$ auf K , d. h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$, wird der Lagrange-Ansatz verwendet. Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ihre stationären Punkte $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\lambda})$ erhält man durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_x \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= -1 + 2\lambda y = 0, \\ \partial_\lambda \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Offenbar muss $\hat{\lambda} \neq 0$ sein. Addition der ersten beiden Gleichungen ergibt also $\hat{x} = -\hat{y}$ und somit mit Hilfe der dritten Gleichung $(\hat{x}, \hat{y}) = (\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$. Für die beiden stationären Punkte ist

Lösung A.3.27: Wir setzen $g(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$ und $x^* = (1, -1, 0)$. Damit ist dann $x = (x_1, x_2, x_3) \in M$ genau dann wenn $g(x) = 0$ ist. Wir stellen ferner fest, dass

$$\inf_{x \in M} d(x, x^*) = \sqrt{\inf_{x \in M} d(x, x^*)^2}.$$

Da $\hat{x} = (1, 0, 0) \in M$ liegt, ist $\inf_{x \in M} d(x, x^*) \leq d(\hat{x}, x^*) = 1$. Es genügt also

$$\inf_{x \in M \cup \overline{K_1(x^*)}} d(x, x^*)$$

zu betrachten. Da die Menge $M \cup \overline{K_1(x^*)}$ kompakt ist, gibt es also einen Punkt $\bar{x} \in M$, so dass

$$d(\bar{x}, x^*) = \inf_{x \in M \cup \overline{K_1(x^*)}} d(x, x^*) = \inf_{x \in M} d(x, x^*)$$

ist. Wir betrachten daher das restringierte Extremalproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} d(x, x^*)^2 =: f(x), \quad g(x) = 0.$$

Da $\nabla g(x) = 2(x_1, x_2, -x_3) \neq 0$ auf M ist, gibt es für ein Extremum $\bar{x} \in M$ von f notwendig ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla f(\bar{x}) - \lambda \nabla g(\bar{x}) = 0, \quad g(\bar{x}) = 0$$

gilt. Durch Einsetzen der Bedingung für λ erhalten wir

$$\bar{x}_1(1 - \lambda) = 1, \quad \bar{x}_2(1 - \lambda) = -1, \quad \bar{x}_3(1 + \lambda) = 0.$$

Damit gilt notwendig entweder a) $\lambda = -1$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_3 \in \mathbb{R}$, oder aber b) $\lambda \neq \pm 1$, $\bar{x}_3 = 0$, $\bar{x}_1 = \frac{1}{1-\lambda} = -\bar{y}_2$.

Im Fall (a) Folgt aus $g(\bar{x}) = 0$ notwendig $\bar{x}_3^2 = -\frac{1}{2}$, so dass dieser Fall uninteressant ist.

Im Fall (b) erhalten wir aus $g(\bar{x}) = 0$ die Bedingung

$$\bar{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \text{oder} \quad \bar{x}^{(2)} = -\bar{x}^{(1)}.$$

Da

$$f(\bar{x}^{(1)}) = (\sqrt{2} - 1)^2 < (\sqrt{2} + 1)^2 = f(\bar{x}^{(2)})$$

wird das Minimum in $\bar{x}^{(1)}$ angenommen und es ist

$$d(M, x^*) = \sqrt{2} - 1.$$

A.4 Kapitel 4

Lösung A.4.1: Wir setzen

$$\begin{aligned} u_1(t) &:= u(t), \quad u_2(t) := u'(t), \\ u_3(t) &:= v(t), \quad u_4 := v'(t), \quad u_5(t) := v''(t), \quad u_6(t) := v^{(3)}(t). \end{aligned}$$

Das gegebene System 4. Ordnung ist dann äquivalent zu folgendem System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= g(t) - bu_3(t), \\ u_3'(t) &= u_4(t), \\ u_4'(t) &= u_5(t), \\ u_5'(t) &= u_6(t), \\ u_6'(t) &= f(t) + au_2'(t) = f(t) + ag(t) - abu_3(t). \end{aligned}$$

Man beachte, dass für $u''(t)$ keine eigene Unbekannte eingeführt werden darf, da es für deren Ableitung keine Gleichung gibt. Würde man eine solche durch Differenzieren der zweiten Gleichung erzeugen, müsste man für u zusätzlich dreimalige Differenzierbarkeit fordern.

Lösung A.4.2: a) Wir setzen $u_1 := u$ und $u_2(t) = u'(t)$ und erhalten damit das lineare System

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= -\frac{p'(t)}{p(t)}u_2(t) + \frac{q(t)}{p(t)}u_2(t) + \frac{r(t)}{p(t)}u_1(t) - \frac{f(t)}{p(t)}. \end{aligned}$$

In Vektorschreibweise lautet dies:

$$u'(t) = Au(t) + F(t)$$

mit

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \frac{1}{p(t)} \begin{pmatrix} 0 & p(t) \\ r(t) & q(t) - p'(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \frac{1}{p(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

b1) Einsetzen der Randbedingungen liefert $u(0) = B + 1 = 0$, $u(\pi/2) = A + 1 = 0$ und folglich $B = -1$, $A = -1$. Die RWA hat also die eindeutig bestimmte Lösung $u(t) = -\sin t - \cos t + 1$.

b2) Einsetzen der Randbedingungen liefert $u(0) = B + 1 = 0$, $u(\pi) = -B + 1 = 1$. Die RWA hat also wegen der sich ergebenden widersprüchlichen Bedingungen $B = -1$, $B = 0$ keine Lösung.

b3) Einsetzen der Randbedingungen liefert $u(0) = B + 1 = 1$, $u(\pi) = -B + 1 = 1$ und folglich $B = 0$. Die RWA hat also die unendlich vielen Lösungen $u(t) = A \sin t + 1$, $A \in \mathbb{R}$.

Lösung A.4.3: Die Methode der Trennung der Variablen für Gleichungen der Form $u' = f(u) = a(t)g(u)$ führt auf die folgende Beziehung zur Bestimmung einer Lösung:

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dz}{g(z)} = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

a) Für die AWA $u'(t) = u(t)^{1/4}$, $t \geq 0$, $u(0) = 1$, ergibt sich

$$t = \int_1^{u(t)} \frac{dz}{z^{1/4}} = \frac{4}{3}u(t)^{3/4} - \frac{4}{3},$$

und damit eine globale Lösung der Form

$$u(t) = \left(\frac{3}{4}t + 1\right)^{4/3}.$$

Diese Lösung ist eindeutig, da $f(t, x) := x^{1/4}$ auf $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}$ einer L-Bedingung genügt:

$$|x^{1/4} - y^{1/4}| \leq |\xi|^{-3/4}|x - y|, \quad \xi \in [x, y], \quad 1 \leq x < y.$$

Bei $x = 0$ gilt aber keine L-Bedingung. Zur Anfangsbedingung $u(0) = 0$ liefert der o. a. Ansatz

$$t = \int_0^{u(t)} \frac{dz}{z^{1/4}} = \frac{4}{3}u(t)^{3/4},$$

d. h. eine Lösung der Form

$$u(t) = \left(\frac{3}{4}t\right)^{4/3}.$$

Dazu gibt es noch unendlich viele weitere Lösungen:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq c \\ \left(\frac{3}{4}t - \frac{3}{4}c\right)^{4/3} & , \quad c < t. \end{cases}$$

b) Für die AWA $u'(t) = -\sin(t)u(t)^2$, $t \geq 0$, $u(0) = 1$, ergibt sich

$$\cos(t) - 1 = \int_0^t -\sin(s) ds = \int_1^{u(t)} \frac{dz}{z^2} = \frac{-1}{u(t)} + 1$$

und damit eine globale Lösung der Form

$$u(t) = \frac{1}{2 - \cos(t)}.$$

Diese Lösung ist eindeutig, da $f(t, x) := -\sin(t)x^2$ einer lokalen L-Bedingung genügt. Zur Anfangsbedingung $u(0) = 0$ ergibt der o. a. Ansatz wegen der Nichtexistenz des Integrals

$$\int_0^{u(t)} \frac{dz}{z^2}$$

keine Lösung.

Lösung A.4.4: a) Zunächst ist die so definierte Lösung $u \in C^1[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1$. Sowie nach Definition der Anfangswerte $u \in C[t_0, t_2]$, und somit wegen der Stetigkeit von f auch $f(\cdot, u(\cdot)) \in C[t_0, t_2]$. Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung ist also $F(t) := \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ eine Stammfunktion auf $[t_0, t_2]$, d.h. $F'(t) = f(t, u(t))$. Insbesondere ist $F'(t)$ stetig. Damit ist $\tilde{u}(t) = F(t) + u_0$ ebenfalls stetig differenzierbar, und es ist $\tilde{u}'(t) = F'(t) = f(t, u(t))$, d.h. \tilde{u} ist eine Stammfunktion von $f(\cdot, u(\cdot))$. Da sich nach dem Hauptsatz zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden ist $\tilde{u}(t) - u(t) = c$ für alle $t \in [t_0, t_2]$. Da $\tilde{u}(t_0) - u(t_0) = 0$ sind diese also identisch.

b) Sei u eindeutige Lösung der AWA. Angenommen, die Folge $(u^h)_{h>0}$ konvergiert nicht gegen u . Dann gibt es eine Teilfolge $(u^{h_i})_{i \in \mathbb{N}}$, welche entweder divergiert oder gegen einen von u verschiedenen Limes konvergiert. Nun ist natürlich auch diese Teilfolge gleichgradig stetig, so dass Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli die Existenz einer weiteren Teilfolge $(u^{h_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(u^{h_i})_{i \in \mathbb{N}}$ liefert, welche gleichmäßig gegen eine stetige Funktion v konvergiert, welche wieder Lösung der AWA ist. Wegen deren Eindeutigkeit muss dann $v = u$ sein. Dies widerspricht aber der Annahme über die Folge $(u^{h_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

Lösung A.4.5: Nach dem Existenzsatz von Peano und dem Fortsetzungssatz existiert eine lokale Lösung $u(t)$ der RWA mit einem „maximalen“ Existenz(halb)intervall $I_{\max} = [t_0, t_*)$. Dabei ist entweder $t_* = \infty$, d. h.: u ist globale Lösung, oder im Falle $t_* < \infty$ wird $\max_{[t_0, t]} \|u\|$ unbeschränkt für $t \rightarrow t_*$.

Sei u eine (zunächst) lokale Lösung der gegebenen AWA mit maximalem Existenzintervall $[t_0, t_*)$. Wäre nun $t_* < \infty$, so müsste gelten $\max \|u(t)\| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow t_*$). Auf dem Intervall $[t_0, t_*)$ sind die stetigen Funktionen $A(t), B(t)$ gleichmäßig beschränkt durch Konstanten A_*, B_* . Für jeden Zeitpunkt $t < t_*$ ist dann

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds,$$

und folglich wegen der Annahmen an $f(t, x)$:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(s, u(s))\| ds \leq \|u_0\| + \int_0^t \{A(s)\|u(s)\| + B(s)\} ds \\ &\leq \|u_0\| + A_* \int_0^t \|u(s)\| ds + B_*(t_* - t_0), \end{aligned}$$

Mit dem Gronwallschen Lemma folgt hieraus

$$\|u(t)\| \leq e^{A_*(t_* - t_0)} \{\|u_0\| + B_*(t_* - t_0)\}.$$

Dies bedeutet aber, dass $\|u(t)\|$ bei Annäherung an t_* beschränkt bleibt, im Widerspruch zur Annahme.

Lösung A.4.6: Die Funktion $f(t, x)$ in der Differentialgleichung ist in beiden Fällen stetig auf $D = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, so dass der Existenzsatz von Peano anwendbar ist.

a) Die Funktion $f(t, x) = -x^5 + x$ ist lokal L-stetig. Die lokale Lösung der AWA ist also eindeutig bestimmt. Wegen

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} u^2 = u' u = -u^5 u - u^2 \leq 0$$

ergibt sich $u(t)^2 \leq u(0)^2 = 1$, $t \geq 0$, d. h. die gleichmäßige Beschränktheit der Lösung und damit ihre globale Existenz. Weiter besteht die Monotonieeigenschaft

$$-(-x^5 - x + y^5 + y)(x - y) = (x - y)(x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4)(x - y) + (x - y)^2 \geq (x - y)^2,$$

d. h.: Die AWA ist monoton und die globale Lösung folglich exponentiell stabil.

Es bleibt noch zu sehen, dass $g(x, y) = (x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4) \geq 0$ ist. Dazu stellen wir zunächst fest, dass $g(x, 0) = x^4 \geq 0$. Wir betrachten nun die Geraden $y = ax$ mit beliebigem aber festen $a \in \mathbb{R}$. Entlang einer solchen Geraden ist $g(x, ax) = x^4(1 + a + a^2 + a^3 + a^4)$, d. h.: Um zu zeigen, dass $g(x, y) \geq 0$ ist genügt es zu zeigen, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(a) = (1 + a + a^2 + a^3 + a^4) \geq 0$ ist.

Wir zeigen die stärkere Aussage $f(a) > 0$. Da offenbar $f(a) \geq 1 > 0$ für $a \geq 0$ genügt es $a < 0$ zu betrachten. Angenommen es gäbe ein solches $a < 0$ mit $f(a) = 0$, so gilt (Multiplizieren mit a^{-4}) $f(a^{-1}) = 0$. Es genügt also, $a \in I = [-1, 0)$ zu betrachten. Da nun für $a \in I$ gilt $|a| \leq 1$, $|a|^3 \leq |a|^2$ ist also $f(a) > 0$ für $a \in I$ im Widerspruch zur Annahme dass $f(a) = 0$. Daher ist $f(a) > 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

b) Die Funktion $f(t, x) = \sin x - 2x$ ist global L-stetig:

$$|\sin x - 2x - \sin y + 2y| \leq \left(\max_{\xi \in \mathbb{R}} |\cos \xi| + 2 \right) |x - y|,$$

so dass eine eindeutig bestimmte globale Lösung existiert. Wegen (Youngsche Ungleichung)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} u^2 + 2u^2 = u' u + 2u u = u \sin u \leq \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2}, \quad \frac{d}{dt} u^2 + 3u^2 \leq 1$$

erschließt man wie im Text die Beschränktheit der Lösung. Weiter gilt

$$-(\sin x - 2x - \sin y + 2y)(x - y) \geq 2|x - y|^2 - \min_{\xi \in \mathbb{R}} (\cos \xi) |x - y|^2 \geq |x - y|^2,$$

d. h.: Die AWA ist monoton und die globale Lösung folglich exponentiell stabil.

Lösung A.4.7: Wir definieren für $t \geq t_0$ die Hilfsfunktionen

$$\varphi(t) := \int_{t_0}^t a(s)w(s) ds, \quad \psi(t) := w(t) - \int_{t_0}^t a(s)w(s) ds \leq b(t).$$

Für diese gilt dann

$$\varphi'(t) = a(t)w(t), \quad \varphi(t_0) = 0$$

und folglich

$$a(t)\psi(t) = a(t)w(t) - a(t) \int_{t_0}^t a(s)w(s) ds = \varphi'(t) - a(t)\varphi(t).$$

Also ist $\varphi(t)$ Lösung der linearen AWA

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + a(t)\psi(t), \quad t \geq t_0, \quad \varphi(t_0) = 0.$$

Durch Nachrechnen verifiziert man, dass

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) a(s)\psi(s) ds.$$

Wegen $a(s) \geq 0$ und $\psi(s) \leq b(t)$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq b(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \int_{t_0}^t \left\{ -\frac{d}{ds} \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) \right\} ds \\ &\leq b(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) - b(t). \end{aligned}$$

Das ergibt schließlich mit der Voraussetzung

$$w(t) \leq \varphi(t) + b(t) \leq b(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Lösung A.4.8: a) Nach dem Existenzsatz von Peano und dem Fortsetzungssatz existiert eine lokale Lösung $u(t)$ der AWA mit einem "maximalen" Existenz(halb)intervall $I_{\max} = [t_0, t_*)$. Dabei ist entweder $t_* = \infty$, d. h.: u ist globale Lösung, oder im Falle $t_* < \infty$ wird $\max_{[t_0, t]} \|u\|$ unbeschränkt für $t \rightarrow t_*$.

Sei u eine (zunächst) lokale Lösung der gegebenen AWA mit maximalem Existenzintervall $[t_0, t_*)$. Wäre nun $t_* < \infty$, so müsste gelten $\max \|u(t)\| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow t_*$). Auf dem Intervall $[t_0, t_*)$ sind die stetigen Funktionen $\alpha(t), \beta(t)$ gleichmäßig beschränkt durch Konstanten A_*, B_* . Für jeden Zeitpunkt $t < t_*$ ist dann

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

und folglich wegen der Annahmen an $f(t, x)$:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \{\alpha(s)\|u(s)\| + \beta(s)\} ds \\ &\leq \|u_0\| + A_* \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds + B_*(t_* - t_0), \end{aligned}$$

Mit dem Gronwallschen Lemma folgt hieraus

$$\|u(t)\| \leq e^{A_*(t_* - t_0)} \{\|u_0\| + B_*(t_* - t_0)\}.$$

Dies bedeutet aber, dass $\|u(t)\|$ bei Annäherung an t_* beschränkt bleibt, im Widerspruch zur Annahme.

bi) Es ist

$$\|f_1(t, x)\| \leq |t||x_1|^{1/2} + |\sin(t)||x_2| \leq |t|(|x_1| + 1) + \sin(t)|x_2| \leq (|t| + |\sin(t)|)\|x\| + |t|.$$

Und somit ist f_1 linear beschränkt mit

$$\alpha(t) = (|t| + |\sin(t)|), \quad \beta(t) = |t|.$$

Da f_1 lokal Lipschitz-stetig ist, solange $x_1 \neq 0$, ist die Lösung eindeutig solange $u_1(t) \neq 0$ ist.

bii) Hier ist

$$\|f_2(t, x)\| \leq e^{-t^2|x_1|} + |x_1|(1 + x_2^2)^{-1} \leq e + |x_1| \leq \|x\| + e.$$

Also ist mit $\alpha(t) = 1$ und $\beta(t) = e$ auch f_2 linear beschränkt. Da f_2 global Lipschitz-stetig ist, ist die Lösung der AWA stets eindeutig.

Lösung A.4.9: a) Die Matrix-Reihe

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und zwar gleichmäßig für $t \in [t_0, t_0 + T]$. Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation zu

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A e^{tA},$$

wobei die Ableitungsreihe wieder für $t \in [t_0, t_0 + T]$ gleichmäßig konvergiert. Folglich sind die beiden Grenzprozesse „Differentiation“ und „Summation“ vertauschbar. Ferner ist

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b \, ds = A \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b \, ds + b.$$

Also ist für die angegebene Form von $u(t)$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b \, ds \right) \\ &= A e^{(t-t_0)A} u_0 + A \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b \, ds + b = Au(t) + b, \end{aligned}$$

d. h.: u erfüllt die Differentialgleichung und wegen $u(t_0) = u_0$ auch die AWA.

b) Im nichtautonomen Fall $A(t)$, $b(t)$ machen wir den Ansatz

$$u(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(r) \, dr \right) \left[u_0 + \int_{t_0}^t \exp \left(- \int_{t_0}^s A(r) \, dr \right) b(s) \, ds \right].$$

Nachrechnen ergibt, dass hierdurch eine Lösung der AWA gegeben ist.

Lösung A.4.10: a) Eine Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

heißt (stark) „monoton“, wenn gilt:

$$-\langle f(t, x) - f(t, y), x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|_2^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Monotone AWA mit $\sup_{t \in [t_0, \infty)} \|f(t, 0)\|_2 < \infty$ haben nach dem Globalen Stabilitätssatz aus dem Text globale, gleichmäßig beschränkte Lösungen.

Für $f(t, x) := A(t)x + b(t)$ gilt, wenn $A(t)$ gleichmäßig für $t \geq t_0$ negativ definit ist:

$$-\langle f(t, x) - f(t, y), x - y \rangle = -\langle A(t)(x - y), x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|_2^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

d. h.: die AWA ist „monoton“. Dabei ist $\gamma = \inf_{t \geq t_0} \{ \lambda | \lambda \in \sigma(-A(t)) \}$.

b) Die Matrix $-A$ ist symmetrisch. Angenommen es gäbe nun einen Eigenwert $\lambda \leq 0$ von $-A$ mit zugehörigem Eigenvektor w . Dann gilt:

$$Aw = \lambda w.$$

Sei nun i ein Index, so dass für die Komponente w_i von w gilt $|w_i| \geq |w_j|$ für alle $j = 1, \dots, d$. O.B.d.A sei $i \neq 1, i \neq n$ und $w_i > 0$ dann ist

$$0 < -20w_{i-1} + 50w_i - 20w_{i+1} = (Aw)_i = \lambda w_i \leq 0$$

im Widerspruch zur Annahme. Die Matrix A ist also negativ definit.

c) Weiter gilt im Falle $\sup_{t \geq t_0} \|b(t)\|_2 < \infty$:

$$\sup_{t \geq t_0} \|f(t, 0)\|_2 = \sup_{t \geq t_0} \|b(t)\|_2 < \infty,$$

d. h.: Die Lösung der linearen AWA ist gleichmäßig beschränkt.

Lösung A.4.11: a) Einsetzen der Randbedingungen liefert $u(0) = B + 1 = 0$, $u(\pi/2) = A + 1 = 0$ und folglich $B = -1$, $A = -1$. Die RWA hat also die eindeutig bestimmte Lösung $u(t) = -\sin t - \cos t + 1$.

b) Einsetzen der Randbedingungen liefert $u(0) = B + 1 = 0$, $u(\pi) = -B + 1 = 1$. Die RWA hat also wegen der sich ergebenden widersprüchlichen Bedingungen $B = -1$, $B = 0$ keine Lösung.

c) Einsetzen der Randbedingungen liefert $u(0) = B + 1 = 1$, $u(\pi) = -B + 1 = 1$ und folglich $B = 0$. Die RWA hat also die unendlich vielen Lösungen $u(t) = A \sin t + 1$, $A \in \mathbb{R}$.

Lösung A.4.12: Die RWA ist nach einem Satz aus dem Text genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene Problem mit $f = 0$, $g_a = 0$ und $g_b = 0$ nur die

triviale Lösung $v \equiv 0$ besitzt. Sei also v eine Lösung des homogenen Problems. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit v und integrieren über I und erhalten

$$\int_I -(pv')'v \, dt + \int_I qv'v \, dt + \int_I r|v|^2 \, dt = 0,$$

sowie nach partieller Integration

$$\int_I p|v'|^2 \, dt - \underbrace{pv'v \Big|_a^b}_{=0} - \int_I qv'v \, dt + \int_I r|v|^2 \, dt = 0.$$

Da die Poincarésche Ungleichung nur für Funktionen mit Nullrandwerten bewiesen wurde, kann hier nicht weiter vereinfacht werden. Trotzdem können wir bereits hieraus den ersten Satz von hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der Neumannschen RWA ableiten:

$$(a) \quad p \geq 0, \quad q \equiv 0, \quad r > 0.$$

In diesem Fall ist wegen

$$\int_I r|v|^2 \, dt \leq 0$$

und $r|v|^2 \geq 0$ notwendig $v \equiv 0$, was zu zeigen war. Im Fall $q \not\equiv 0$ müssen wir anders argumentieren. Der betreffende Term kann diesmal nicht wie im Fall von Dirichlet-Randbedingungen durch partielle Integration vereinfachen; stattdessen wenden wir auf ihn die Youngsche Ungleichung an:

$$\left| \int_I qv'v \, dt \right| \leq \int_I \left\{ \frac{\alpha}{2} |q| |v'|^2 + \frac{1}{2\alpha} |q| |v|^2 \right\} dt,$$

mit einer beliebigen Funktion $\alpha : I \rightarrow (0, 1)$. Mit dieser Abschätzung folgt

$$\int_I \left\{ p - \frac{\alpha}{2} |q| \right\} |v'|^2 \, dt + \int_I \left\{ r - \frac{1}{2\alpha} |q| \right\} |v|^2 \, dt \leq 0.$$

Hieraus entnehmen wir als Lösbarkeitsbedingung die Existenz einer Funktion $\alpha : I \rightarrow (0, 1)$, so daß auf I gilt:

$$b) \quad p - \frac{\alpha}{2} |q| \geq 0, \quad r - \frac{1}{2\alpha} |q| > 0.$$

Lösung A.4.13: Im Text wurde für die Lösung u der RWA die folgende L^2 -Abschätzung bewiesen:

$$\|u\|_2 + \|u'\|_2 + \|u''\|_2 \leq c \{ \|f\|_2 + |g_a| + |g_b| \}.$$

Aus der Differentialgleichung entnehmen wir die Abschätzung

$$\|u''\|_\infty \leq \|p^{-1}\| \{ \|f\|_\infty + \|q - p'\|_\infty \|u'\|_\infty + \|r\|_\infty \|u\|_\infty \}.$$

Es bleibt also nur noch $\|u\|_\infty$ und $\|u'\|_\infty$ abzuschätzen. Dazu verwenden wir Sobolewsche Ungleichungen. Für $t, s \in I$ gelten die Beziehungen

$$u(t) = u(s) - \int_s^t u'(r) dr, \quad u'(t) = u'(s) - \int_s^t u''(r) dr,$$

woraus durch Integration über $s \in I$ folgt:

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \int_I |u(s)| ds + (b-a) \int_I |u'(r)| dr, \\ |u'(t)| &\leq \int_I |u'(s)| ds + (b-a) \int_I |u''(r)| dr. \end{aligned}$$

Bei Maximumsbildung über $t \in I$ links und Anwendung der Hölderschen Ungleichung rechts ergeben sich die (eindimensionalen) Sobolewschen Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &\leq (b-a)^{-1/2} \|u\|_2 + (b-a)^{1/2} \|u'\|_2, \\ \|u'\|_\infty &\leq (b-a)^{-1/2} \|u'\|_2 + (b-a)^{1/2} \|u''\|_2. \end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty \leq c_1 \{\|f\|_2 + |g_a| + |g_b|\} \leq c_2 \{\|f\|_\infty + |g_a| + |g_b|\}$$

mit gewissen Konstanten $c_i > 0$.

A.5 Kapitel 5

Lösung A.5.1: Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir eine Abzählung $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ der rationalen Zahlen im Intervall $I = [0, 1]$. Sei $A_k := \{r_j : j \geq k\}$. Dann enthält A_k alle rationalen Zahlen in I bis auf endlich viele. Also ist $\overline{A_k} = I$ und daher $|A_k|_a = 1$ für alle k . Es ist aber $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$ und somit $|A|_a = 0$.

Lösung A.5.2: i) Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir eine Abzählung $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ der rationalen Zahlen im Intervall $I = [0, 1]$. Sei $A_k := \{r_j : j \geq k\}$. Dann enthält A_k alle rationalen Zahlen in I bis auf endlich viele. Also ist $\overline{A_k} = I$ und daher $|A_k|_a = 1$ für alle k . Es ist aber $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$ und somit $|A|_a = 0$.

ii) Die Aussage ist richtig, nach Lemma 4.2.ii)

iii) Die Aussage ist falsch, denn sei M die Menge aus (i), dann ist

$$1 = |M^\circ \cup \partial M|_a \leq |M^\circ|_a + |\partial M|_a = |\partial M|_a.$$

iv) Für den „inneren“ Jordan-Inhalt ist $|M|_i = |M^\circ|_i$ nach Lemma 4.2. Durch Betrachtung der Menge M aus Beispiel (i) erhält man sofort

$$0 = |M^\circ|_i = |M|_i < |\overline{M}|_i = |\partial M|_i = 1.$$

v) Im Falle quadrierbarer Mengen M ist nach Satz 4.4 $|\partial M|_a = 0$, und somit (Lemma 4.4) $|M| = |M^\circ| = |\overline{M}|$.

Lösung A.5.3: Wir verwenden die Charakterisierung des Jordan-Inhalts als Limes der Inhalte von Würfelsummen. Wegen der Quadrierbarkeit der Mengen M und N gilt nach einem Resultat der Vorlesung:

$$|M| = \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k|, \quad |N| = \lim_{k \rightarrow \infty} |N_k|.$$

Seien \mathcal{W}_k^n und \mathcal{W}_k^m die Mengen der Würfelsummen k -ter Stufe in \mathbb{R}^n bzw. in \mathbb{R}^m . Weiter ist

$$\begin{aligned} (M \times N)_k &= \cup \{W \in \mathcal{W}_k^n \times \mathcal{W}_k^m : W \subset M \times N\} =: \cup_i W_i \\ &= \cup \{U \times V \in \mathcal{W}_k^n \times \mathcal{W}_k^m : U \subset M, V \subset N\} =: \cup_{i,j} (U_i \times V_j) = M_k \times N_k. \end{aligned}$$

Der Inhalt von Würfeln $W = U \times V \in \mathcal{W}_k^n \times \mathcal{W}_k^m$ ist $|W| = |U| |V|$. Also folgt:

$$|(M \times N)_k| = \sum_i |W_i| = \sum_{i,j} |U_i| |V_j| = \sum_i |U_i| \sum_j |V_j| = |M_k| |N_k|.$$

Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ergibt dann die behauptete Produktformel.

Lösung A.5.4: Die Funktion f ist auf jedem (kompakten) Teilintervall $I_\varepsilon := [\varepsilon, 1]$ ($0 < \varepsilon < 1$) stetig. Nach einem Satz des Textes ist daher ihr Teilgraph $G_\varepsilon(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I_\varepsilon\}$ eine 2-dimensionale Nullmenge. Wegen $\sup_{x \in I} |f(x)| \leq 1$ ist der gesamte Graph $G(f)$ in der folgenden Vereinigungsmenge enthalten:

$$G(f) \subset S_\varepsilon := G_\varepsilon(f) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, \varepsilon], y \in [-1, 1]\}.$$

Für den äußeren Inhalt dieser Menge gilt:

$$|G(f)|_a \leq |S_\varepsilon|_a \leq |G_\varepsilon(f)|_a + 2\varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

d. h.: $G(f)$ ist eine Jordan-Nullmenge.

Lösung A.5.5: Wir verwenden, dass eine Menge genau dann quadrierbar ist, wenn ihr Rand eine Jordan-Nullmenge ist. Der Rand der Einheitskugel $K_1^{(n)}(0)$ des \mathbb{R}^n wird durch den oberen und den unteren Teil

$$\Gamma_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1, x_n \geq 0\}, \quad \Gamma_- := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1, x_n \leq 0\}$$

überdeckt. Diese lassen sich als Graphen der stetigen Funktionen

$$f_\pm(x') := \pm \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2}, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

über der kompakten Menge $\overline{K_1^{(n-1)}(0)}$ darstellen. Folglich sind sie beide Nullmengen. Als endliche Vereinigung von Nullmengen ist also der Rand von $K_1^{(n)}(0)$ Nullmenge und somit quadrierbar.

Lösung A.5.6: a) Seien Z_k Zerlegungen von $D = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ der Feinheit $\sqrt{2}2^{-k}$, die man durch sukzessive Kantenhalbierung erhält, d. h. Z_k besteht aus den Intervallen

$$I_{i,j}^k = [(i-1)2^{-k}, i2^{-k}] \times [(j-1)2^{-k}, j2^{-k}], \quad i, j = 1, \dots, 2^k, \quad |I_{i,j}^k| = 2^{-2k}.$$

Die Funktion $f(x, y) = xy$ ist jeweils monoton wachsend in den beiden Variablen x und y . Für die Ober- und Untersummen zu den Zerlegungen Z_k gilt damit:

$$\begin{aligned} \overline{S}_{Z_k}(f) &= \sum_{i,j=1}^{2^k} \sup_{x \in I_{i,j}^k} f(x) |I_{i,j}^k| = \sum_{i,j=1}^{2^k} \frac{i}{2^k} \frac{j}{2^k} 2^{-2k} = 2^{-4k} \sum_{i,j=1}^{2^k} ij \\ &= 2^{-4k} \frac{2^k(2^k+1)}{2} \sum_{j=1}^{2^k} j = \frac{2^{2k}(2^k+1)^2}{4 \cdot 2^{4k}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}}, \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_k}(f) &= \sum_{i,j=1}^{2^k} \inf_{x \in I_{i,j}^k} f(x) |I_{i,j}^k| = \sum_{i,j=0}^{2^k-1} \frac{i-1}{2^k} \frac{j-1}{2^k} 2^{-2k} = 2^{-4k} \sum_{i,j=0}^{2^k-1} ij \\ &= 2^{-4k} \frac{(2^k-1)2^k}{2} \sum_{j=0}^{2^k-1} j = \frac{2^{2k}(2^k-1)^2}{4 \cdot 2^{4k}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}}, \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ konvergieren die Ober- und Untersummen gegen den gemeinsamen Limes $\frac{1}{4}$. Also ist $f(x, y) = xy$ über $D = [0, 1]^2$ R-integrierbar mit dem Integralwert

$$\int_D xy \, d(x, y) = \frac{1}{4}.$$

Auf dem Würfel $D = [-1, 0] \times [0, 1]$ erhalten wir durch analoge Argumentation

$$\int_D xy \, d(x, y) = -\frac{1}{4}.$$

Wegen der Symmetrie folgt damit

$$\int_{[-1,1]^2} xy \, d(x, y) = 0.$$

b) Es ist

$$\int_{[-1,1]^2} xy \, d(x, y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy \, dx \, dy = \int_{-1}^1 y \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 \, dy = 0.$$

Lösung A.5.7: Da f R-Integrierbar ist, ist notwendig f beschränkt, d. h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)| \leq K$. Die Funktionen $\varphi_1(x) = |x|^m$ und $\varphi_2(x) = \exp(x)$ sind stetig differenzierbar und daher auf der kompakten Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq K\}$ L-stetig. Nach Lemma 5.8 ist daher die Komposition $\varphi_i \circ f$ mit $i = 1, 2$ R-Integrierbar.

Für die Betrachtung der Wurzelfunktion bemerken wir zunächst, dass nach Lemma 5.8 mit f auch $\max(|f|, \varepsilon)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ R-Integrierbar ist. Damit ist dann $\varepsilon \leq |\max(|f|, \varepsilon)| \leq K$ und somit ist $g_\varepsilon(x) = \sqrt{\max(|f(x)|, \varepsilon)}$ ebenfalls R-Integrierbar. Ferner ist $g_\varepsilon - \sqrt{\varepsilon} \leq \sqrt{|f|} \leq g_\varepsilon$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_D g_\varepsilon(x) dx - |D|\varepsilon &\leq \int_D \sqrt{|f(x)|} dx \leq \int_D g_\varepsilon(x) dx, \\ \int_{\underline{D}} g_\varepsilon(x) dx - |D|\varepsilon &\leq \int_{\underline{D}} \sqrt{|f(x)|} dx \leq \int_{\underline{D}} g_\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$0 \leq \int_D \sqrt{|f(x)|} dx - \int_{\underline{D}} \sqrt{|f(x)|} dx \leq \int_D g_\varepsilon(x) dx - \int_{\underline{D}} g_\varepsilon(x) dx + |D|\varepsilon = |D|\varepsilon,$$

also die R-Integrierbarkeit von $\sqrt{|f(x)|}$.

Lösung A.5.8: a) Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \pi, \sin(x) \leq y \leq \sin(x) + 1\}$ liegt zwischen den Graphen der Funktionen

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \sin(x) + 1, \quad x \in [0, \pi].$$

Für ihren Jordan-Inhalt gilt daher:

$$|M| = \int_0^\pi (f(x) - g(x)) dx = \int_0^\pi 1 dx = \pi.$$

b) Die Menge M ist gerade gegeben durch

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 + x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Ihr Jordaninhalt ist daher:

$$|M| = \int_{-1}^1 (1 - x^2) - (x^2 - 1) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

c) Die Menge M ist unbeschränkt. Somit ist sie nicht quadrierbar. Wir betrachten daher die ausschöpfende Folge

$$M_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq e^{-x}\}.$$

Für diese ist

$$|M_n| = \int_0^n e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^n = 1 - e^{-n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Lösung A.5.9: Da f und g R-Integrierbar sind, gilt dies nach Lemma 5.8 auch für fg und $|f|^2$ sowie $|g|^2$. Sei nun Z irgendeine Zerlegung von D . Dann ist nach der Schwarzchen-Ungleichung

$$|RS_Z(fg)| \leq \left(RS_Z(|f|^2) \right)^{1/2} \left(RS_Z(|g|^2) \right)^{1/2}$$

und die Behauptung folgt durch Grenzübergang $|Z| \rightarrow 0$.

Lösung A.5.10: Für die beschränkte Funktion f seien $\alpha := \inf_{x \in D} f(x)$ und $\beta := \sup_{x \in D} f(x)$. Auf dem kompakten Intervall $I = [\alpha, \beta]$ sind die Funktionen $\varphi_1(x) := x^p$ und $\varphi_2(x) := e^x$ Lipschitz-stetig. Nach einem Satz aus dem Text sind die Funktionen $F := f^p$ und $F := e^f$ folglich R-integrierbar.

Lösung A.5.11: Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$ liegt zwischen den Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad x \in [0, 1].$$

Für ihren Jordan-Inhalt gilt daher:

$$|M_1| = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Lösung A.5.12: Das Problem liegt darin, dass die Funktion $g(x, y)$ offenbar in $(x, y) = (0, 0)$ nicht stetig ist. Für $y \neq 0$ sind aber dennoch die Integrale

$$f(y) = \int_0^1 g(x, y) dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

als normale R-Integrale definiert. Für $y = 0$ ist sein Wert trivialerweise $f(0) = 0$. Dasselbe gilt für die Integrale über die Ableitung

$$\partial_y g(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2 3xy^2 - xy^3 2(x^2 + y^2) 2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{3x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Also ist

$$f^*(0) = \int_0^1 \partial_y g(x, 0) dx = 0.$$

Dagegen ergibt sich

$$f(y) = \int_0^1 \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{y^3}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{1 + y^2}$$

und folglich

$$f'(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(1 + y^2) 3y^2 - 2yy^3}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Lösung A.5.13: Aus der Differenzierbarkeit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[\int_{\psi(y+h)}^{\varphi(y+h)} f(x, y+h) dx - \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y) dx \right] &= \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx \\ &+ \frac{1}{h} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x, y+h) dx - \frac{1}{h} \int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x, y+h) dx. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ geht die rechte Seite unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung in die folgende Form über:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \partial_y f(x, y) dx + \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_1, y+h) \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_2, y+h) \frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung wegen $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_1 = \varphi(y)$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_2 = \psi(y)$ und der Differenzierbarkeit von φ und ψ .

Lösung A.5.14: Die Funktion

$$f(x, y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

ist auf $D = [0, 1] \times [0, 1]$ beschränkt und R-integrierbar. Folglich ist der Satz von Fubini anwendbar. Wegen der einfacheren Form der Stammfunktion ist es am günstigsten, zunächst bzgl. y zu integrieren. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx \\ &= \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+2}) \right]_0^1 = \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Lösung A.5.15: a) Sei nun angenommen, dass $F(\|x\|_2)$ R-integrierbar ist. Zunächst einmal ist die Abbildung $(r, \theta) \mapsto (x, y) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) =: \Phi(r, \theta)$ auf dem Intervall $S := (r, R) \times (0, \theta)$ stetig differenzierbar, bijektiv und L-stetig. Da $\Phi(S) = D$ und $|\det \Phi'(r, \theta)| = r$ ist nach dem Transformationssatz

$$J = \int_D F(\|x\|_2) dx = \int_S F(r) |\det \Phi'(r, \theta)| d(r, \theta) = \int_S F(r) r d(r, \theta)$$

Anwendung des Satzes von Fubini auf $\bar{S} = [r, R] \times [0, \theta]$ liefert

$$J = \int_0^{\theta} \left(\int_r^R F(r) dr \right) d\theta.$$

Man beachte dabei, dass die Funktion $\theta \rightarrow \int_r^R F(r) dr$ R-integrierbar auf $[0, 2\pi]$ ist.

b) Transformation der Integrale auf Polarkoordinaten $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi)$ und Anwendung des Satzes von Fubini ergibt

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{r^2} r dr \right) d\theta = 2\pi \ln(r) \Big|_1^2 = 2\pi \ln(2), \\ J_2 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \cos(r^2) r dr \right) d\theta = \pi \sin(r^2) \Big|_0^1 = \pi \sin(1). \end{aligned}$$

Lösung A.5.16: Wir berechnen die Integrale auf ausschöpfenden Teilmengen $D_\varepsilon \subset D$, welche positiven Abstand zu den „singulären“ Punkten der Integranden haben und untersuchen den Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$. Alternativ betrachten wir für unbeschränktes D ausschöpfende beschränkte Teilmengen $D_N \subset D$ und untersuchen den Limes für $N \rightarrow \infty$. Existiert dieser, so existiert das Integral als uneigentliches R-Integral. Durch Transformation auf Polar- bzw. Kugelkoordinaten und Anwendung des Satzes von Fubini ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \int_{K_1^{(2)}(0) \setminus K_\varepsilon^{(2)}(0)} \frac{1}{\|x\|_2^2} dx = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{r}{r^2} dr d\theta = 2\pi \ln r \Big|_\varepsilon^1 = -2\pi \ln \varepsilon \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0); \\
 b) \quad & \int_{K_N^{(3)}(0) \setminus K_1^{(3)}(0)} \frac{1}{\|x\|_2^4} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^N \frac{r^2 \sin \varphi}{r^4} dr d\varphi d\theta = 4\pi(1 - \frac{1}{N}) \rightarrow 4\pi (N \rightarrow \infty); \\
 c) \quad & \int_{K_{1-\varepsilon}^{(2)}(0)} \frac{1}{1 - \|x\|_2} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-r} dr d\theta = 2\pi \int_0^{1-\varepsilon} \frac{r}{1-r} dr; \\
 d) \quad & \int_{K_N^{(2)}(0) \setminus K_1^{(2)}(0)} \frac{1}{\|x\|_2^2} dx = \int_0^{2\pi} \int_1^N \frac{r}{r^2} dr d\theta = 2\pi \ln(N) \rightarrow \infty (N \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Das letzte Integral in (c) wird abgeschätzt durch

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{r}{1-r} dr &= \int_0^{1/2} \frac{r}{1-r} dr + \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{r}{1-r} dr \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-r} dr = -\frac{1}{2} \ln(1-r) \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln(1/2) - \frac{1}{4} \ln \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Also existiert J_2 als uneigentliches R-Integral, während die Integrale J_1 , J_3 und J_4 nicht existieren.

Lösung A.5.17: Transformation der Integrale auf Polarkoordinaten $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi)$ und Anwendung des Satzes von Fubini ergibt

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{r} r dr \right) d\theta = 2\pi, \\
 J_2 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{r^2} r dr \right) d\theta = \pi e^{r^2} \Big|_0^1 = \pi(e-1).
 \end{aligned}$$

Lösung A.5.18: Es ist zu zeigen, dass $F(x) = F(x')$ für $x, x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = \|x'\|$. Ist $\|x\| = \|x'\|$, so gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $x' = Sx$. Also genügt es zu zeigen, dass $F(Sx) = F(x)$ für jede orthogonale Matrix S . Orthogonale Matrizen haben die Determinante $\det S = \pm 1$. Wegen der Rotationssymmetrie von f und g folgt nach der Substitutionsregel mit $y' := Sy$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_K f(y)g(y-x) dy = \int_K f(Sy)g(S(y-x)) dy \\
 &= \int_K f(Sy)g(Sy-Sx) |\det S| dy = \int_K f(y')g(y'-Sx) dy = F(Sx).
 \end{aligned}$$

Lösung A.5.19: Sei $x \in \mathbb{R}^2$ und $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge. Die Riemann-integrierbare Funktion f ist beschränkt.

i) Im Fall $x \notin K$ ist $x^k \notin K$ für $k \geq m \in \mathbb{N}$. Ist die Funktion $g(x, y) := \|x - y\|^{-1}$ gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $K \times \{x, x^m, x^{m+1}, \dots\}$. Damit konvergiert

$$\sup_{y \in K} \left| \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

und folglich

$$|F(x^k) - F(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \int_K \left| \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right| dt \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

ii) Sei nun $x \in K$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß $\|x - x^k\| < \varepsilon$ für $k \geq k_\varepsilon$. Mit der Kreisumgebung $K_{2\varepsilon}(x)$ spalten wir auf gemäß

$$\begin{aligned} |F(x^k) - F(x)| &\leq \sup_{y \in K} |f(y)| \int_{K \setminus K_{2\varepsilon}(x)} \left| \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right| dt \\ &\quad + \sup_{y \in K} |f(y)| \int_{K_{2\varepsilon}(x) \cap K} \left| \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right| dt \end{aligned}$$

Das erste Integral geht gegen Null mit derselben Argumentation wie in (i), da $x, x^k \notin K \setminus K_{3\varepsilon}(x)$ für $k \geq k_\varepsilon$. Das zweite Integral geht gegen Null wegen

$$\int_{K_{2\varepsilon}(x) \cap K} \frac{1}{\|x^k - y\|} dy \leq \int_{K_{3\varepsilon}(x^k)} \frac{1}{\|x^k - y\|} dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{3\varepsilon} \frac{r}{r} dr d\theta = 6\pi\varepsilon$$

und analog für das Integral über $\|x - y\|^{-1}$.

Lösung A.5.20: Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt der Kugel und die positive x_3 -Achse gehe durch den Massepunkt x , d. h.: $x = (0, 0, \eta)$. In diesem Koordinatensystem gilt für die von der Kugel auf den Massepunkt ausgeübte Schwerkraft $F_1(0, 0, \eta) = F_2(0, 0, \eta) = 0$. Die x_3 -Komponente der Kraft ist

$$\begin{aligned} F_3(0, 0, \eta) &= -\gamma\rho_0 \int_K \frac{\eta - y_3}{(y_1^2 + y_2^2 + (\eta - y_3)^2)^{3/2}} \\ &= \gamma\rho_0 \int_K \frac{d}{d\eta} \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + (\eta - y_3)^2)^{1/2}} dy. \end{aligned}$$

Die uneigentlichen R-Integrale existieren nach einem Resultat im Text. Ferner kann man

Differentiation und Integration vertauschen. Übergang zu Zylinderkoordinaten ergibt

$$\begin{aligned}
 F_3(0, 0, \eta) &= 2\gamma\rho_0\pi \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r}{(r^2 + (\eta - z)^2)^{1/2}} dr dz d\theta \\
 &= 2\gamma\rho_0\pi \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{d}{dr} (r^2 + (\eta - z)^2)^{1/2} dr dz \\
 &= 2\gamma\rho_0\pi \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{d}{dr} (r^2 + (\eta - z)^2)^{1/2} dr dz \\
 &= 2\gamma\rho_0\pi \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R ((R^2 - z^2 + (\eta - z)^2)^{1/2} - ((\eta - z)^2)^{1/2}) dz \\
 &= 2\gamma\rho_0\pi \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R ((R^2 - 2\eta z + \eta^2)^{1/2} - |\eta - z|) dz.
 \end{aligned}$$

Die beiden Terme rechts werden separat berechnet (beachte $0 < \eta < R$):

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^R (R^2 - 2\eta z + \eta^2)^{1/2} dz &= -\frac{1}{3\eta} (R^2 - 2\eta z + \eta^2)^{3/2} \Big|_{-R}^R \\
 &= -\frac{1}{3\eta} ((R^2 - 2\eta R + \eta^2)^{3/2} - (R^2 + 2\eta R + \eta^2)^{3/2}) \\
 &= -\frac{1}{3\eta} ((R - \eta)^3 - (R + \eta)^3) \\
 &= -\frac{1}{3\eta} (R^3 - 3R^2\eta + 3R\eta^2 - \eta^3 - R^3 - 3R^2\eta - 3R\eta^2 - \eta^3) \\
 &= \frac{1}{3\eta} (6R^2\eta + 2\eta^3) = 2R^2 + \frac{2}{3}\eta^2,
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^R |\eta - z| dz &= \int_{-R}^{\eta} (\eta - z) dz + \int_{\eta}^R (z - \eta) dz = -\frac{1}{2}(\eta - z)^2 \Big|_{-R}^{\eta} + \frac{1}{2}(z - \eta)^2 \Big|_{\eta}^R \\
 &= \frac{1}{2}((\eta + R)^2 + (R - \eta)^2) = \frac{1}{2}(\eta^2 + 2\eta R + R^2 + R^2 - 2R\eta + \eta^2) \\
 &= R^2 + \eta^2.
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung dieser Beziehungen ergibt:

$$F_3(0, 0, \eta) = 2\pi\gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} (2R^2 + \frac{2}{3}\eta^2 - R^2 - \eta^2) = -\frac{4}{3\pi}\gamma\rho_0\eta.$$