

## 5 Das $n$ -dimensionale Riemann-Integral

In diesem Kapitel wollen wir die Integrationstheorie für Funktionen  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  entwickeln. Die Integration hat viel mit der Messung des Inhaltes von Punktmenge zu tun. In der Tat kann der „Inhalt“ einer Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  als das Integral über deren „charakteristische Funktion“  $\chi_D$  auf einem  $n$ -dimensionalen Intervall  $I \supset D$  definiert werden:

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases} \quad |D| = \int_I \chi_D(x) dx.$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil der Kürze, erscheint aber weniger systematisch. Daher werden wir im Folgenden den klassischen Weg beschreiten und zunächst den „Inhalt“ (bzw. das „Maß“) einer Punktmenge des  $\mathbb{R}^n$  definieren und darauf aufbauend das Riemann-Integral über derart „quadrierbare“ (bzw. „meßbare“) Mengen entwickeln.

### 5.1 Inhaltsmessung von Mengen des $\mathbb{R}^n$

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, für eine möglichst große Klasse von Teilmengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  so etwas wie einen „Inhalt“ (oder „Maß“)  $|M|$  zu definieren. Dabei sollten die folgenden, aus der Anschauung abgeleiteten Eigenschaften vorliegen:

(I1) Positivität:  $|M| \geq 0$ .

(I2) Bewegungsinvarianz:  $|M| = |M'|$ , wenn  $M$  und  $M'$  isometrisch (kongruent) sind, (d. h. durch eine Abstandserhaltende Transformation wie Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen des  $\mathbb{R}^n$  ineinander überführt werden können).

(I3) Normierung: Der Einheitswürfel  $W_1 = [0, 1]^n$  hat den Inhalt  $|W_1| = 1$ .

(I4) Additivität:  $M \cap N = \emptyset \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$ .

**Bemerkung 5.1:** Die optimale Lösung dieses „Inhaltsproblems“ wäre es, wenn *jeder* Menge des  $M \subset \mathbb{R}^n$  ein Inhalt  $|M|$  mit den Eigenschaften (1)–(4) zugeordnet werden könnte. Es ist eines der grundlegenden Einsichten der sog. „Maßtheorie“, dass dies zwar im  $\mathbb{R}^1$  und  $\mathbb{R}^2$  (Banach 1923) möglich ist, nicht aber im  $\mathbb{R}^3$  (Hausdorff 1914). Wir müssen akzeptieren, dass es im  $\mathbb{R}^3$  Mengen gibt, denen kein Inhalt zugeordnet werden kann. Derartige „Monster“ spielen aber in praktischen Anwendungen der Analysis keine Rolle.

Zur Konstruktion der allgemeinen Inhaltsfunktion beginnen wir zunächst mit Mengen, für welche die Definition des Inhalts anschaulich klar ist, nämlich den (abgeschlossenen)  $n$ -dimensionalen „Intervallen“ (Rechtecke in  $\mathbb{R}^2$ , Quader in  $\mathbb{R}^3$ , u.s.w.). Für Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^n$  mit Komponenten  $a_i \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}^n$  gegeben als Produktmenge der eindimensionalen Intervalle  $I_i := [a_i, b_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$I := I_1 \times \dots \times I_n.$$

Dabei ist auch der Fall  $a_i = b_i$  für gewisse  $i$  zugelassen („degeneriertes“ Intervall) bis hin zum Extremfall eines nur einpunktigen Intervalls. Der Inhalt eines  $n$ -dimensionalen Intervalls ist dann auf natürliche Weise definiert als

$$|I| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

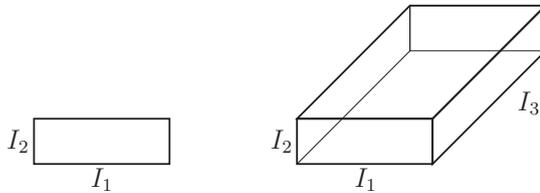


Abbildung 5.1: Intervalle in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ .

Für Intervalle hat die so definierte Inhaltsfunktion offenbar die geforderten Eigenschaften. „Zerlegungen“ solcher Intervalle erhält man durch Zerlegung der eindimensionalen Intervalle  $I_i = I_{i,1} \cup \dots \cup I_{i,m_i}$ , in Teilintervalle  $I_{i,j}$  und Vereinigung der Produktintervalle  $I_{i,j_i} \times I_{k,j_k}$ . Die endliche Vereinigung von Intervallen wird „Intervallsumme“ genannt. Die Menge aller Intervallsummen sei mit  $\mathcal{S}$  bezeichnet. Eine Intervallsumme kann auf verschiedene Weise als Vereinigung von Intervallen dargestellt werden. Ausgezeichnet sind dabei die „nichtüberlappenden“ Darstellungen  $S = \cup_{k=1, \dots, m} I_k$ , d. h. solche, bei denen die beteiligten Intervalle paarweise disjunkte Innere haben,  $I_k^\circ \cap I_j^\circ = \emptyset$ ,  $k \neq j$ . Zu jeder Intervallsumme gibt es offenbar eine solche Darstellung als Vereinigung von nichtüberlappenden Intervallen.

**Definition 5.1 (Intervallsummen):** Für Intervallsummen  $S \in \mathcal{S}$  mit einer nichtüberlappenden Darstellung  $S = \cup_{k=1, \dots, m} I_k$  ist der Inhalt erklärt durch

$$|S| := \sum_{k=1}^m |I_k|.$$

Man überlegt sich leicht, dass die Definition des Inhalts einer Intervallsumme unabhängig ist von der betrachteten Darstellung als nichtüberlappende Vereinigung von Intervallen. Für Intervallsummen folgt aus  $S \subset S'$ , dass  $|S| \leq |S'|$ . Ferner ist stets  $|S \cup S'| \leq |S| + |S'|$  und speziell  $|S \cup S'| = |S| + |S'|$ , wenn  $S$  und  $S'$  sich nichtüberlappen.

### 5.1.1 Jordan-Inhalt

**Definition 5.2 (Jordan-Inhalt und Nullmengen):**  $i)$  Für beschränkte (nicht leere) Mengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  sind der „innere Inhalt“  $|M|_i$  und der „äußere Inhalt“  $|M|_a$  definiert durch

$$|M|_i := \sup_{S \in \mathcal{S}, S \subset M} |S| \leq \inf_{S \in \mathcal{S}, M \subset S} |S| =: |M|_a.$$

Für die leere Menge wird gesetzt  $|\emptyset|_i = |\emptyset|_a := 0$ . Im Fall

$$|M|_i = |M|_a =: |M|$$

heißt die Menge „quadrierbar“ (oder „messbar“) im Jordanschen<sup>1</sup> Sinne mit dem sog. „Jordan-Inhalt“  $|M|$ .

ii) Mengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  mit (äußerem) Inhalt  $|M|_a = 0$  werden „Nullmengen“ (genauer „Jordan-Nullmengen“) genannt. Man sagt, dass eine Aussage „fast überall“ gilt, wenn sie in allen Punkten bis auf die aus einer Nullmenge gilt.

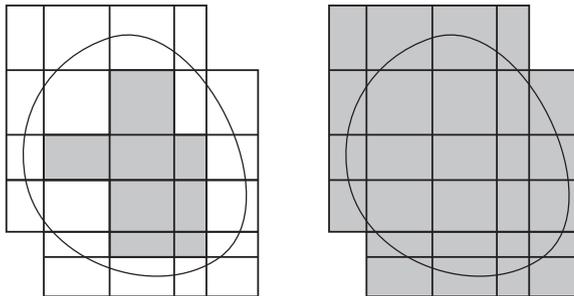


Abbildung 5.2: Einbeschriebene und Umbeschriebene Intervallsummen.

Diese Definition des Inhalts einer Menge ist verträglich mit der obigen, intuitiven Definition des Inhalts für Intervallsummen. Da auch degenerierte Intervalle zugelassen sind, enthält jede nichtleere Menge Intervalle, so dass der innere Inhalt stets definiert ist. Eine beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist gemäß dieser Definition genau dann quadrierbar, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Intervallsummen  $S_\varepsilon, S^\varepsilon \in \mathcal{S}$  gibt mit

$$S_\varepsilon \subset M \subset S^\varepsilon, \quad |S^\varepsilon| - |S_\varepsilon| < \varepsilon. \quad (5.1.1)$$

Im Folgenden schließt die Eigenschaft einer Menge „quadrierbar“ zu sein ihre Beschränktheit mit ein.

Zum Beweis einiger wichtiger Aussagen über den Jordan-Inhalt ist es nützlich spezielle Intervallsummen, sog. „Würfelsummen“, zu betrachten. Die Würfel im  $\mathbb{R}^n$  mit Eckpunkten  $2^{-k}p$ , für  $p \in \mathbb{Z}^n$ , und Kantenlänge  $2^{-k}$  und Inhalt  $2^{-nk}$  bilden die Menge  $\mathcal{W}_k$  der „Würfel  $k$ -ter Stufe“. In diesem Sinne sind die Würfel 0-ter Stufe gerade die Einheitswürfel mit Eckpunkten  $p \in \mathbb{Z}^n$ . Die Vereinigung solcher Würfel heißt „Würfelsumme“. Für eine beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  setzen wir

$$M_k := \cup\{W \in \mathcal{W}_k : W \subset M\}, \quad M^k := \cup\{W \in \mathcal{W}_k : W \cap M \neq \emptyset\}.$$

<sup>1</sup>Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922): Französischer Mathematiker; Prof. in Paris; Beiträge zur Algebra, Gruppentheorie, Analysis und Topologie.

Die Würfelsummen  $M_k$  und  $M^k$  sind als spezielle Intervallsummen quadrierbar. Aus dieser Definition ergeben sich direkt die folgenden Beziehungen:

$$M_k \subset M_{k+1} \subset M \subset M^{k+1} \subset M^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.1.2)$$

für eine quadrierbare Menge  $M$ , sowie  $|M_k| \leq |M| \leq |M^k|$ .

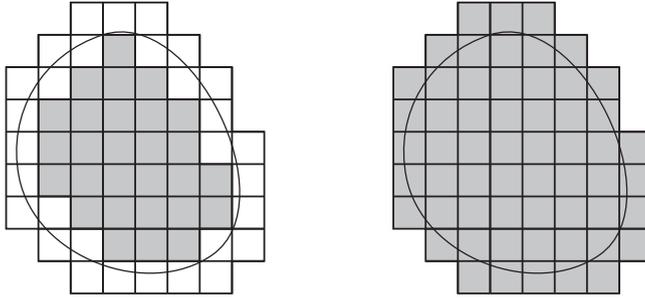


Abbildung 5.3: Einbeschriebene und Umbeschriebene Würfelsummen.

**Lemma 5.1:** Für beschränkte Mengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$|M|_i = \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k|, \quad |M|_a = \lim_{k \rightarrow \infty} |M^k|. \quad (5.1.3)$$

**Beweis:** Die Folge der Inhalte  $|M_k|$  ist monoton wachsend, und aus (5.1.2) folgt  $|M_k| \leq |M|_i$ . Ist umgekehrt  $S \subset M$  eine Intervallsumme mit  $|M|_i - |S| < \varepsilon$ , so kann man durch geringfügige Verkleinerung der Intervalle von  $S$  erreichen, dass nur Eckpunkte der Form  $2^{-k}p$ ,  $p \in \mathbb{Z}^n$ , auftreten, und die Ungleichung erhalten bleibt. Ist  $k_0$  die größte bei den neuen Eckpunkten im Exponenten auftretende Zahl, so ist die abgeänderte Intervallsumme in  $M_{k_0}$  enthalten. Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung für den inneren Inhalt. Die Argumentation für den äußeren Inhalt verläuft analog. Q.E.D.

Das folgende Lemma fasst einige offensichtliche Eigenschaften des inneren und äußeren Inhalts zusammen. Dabei werden wieder die Bezeichnungen  $M^\circ$  für das „Innere“,  $\bar{M}$  für den „Abschluss“, und  $\partial M$  für den „Rand“ einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  verwendet. Ferner bezeichnet  $M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, M) < \varepsilon\}$  eine (offene)  $\varepsilon$ -Umgebung von  $M$ .

**Lemma 5.2:** Für beschränkte Mengen  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  gilt:

- i)  $M \subset N \Rightarrow |M|_a \leq |N|_a, |M|_i \leq |N|_i$ .
- ii)  $|M|_a = |\bar{M}|_a, |M|_i = |M^\circ|_i$ .
- iii)  $|M \cup N|_a \leq |M|_a + |N|_a$ .
- iv)  $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset \Rightarrow |M \cup N|_i \geq |M|_i + |N|_i$ .
- v)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |M_\varepsilon|_a = |M|_a$ .

**Beweis:** i) Für Intervallsummen mit  $S \supset N$  ist auch  $S \supset M$  und folglich

$$|M|_a = \inf_{S \in \mathcal{S}, S \supset M} |S| \leq \inf_{S \in \mathcal{S}, S \supset N} |S| = |N|_a.$$

Für Intervallsummen mit  $S \subset M$  ist auch  $S \subset N$  und folglich

$$|M|_i = \sup_{S \in \mathcal{S}, S \subset M} |S| \leq \sup_{S \in \mathcal{S}, S \subset N} |S| = |N|_i.$$

ii) Wegen der Abgeschlossenheit der Intervallsummen gilt  $M \subset S \Leftrightarrow \overline{M} \subset S$  und folglich  $|M|_a = |\overline{M}|_a$ . Sei weiter  $|M|_i > 0$  (andernfalls ist nichts zu zeigen). Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Für jede Intervallsumme  $S \supset M$  mit  $|S| - |M|_i < \varepsilon$  erhält man durch leichte Verkleinerung eine neue Intervallsumme  $S' \supset M^o$  mit  $|S| - |S'| < \varepsilon$ . Damit folgt  $|S'| - |M|_i \leq |S'| - |S| + |S| - |M|_i < 2\varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, ergibt sich  $|M^o|_i = |M|_i$ .

iii) Es ist  $(M \cup N)^k = M^k \cup N^k$  und weiter  $|(M \cup N)^k| \leq |M^k| + |N^k|$ . Für  $k \rightarrow \infty$  folgt die Richtigkeit der Behauptung.

iv) Es ist  $(M^o)_k \cap (N^o)_k = \emptyset$  und  $(M^o)_k \cup (N^o)_k \subset (M \cup N)_k$ . Also ist  $|(M^o)_k| + |(N^o)_k| \leq |(M \cup N)_k|$ . Für  $k \rightarrow \infty$  folgt die Richtigkeit der Behauptung.

v) Wegen  $[a, b]_\varepsilon \subset [a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon]$  gilt die Behauptung für Intervalle und damit auch für Intervallsummen. Ist  $|M|_a < \alpha$ , so gibt es eine Intervallsumme  $T \supset M$  mit  $|T| < \alpha$ . Also ist  $|T_\varepsilon|_a < \alpha$  und damit für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  auch  $|M_\varepsilon|_a < \alpha$ . Dies impliziert die Richtigkeit der Behauptung. Q.E.D.

**Beispiel 5.1:** Dass es auch nicht quadrierbare Mengen gibt, zeigt das Beispiel

$$M := \{x \in Q := [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 : x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2\}.$$

Wegen  $|M|_a = |\overline{M}|_a = |[0, 1]^2| = 1$  und  $|M|_i = |M^o|_i = |\emptyset|_i = 0$  ist diese Menge nicht quadrierbar.

**Lemma 5.3 (Nullmengen):** Für (Jordan)-Nullmengen gilt:

- i) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist ebenfalls Nullmenge.
- ii) Jede endliche Vereinigung von Nullmengen ist wieder Nullmenge; insbesondere sind endliche Mengen  $M = \{x_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$  Nullmengen.
- iii) Jede in einem echten Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  enthaltene beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist Nullmenge.
- iv) Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so ist ihr Graph

$$G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M\}$$

eine  $(n + 1)$ -dimensionale Nullmenge.

**Beweis:** i) Für  $N \subset M$  folgt nach Lemma 5.2(i)  $|N|_a \leq |M|_a$ , d. h.: Mit  $M$  ist auch  $N$  Nullmenge.

ii) Seien  $M_k, k = 1, \dots, m$ , Nullmengen. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Intervallsummen  $S_k \in \mathcal{S}$  mit  $M_k \subset S_k$  und  $|S_k| < \varepsilon/m$ . Die Vereinigung  $S := \cup_{k=1, \dots, m} S_k$  ist dann ebenfalls Intervallsumme und enthält  $M$ . Ihr Inhalt ist  $|S| \leq \sum_{k=1, \dots, m} |S_k| < \varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt  $|M|_a = 0$ . Da jede einpunktige Menge  $M = \{x\}$  den äußeren Inhalt Null hat, sind endliche Mengen also Nullmengen.

iii) O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Menge  $M$  in dem  $(n-1)$ -dimensionalen Unterraum  $V^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$  enthalten ist. Ferner sei  $M$  in einem  $(n-1)$ -dimensionalen Intervall  $I^{n-1} \subset V^{n-1}$  enthalten. Dann enthält die Intervallsumme  $S := I^{n-1} \times [-k, k]$  die Menge  $M$  und hat den Inhalt  $|S| = 2k|I^{n-1}|$ . Für  $k \rightarrow 0$  folgt also  $|M|_a = 0$ .

iv) Der Graph  $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist beschränkt und folglich in einem Intervall  $I^{n+1} = [a, b]^{n+1}$  enthalten. Sei  $S^n$  eine  $M$  überdeckende Intervallsumme in  $\mathbb{R}^n$ . Wir denken uns  $S^n$  zerlegt in endlich viele Würfel  $I_i, i = 1, \dots, m$ , mit maximaler Kantenlänge  $\delta$ . Auf der kompakten Menge  $M$  ist  $f$  gleichmäßig stetig. Für beliebig gegebenes  $\varepsilon > 0$  gilt daher, wenn  $\delta$  klein genug gewählt ist:

$$\beta_i - \alpha_i \leq \varepsilon, \quad \beta_i := \sup_{x \in I_i \cap M} f(x), \quad \alpha_i := \inf_{x \in I_i \cap M} f(x).$$

Dann enthält die Intervallsumme  $A := \cup_{i=1, \dots, m} I_i \times [\alpha_i, \beta_i]$  den Graphen  $G(f)$ , und es gilt:

$$|G(f)|_a \leq \sum_{i=1}^m |I_i \times [\alpha_i, \beta_i]| = \sum_{i=1}^m |I_i|(\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^m |I_i| = \varepsilon |S^n|.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt  $|G(f)|_a = 0$ .

Q.E.D.

**Bemerkung 5.2:** Wir haben gesehen, dass endliche Mengen im  $\mathbb{R}^n$  Jordan-Nullmengen sind. Es stellt sich nun die Frage, ob auch allgemeiner abzählbare Mengen Nullmengen sind. Dies kann der Fall sein; z. B. zeigt man leicht, dass für jede konvergente Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^n$  die zugehörige Menge  $M = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$  Jordan-Nullmenge ist. I. Allg. ist dies aber nicht der Fall. Das liegt daran, dass bei der Definition des äußeren Jordan-Inhalts nur *endliche* Intervallsummen zugelassen sind. Dies bedingt, dass z. B. die abzählbare Menge  $M = \mathbb{Q}^n \cap [0, R]^n \subset \mathbb{R}^n$  den äußeren Inhalt  $|M|_a = R^n$  hat. Würde man bei der Inhaltsdefinition auch (abzählbar) unendliche Vereinigungen von Intervallen zulassen, so ergäbe sich, dass jede abzählbare Menge  $M = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  äußeren Inhalt Null hat: Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ist jeder Punkt  $x_k$  in einem Würfel  $I_k$  mit Inhalt  $|I_k| = \varepsilon 2^{-nk}$  enthalten, woraus folgt:

$$|M|_a \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-nk} = \frac{\varepsilon}{1 - 2^{-n}},$$

d. h.:  $|M|_a = 0$ . Wir haben damit eine Schwäche des Jordan-Inhalts identifiziert. Diese wird durch den allgemeineren „Lebesgue-Inhalt“, den wir in Band 3 dieser Buchserie im Zusammenhang mit dem „Lebesgue-Integral“ diskutieren werden, überwunden.

**Satz 5.1:** Eine beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann quadrierbar, wenn ihr Rand  $\partial M$  Nullmenge ist.

**Beweis:** Wir zeigen, dass  $|M|_i + |\partial M|_a = |M|_a$ , woraus sich unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung ergibt. Ein Würfel  $W \subset M^\circ$  kann keinen Punkt von  $\partial M$  enthalten. Jede Würfelsumme  $M^k$  kann zerlegt werden in  $(M^\circ)_k$  und  $(\partial M)^k$ , so dass  $M^k = (M^\circ)_k \cup (\partial M)^k$  und  $(M^\circ)_k \cap (\partial M)^k = \emptyset$ . Also ist  $|(M^\circ)_k| + |(\partial M)^k| = |M^k|$ . Für  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung. Q.E.D.

**Lemma 5.4:** Für den Jordan-Inhalt gilt:

i) Ist  $M$  quadrierbar, so gilt  $|M| = |M^\circ| = |\overline{M}|$ . Insbesondere ist auch jedes beschränkte offene oder halboffene Intervall quadrierbar.

ii) Für quadrierbare Mengen  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  sind auch Vereinigung  $M \cup N$ , Schnitt  $M \cap N$  und Differenz  $M \setminus N$  quadrierbar.

**Beweis:** i) Satz 5.1 impliziert, dass wegen  $\partial M = \partial M^\circ = \partial \overline{M}$  mit  $M$  auch  $M^\circ$  bzw.  $\overline{M}$  quadrierbar ist und umgekehrt. Dies impliziert dann auch  $|M^\circ| = |M \setminus \partial M| = |M|$  sowie  $|\overline{M}| = |M \cup \partial M| = |M^\circ \cup \partial M| = |M^\circ| = |M|$ .

ii) Seien  $M, N$  quadrierbar und folglich  $|\partial M| = |\partial N| = 0$ . Ist  $A$  eine der Mengen  $M \cup N$ ,  $M \cap N$  oder  $M \setminus N$ , so ist  $\partial A \subset \partial M \cup \partial N$  und folglich  $|\partial A| = 0$ . Also ist  $A$  quadrierbar. Q.E.D.

Weitere Eigenschaften des Jordan-Inhalts sind in folgendem Korollar zusammengefasst.

**Korollar 5.1:** Für quadrierbare Mengen  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  gilt:

- i)  $M \subset N \Rightarrow |M| \leq |N|$  (Monotonie).
- ii)  $|M \cup N| \leq |M| + |N|$  (Subadditivität).
- iii)  $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$  (Additivität).
- iv)  $M \subset N \Rightarrow |N \setminus M| = |N| - |M|$ .

**Beweis:** i) Die Monotonie des Inhalts ergibt sich unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft des äußeren und des inneren Inhalts (Lemma 5.2a).

ii) Die Subadditivität des Inhalts ergibt sich aus der Subadditivität des äußeren Inhalts (Lemma 5.2c).

iii) Die Additivität des Inhalts ergibt sich aus den Ungleichungen in Lemma 5.2c/d für den äußeren und inneren Inhalt.

iv) Anwendung der Additivität auf die disjunkte Darstellung  $N = M \cup (N \setminus M)$  ergibt die Richtigkeit der Behauptung.

Q.E.D.

Als Ergebnis der bisherigen Analyse haben wir gesehen, dass der Jordan-Inhalt drei der gewünschten Eigenschaften besitzt: Positivität, Normierung und Additivität. Die vierte, die Bewegungsinvarianz, werden wir im nächsten Abschnitt ableiten.

### 5.1.2 Abbildungen von Mengen

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Frage, in wie weit Abbildungen  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Eigenschaften von Mengen wie „offen“ und „quadrierbar“ erhalten. Die Stetigkeit allein reicht hier als Kriterium nicht aus, da durch stetige Abbildungen offene Mengen in nicht offene und quadrierbare Mengen in nicht quadrierbare abgebildet werden können. Man kann sogar zeigen, dass jede (nicht leere) beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  stetiges Bild einer Nullmenge ist. Die entscheidende Zusatzbedingung ist die Lipschitz-Stetigkeit der Abbildung.

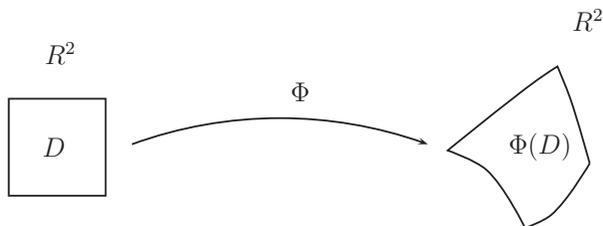


Abbildung 5.4: Abbildung eines Quadrats in  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemma 5.5:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  (nicht leer) beschränkt und  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Dann gilt für die Bildmenge  $\Phi(D)$ :

$$|\Phi(D)|_a \leq \alpha |D|_a, \quad \alpha := (L\sqrt{n})^n. \quad (5.1.4)$$

**Beweis:** i) Für einen Würfel  $W(x)$  mit Kantenlänge  $2\mu > 0$  und Mittelpunkt  $x \in D$  gilt

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2 \leq L\mu\sqrt{n}, \quad y \in W(x) \cap D.$$

Also ist  $\Phi(D \cap W(x))$  in einem achsenparallelen Würfel  $W'$  mit Mittelpunkt  $\Phi(x)$ , Kantenlänge  $2\mu L\sqrt{n}$  und Inhalt  $|W'| = \alpha|W(x)|$  enthalten.

ii) Ist nun  $S = \cup W_i \supset D$  irgendeine Würfelsumme mit Inhalt  $|S|$ . Dann ist  $\Phi(D)$  in der Vereinigung von Würfeln  $W'_j$  mit einem Inhalt

$$|W'_j| \leq \alpha|W_j|$$

enthalten. Also ist

$$|\Phi(D)|_a \leq |\cup W'_j| \leq \sum_j |W'_j| \leq \alpha \sum_j |W_j| = \alpha|S|.$$

Dies impliziert

$$|\Phi(D)|_a \leq \alpha \inf_{S \in \mathcal{S}, S \subset D} |S| = \alpha |D|_a,$$

wie behauptet.

Q.E.D.

**Satz 5.2:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  (nicht leer) offen und quadrierbar. Die Abbildung  $\Phi : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei in  $\overline{D}$  Lipschitz-stetig und in  $D$  regulär, d. h. stetig differenzierbar mit  $\det \Phi'(x) \neq 0$ .

i) Die Bildmenge  $\Phi(D)$  ist offen und quadrierbar, und es ist

$$\overline{\Phi(D)} = \Phi(\overline{D}), \quad \partial\Phi(D) \subset \Phi(\partial D). \quad (5.1.5)$$

ii) Ist  $\Phi$  in  $D$  injektiv, so gilt  $\partial\Phi(D) = \Phi(\partial D)$ . Ferner ist für jede quadrierbare Teilmenge  $A \subset \overline{D}$  auch die Bildmenge  $\Phi(A)$  quadrierbar.

**Beweis:** ia) Nach Korollar 3.4 ist das Bild  $\Phi(D)$  der offenen Menge  $D$  unter der regulären Abbildung  $\Phi$  wieder offen und wegen der Stetigkeit von  $\Phi$  ist auch das Bild  $\Phi(\overline{D})$  der beschränkten, abgeschlossenen Menge  $\overline{D}$  abgeschlossen. Dies impliziert  $\overline{\Phi(D)} \subset \Phi(\overline{D})$ , da  $\Phi(\overline{D})$  nach Lemma 1.4 die kleinste abgeschlossene Obermenge von  $\Phi(D)$  ist. Hieraus folgt zunächst

$$\partial\Phi(D) = \overline{\Phi(D)} \setminus \Phi(D) \subset \Phi(\overline{D}) \setminus \Phi(D) \subset \Phi(\partial D).$$

Da  $D$  quadrierbar ist, muss  $|\partial D|_a = 0$  sein. Nach Lemma 5.5 ist dann auch  $|\Phi(\partial D)|_a = 0$  und damit  $|\partial\Phi(D)|_a = 0$ . Die Bildmenge  $\Phi(D)$  ist also quadrierbar.

ib) Zu  $x \in \overline{D}$  gibt es eine Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ . Für die Bilder ist dann  $\Phi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x^{(k)})$ . Dies und  $\overline{\Phi(D)} \subset \Phi(\overline{D})$  impliziert schließlich  $\Phi(\overline{D}) = \overline{\Phi(D)}$ .

ii) Sei  $\Phi$  zusätzlich injektiv auf  $D$ . Wir wählen  $x \in \partial D$  und eine Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$  und  $\Phi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x^{(k)})$ . Zu zeigen ist

$$\Phi(x) \in \partial\Phi(D),$$

denn zusammen mit  $\partial\Phi(D) \subset \Phi(\partial D)$  ergäbe dies  $\partial\Phi(D) = \Phi(\partial D)$ . Wäre  $\Phi(x) \in \Phi(D)$ , d. h. gäbe es ein  $x' \in D$  mit  $\Phi(x) = \Phi(x')$ , so gäbe es wegen der Offenheit von  $\Phi(D)$  eine Umgebung  $V(\Phi(x)) \subset \Phi(D)$  und eine Umgebung  $U(x') \subset D$  mit  $\Phi(U(x')) = V(\Phi(x))$ . Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \in \partial D$  ist dann aber  $x_k \notin U(x')$  für hinreichend großes  $k$  und folglich  $\Phi(x^{(k)}) \notin V(\Phi(x))$  im Widerspruch zu  $\Phi(x') = \Phi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x^{(k)})$ .

ii) Sei  $A \subset D$  quadrierbar. Dann ist auch das Innere  $A^\circ$  quadrierbar und mit dem Argument von (ia) folgt, dass  $\Phi(A^\circ)$  quadrierbar ist. Wegen  $A \setminus A^\circ \subset \partial A$  ist  $A \setminus A^\circ$  eine Nullmenge. Dann ist nach Lemma 5.5 auch  $\Phi(A \setminus A^\circ)$  Nullmenge. Folglich ist nach Lemma 5.4(ii)  $\Phi(A) = \Phi(A^\circ) \cup \Phi(A \setminus A^\circ)$  quadrierbar. Q.E.D.

Das folgende Lemma zeigt, dass Satz 5.2 auch anwendbar ist, wenn die Abbildung  $\Phi$  nur auf  $D$  definiert und dort Lipschitz-stetig ist.

**Lemma 5.6:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  nicht leer und  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lipschitz-stetige Abbildung. Dann besitzt  $\Phi$  eine Lipschitz-stetige Fortsetzung  $\bar{\Phi} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\bar{\Phi}|_D = \Phi$ .

**Beweis:** Sei  $x \in \bar{D}$  und  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $D$  mit  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ . Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $\Phi$  auf  $D$  gilt

$$\|\Phi(x^{(k)}) - \Phi(x^{(l)})\| \leq L \|x^{(k)} - x^{(l)}\|,$$

d. h.: Die Bildfolge  $(\Phi(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge. Ihr Limes sei  $y$ . Im Falle  $x \notin D$  setzen wir  $\bar{\Phi}(x) := y$ . Dadurch wird eine Funktion  $\bar{\Phi} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert. Diese Definition ist eindeutig, da für jede zweite Folge  $(\xi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi^{(k)}$  die zugehörige Bildfolge wegen  $\|\Phi(x^{(k)}) - \Phi(\xi^{(k)})\| \leq L \|x^{(k)} - \xi^{(k)}\|$  ebenfalls gegen  $y$  konvergiert. Ferner ist für  $x \in D$  automatisch  $\bar{\Phi}(x) = \Phi(x)$ . Seien  $x, \xi \in \bar{D}$  und  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, (\xi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  approximierende Folgen in  $D$ . Dann gilt

$$\|\bar{\Phi}(x) - \bar{\Phi}(\xi)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{\Phi}(x^{(k)}) - \bar{\Phi}(\xi^{(k)})\| \leq L \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - \xi^{(k)}\| = L \|x - \xi\|.$$

Die Fortsetzung  $\bar{\Phi}$  ist also Lipschitz-stetig auf  $\bar{D}$  mit derselben  $L$ -Konstante wie  $\Phi$ .  
Q.E.D.

**Satz 5.3:** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine quadrierbare Menge und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine  $(n \times n)$ -Matrix und  $b \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor. Dann ist auch die Bildmenge  $\Phi(D) \subset \mathbb{R}^n$  der durch  $\Phi(x) := Ax + b$  definierten „affin-linearen“ Abbildung quadrierbar, und es gilt

$$|\Phi(D)| = |\det A| |D|. \quad (5.1.6)$$

**Beweis:** i) Wir betrachten zunächst die Translation  $\Phi(x) = x + b$ . Diese Abbildung überführt offenbar Intervalle bzw. Intervallsummen wieder in Intervalle bzw. Intervallsummen mit  $|\Phi(S)| = |S|$ . Ferner ist  $A \subset B \subset C$  äquivalent zu  $\Phi(A) \subset \Phi(B) \subset \Phi(C)$ . Also ist für jede quadrierbare Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} |\Phi(D)|_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi(D)_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |D_k| = |D|_i \\ &= |D|_a = \lim_{k \rightarrow \infty} |D^k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi(D)^k| = |\Phi(D)|_a. \end{aligned}$$

ii) Sei  $\det(A) \neq 0$ , d. h.: Die durch  $A$  gegebene affin-lineare Abbildung ist bijektiv. Nach Satz 5.2 ist dann das Bild  $\Phi(W)$  eines jeden Würfels  $W$  quadrierbar. Es sei  $W_1$  der Einheitswürfel (mit den Eckpunkten  $e^{(i)}, i = 1, \dots, n$ ) und Inhalt  $|W_1| = 1$  und  $\alpha := |\Phi(W_1)|$ . Für jeden skalierten und verschobenen Würfel  $W = rW_1 + b$  ist dann ebenfalls

$$|\Phi(W)| = |\Phi(rW_1 + b)| = |\Phi(rW_1)| = r^n |\Phi(W_1)| = \alpha r^n |W_1| = \alpha |W|.$$

Dieselbe Aussage gilt dann auch für beliebige Würfelsummen. Insbesondere gilt für eine beliebige quadrierbare Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ :

$$|\Phi(M^k)| = \alpha |M^k|, \quad |\Phi(M_k)| = \alpha |M_k|.$$

Aus  $\Phi(M_k) \subset \Phi(M) \subset \Phi(M^k)$  folgt dann

$$\alpha|M_k| = |\Phi(M_k)| \leq |\Phi(M)|_i \leq |\Phi(M)|_a \leq |\Phi(M^k)| = \alpha|M^k|.$$

Durch Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$\alpha|M| \leq |\Phi(M)|_i \leq |\Phi(M)|_a \leq \alpha|M|.$$

Folglich ist  $\Phi(M)$  quadrierbar mit Inhalt  $|\Phi(M)| = \alpha|M|$ . Die Konstante  $\alpha$  ist dieselbe für alle quadrierbare Mengen  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

iii) Es bleibt  $\alpha = |\det A|$  zu zeigen. Dazu verwenden wir, dass sich jede reguläre Matrix als Produkt in der Form  $A = Q_1 \Lambda Q_2$  mit zwei orthonormalen Matrizen  $Q_1, Q_2$  und einer Diagonalmatrix  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_i > 0$  darstellen lässt (s. Lemma 1.15). Dann ist  $\det A = \det Q_1 \cdot \det \Lambda \cdot \det Q_2 = \det \Lambda = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ . Die Einheitskugel  $K := K_1(0)$  in  $\mathbb{R}^n$  ist quadrierbar (Übungsaufgabe). Durch Anwendung der durch die orthonormalen Matrizen  $Q_1, Q_2$  definierten Abbildungen wird jede Kugel auf sich selbst abgebildet; in diesem Fall ist also  $\alpha = 1$ . Anwendung der Matrix  $\Lambda$  auf den Würfel  $W_1$  bedeutet eine Skalierung in die Koordinatenrichtungen; in diesem Fall ist also  $\alpha = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ . Wir erhalten somit

$$|\Phi(K_1(0))| = |Q_1 D Q_2(K)| = |D Q_2(K)| = |\lambda_1 \dots \lambda_n| |Q_2(K)| = |\lambda_1 \dots \lambda_n| |K|.$$

Da  $|\det A| = |\det(Q_1 D Q_2)| = |\det D| = |\lambda_1 \dots \lambda_n|$ , folgt auch im allgemeinen Fall  $\alpha = |\det A|$ .

iv) Im Falle  $\det(A) = 0$  wird der  $\mathbb{R}^n$  durch  $A$  in eine Hyperebene abgebildet. Die beschränkte Menge  $\Phi(D)$  ist dann als Teilmenge einer Hyperebene eine Nullmenge, so dass die behauptete Beziehung auch in diesem Fall gilt. Q.E.D.

**Korollar 5.2:** *Der Jordan-Inhalt ist bewegungsinvariant, d. h.: Jede affin-lineare Abbildung der Form  $\Phi(x) = Qx + b$  mit einer orthonormalen Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und einem Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  führt quadrierbare Mengen in quadrierbare Mengen über und lässt den Inhalt unverändert.*

**Beweis:** Eine orthonormale Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  erfüllt  $Q^T = Q^{-1}$ . Dann ist wegen

$$|\det Q| = |\det Q^T| = |\det Q^{-1}| = |\det Q|^{-1} > 0$$

auch  $|\det Q| = 1$ . Für jede quadrierbare Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ergibt demnach Satz 5.3  $|\Phi(M)| = |M|$ . Q.E.D.

## 5.2 Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Im Folgenden sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige (beschränkte, nichtleere) quadrierbare Menge und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Wir betrachten endliche Zerlegungen  $Z = \{B_i, i = 1, \dots, m\}$  der Menge  $D$  in quadrierbare Teilmengen  $B_i \subset M$ , welche sich nichtüberlappen, d. h.:

$$D = \cup_{i=1}^m B_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Die Durchschnitte  $B_i \cap B_j$  sind dann Nullmengen. Die Menge aller solcher Zerlegungen von  $D$  sei mit  $\mathcal{Z}(D)$  bezeichnet. Für eine Zerlegung  $Z = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$  ist analog zum eindimensionalen Fall die „Feinheit“  $|Z|$  definiert durch

$$|Z| := \max_{B_i \in Z} \text{diam}(B_i),$$

mit dem „Durchmesser“  $\text{diam}(B_i) := \sup_{x, x' \in B_i} \|x - x'\|_2$ . Eine zweite Zerlegung  $Z' = \{B'_j\}$  ist eine „Verfeinerung“ von  $Z = \{B_i\}$ , wenn alle  $B'_j$  Teilmengen gewisser der  $B_i$  sind; in Symbolen wird dies durch  $Z \subset Z'$  ausgedrückt. Für zwei Zerlegungen  $Z = \{B_i\}$ ,  $Z' = \{B'_j\} \in \mathcal{Z}(D)$  bezeichnet

$$Z \cup Z' := \{B_i \cap B'_j\}$$

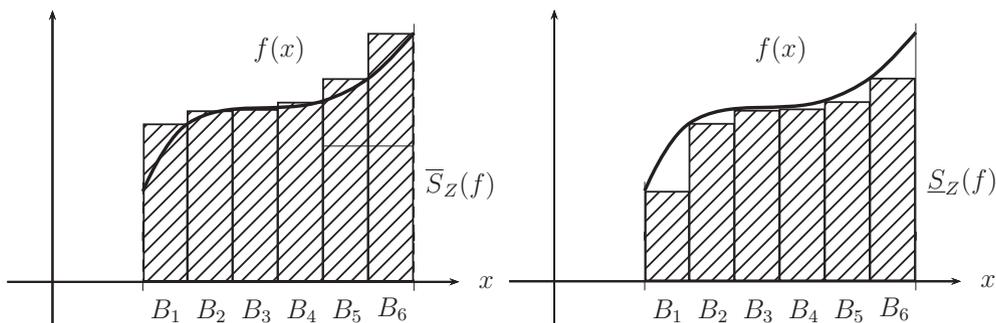
die durch Überlagerung entstehende gemeinsame Verfeinerung.

Sei nun  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion und  $Z = \{B_i, i = 1, \dots, m\}$  eine Zerlegung von  $D$ . Wir definieren eine zugehörige „Untersumme“ und „Obersumme“

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^m \inf_{x \in B_i} f(x) |B_i|, \quad \overline{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^m \sup_{x \in B_i} f(x) |B_i|,$$

sowie mit gewissen Punkten  $\xi_i \in B_i, i = 1, \dots, m$ , die „Riemannschen Summe“

$$RS_Z(f) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |B_i|.$$

Abbildung 5.5: Ober- (links) und Untersumme (rechts) einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Für Zerlegungen  $Z, Z' \in \mathcal{Z}(D)$  mit  $Z \subset Z'$  gilt dann:

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z'}(f), \quad \overline{S}_{Z'}(f) \leq \overline{S}_Z(f). \quad (5.2.7)$$

Dies impliziert dann für beliebige Zerlegungen  $Z, Z' \in \mathcal{Z}(D)$  die Beziehung

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z \cup Z'}(f) \leq \overline{S}_{Z \cup Z'}(f) \leq \overline{S}_{Z'}(f). \quad (5.2.8)$$

Ferner gilt wegen  $\sup(f) = -\inf(-f)$  für jedes  $Z \in \mathcal{Z}(D)$ :

$$\overline{S}_Z(f) = -\underline{S}_Z(-f). \quad (5.2.9)$$

Mit den obigen Bezeichnungen werden nun wieder das „Unterintegral“ und das „Oberintegral“ definiert durch

$$\underline{J}(f) = \int_D f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(D)} \underline{S}_Z, \quad \overline{J}(f) = \overline{\int}_D f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(D)} \overline{S}_Z.$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehungen:

$$\underline{J}(f) \leq \overline{J}(f), \quad \overline{J}(f) = -\underline{J}(-f). \quad (5.2.10)$$

und

$$|\overline{J}(f)| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| |D|. \quad (5.2.11)$$

**Definition 5.3:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar. Sind für eine beschränkte Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ihr Ober- und Unterintegral gleich, so heißt der gemeinsame Wert das „Riemann-Integral“ (kurz „R-Integral“) von  $f$  über  $D$ ,

$$\int_D f(x) dx := J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f), \quad (5.2.12)$$

und die Funktion  $f$  wird „Riemann-integrierbar“ (kurz „R-integrierbar“) genannt. Die Menge der über  $D$  R-integrierbaren Funktionen wird mit  $R(D)$  bezeichnet.

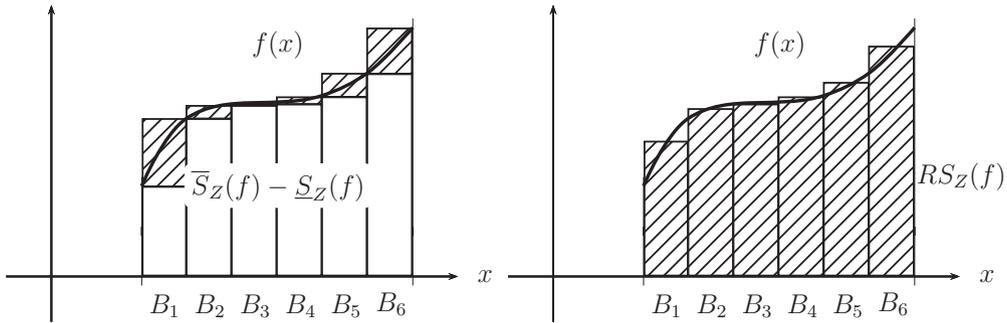


Abbildung 5.6: Differenz von Ober- und Untersumme (links) und die Riemannsche Summe (rechts) einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Der Ausbau der Theorie des mehrdimensionalen R-Integrals erfolgt weitgehend analog zum eindimensionalen Fall.

**Satz 5.4 (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium):** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Es ist  $f \in R(D)$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z_\varepsilon \in \mathcal{Z}(D)$  gibt mit

$$\overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) < \varepsilon. \quad (5.2.13)$$

**Beweis:** Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es definitionsgemäß eine Zerlegung  $Z_\varepsilon \in \mathcal{Z}(D)$  mit

$$\underline{J}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \overline{J}(f) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Im Fall  $f \in R(D)$  gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) &= \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - J(f) + J(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) \\ &= \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \overline{J}(f) + \underline{J}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt (5.2.13) für eine Zerlegung  $Z_\varepsilon \in \mathcal{Z}(D)$ , so folgt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &= \overline{J}(f) - \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) + \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) \\ &\quad + \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, muss

$$\overline{J}(f) - \underline{J}(f) = 0$$

sein, d. h.:  $f \in R(D)$ .

Q.E.D.

**Satz 5.5 (Riemannsche Summen):** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann konvergiert für jede Folge von Zerlegungen  $Z_k \in \mathcal{Z}(D)$  mit  $|Z_k| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ):

$$\overline{S}_{Z_k}(f) \rightarrow \overline{J}(f), \quad \underline{S}_{Z_k}(f) \rightarrow \underline{J}(f) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (5.2.14)$$

Es ist  $f \in R(D)$  genau dann, wenn für jede Folge von Zerlegungen  $Z_k \in \mathcal{Z}(D)$  mit  $|Z_k| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) alle zugehörigen Riemannschen Summen gegen denselben Limes konvergieren. Dieser ist dann gerade das R-Integral von  $f$  über  $D$ :

$$RS_{Z_k}(f) \rightarrow J(f) = \int_D f(x) dx \quad (k \rightarrow \infty). \quad (5.2.15)$$

**Beweis:** i) Wir zeigen zunächst die Konvergenz aller Folgen von Unter- und Obersummen zu Zerlegungen mit  $|Z| \rightarrow 0$  gegen die entsprechenden Unter- und Oberintegrale:

$$\overline{S}_Z(f) \rightarrow \overline{J}(f), \quad \underline{S}_Z(f) \rightarrow \underline{J}(f) \quad (|Z| \rightarrow 0).$$

Zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  wählen wir eine Zerlegung  $Z_\varepsilon = \{C_j\} \in \mathcal{Z}(D)$  mit

$$\overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \overline{J}(f) < \varepsilon.$$

Die Randmenge  $R := \cup_i \partial C_i$  ist Nullmenge. Für  $\delta > 0$  sei  $R_\delta$  die oben definierte  $\delta$ -Umgebung von  $R$ . Nach Lemma 5.2(v) kann  $\delta > 0$  so gewählt werden, dass  $|R_\delta|_a < \varepsilon$ .

ia) Wir benötigen das folgende Hilfsresultat: Hat die Menge  $A \subset D$  den Durchmesser  $\text{diam } A < \delta$ , so ist  $A \subset R_\delta$  oder  $A \subset C_j$  für einen Index  $j$ . Ist  $A \not\subset R_\delta$ , so gibt es einen Punkt  $x \in A \setminus R_\delta$ ; dieser liege in einer der Mengen  $C_j$ . Wegen  $\text{diam}(A) < \delta$  ist  $A \subset \overline{K_\delta(x)}$ , und wegen  $\text{dist}(x, \partial C_j) \geq \delta$  ist  $\overline{K_\delta(x)} \subset C_j$ , denn andernfalls würde  $\overline{K_\delta(x)}$  Randpunkte von  $C_j$  enthalten (Man mache sich dies klar.)

ib) Sei nun  $Z_\delta = \{B_i\} \subset \mathcal{Z}(D)$  eine Zerlegung aus der Folge  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  der Feinheit  $|Z_\delta| < \delta$ . Wir betrachten die aus den Schnitten der Zerlegungsmengen von  $Z_\varepsilon$  und  $Z_\delta$  bestehende Zerlegung  $Z = \{C_j \cap B_i\}$ . Für die Obersummen zu diesen Zerlegungen gilt:

$$\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \overline{J}(f) = \underbrace{\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \overline{S}_Z(f)}_{=: D_1} + \underbrace{\overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z_\varepsilon}(f)}_{=: D_2} + \underbrace{\overline{S}_{Z_\varepsilon}(f) - \overline{J}(f)}_{=: D_3}.$$

Die drei Differenzen  $D_k$  werden gesondert abgeschätzt. Da  $Z$  Verfeinerung von  $Z_\varepsilon$  ist, gilt  $D_2 \leq 0$ . Weiter ist  $D_3 < \varepsilon$  nach Voraussetzung. Wegen  $|B_i| = \sum_j |C_j \cap B_i|$  gilt mit den Bezeichnungen  $M_i := \sup_{B_i} f$  und  $M_{ij} := \sup_{B_i \cap C_j} f$ :

$$D_1 = \sum_i M_i |B_i| - \sum_{i,j} M_{ij} |B_i \cap C_j| = \sum_{i,j} (M_i - M_{ij}) |B_i \cap C_j|.$$

Für ein  $B_i \in Z_\delta$  können die folgenden drei Fälle auftreten:

1. Es ist  $B_i \cap C_j = \emptyset$  und somit  $|B_i \cap C_j| = 0$ .
2. Für ein  $j$  ist  $B_i \subset C_j$  und somit  $M_i = M_{ij}$ .
3. Es ist  $B_i \subset R_\delta$ .

Damit sind nach (ia) alle Möglichkeiten erschöpft. Also ist mit  $M := \sup_D f$ :

$$D_1 = \sum_{i,j; B_i \subset R_\delta} (M_i - M_{ij}) |B_i \cap C_j| \leq 2M |R_\delta| < 2M\varepsilon.$$

Damit erhalten wir für  $|Z_\delta| < \delta$ :

$$\bar{S}_{Z_\delta}(f) - \bar{J}(f) < 2M\varepsilon + \varepsilon = (2M + 1)\varepsilon.$$

Es konvergiert also  $\bar{S}_Z(f) \rightarrow \bar{J}(f)$  für  $|Z| \rightarrow 0$ . Analog erschließen wir auch  $\underline{S}_Z(f) \rightarrow \underline{J}(f)$  für  $|Z| \rightarrow 0$ .

ii) Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich nun leicht die Richtigkeit der zweiten Behauptung. Ist  $f \in R(D)$ , so gilt definitionsgemäß

$$\underline{J}(f) = \int_D f(x) dx = \bar{J}(f).$$

Also konvergieren wegen  $\underline{S}_Z(f) \leq RS_Z(f) \leq \bar{S}_Z(f)$  alle Folgen von Unter- und Obersummen sowie von Riemanschen Summen für  $|Z| \rightarrow 0$  gegen denselben Limes, nämlich das R-Integral von  $f$ . Umgekehrt müssen im Falle der Konvergenz all dieser Folgen gegen denselben Limes Unter- und Oberintegral von  $f$  übereinstimmen, d.h.:  $f \in R(D)$ .  
Q.E.D.

**Lemma 5.7:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar. Das R-Integral über  $D$  besitzt die Eigenschaften:  
i) Beziehung zwischen R-Integral und Jordan-Inhalt:

$$\int_D dx = |D|. \quad (5.2.16)$$

ii) Ein  $f \in R(D)$  ist auch auf jeder quadrierbaren Teilmenge  $D_1 \subset D$  R-integrierbar.

iii) Linearität: Für  $f, g \in R(D)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g \in R(D)$ , und es gilt:

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g). \quad (5.2.17)$$

iv) Monotonie: Für  $f, g \in R(D)$  folgt aus  $f(x) \geq g(x)$ ,  $x \in D$ :

$$J(f) \geq J(g). \quad (5.2.18)$$

v) Ist  $D = D_1 \cup D_2$  mit zwei quadrierbarer Mengen  $D_1, D_2$ ,  $D_1^o \cap D_2^o = \emptyset$ , so gilt

$$J_D(f) = J_{D_1}(f) + J_{D_2}(f). \quad (5.2.19)$$

Die Aussagen (iv) und (v) gelten auch für das Unter- und das Oberintegral.

**Beweis:** Wir verwenden eine Folge von Zerlegungen  $Z_k = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$  mit Feinheiten  $|Z_k| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Die zugehörigen Unter- und Obersummen sowie alle Riemannschen Summen konvergieren dann nach Satz 5.5 gegen das R-Integral.

i) Für die Ober- und Untersummen der Funktion  $f \equiv 1$  auf  $D$  gilt

$$|D| = \sum_i^m |B_i| = \underline{S}_Z(f) = \overline{S}_Z(f)$$

und somit  $J(f) = |D|$ .

ii) Sei  $f \in R(D)$  und  $D_1 \subset D$  quadrierbar. Je zwei Zerlegungen  $Z_k, Z'_k \in \mathcal{Z}(D_1)$  lassen sich durch Hinzunahme der Teilmengen  $B_i \subset D \setminus D_1$  zu Zerlegungen  $\hat{Z}_k, \hat{Z}'_k \in \mathcal{Z}(D)$  mit  $|\hat{Z}_k| \leq |Z_k|$  und  $|\hat{Z}'_k| \leq |Z'_k|$  ergänzen. Für die mit denselben Auswertungspunkten in  $B_i \subset D \setminus D_1$  gebildeten zugehörigen Riemannschen Summen gilt:

$$|RS_{Z_k}(f) - RS_{Z'_k}(f)| = |RS_{\hat{Z}_k}(f) - RS_{\hat{Z}'_k}(f)|.$$

Nach Satz 5.5 konvergiert dann

$$|RS_{Z_k}(f) - RS_{Z'_k}(f)| \rightarrow 0 \quad (|Z_k| \rightarrow 0, |Z'_k| \rightarrow 0).$$

Daraus folgern wir, dass jede Folge Riemannscher Summen  $(RS_{Z_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $|Z_k| \rightarrow 0$  eine Cauchy-Folge ist, und dass alle diese Cauchy-Folgen gegen denselben Limes konvergieren, der dann gerade das R-Integral von  $f$  über  $D_1$  ist. Also ist  $f \in R(D_1)$ .

iii) Aufgrund der Linearität der Riemannschen Summe gilt

$$RS_{Z_k}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha RS_{Z_k}(f) + \beta RS_{Z_k}(g),$$

und durch Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich (5.2.17).

iv) Wegen  $f \geq g$  ist  $RS_{Z_k}(f) \geq RS_{Z_k}(g)$ , und durch Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich (5.2.18) für das R-Integral. Für Unter- und Oberintegrale argumentiert man analog.

v) Sei  $D = D_1 \cup D_2$  mit quadrierbaren Mengen  $D_1, D_2$  und  $D_1^o \cap D_2^o = \emptyset$ . Wir betrachten Folgen von Zerlegungen  $Z_1 = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D_1)$  und  $Z_2 = \{C_j\} \in \mathcal{Z}(D_2)$ , welche zu Zerlegungen  $Z = \{B_i, C_j\} \in \mathcal{Z}(D)$  vereinigt gedacht sind. Für die zugehörigen Riemannschen Summen gilt dann

$$RS_Z(f) = RS_{Z_1}(f) + RS_{Z_2}(f).$$

Unter dem Grenzprozeß  $|Z_1|, |Z_2| \rightarrow 0$  bzw.  $|Z| \rightarrow 0$  ergibt sich nach Satz 5.5:

$$J_D(f) = J_{D_1}(f) + J_{D_2}(f).$$

Q.E.D.

**Korollar 5.3:** Seien  $A \subset D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbare Mengen. Dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_A$  R-integrierbar, und es gilt

$$\int_D \chi_A(x) dx = |A|.$$

**Beweis:** Die charakteristische Funktion  $\chi_A$  ist über die disjunkten quadrierbaren Mengen  $A$  und  $D \setminus A$   $R$ -integrierbar. Es gilt also nach Lemma 5.7 (i):

$$\int_D \chi_A(x) dx = \int_A \chi_A(x) dx + \int_{D \setminus A} \chi_A(x) dx = \int_A dx = |A|.$$

Q.E.D.

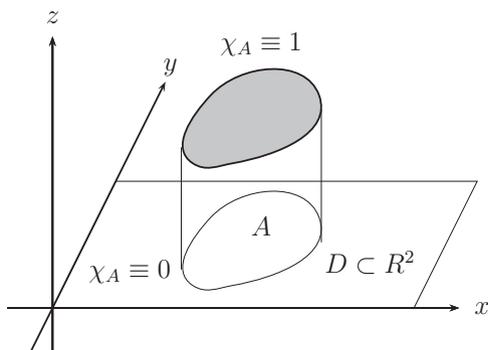


Abbildung 5.7: Charakteristische Funktion  $\chi_A$ .

**Lemma 5.8:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar. Ist  $f \in R(D)$  mit  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $x \in D$ , und  $\varphi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz-stetige Funktion, so ist auch die Komposition  $\varphi \circ f$   $R$ -integrierbar. Dies impliziert, dass mit  $f, g \in R(D)$  auch die Funktionen

$$|f|, f_+, f_-, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$$

$R$ -integrierbar sind. Im Falle  $\inf_{x \in D} f(x) > 0$  ist auch  $f^{-1} \in R(D)$ .

**Beweis:** i) Wir verwenden das Riemannsche Integrierbarkeitskriterium aus Satz 5.4. Wegen  $f \in R(D)$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$ , so dass

$$\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_i (M_i - m_i) |B_i| < \varepsilon.$$

Mit der Lipschitz-Konstante  $L$  von  $\varphi$  gilt dann für beliebige Punkte  $x, y \in B_i$ :

$$|(\varphi \circ f)(x) - (\varphi \circ f)(y)| \leq L|f(x) - f(y)| \leq L(M_i - m_i),$$

und somit

$$\sup_{B_i}(\varphi \circ f) - \inf_{B_i}(\varphi \circ f) \leq L(M_i - m_i).$$

Damit folgt

$$\bar{S}_Z(\varphi \circ f) - \underline{S}_Z(\varphi \circ f) = \sum_i (\sup_{B_i}(\varphi \circ f) - \inf_{B_i}(\varphi \circ f)) |B_i| < L\varepsilon.$$

Also ist  $\varphi \circ f \in R(D)$ .

ii) Da die Funktionen  $\varphi(x) = |x|$ ,  $\varphi(x) = \max\{x, 0\}$ ,  $\varphi(x) = \min\{x, 0\}$ ,  $\varphi(x) = 1/x$  (für  $x > \kappa > 0$ ),  $\varphi(x) = x^2$  auf  $[m, M]$  Lipschitz-stetig sind ergibt sich aus Teil (i) auch der zweite Satz an Behauptungen. Zum Nachweis von  $fg \in R(D)$  und  $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in R(D)$  verwenden wir dabei die Beziehungen

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$$

sowie  $\max\{f, g\} = f + (g - f)_+$ ,  $\min\{f, g\} = f + (g - f)_-$  zusammen mit die Linearität des R-Integrals. Q.E.D.

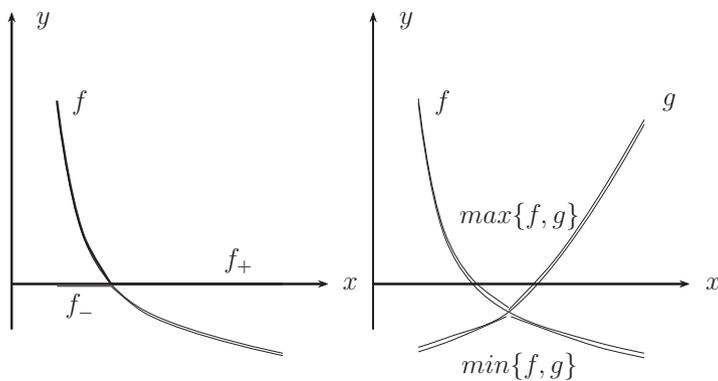


Abbildung 5.8: Positiver und negativer Teil einer Funktion sowie Maximum und Minimum zweier Funktionen.

**Lemma 5.9:** i) Auf einer Jordan-Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$  ist jede beschränkte Funktion  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  R-integrierbar mit

$$\int_N f(x) dx = 0. \quad (5.2.20)$$

ii) Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  entweder über alle drei Mengen  $D^\circ \subset D \subset \overline{D}$  R-integrierbar oder über keine von diesen. In ersterem Fall gilt:

$$\int_D f(x) dx = \int_{D^\circ} f(x) dx = \int_{\overline{D}} f(x) dx, \quad (5.2.21)$$

**Beweis:** i) Ist  $|N| = 0$ , so haben alle Ober- und Untersummen von  $f$  über  $N$  den Wert Null. Es ist also  $\int_N f(x) dx = 0$ .

ii) Ist  $f$  über eine drei Mengen  $D^\circ, D, \overline{D}$  R-integrierbar, so wegen  $|\partial D| = 0$  und  $D^\circ = D \setminus \partial D$  und  $\overline{D} = D \cup \partial D$  auch über die beiden anderen. Q.E.D.

**Satz 5.6 (R-Integrierbarkeit stetiger Funktionen):** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und in  $D$  fast überall, d. h. bis auf eine Nullmenge  $N \subset D$ , stetig. Dann ist  $f \in R(D)$ . Insbesondere folgt aus  $f \in C(D)$  und  $\sup_{x \in D} |f(x)| < \infty$  die R-Integrierbarkeit von  $f$ .

**Beweis:** i) Wir nehmen zunächst an, dass  $f$  gleichmäßig stetig ist. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es also ein  $\delta > 0$ , so dass für Punkte  $x, y \in D$  gilt:

$$\|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Sei  $Z = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$  eine Zerlegung mit Feinheit  $|Z| = \max_i \text{diam}(B_i) < \delta$ . Dann gilt auf jedem  $B_i$ :

$$M_i - m_i := \sup_{x \in B_i} f(x) - \inf_{x \in B_i} f(x) < \varepsilon.$$

und somit

$$\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_i (M_i - m_i) |B_i| < \varepsilon |D|.$$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium Satz 5.4 ist also  $f \in R(D)$ .

ii) Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, dass  $f$  beschränkt aber nur in  $C := D \setminus N$  stetig ist mit einer Nullmenge  $N \subset D$ . Da  $C$  quadrierbar ist, gibt es Intervallsummen  $S_k$  mit den Eigenschaften

$$S_k \subset C^\circ, \quad |C^\circ \setminus S_k| < 1/k.$$

Jedes  $S_k$  ist kompakt und folglich  $f$  auf  $S_k$  gleichmäßig stetig. Also ist nach dem eben Gezeigten  $f \in R(S_k)$ . Für die Unter- und Oberintegrale von  $f$  über  $C^\circ$  gilt dann

$$\begin{aligned} |\bar{J}_{C^\circ}(f) - \underline{J}_{C^\circ}(f)| &= |\bar{J}_{C^\circ \setminus S_k}(f) + \bar{J}_{S_k}(f) - \underline{J}_{C^\circ \setminus S_k}(f) - \underline{J}_{S_k}(f)| \\ &= |\bar{J}_{C^\circ \setminus S_k}(f) - \underline{J}_{C^\circ \setminus S_k}(f)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in D} |f(x)| |C^\circ \setminus S_k| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Also ist  $f \in R(C^\circ)$ . Da  $\partial C \cup N$  eine Nullmenge ist, folgt schließlich wegen  $C^\circ \cup \partial C \cup N = D$  auch  $f \in R(D)$ . Q.E.D.

**Bemerkung 5.3:** Die Aussage von Satz 5.6 lässt sich nicht umkehren, d. h.: Aus der Eigenschaft  $f \in R(D)$  folgt nicht notwendig, dass die Unstetigkeitsmenge  $N$  von  $f$  eine Jordan-Nullmenge ist. Analog zum eindimensionalen Fall folgt aber, dass  $N$  eine Nullmenge im schwächeren Lebesgueschen Sinne ist.

Als Konsequenz der Monotonieeigenschaft des R-Integrals erhalten wir die folgenden wichtigen Aussagen:

**Korollar 5.4 (Dreiecksungleichung):** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $f \in R(D)$ . Es gilt:

$$\left| \int_D f(x) dx \right| \leq \int_D |f(x)| dx. \quad (5.2.22)$$

**Beweis:** Wegen  $\pm f(x) \leq |f|$  ergibt die Monotoniebeziehung (5.2.18)

$$\int_D f(x) dx \leq \int_D |f(x)| dx, \quad - \int_D f(x) dx \leq \int_D |f(x)| dx,$$

was zu zeigen war.

Q.E.D.

**Korollar 5.5 (Schrankensatz):** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar. Ist  $f \in R(D)$  und ist  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $x \in D$ , so gilt

$$m|D| \leq \int_D f(x) dx \leq M|D|. \quad (5.2.23)$$

Allgemeiner gilt für  $f, g \in R(D)$  mit  $g \geq 0$ :

$$m \int_D g(x) dx \leq \int_D f(x)g(x) dx \leq M \int_D g(x) dx. \quad (5.2.24)$$

**Beweis:** Aus der Monotonie des R-Integrals, Lemma 5.7(iii), folgt

$$m \int_D g(x) dx = \int_D mg(x) dx \leq \int_D f(x)g(x) dx \leq \int_D Mg(x) dx \leq M \int_D g(x) dx,$$

was (5.2.24) ergibt. Für  $g \equiv 1$  folgt auch (5.2.23).

Q.E.D.

Die Übertragung des Mittelwertsatzes von einer auf mehrere Dimensionen erfordert restriktivere Voraussetzungen.

**Satz 5.7 (Mittelwertsatz):** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $f \in R(D)$ . Dann gibt es eine Zahl  $\mu \in \mathbb{R}$  mit  $\inf_{x \in D} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in D} f(x)$ , so dass

$$\int_D f(x) dx = \mu |D|. \quad (5.2.25)$$

Ist darüber hinaus  $D$  kompakt und zusammenhängend und ist  $f$  stetig, so gibt es ein  $\xi \in D$  mit  $\mu = f(\xi)$ .

**Beweis:** Der Beweis folgt der Argumentation des eindimensionalen Falls. Ausgangspunkt ist die Ungleichung (5.2.23):

$$m|D| \leq \int_D f(x) dx \leq M|D|,$$

mit  $m := \inf_{x \in D} f(x)$  und  $M := \sup_{x \in D} f(x)$ . Wir definieren die lineare Funktion

$$\varphi(t) := (m(1-t) + Mt)|D|, \quad t \in [0, 1].$$

Wegen  $\varphi(0) = m|D| \leq \int_D f(x) dx \leq M|D| = \varphi(1)$  gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein  $\tau \in [0, 1]$ , so dass

$$\varphi(\tau) = \int_D f(x) dx.$$

Dann folgt (5.2.25) mit der Zahl  $\mu := \varphi(\tau)/|D|$ . Ist  $D$  kompakt und  $f$  stetig, so gibt es Punkte  $x^{\max}, x^{\min} \in D$  mit  $f(x^{\max}) = \sup_{x \in D} f(x)$  sowie  $f(x^{\min}) = \inf_{x \in D} f(x)$ . Ist darüberhinaus  $D$  zusammenhängend, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz 2.5 zu  $f(x^{\min}) \leq \mu \leq f(x^{\max})$  ein  $\xi \in D$  mit  $f(\xi) = \mu$ .

Q.E.D.

### 5.2.1 Ordinatenmengen und Normalbereiche

Wir wollen den engen Zusammenhang zwischen Jordan-Inhalt und Riemann-Integral illustrieren. Dies führt auch auf leistungsfähige Methoden zur praktischen Berechnung des Jordan-Inhalts von Mengen. Wir betrachten für eine nicht-negative Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer quadrierbaren Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  die zugehörige „Ordinatenmenge“

$$M(f) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Für eine nicht-positive Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist die zugehörige Ordinatenmenge entsprechend definiert. Allgemeiner definieren wir für zwei Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \geq g$  die Menge (sog. „Normalbereich“)

$$M(f, g) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, g(x) \leq t \leq f(x)\}.$$

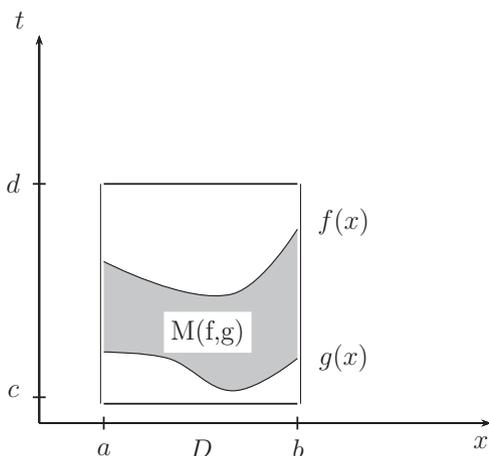


Abbildung 5.9: Beispiel eines Normalbereichs.

**Satz 5.8:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $R$ -integrierbar mit  $f \geq g$ . Dann ist der Normalbereich  $M(f, g) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  quadrierbar mit

$$|M(f, g)| = \int_D (f(x) - g(x)) dx. \quad (5.2.26)$$

Speziell gilt für  $f \geq 0$ :

$$|M(f)| = \int_D f(x) dx. \quad (5.2.27)$$

Dies impliziert auch, dass der Graph  $G(f)$  einer  $R$ -integrierbaren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Jordan-Nullmenge in  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

**Beweis:** i) Wir beweisen zunächst die Quadrierbarkeit von  $M(f)$  sowie die Gleichung (5.2.27). Seien  $M := M(f)$  und  $J := \int_D f(x) dx$ , und die Jordan-Inhalte in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^{n+1}$  seien mit  $|\cdot|$  bzw.  $|\cdot|'$  bezeichnet. Es sei  $Z = \{B_i\}$  eine Zerlegung von  $D$ . Mit  $m_i = \inf_{x \in B_i} f(x)$  und  $M_i = \sup_{x \in B_i} f(x)$  bilden wir die Zylinder  $U_i := B_i \times [0, m_i]$  und  $V_i := B_i \times [0, M_i]$ . Diese haben in  $\mathbb{R}^{n+1}$  die Inhalte  $|U_i|' = m_i |B_i|$  bzw.  $|V_i|' = M_i |B_i|$ . Die Innere  $B_i^o$  sind nichtüberlappend, was sich auf die Mengen  $\{U_i\}$  bzw.  $\{V_i\}$  überträgt. Also ist wegen  $\cup_i U_i \subset M \subset \cup_i V_i$ :

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_i |U_i|' = |\cup_i U_i|' \leq |M|'_i \leq |M|'_a \leq |\cup_i V_i|' = \sum_i |V_i|' \leq \bar{S}_Z(f).$$

Da dies für beliebige Zerlegungen  $Z$  von  $D$  gilt, folgt  $J \leq |M|'_i \leq |M|'_a \leq J$ , was die Quadrierbarkeit von  $M$  und (5.2.27) impliziert.

ii) Wir zeigen weiter, dass der Graph jeder R-integrierbaren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  Jordan-Nullmenge ist. Mit  $f$  sind auch  $f_+ = \max\{f, 0\}$  und  $f_- = \min\{f, 0\}$  R-integrierbar. Der Graph von  $f$  ist Teilmenge der Graphen von  $f_+$  und  $f_-$ , welche wiederum Teilmengen des Randes der Ordinatenmengen von  $M(f_+)$  und  $M(f_-)$  sind. Da letztere nach Teil (i) quadrierbar sind, sind ihre Ränder Jordan-Nullmengen. Folglich ist  $G(f)$  Jordan-Nullmenge.

iii) Durch Übergang von  $f, g$  zu  $f+c, g+c$  mit hinreichend großer Konstante  $c$  genügt es, o.B.d.A. den Fall  $f \geq g > 0$  zu betrachten. In diesem Fall ist

$$M(f, g) = (M(f) \setminus M(g)) \cup G(g).$$

Die Gleichung (5.2.26) folgt dann aus (5.2.27) mit  $|G(g)| = 0$  sowie der Gleichung (s. Korollar 5.1 (iv))  $|M \setminus N| = |M| - |N|$ . Q.E.D.

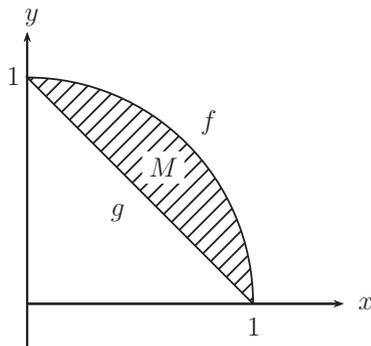
**Beispiel 5.2:** Wir wollen den Jordan-Inhalt der folgenden Menge bestimmen:

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \geq 1 - x, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Offenbar ist  $M = M(f, g)$  mit den durch

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad g(x) = 1 - x$$

definierten Funktionen  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (s. Skizze).



Also ist

$$|M| = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}.$$

### 5.2.2 Vertauschung von Grenzprozessen

**Satz 5.9:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_k \in R(D)$ , welche gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist auch  $f \in R(D)$ , und es gilt:

$$\int_D f(x) dx = \int_D \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) dx. \quad (5.2.28)$$

**Beweis:** Wir folgen wieder der Argumentation des eindimensionalen Falles. Mit Hilfe der Linearität von Unter- und Oberintegral ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{J}(f) - \underline{J}(f) = \bar{J}(f) - J(f_k) + J(f_k) - \underline{J}(f) \\ &= \bar{J}(f) - \bar{J}(f_k) + \underline{J}(f_k) - \underline{J}(f) \\ &= \bar{J}(f - f_k) + \underline{J}(f_k - f) \\ &\leq 2 \sup_{x \in D} |(f - f_k)(x)| |D| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Dies impliziert nach Satz 5.4 die Integrierbarkeit von  $f$  sowie

$$|J(f) - J(f_k)| = |J(f - f_k)| \leq \sup_{x \in D} |(f - f_k)(x)| |D| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Als unmittelbare Konsequenz von Satz 5.9 erhalten wir das folgende Korollar.

**Korollar 5.6:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_k \in R(D)$ , für welche die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

auf  $D$  gleichmäßig konvergiert. Dann ist auch  $f \in R(D)$ , und es gilt

$$\int_D f(x) dx = \int_D \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D f_k(x) dx. \quad (5.2.29)$$

**Bemerkung 5.4:** Die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz der Integranden  $f_k$  in Satz 5.9 ist sehr einschränkend. Das Resultat des Satzes bleibt richtig, wenn man nur die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige Beschränktheit der  $f_k$  fordert (Satz von Arzelà). Wir verzichten aber auf die Darstellung dieses Resultats, da wir in Band 3 dieser Textreihe im Zusammenhang mit dem Lebesgue-Integral noch leistungsfähigere Kriterien für die Vertauschbarkeit von Konvergenz und Integration kennen lernen werden.

### 5.2.3 Der Satz von Fubini

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie man Integrale über mehrdimensionale Bereiche mit Hilfe von mehreren eindimensionalen Integrationen berechnen kann. Der folgende Satz geht in seiner allgemeinen Form (für das Lebesgue-Integral) auf Fubini<sup>2</sup> (1908) zurück.

**Satz 5.10 (Satz von Fubini):** Seien  $I_x \subset \mathbb{R}^n$  und  $I_y \subset \mathbb{R}^m$  kompakte Intervalle mit dem kartesischen Produkt  $I = I_x \times I_y \in \mathbb{R}^{n+m}$  und  $f \in R(I)$ . Ferner seien für jedes feste  $y \in I_y$  und  $x \in I_x$  die Funktionen  $f(\cdot, y)$  bzw.  $f(x, \cdot)$  R-integrierbar über  $I_x$  bzw.  $I_y$ . Dann sind auch die Funktionen

$$F_x(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx, \quad F_y(x) := \int_{I_y} f(x, y) dy$$

R-integrierbar über  $I_y$  bzw.  $I_x$ , und es gilt:

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy = \int_{I_x} \left( \int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx. \quad (5.2.30)$$

**Beweis:** Wir betrachten Zerlegungen  $Z_x = \{I_i\}$  von  $I_x$  und  $Z_y = \{K_j\}$  von  $I_y$ , welche Zerlegungen  $Z = \{I_i \times K_j\}$  von  $I = I_x \times I_y$  erzeugen. Wir setzen

$$m_{ij} := \inf_{I_i \times K_j} f, \quad M_{ij} := \sup_{I_i \times K_j} f.$$

Damit folgt

$$m_{ij}|I_i| \leq \int_{I_i} f(x, y) dx, \quad y \in K_j,$$

und weiter

$$\sum_i m_{ij}|I_i| \leq \int_{I_x} f(x, y) dx = F_x(y), \quad y \in K_j.$$

Integration in  $y$ -Richtung über  $K_j$  ergibt

$$\sum_i m_{ij}|I_i||K_j| \leq \int_{\underline{K_j}} F_x(y) dy = \int_{\underline{K_j}} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy$$

und Summation über  $j$ :

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{i,j} m_{ij}|I_i \times K_j| \leq \int_{\underline{I_y}} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy.$$

Anwendung der vorangegangenen Überlegungen mit der Obersumme liefert

$$\overline{\int_{I_y} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy} \leq \sum_{i,j} M_{ij}|I_i \times K_j| = \overline{S}_Z(f).$$

<sup>2</sup>Guido Fubini (1879–1943): Italienischer Mathematiker; Prof. in Turin und Princeton; Beiträge u.a. zur Analysis, Variationsrechnung und Differentialgleichungen.

Gehen wir links zum Supremum und rechts zum Infimum bzgl. der Zerlegungen  $Z$  über, so ergibt sich

$$\int_I f(x, y) d(x, y) \leq \int_{\underline{I}_y} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy \leq \overline{\int_{I_y} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy} \leq \overline{\int_I f(x, y) d(x, y)}.$$

Ist nun  $f$  R-integrierbar über  $I = I_x \times I_y$ , so stimmen die linke und die rechte Seite mit dem Integral von  $f$  über  $I$  überein und es folgt die Richtigkeit der Behauptung. Die Richtigkeit der Behauptung für die vertauschte Integrationsreihenfolge folgt analog. Q.E.D.

**Bemerkung 5.5:** Die Aussage von Satz 5.10 lässt sich verallgemeinern für Funktionen  $f(x_1, \dots, x_m)$  auf kompakten kartesischen Produkten  $I = I_1 \times \dots \times I_m$ ,

$$\int_I f(x_1, \dots, x_m) d(x_1 \dots x_m) = \int_{I_1} \dots \int_{I_m} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m, \quad (5.2.31)$$

wobei die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauscht werden darf.

**Bemerkung 5.6:** Ist die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so existieren die Integrale

$$F_x(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx, \quad F_y(x) := \int_{I_y} f(x, y) dy,$$

und der Satz von Fubini liefert die Gleichung

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left( \int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy = \int_{I_x} \left( \int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx.$$

Zur Anwendung des Satzes von Fubini auf ein Integral über ein allgemeines Integrationsgebiet  $D$  wird dieses in ein Intervall  $I = I_x \times I_y$  eingebettet und der Integrand  $f \in R(D)$  durch Null auf ganz  $I$  fortgesetzt:

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_{I_x \times I_y} \hat{f}(x, y) d(x, y), \quad \hat{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in I \setminus D. \end{cases}$$

Die Standardsituation ist die eines Normalbereiches  $M(\varphi, \psi) \subset \mathbb{R}^n$ . Nach Satz 5.8 sind Normalbereiche quadrierbar, und eine stetige Funktion  $f : M(\varphi, \psi) \rightarrow \mathbb{R}$  ist R-integrierbar. Nach dem Satz von Fubini gilt dann

$$\int_{M(\varphi, \psi)} f(x) dx = \int_c^d \left( \int_{\psi(x_n)}^{\varphi(x_n)} f(x', x_n) dx' \right) dx_n. \quad (5.2.32)$$

**Beispiel 5.3:** Wir berechnen mit Hilfe von Satz 5.10 einige einfache Doppelintegrale:

1) Zu berechnen ist das Integral

$$J = \int_I \frac{1}{(x+y)^2} d(x,y), \quad I := [1, 2] \times [3, 4].$$

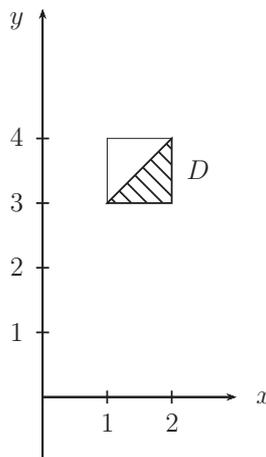
Es gilt:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \left( \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left[ \frac{-1}{x+y} \right]_3^4 dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= \left[ \ln(x+3) - \ln(x+4) \right]_1^2 = \ln \left( \frac{25}{24} \right). \end{aligned}$$

Die Integration in umgekehrter Reihenfolge ergibt dasselbe Ergebnis.

2) Zu berechnen ist das Integral (s. Skizze)

$$J = \int_D \frac{1}{(x+y)^2} d(x,y), \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 2+x\}.$$



Wir definieren die Funktion

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} (x+y)^{-2}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \in ([1, 2] \times [3, 4]) \setminus D, \end{cases}$$

und berechnen das Integral

$$J = \int_I \tilde{f}(x,y) d(x,y), \quad I := [1, 2] \times [3, 4].$$

Für dieses gilt nach dem Satz von Fubini

$$J = \int_1^2 \left( \int_3^4 \tilde{f}(x,y) dy \right) dx = \int_3^4 \left( \int_1^2 \tilde{f}(x,y) dx \right) dy,$$

bzw. bei Ausnutzung der Definition der Menge  $D$  (Man mache sich eine Skizze.):

$$J = \int_1^2 \left( \int_3^{2+x} \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_3^4 \left( \int_{y-2}^2 \tilde{f}(x, y) dx \right) dy.$$

Auswertung dieser Integrale ergibt:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \left( \int_3^{2+x} \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left[ \frac{-1}{x+y} \right]_{y=3}^{y=2+x} dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \right) dx \\ &= \left[ \ln(x+3) - \frac{1}{2} \ln(2x+2) \right]_1^2 = \ln(5/\sqrt{24}), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} J &= \int_3^4 \left( \int_{y-2}^2 \frac{1}{(x+y)^2} dx \right) dy = \int_3^4 \left[ \frac{-1}{x+y} \right]_{x=y-2}^{x=2} dy = \int_3^4 \left( \frac{1}{2y-2} - \frac{1}{2+y} \right) dy \\ &= \left[ \frac{1}{2} \ln(2y-2) - \ln(2+y) \right]_3^4 = \ln(5/\sqrt{24}). \end{aligned}$$

3) Zu berechnen ist der Inhalt des Einheitskreises  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Mit der charakteristischen Funktion

$$\chi_K(x, y) := \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1, \end{cases}$$

gilt nach dem Satz von Fubini:

$$|K| = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \chi_K(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} dy.$$

Mit Hilfe der Variablensubstitution  $y = \sin(\theta)$  ergibt sich also

$$|K| = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi.$$

## 5.2.4 Transformation von Integralen

Wir rekapitulieren zunächst das Ergebnis für das gewöhnliche eindimensionale R-Integral. Ein Intervall  $I = [a, b] \in \mathbb{R}$  werde durch eine Funktion  $\varphi$  auf ein Intervall  $\varphi(I) = [\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$  abgebildet, wobei  $\varphi(a) = \alpha$ ,  $\varphi(b) = \beta$  gelte. Ist die Abbildung  $\varphi$  stetig differenzierbar und monoton wachsend (d.h.  $\varphi' > 0$ ), so gilt für jede über  $\varphi(I)$  R-integrierbare Funktion  $f : \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$  die Transformationsformel

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Ist  $\varphi$  dagegen monoton fallend (d. h.:  $\varphi' < 0$ ) mit  $\varphi(a) = \beta$ ,  $\varphi(b) = \alpha$ , so gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y) dy = - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x))(-\varphi'(x)) dx.$$

In beiden Fällen gilt also für  $\varphi'(x) \neq 0$ :

$$\int_{\varphi(I)} f(y) dy := \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)| dx =: \int_I f(\varphi(x))|\varphi'(x)| dx, \quad (5.2.33)$$

d. h.: Zwischen den Integrationsinkrementen besteht die Beziehung  $dy = |\varphi'(x)| dx$ . Im Spezialfall einer affin-linearen Abbildung  $\varphi(x) = ax + b$  ist entsprechend  $dy = |a|dx$ .

Zur Übertragung dieses Resultats für mehrdimensionale Integrale haben wir in Abschnitt 5.1.2 untersucht, wie sich unter affin-linearen Transformationen  $\Phi(x) = Ax + b$  von quadrierbaren Mengen  $D \subset \mathbb{R}^n$  deren Inhalt verändert:

$$|\Phi(D)| = |\det A| |D|. \quad (5.2.34)$$

Dies legt für diesen Spezialfall die folgende Transformationsformel für die zugehörigen R-Integrale nahe:

$$\int_{\Phi(D)} f(y) dy = \int_D f(\Phi(x)) |\det A| dx. \quad (5.2.35)$$

Im Hinblick auf  $\Phi'(x) = A$  wird damit auch die in folgendem Satz formulierte allgemeine Substitutionsregel plausibel.

**Satz 5.11 (Transformationsatz):** Die Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  sei offen und quadrierbar und die Funktion  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, injektiv und Lipschitz-stetig. Dann ist die Menge  $\Phi(D)$  quadrierbar, für jede Funktion  $f \in R(\Phi(D))$  ist die Funktion

$$F := f(\Phi(\cdot)) |\det \Phi'(\cdot)| : D \rightarrow \mathbb{R}$$

R-integrierbar, und für jede quadrierbare Teilmenge  $M \subset D$  gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\Phi(M)} f(y) dy = \int_M f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.36)$$

**Bemerkung 5.7:** Bei Setzung  $f \equiv 1$  folgt aus (5.2.37) für die Inhalte:

$$|\Phi(M)| = \int_M |\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.37)$$

Dies ist die natürliche Verallgemeinerung der Transformationsformal (5.1.6) für affin-lineare Abbildungen  $\Phi(x) := Ax + b$  auf allgemeine reguläre Abbildungen  $\Phi(\cdot)$ . Für die affin-lineare Abbildung ist  $\Phi'(\cdot) = A$ .

**Bemerkung 5.8:** Die Substitutionsregel (5.2.36) wird normalerweise unter den stärkeren Voraussetzungen bewiesen, dass die Abbildung  $\Phi$  auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $\overline{D}$  ein Diffeomorphismus ist, d. h.:  $\Phi$  ist auf  $U$  injektiv, regulär ( $\det(\Phi') \neq 0$ ), und die Umkehrabbildung  $\Psi := \Phi^{-1} : \Phi(U) \rightarrow U$  ist ebenfalls stetig differenzierbar. Diese Bedingung ist aber für einige wichtige Anwendungen (z. B. für die Transformationen auf Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten) zu einschränkend. In diesen Fällen ist die Jacobi-Matrix  $J_\Phi$  zwar in der offenen Menge  $D$  regulär, hat aber auf deren Rand  $\partial D$  singuläre Punkte. Es können aber auch singuläre Punkte in  $D$  selbst auftreten. Ein einfaches Beispiel in einer Dimension hierfür ist die Transformation

$$y = \varphi(x) := x^3, \quad x \in [-1, 1],$$

welche das Intervall  $D = [-1, 1]$  eindeutig auf das Intervall  $[-1, 1]$  abbildet, aber im Punkt  $x = 0$  eine irreguläre Ableitung  $\varphi'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$  hat. Für diese Situation sind aber die schwächeren Bedingungen von Satz 5.11 erfüllt, insbesondere ist  $\varphi$  auf  $D$  injektiv und L-stetig. Für jede Funktion  $f \in R([-1, 1])$ , gilt also die Substitutionsformel

$$\int_{-1}^1 f(y) dy = 3 \int_{-1}^1 f(x^3) x^2 dx.$$

Als Vorbereitung für den Beweis des Substitutionssatzes stellen wir das folgende Lemma bereit. Dieses ist quasi der „harte“ Kern des Beweises.

**Lemma 5.10:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und quadrierbar und  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare, Lipschitz-stetige Abbildung. Für jede quadrierbare Menge  $M \subset D$  gilt dann:

$$|\Phi(M)|_a \leq \int_M |\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.38)$$

**Beweis:** i) Wir zeigen die Richtigkeit der Behauptung zunächst für den Spezialfall, dass die Teilmenge  $M \subset D$  ein abgeschlossener  $n$ -dimensionaler Würfel  $W$  ist.

ia) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Ist die Behauptung für irgendeinen Würfel  $W$  falsch, so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$|\Phi(W)|_a \geq \int_W |\det \Phi'(y)| dy + \varepsilon |W|.$$

Der Würfel  $W$  habe o.B.d.A. die Kantenlänge 1. Durch Halbierung der Kanten kann  $W$  in  $2^n$  abgeschlossene Teilwürfel mit Kantenlänge  $\frac{1}{2}$  zerlegt werden. Unter diesen ist mindestens ein Würfel, mit  $W_1$  bezeichnet, mit

$$|\Phi(W_1)|_a \geq \int_{W_1} |\det \Phi'(x)| dx + \varepsilon |W_1|.$$

Denn wäre für alle Teilwürfel  $W_{1,i} \subset W$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$|\Phi(W_{1,i})|_a < \int_{W_{1,i}} |\det \Phi'(x)| dx + \varepsilon |W_{1,i}|,$$

so ergäbe sich wegen der Subadditivität des äußeren Inhalts und der Additivität von Riemann-Integral und Jordan-Inhalt

$$\begin{aligned} |\Phi(W)|_a &\leq \sum_{i=1}^m |\Phi(W_i)|_a < \sum_{i=1}^m \int_{W_i} |\det \Phi'(x)| dx + \sum_{i=1}^m \varepsilon |W_i| \\ &= \int_W |\det \Phi'(x)| dx + \varepsilon |W|, \end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch zur Annahme. Durch Fortsetzung dieses Arguments konstruieren wir eine Folge von Würfeln  $W_k$  mit  $W_{k+1} \subset W_k$ ,  $|W_k| = 2^{-k}$  und

$$\frac{|\Phi(W_k)|_a}{|W_k|} \geq \frac{1}{|W_k|} \int_{W_k} |\det \Phi'(x)| dx + \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.2.39)$$

Wegen  $W_{k+1} \subset W_k$  und  $\text{diam}(W_k) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), gibt es genau einen Punkt  $a \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k \subset D$  (Übungsaufgabe).

ib) Wir setzen  $A := \Phi'(a)$ . Wegen der Stetigkeit von  $\Phi'(\cdot)$  und damit auch der von  $|\det \Phi'(\cdot)|$  folgt mit dem Mittelwertsatz 5.7 die Existenz von Punkten  $a_k \in W_k$  mit

$$\frac{1}{|W_k|} \int_{W_k} |\det \Phi'(x)| dx = |\det \Phi'(a_k)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wegen  $a_k \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ) folgt damit

$$\frac{1}{|W_k|} \int_{W_k} |\det \Phi'(x)| dx \rightarrow |\det \Phi'(a)| = |\det A| \quad (k \rightarrow \infty).$$

Der Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  in (5.2.39) ergibt dann

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Phi(W_k)|_a}{|W_k|} \geq |\det A| + \varepsilon, \quad (5.2.40)$$

Wir wollen dies zum Widerspruch führen. Wegen der Differenzierbarkeit von  $\Phi$  gilt für  $h \in \mathbb{R}^n$  mit  $a + h \in W$ :

$$\Phi(a + h) = \Phi(a) + Ah + \omega(a; h), \quad \|\omega(a; h)\| \leq \|h\|_2 \tilde{\omega}(\|h\|_2), \quad (5.2.41)$$

mit  $\tilde{\omega}(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$ . Der Durchmesser der Würfel  $W_k$  ist  $\text{diam}(W_k) = 2^{-k} \sqrt{n}$  und folglich  $\|h\|_2 \leq 2^{-k} \sqrt{n}$ . Für jeden Punkt  $x = a + h \in W_k$  ist also

$$\|\omega(a; h)\|_2 \leq \varepsilon_k := 2^{-k} \delta_k, \quad \delta_k := \sqrt{n} \tilde{\omega}(\|h\|_2) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wir setzen

$$V := A(W), \quad V_k := A(W_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aus (5.2.41) erhalten wir wegen  $\|\Phi(x) - \Phi(a) + Ah\|_2 \leq \varepsilon_k$  die Beziehung

$$\Phi(W_k) \subset \Phi(a) + \overline{(V_k)_{\varepsilon_k}}, \quad (V_k)_{\varepsilon_k} := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, V_k) < \varepsilon_k\}.$$

Für solche  $\varepsilon$ -Umgebungen von Mengen gilt, wie man leicht verifiziert,

$$(c + M)_\varepsilon = c + M_\varepsilon, \quad \lambda M_\varepsilon = (\lambda M)_\varepsilon, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Mit geeigneten  $c_k \in \mathbb{R}^n$  ist daher

$$V_k = c_k + 2^{-k}V, \quad (V_k)_{\varepsilon_k} = c_k + 2^{-k}V_{\varepsilon_k}.$$

Nach Satz 5.3 ist  $|V| = |\det A| |W|$ , und es gilt allgemein  $|\lambda M|_a = \lambda^n |M|_a$ . Dies ergibt

$$\frac{|\Phi(W_k)|_a}{|W_k|} \leq \frac{2^{-nk} |V_{\varepsilon_k}|_a}{2^{-nk} |W|} = |\det A| \frac{|V_{\varepsilon_k}|_a}{|V|} \rightarrow |\det A| \quad (k \rightarrow \infty),$$

was einen Widerspruch zu (5.2.40) bedeutet.

ii) Wir beweisen nun die Abschätzung (5.2.38) für den Fall einer beliebigen quadrierbaren Teilmenge  $M \subset D$ . Dazu muss zunächst die Existenz des Integrals begründet werden. Da  $\Phi$  in  $M$  als stetig differenzierbar angenommen ist, folgt die Stetigkeit von  $F(\cdot) := |\det \Phi'(\cdot)|$  in  $M$ . Wegen der L-Stetigkeit von  $\Phi$  sind die partiellen Ableitungen  $\partial_i \Phi_j$  auf  $M$  gleichmäßig beschränkt, denn mit der L-Konstante  $L$  von  $\Phi$  gilt:

$$|\partial_i \Phi_j(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\Phi_j(x+h) - \Phi_j(x)|}{|h|} \leq L.$$

Also ist auch die Funktion  $F$  auf  $M$  beschränkt. Da  $M$  quadrierbar ist, folgt nach Satz 5.6 die R-Integrierbarkeit von  $F$  über  $M$ , d.h. das Integral in (5.2.38) existiert.

ii) Sei  $\mu_M := \sup_{x \in M} |\det \Phi'(x)|$ . Mit Hilfe von Teil (i) erschließen wir die Ungleichung auch für die ausschöpfenden Würfelsummen  $M_k \subset M$ :

$$|\Phi(M_k)|_a \leq \sum_{W_i \subset M_k} |\Phi(W_i)|_a \leq \sum_{W_i \subset M_k} \int_{W_i} |\det \Phi'(x)| dx = \int_{M_k} |\det \Phi'(x)| dx.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |\Phi(M)|_a &\leq |\Phi(M_k) \cup \Phi(M \setminus M_k)|_a \leq |\Phi(M_k)|_a + |\Phi(M \setminus M_k)|_a \\ &\leq \int_{M_k} |\det \Phi'(x)| dx + |\Phi(M \setminus M_k)|_a \\ &= \int_M |\det \Phi'(x)| dx - \int_{M \setminus M_k} |\det \Phi'(x)| dx + |\Phi(M \setminus M_k)|_a. \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.5 gilt

$$\begin{aligned} |\Phi(M \setminus M_k)|_a &\leq (L\sqrt{n})^n |M \setminus M_k|_a \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \\ \int_{M \setminus M_k} |\det \Phi'(x)| dx &\leq \mu_M |M \setminus M_k| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Dies impliziert die behauptete Ungleichung.

Q.E.D.

**Beweis: [Beweis des Transformationsatzes]**

i) Wir beweisen den Satz zunächst unter der strengeren Voraussetzung, dass die Abbildung  $\Phi$  auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $\overline{D}$  ein Diffeomorphismus ist, d. h.:  $\Phi$  ist auf  $U$  injektiv, regulär ( $\det(\Phi') \neq 0$ ), und die Umkehrabbildung  $\Psi := \Phi^{-1} : \Phi(U) \rightarrow U$  ist ebenfalls stetig differenzierbar. Diese Bedingung ist aber für einige wichtige Anwendungen (z. B. für die Transformationen auf Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten) zu einschränkend. Aufgrund der Resultate über reguläre Abbildungen (Satz 5.2) ist dann  $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$  ebenfalls offen und  $\Phi(\overline{D}) = \overline{\Phi(D)} \subset \Phi(U)$ . Ferner sind  $\Phi$  auf  $\overline{D}$  und  $\Psi := \Phi^{-1}$  auf  $\overline{\Phi(D)}$  Lipschitz-stetig mit L-Konstanten (Übungsaufgabe)

$$L_\Phi := \max_{x \in \overline{D}} \|\Phi'(x)\|_2, \quad L_\Psi := \max_{y \in \Phi(\overline{D})} \|\Psi'(y)\|_2.$$

Aufgrund von Satz 5.2 werden durch  $\Phi$  und  $\Psi$  jeweils quadrierbare Mengen auf quadrierbare Mengen abgebildet. Nach Lemma 5.10 gilt dann für quadrierbare Mengen  $M \subset D$ :

$$|\Phi(M)| \leq \int_M |\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.42)$$

ia) Sei nun  $f : \Phi(D) \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, nichtnegative Funktion:

$$\sup_{y \in \Phi(D)} |f(y)| < \infty, \quad f(y) \geq 0, \quad y \in \Phi(D).$$

Für eine Zerlegung  $Z = \{B_i, i = 1, \dots, m\}$  von  $\Phi(D)$  in quadrierbare Mengen  $B_i$  sei

$$m_i := \inf_{y \in B_i} f(y) \geq 0, \quad t(y) := \sum_{i=1}^m m_i \chi_{B_i}(y),$$

mit den charakteristischen Funktionen  $\chi_{B_i}$  der  $B_i$ . Dann sind auch die Bildmengen  $M_i := \Psi(B_i)$  quadrierbar, und konstruktionsgemäß gilt:

$$0 \leq t(y) \leq f(y), \quad y \in \Phi(D).$$

Ferner ist für  $y = \Phi(x) \in \Phi(D)$  mit  $B_i = \Phi(M_i)$ :

$$t(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^m m_i \chi_{B_i}(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^m m_i \chi_{M_i}(x) \leq f(\Phi(x)).$$

Mit (5.2.42) folgt dann wegen  $m_i \geq 0$  für die Untersumme von  $f$  bzgl. der Zerlegung  $Z$ :

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{i=1}^m m_i |B_i| \leq \sum_{i=1}^m m_i \int_{M_i} |\det \Phi'(x)| dx = \int_M t(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx.$$

Wegen  $t(y) \geq 0$  wird die recht Seite vergrößert, wenn man  $t(\Phi(x))$  durch  $f(\Phi(x))$  ersetzt und zum Unterintegral übergeht:

$$\underline{S}_Z(f) \leq \int_{\underline{D}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx.$$

Da dies für jede solche Zerlegung von  $\Phi(D)$  gilt, ergibt sich durch Supremumbildung

$$\int_{\underline{\Phi(D)}} f(y) dy \leq \int_{\underline{D}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.43)$$

Anwendung dieser Ungleichung mit vertauschten Rollen von  $\Phi$  und  $\Psi = \Phi^{-1}$  auf das rechte Integral ergibt weiter

$$\begin{aligned} \int_{\underline{D}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx &= \int_{\underline{\Psi(\Phi(D))}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx \\ &\leq \int_{\underline{\Phi(D)}} f(\Phi(\Psi(y))) |\det \Phi'(\Psi(y))| |\det \Psi'(y)| dy. \end{aligned}$$

Dieser Schluss ist erlaubt, da  $\Psi = \Phi^{-1}$  aufgrund unserer verschärften Annahmen dieselben Eigenschaften hat wie  $\Phi$ . Wegen  $|\det \Phi'| = |\det \Psi'|^{-1}$  ergibt sich so

$$\int_{\underline{D}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx \leq \int_{\underline{\Phi(D)}} f(y) dy. \quad (5.2.44)$$

Durch Kombination von (5.2.43) und (5.2.44) finden wir

$$\int_{\underline{\Phi(D)}} f(y) dy = \int_{\underline{D}} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.45)$$

ib) Ist die Funktion  $f \geq 0$  in  $\Phi(D)$  stetig, so sind alle in (5.2.45) auftretenden Funktionen R-integrierbar, und es folgt

$$\int_{\Phi(D)} f(y) dy = \int_D f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.46)$$

Diese Formel gilt insbesondere für konstante Funktionen  $f \equiv c$ ,

$$c |\Phi(D)| = \int_{\Phi(D)} c dy = c \int_D |\det \Phi'(x)| dx,$$

und dann natürlich auch für  $c < 0$ .

ic) Nun sei  $f$  lediglich als beschränkt in  $\Phi(D)$  angenommen. Sei  $c$  eine Konstante mit  $f+c \geq 0$ . Dann gilt (5.2.45) für  $f_1 := f+c$  und  $f_2 \equiv -c$ . Mit Hilfe des Additionsgesetzes für das Unterintegral folgt somit (5.2.45) für beliebige beschränkte Funktionen. Zwischen dem Unter- und dem Oberintegral besteht die Beziehung

$$\overline{\int_{\Phi(D)} f(y) dy} = - \underline{\int_{\Phi(D)} (-f)(y) dy}.$$

Damit folgt die entsprechende Formel auch für das Oberintegral:

$$\overline{\int_{\Phi(D)} f(y) dy} = \overline{\int_D f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx}.$$

Unter der Annahme  $f \in R(\Phi(D))$  ergibt sich so, dass auch  $f(\Phi(\cdot))|\det \Phi'(\cdot)| \in R(D)$  ist und die Substitutionsformel gilt:

$$\int_{\Phi(D)} f(y) dy = \int_D f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.47)$$

id) Ist nun  $M \subset D$  eine beliebige quadrierbare Teilmenge, so folgt aus den bekannten Eigenschaften regulärer Abbildungen, dass auch  $\Phi(M)$  quadrierbar ist (Satz 5.2). Weiter sind dann die Funktion  $f \in R(\Phi(D))$  über  $\Phi(M)$  sowie die Funktion  $f(\Phi(\cdot))|\det \Phi'(\cdot)| \in R(D)$  über  $M$  R-integrierbar, und es gilt die Substitutionsformel (5.2.47) mit  $M$  anstelle von  $D$ .

ii) Wir betrachten nun den Fall einer Abbildung  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit den im Satz geforderten schwächeren Eigenschaften, d. h.:  $\Phi$  wird nur in  $D$  als stetig differenzierbar und injektiv, aber dafür zusätzlich als L-stetig angenommen. Für jede abgeschlossenen Teilmenge  $M \subset D$  sind dann die in Beweisteil (i) gemachten Voraussetzungen erfüllt, und es gilt die Aussage des Satzes, insbesondere die Substitutionsformel

$$\int_{\Phi(M)} f(y) dy = \int_M f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)| dx. \quad (5.2.48)$$

Wir haben zu zeigen dass dies auch für ganz  $D$  bzw.  $\bar{D}$  gilt, auch wenn dort singuläre Punkte von  $\Phi$  existieren mögen.

iiia) Sei  $L$  die L-Konstante von  $\Phi$  und  $\alpha = (L\sqrt{n})^n$  die Konstante in der Abschätzung von Lemma 5.5:

$$|\Phi(D)|_a \leq \alpha |D|_a.$$

Ferner sei (s. Beweis Teil (iia) von Lemma 5.10)

$$\beta := \sup_{y \in \Phi(D)} |f(y)|, \quad \gamma := \sup_{x \in D} |\det \Phi'(x)|,$$

und  $K := \{x \in D : \det \Phi'(x) = 0\}$  die Menge der irregulären Punkte von  $\Phi$ . Wegen der Stetigkeit von  $\det \Phi'(\cdot)$  ist die Menge  $D \setminus K$  offen. Die Bildmenge  $\Phi(D \setminus K)$  ist dann nach Satz 5.2 ebenfalls offen. Zu beliebig fixiertem  $\varepsilon > 0$  sei  $D_q$  eine Würfelsumme mit  $|D \setminus D_q| < \varepsilon$ . Für ein  $k \geq q$  teilen wir die in  $D_q$  enthaltenen Würfel  $W \in \mathcal{W}_k$   $k$ -ter Stufe in zwei disjunkte Würfelsummen auf:

$$D'_k := \cup\{W \subset D_k : W \cap K = \emptyset\}, \quad D''_k := \cup\{W \subset D_k : W \cap K \neq \emptyset\}.$$

Offenbar ist  $D_k = D'_k \cup D''_k$ . Nach Satz 5.2 ist auch  $\Phi(D'_k)$  quadrierbar. Da  $\det \Phi'$  auf der abgeschlossenen Würfelsumme  $D_q$  gleichmäßig stetig ist, kann  $k$  so groß gewählt werden, dass

$$\sup_{x \in D''_k} |\det \Phi'(x)| < \varepsilon.$$

Nach Lemma 5.10 und Lemma 5.5 ist dann

$$|\Phi(D''_k)|_a < \varepsilon |D|, \quad |\Phi(D \setminus D_q)|_a < \alpha \varepsilon.$$

Es ist  $\Phi(D) \subset \Phi(D'_k) \cup \Phi(D''_k) \cup \Phi(D \setminus D_q)$ . Die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Phi(D'_k)| &\leq |\Phi(D)|_i \leq |\Phi(D)|_a \\ &\leq |\Phi(D'_k)| + |\Phi(D''_k)|_a + |\Phi(D \setminus D_q)|_a \\ &\leq |\Phi(D'_k)| + \varepsilon(|D| + \alpha) \end{aligned}$$

zeigt wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon$ , dass  $\Phi(D)$  ebenfalls quadrierbar ist.

ii) Für die abgeschlossene Würfelsumme  $D'_k \subset D \setminus K$  gilt nach Beweisteil (i) die Substitutionsformel (5.2.48):

$$\int_{\Phi(D'_k)} f(y) dy = \int_{D'_k} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx,$$

wobei die Integrale als R-Integrale existieren. Für die quadrierbare Restmenge  $D \setminus D'_k$  gilt nach obiger Abschätzung

$$|\Phi(D \setminus D'_k)| \leq \varepsilon(|D| + \alpha).$$

Ferner gilt für das Integral von  $f$  über diese Menge:

$$\left| \int_{\Phi(D \setminus D'_k)} f(x) dx \right| \leq \beta \varepsilon (|D| + \alpha).$$

Weiter gilt für die durch  $F(x) := f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)|$  definierte Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\sup_{x \in D''_k} |F(x)| \leq \beta \varepsilon, \quad \sup_{x \in D \setminus D_q} |F(x)| \leq \beta \gamma,$$

und folglich

$$\begin{aligned} \left| \int_{\underline{D''_k}} F(x) dx \right| &\leq \left| \overline{\int_{D''_k}} F(x) dx \right| \leq \beta \varepsilon |D|, \\ \left| \int_{\underline{D \setminus D_q}} F(x) dx \right| &\leq \left| \overline{\int_{D \setminus D_q}} F(x) dx \right| \leq \beta \gamma \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Phi(D)} f(y) dy - \int_{\underline{D}} F(x) dx \right| &= \left| \int_{\Phi(D \setminus D'_k)} f(y) dy - \int_{\underline{D \setminus D''_k}} F(x) dx \right| \\ &\leq \beta \varepsilon (|D| + \alpha) + \left| \int_{\underline{D \setminus D_q}} F(x) dx \right| + \left| \int_{\underline{D''_k}} F(x) dx \right| \\ &\leq \beta \varepsilon (|D| + \alpha) + \beta \gamma \varepsilon + \beta \varepsilon |D| =: c \varepsilon, \end{aligned}$$

und analog

$$\left| \int_{\Phi(D)} f(y) dy - \overline{\int_D} F(x) dx \right| \leq c \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon$  folgt die R-Integrierbarkeit von  $F$  über  $D$  sowie die Gleichung

$$\int_{\Phi(D)} f(y) dy = \int_D F(x) dx,$$

d. h. die behauptete Substitutionsformel. Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

**Beispiel 5.4 (Ebene Polarkoordinaten):** Für einen Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist  $r$  sein Abstand vom Ursprung und  $\theta$  der Winkel (im Gegenuhrzeigersinn) zwischen der  $x$ -Achse und dem Richtungsvektor mit Spitze in  $(x, y)$  (sog. „Polarkoordinaten“).

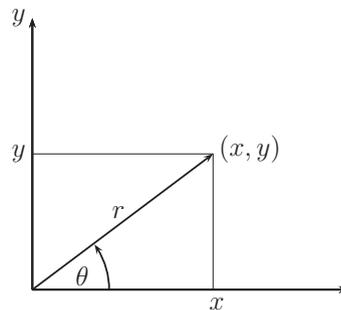


Abbildung 5.10: Schema der Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}^2$ .

Durch die auf der ganzen  $(r, \theta)$ -Ebene definierten Abbildung

$$(x, y) = \Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

wird der offene Streifen  $S$  der  $(r, \theta)$ -Ebene bijektiv auf die offene Menge  $B := \Phi(S)$  der  $(x, y)$ -Ebene abgebildet, wobei

$$S := \{(r, \theta) : r \in \mathbb{R}_+, \theta \in (0, 2\pi)\}, \quad \Phi(S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}.$$

Der Abschluss  $\bar{S}$  von  $S$  ist die ganze Ebene  $\mathbb{R}^2$ , doch ist die Abbildung wegen der Periodizität des Sinus nicht mehr bijektiv. Die Abbildung  $\Phi$  ist auf  $S$  ein Diffeomorphismus mit stetiger Jacobi-Matrix

$$J_{\Phi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Jacobi-Determinante ist

$$\det \Phi'(r, \theta) = r > 0, \quad (r, \theta) \in S.$$

Auf beschränkten Teilmengen von  $S$  ist  $\Phi$  Lipschitz-stetig:

$$\begin{aligned} \|\Phi(r, \theta) - \Phi(r', \theta')\|_2 &\leq \|\Phi(r, \theta) - \Phi(r', \theta)\|_2 + \|\Phi(r', \theta) - \Phi(r', \theta')\|_2 \\ &= (|(r - r') \cos \theta|^2 + (r - r') \sin \theta|^2)^{1/2} + (|r'(\cos \theta - \cos \theta')|^2 + |r'(\sin \theta - \sin \theta')|^2)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}|r - r'| + \sqrt{2}|r'| |\theta - \theta'| \leq 2 \max\{1, |r'|\} \|(r - r', \theta - \theta')\|_2 \end{aligned}$$

mit L-Konstante  $L := 2 \max\{1, \max |r'|\}$ . Dieses Beispiel begründet den zusätzlichen Aufwand beim Beweis von Satz 5.11. Die Abbildung  $\Phi$  ist zwar auf dem offenen Streifen  $S := \{(r, \theta) : r \in \mathbb{R}_+, \theta \in (0, 2\pi)\}$  regulär, aber nicht auf dessen Abschluß  $\bar{S}$ .

Die beschränkte, offene Menge  $K_R(0) \setminus \{(x, 0), x \geq 0\} \subset S$  ist das Bild des offenen Rechtecks  $Q := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi\} = (0, R) \times (0, 2\pi)$ , und es gilt

$$\int_{K_R(0)} f(x, y) d(x, y) = \int_Q f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini 5.10 erhalten wir hieraus die Beziehung

$$\int_{K_R(0)} f(x, y) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Für  $f \equiv 1$  erhalten wir für den Jordan-Inhalt der Kreisscheibe  $K_R(0)$ :

$$|K_R(0)| := \int_{K_R(0)} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \pi R^2.$$

**Beispiel 5.5 (Zylinderkoordinaten):** Für einen Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ist  $r$  sein Abstand von der  $z$ -Achse,  $\theta$  der Winkel (im Gegenuhrzeigersinn) zwischen der  $x$ -Achse und dem Richtungsvektor in der  $(x, y)$ -Ebene mit Spitze im Punkt  $(x, y)$  und  $z$  seine  $z$ -Komponente (sog. „Zylinderkoordinaten“).

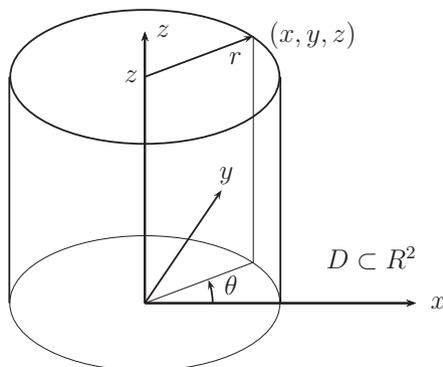


Abbildung 5.11: Schema der Zylinderkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$ .

Durch die Abbildung

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z) := (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

wird die offene Menge

$$Z := S \times \mathbb{R} = \{(r, \theta, z) : r \in \mathbb{R}_+, \theta \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$$

bijektiv auf die Menge  $\Phi(Z) = S \times \mathbb{R}$  abgebildet, mit der oben definierten Menge  $S \subset \mathbb{R}^2$ . Das Bild von  $\bar{Z}$  ist der ganze  $\mathbb{R}^3$ . Die Abbildung  $\Phi$  ist auf  $Z$  ein Diffeomorphismus, der auf beschränkten Teilmengen von  $Z$  ebenfalls Lipschitz-stetig ist. Die zugehörige Jacobi-Determinante ist

$$\det \Phi'(r, \theta, z) = r > 0 \quad (r, \theta, z) \in Z.$$

Für den Kreiszyylinder  $Z_{R,H}(0) = \{(r, \theta, z) : r \in \mathbb{R}_+, \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, H)\} \subset Z$  gilt dann aufgrund der Substitutionsregel und des Satzes von Fubini:

$$\int_{Z_{R,H}(0)} f(x, y) d(x, y, z) = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta dz.$$

Damit erhalten wir für den Jordan-Inhalt des Kreiszyinders  $Z_{R,H}(0)$ :

$$|Z_{R,H}(0)| := \int_{Z_{R,H}(0)} d(x, y, z) = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \pi R^2 H.$$

Der Kreiszyylinder ist ein einfacher Spezialfall eines „Rotationskörpers“. Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine stetige Funktion und

$$D_\varphi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] : x^2 + y^2 \leq \varphi(z)^2\}.$$

Es handelt sich bei  $D$  um den Körper, der durch Rotation der zweidimensionalen Fläche

$$F := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b], 0 \leq x \leq \varphi(z)\}$$

um die  $z$ -Achse entsteht. Für den Inhalt von  $D$  ergibt sich

$$|D_\varphi| = \int_D d(x, y, z) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi(z)} r dr d\theta dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varphi(z)^2 d\theta dz$$

und damit das folgende Resultat.

**Korollar 5.7 (Rotationskörper):** Das Volumen  $|D_\varphi|$  des Rotationskörpers in  $\mathbb{R}^3$  mit der Randkurve  $x = \varphi(z)$ ,  $z \in [a, b]$  ist bestimmt durch

$$|D_\varphi| = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 dz. \quad (5.2.49)$$

**Beispiel 5.6 (Räumliche Polarkoordinaten):** Für einen Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ist  $r$  sein Abstand vom Ursprung,  $\theta$  der Winkel (im Gegenuhrzeigersinn) zwischen der  $x$ -Achse und dem Richtungsvektor in der  $(x, y)$ -Ebene mit Spitze im Punkt  $(x, y)$  und  $\varphi$  der Winkel (im Uhrzeigersinn) zwischen der  $z$ -Achse und dem Richtungsvektor in  $\mathbb{R}^3$  mit Spitze im Punkt  $(x, y, z)$  (sog. „Kugelkoordinaten“).

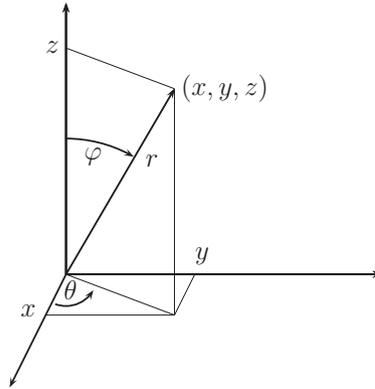


Abbildung 5.12: Schema der Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$ .

Durch die Abbildung

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi) := (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

wird die offene Menge  $K$  bijektiv auf die Menge  $\Phi(K)$  abgebildet, wobei

$$K := \{(r, \theta, \varphi) : r \in \mathbb{R}_+, \theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi)\} \quad \Phi(K) = \mathbb{R}^3 \setminus \{x \geq 0, y = 0\}.$$

Das Bild von  $\overline{K}$  ist der ganze  $\mathbb{R}^3$ . Die zugehörige Jacobi-Determinante ist

$$\det \Phi'(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin(\varphi) \neq 0, \quad (r, \theta, \varphi) \in K.$$

Jede quadrierbare Menge  $M \subset \overline{K}$  hat ein quadrierbares Bild  $\Phi(M)$ , und es gilt

$$\int_{\Phi(M)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_M f(\Phi(r, \theta, \varphi)) r^2 \sin \varphi d(r, \theta, \varphi).$$

Insbesondere gilt auf der Kugel  $K_R(0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ :

$$\int_{K_R(0)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R f(\Phi(r, \theta, \varphi)) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Damit erhalten wir für den Jordan-Inhalt der Kugel  $K_R(0)$  die Formel

$$\int_{K_R(0)} d(x, y, z) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} R^3 \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Wir wollen nun den Inhalt der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel bestimmen.

**Korollar 5.8 (Kugelvolumen):** Das Volumen der Einheitskugel des  $\mathbb{R}^n$

$$K_1^{(n)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$$

ist gegeben durch die folgenden Formeln für gerades  $n = 2m$  bzw. ungerades  $n = 2m + 1$ :

$$|K_1^{(n)}(0)| = \frac{\pi^m}{m!}, \quad |K_1^{(n)}(0)| = \frac{2^{m+1}\pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}. \quad (5.2.50)$$

**Beweis:** Das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel ist gleich dem Integral der zugehörigen charakteristischen Funktion über den Würfel  $W_1^{(n)}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : -1 < x_i < 1, i = 1, \dots, n\}$ :

$$|K_1^{(n)}(0)| = \int_{W_1^{(n)}(0)} \chi_{K_1^{(n)}(0)} dx.$$

Mit dem Satz von Fubini folgt mit der Bezeichnung  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) =: (x', x_n)$ :

$$|K_1^{(n)}(0)| = \int_{-1}^1 \left( \int_{W_1^{(n-1)}(0)} \chi_{K_1^{(n)}(0)} dx' \right) dx_n.$$

Für jeden Punkt  $x = (x', x_n) \in K_1^{(n)}(0)$  ist  $-1 < x_n < 1$  und demnach  $\|x'\|_2 < \sqrt{1 - x_n^2}$ . Also gilt mit  $r_n := \sqrt{1 - x_n^2}$ :

$$|K_1^{(n)}(0)| = \int_{-1}^1 \left( \int_{W_{r_n}^{(n-1)}(0)} \chi_{K_{r_n}^{(n-1)}(0)} dx' \right) dx_n = \int_{-1}^1 |K_{r_n}^{(n-1)}(0)| dx_n.$$

Aufgrund der Skalierungseigenschaft  $|K_r^{(n-1)}(0)| = r^{n-1}|K_1^{(n-1)}(0)|$  folgt weiter mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} |K_1^{(n)}(0)| &= |K_1^{(n-1)}(0)| \int_{-1}^1 r^{n-1} dx_n = |K_1^{(n-1)}(0)| \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{(n-1)/2} dx_n \\ &= |K_1^{(n-1)}(0)| \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \sin^2 \theta)^{(n-1)/2} \cos \theta d\theta = |K_1^{(n-1)}(0)| \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n \theta d\theta. \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Rekursionsformel für  $n \geq 2$ :

$$|K_1^{(n)}(0)| = |K_1^{(1)}(0)| \prod_{k=2}^n A_k = \prod_{k=1}^n A_k, \quad A_k := \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^k \theta d\theta.$$

Durch etwas Rechnerei finden wir für  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} A_n &:= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n \theta d\theta = \sin \theta \cos^{n-1} \theta \Big|_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} + (n-1) \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \theta \cos^{n-2} \theta d\theta \\ &= (n-1) \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cos^{n-2} \theta d\theta = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

und folglich

$$A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}, \quad A_1 = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos \theta \, d\theta = 2, \quad A_0 = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\theta = \pi.$$

Damit gilt für  $n = 2m$ :

$$\begin{aligned} A_{2m} A_{2m-1} &= \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-2}{2m-1} A_{2m-2} A_{2m-3} = \frac{2m-2}{2m} A_{2m-2} A_{2m-3} \\ &= \frac{2m-2}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \frac{2m-4}{2m-3} A_{2m-4} A_{2m-5} = \frac{2m-4}{2m} A_{2m-4} A_{2m-5} \\ &= \dots = \frac{2}{2m} A_2 A_1 = \frac{2}{2m} A_0 = \frac{\pi}{m} \end{aligned}$$

sowie analog für  $n = 2m + 1$ :

$$A_{2m+1} A_{2m} = \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-1}{2m} A_{2m-1} A_{2m-2} = \dots = \frac{1}{2m+1} A_1 A_0 = \frac{1}{2m+1} = \frac{2\pi}{2m+1}.$$

Hieraus folgern wir für gerades  $n = 2m$ :

$$|K_1^{(2m)}(0)| = \prod_{k=1}^{2m} A_k = 2 A_{2m} A_{2m-1} \cdot \dots \cdot A_2 A_1 = \frac{\pi^m}{m!},$$

und für ungerades  $n = 2m + 1$ :

$$|K_1^{(2m+1)}(0)| = \prod_{k=1}^{2m+1} A_k = A_{2m+1} A_{2m} \cdot \dots \cdot A_3 A_2 \cdot A_1 = \frac{2^{m+1} \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}.$$

Q.E.D.

**Bemerkung 5.9:** Wir haben den Inhalt der Einheitskugel  $K_1^{(n)}(0)$  im  $\mathbb{R}^n$  für  $n = 1, 2, 3$  berechnet und gefunden, dass dieser mit wachsendem  $n$  anscheinend zunimmt:

$$|K_1^{(1)}(0)| = 2 < |K_1^{(2)}(0)| = \pi < |K_1^{(3)}(0)| = \frac{4}{3}\pi.$$

Dies darf aber nicht als Beleg für die Konvergenz  $|K_1^{(n)}(0)| \rightarrow \infty$  herhalten, denn die Formeln von Korollar 5.8 ergeben

$$|K_1^{(n)}(0)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Man beachte, dass aber der Inhalt des  $n$ -dimensionalen Würfels (Einheitskugel bzgl. der Maximumnorm)

$$W_1^{(n)} = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 < x_i < 1, i = 1, \dots, n\}$$

die Eigenschaft  $|W_1^{(n)}| = 2^n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) hat.

### 5.2.5 Uneigentliches Riemann-Integral

Analog zum eindimensionalen Fall wollen wir nun „uneigentliche“ R-Integrale für gewisse unbeschränkte Funktionen und unbeschränkte Integrationsgebiete definieren.

**Definition 5.4:** Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine monoton wachsende Folge  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von quadrierbaren Teilmengen  $M_1 \subset \dots \subset M_{k-1} \subset M_k \subset M$  „ausschöpfend“, wenn für jede  $r$ -Kugel  $K_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\}$  gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(M \cap K_r(0)) \setminus M_k|_a = 0.$$

Die Existenz einer ausschöpfenden Folge  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  für die Menge  $M$  impliziert die Quadrierbarkeit der Mengen  $M \cap K_r(0)$ . Im Fall  $M = \mathbb{R}^n$  bilden z. B. die Kugeln  $K_r(0)$  ausschöpfende Folgen. Ist  $M$  quadrierbar und  $a \in \overline{M}$ , so ist die Folge der Mengen  $M_k := M \setminus K_{1/k}(a)$  ausschöpfend.

**Definition 5.5:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Menge (nicht notwendig beschränkt). Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt über  $D$  „uneigentlich R-integrierbar“, wenn mit der Notation

$$Q_f := \{M \subset D : M \text{ quadrierbar und } f \in R(M)\}$$

gilt

$$\sup_{M \in Q_f} \int_M |f(x)| dx < \infty, \quad (5.2.51)$$

und wenn es eine bzgl.  $D$  ausschöpfende Folge von Mengen  $D_k \subset Q_f$  gibt mit

$$\int_D f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx.$$

Der Limes heißt dann das „uneigentliche R-Integral“ von  $f$  über  $D$ .

**Satz 5.12:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Menge und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich R-integrierbar. Dann ist für jede ausschöpfende Folge  $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\int_D f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx,$$

d. h.: Das uneigentliche R-Integral ist unabhängig von der gewählten ausschöpfenden Folge.

**Beweis:** i) Sei  $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine ausschöpfende Folge von Teilmengen von  $D$ . Wir nehmen zunächst  $f \geq 0$  an. Die Folge der Integrale  $\int_{D_k} f(x) dx$  ist dann monoton wachsend und nach Voraussetzung beschränkt. Also existiert

$$J := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx \leq \sup_{M \in Q_f} \int_M f(x) dx =: S. \quad (5.2.52)$$

Wir wollen  $S \leq J$  zeigen. Sei  $M \in Q_f$  beliebig. Da  $M$  beschränkt ist, gibt es ein  $r > 0$  mit  $M \subset D \cap K_r(0)$ . Also ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} |M \setminus D_k| = 0$ . Aus  $M \subset (M \setminus D_k) \cup D_k$  folgt

$$\int_M f(x) dx \leq \int_{D_k} f(x) dx + \sup_{x \in M} f(x) |M \setminus D_k| \rightarrow J \quad (k \rightarrow \infty).$$

Da  $M$  beliebig ist, folgt  $S \leq J$ . Es ist also  $J = S$ , was die Unabhängigkeit des Integrals  $J$  von der gewählten ausschöpfenden Folge bedeutet.

ii) Im Fall eines allgemeinen  $f$  ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung aus der Darstellung  $f = f_+ + f_-$ . Mit  $f$  sind auch  $f_+ \geq 0$  und  $-f_- \geq 0$  R-integrierbar, und erfüllen daher (5.2.51). Das Argument von (i) ergibt die Existenz der zugehörigen Limiten (5.2.52) und deren Unabhängigkeit von der gewählten ausschöpfenden Folge. Also gilt:

$$\begin{aligned} \int_D f(x) dx &:= \int_D f_+(x) dx - \int_D -f_-(x) dx \\ &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} -f_-(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} (f_+(x) + f_-(x)) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx. \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Beispiel 5.7:** Wir diskutieren einige typische Beispiele uneigentlicher R-Integrale:

1) Wir betrachten über der Menge  $M = [0, 1]^2$  das Integral

$$J = \int_M \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y).$$

Die Mengen  $M_k := \{(x, y) \in M : x \geq 1/k\}$  bilden eine ausschöpfende Folge von  $M$ . Für diese gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\int_{M_k} \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y) = \int_0^1 \left( \int_{1/k}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) dy = \int_0^1 \left[ 2\sqrt{x} \right]_{1/k}^1 dy = 2 - \frac{2}{\sqrt{k}}.$$

Für  $k \rightarrow \infty$  erhalten wir:

$$\int_{M_k} \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y) \rightarrow 2 = \int_M \frac{1}{\sqrt{x}} d(x, y).$$

2) Es sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  quadrierbar,  $f \in R(M)$  (beschränkt) und  $a \in \overline{M}$ . Dann existiert für  $\alpha < 2$  das uneigentliche R-Integral

$$J = \int_M \frac{f(x)}{\|x - a\|_2^\alpha} dx.$$

Sei  $K := \sup_{x \in M} |f(x)|$  und  $M \subset K_R(0)$ ; o.B.d.A. kann  $a = 0$  angenommen werden. Die Mengen  $M_k := M \setminus K_{1/k}(0)$  bildet eine ausschöpfende Folge, und es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{M_k} \frac{|f(x)|}{\|x - a\|_2^\alpha} dx &\leq K \int_{K_R(0) \setminus K_{1/k}(0)} \frac{1}{\|x - a\|_2^\alpha} dx = K \int_0^{2\pi} \int_{1/k}^R \frac{1}{r^\alpha} r dr d\varphi \\ &= K \frac{2\pi}{2 - \alpha} r^{2-\alpha} \Big|_{1/k}^R = K \frac{2\pi}{2 - \alpha} (R^{2-\alpha} - k^{\alpha-2}) \rightarrow K \frac{2\pi}{2 - \alpha} R^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

3) Das folgende Integral

$$J = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|_2^2} dx = \pi$$

existiert als uneigentliches R-Integral. Dies folgt mit Hilfe der Substitutionsregel aus

$$\begin{aligned} \int_{K_k(0)} e^{-\|x\|_2^2} dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^k e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^k d\theta \\ &= \pi(1 - e^{-k^2}) \rightarrow \pi \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit dem Würfel  $W_k(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : -k < x_i < k, i = 1, \dots, n\}$  nach dem Satz von Fubini:

$$\int_{W_k(0)} e^{-\|x\|_2^2} dx = \int_{-k}^k e^{-y^2} \left( \int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right) dy = \left( \int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{W_k(0)} e^{-\|x\|_2^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k(0)} e^{-\|x\|_2^2} dx = \pi$$

ergibt sich die folgende Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (5.2.53)$$

Durch die Variablentransformation  $t := x^2$  sehen wir, dass dieses Integral gleich dem Wert der  $\Gamma$ -Funktion für  $x = \frac{1}{2}$  ist:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} |t|^{-1/2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

### 5.3 Parameterabhängige Integrale

Im Folgenden betrachten wir auf quadrierbaren Mengen  $D_x \subset \mathbb{R}^m$  und  $D_y \subset \mathbb{R}^n$  parameterabhängige Integrale der Form

$$F(x) := \int_{D_y} f(x, y) dy, \quad x \in D_x. \quad (5.3.54)$$

**Satz 5.13:** Seien  $D_x \subset \mathbb{R}^m, D_y \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar und  $D_y$  kompakt. Dann gilt:

i) Ist  $f$  in  $D_x \times D_y$  stetig, so ist  $F$  in  $D_x$  stetig.

ii) Ist  $D_x$  offen und sind  $f$  und  $\nabla_x f$  stetig in  $D_x \times D_y$ , so ist  $F$  in  $D_x$  stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\nabla F(x) = \int_{D_y} \nabla_x f(x, y) dy, \quad x \in D_x. \quad (5.3.55)$$

iii) Ist  $D_x$  offen und ist  $f$  in  $D_x \times D_y$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar bzgl.  $x$ , so ist  $F$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar in  $D_x$ .

**Beweis:** i) Es sei  $x \in D_x$  und  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $x$  konvergierende Punktfolge in  $D_x$ . Auf der kompakten Menge  $\{x, x^1, x^2, \dots\} \times D_y$  ist  $f$  gleichmäßig stetig. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es also ein  $\delta_\varepsilon > 0$ , so dass gilt:

$$\|x^k - x\| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x^k, y) - f(x, y)| < \varepsilon, \quad y \in D_y.$$

Folglich konvergiert

$$\sup_{y \in D_y} |f(x^k, y) - f(x, y)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dann konvergiert auch  $F(x^k) \rightarrow F(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Also ist  $F$  stetig in  $x$ .

ii) Sei  $x \in D_x$  und  $K := \overline{K_r(x)} \subset D_x$  eine kompakte Umgebung von  $x$ . Auf der kompakten Menge  $K \times D_y$  sind die Ableitungen  $\nabla_x f$  gleichmäßig stetig. Aus dem ein-dimensionalen Mittelwertsatz folgt für kleines  $h$ :

$$\frac{f(x + he^{(i)}, y) - f(x, y)}{h} = \int_0^1 \partial_i f(x + she^{(i)}, y) ds \rightarrow \partial_i f(x, y) \quad (h \rightarrow 0),$$

gleichmäßig für  $y \in D_y$ . Damit konvergiert für  $h \rightarrow 0$ :

$$\frac{F(x + he^{(i)}) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{D_y} (f(x + he^{(i)}, y) - f(x, y)) dy \rightarrow \int_{D_y} \partial_i f(x, y) dy.$$

Also ist  $F$  in  $x$  partiell differenzierbar. Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ergibt sich dann aus Teil (i).

iii) Die Behauptung ergibt sich durch wiederholte Anwendung der Argumentation von Teil (i) und Teil (ii). Q.E.D.

**Beispiel 5.8:** Wir betrachten ein Beispiel mit  $n = m = 1$ . Für  $x \in \mathbb{R}_+$  ist

$$F(x) = \int_0^1 y^x dy = \frac{y^{x+1}}{x+1} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x+1}.$$

Die Funktion  $f(x, y) = y^x$  ist stetig auf  $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$  und erfüllt die Voraussetzungen des vorausgehenden Satzes. Also kann nach  $x$  abgeleitet werden, und bei Beachtung von  $y^x = e^{x \ln(y)}$  folgt:

$$\int_0^1 y^x \ln y \, dy = \int_0^1 \frac{d}{dx} y^x \, dx = F'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

und allgemein für  $k \geq 2$ :

$$\int_0^1 y^x (\ln y)^k \, dy = F^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}.$$

Man beachte, dass die Funktion  $y^x (\ln y)^k$  für  $x \in \mathbb{R}_+$  auf  $(0, 1]$  stetig ist und sich stetig durch null auf  $[0, 1]$  fortsetzen lässt. Folglich existieren die linken Integrale als normale Riemann-Integrale.

**Korollar 5.9:** Eine auf einer offenen Kugel  $B \subset \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbare Vektorfunktion  $v : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist genau dann Gradient einer stetig differenzierbaren Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , d. h.  $v = \nabla f$ , wenn  $\nabla \times v := (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = 0$  gilt.

**Beweis:** i) Wenn auf der Kugel  $B$  eine Funktion  $f \in C^1(B)$  existiert mit  $v = \nabla f$ , so muss notwendig gelten:

$$\partial_i v_j = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = \partial_j v_i, \quad i, j = 1, \dots, 3,$$

d. h.:  $\nabla \times v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = 0$ .

ii) Sei nun  $\nabla \times v = 0$  auf  $B = B_r(0)$ , d. h.:  $\partial_j v_i = \partial_i v_j$ . Wir definieren für  $x \in B$  die Funktion

$$f(x) := \sum_{i=1}^3 \left( \int_0^1 v_i(tx) \, dt \right) x_i.$$

Nach Satz 5.13 ist  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \sum_{i=1}^3 \left( \partial_j \int_0^1 v_i(tx) \, dt \right) x_i + \sum_{i=1}^3 \left( \int_0^1 v_i(tx) \, dt \right) \partial_j x_i \\ &= \int_0^1 \left( t \sum_{i=1}^3 (\partial_j v_i)(tx) x_i + v_j(tx) \right) dt. \end{aligned}$$

Bei Beachtung, für festes  $x \in B$ , von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(tv_j(tx)) &= v_j(tx) + t \frac{d}{dt} v_j(tx) = v_j(tx) + t \sum_{i=1}^3 (\partial_i v_j)(tx) x_i \\ &= v_j(tx) + t \sum_{i=1}^3 (\partial_j v_i)(tx) x_i \end{aligned}$$

folgt

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tv_j(tx)) \, dt = tv_j(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} = v_j(x),$$

d. h.:  $\nabla f(x) = v(x)$ .

Q.E.D.

## 5.4 Anwendungen in der Mechanik

Im Folgenden wollen wir die in diesem Kapitel entwickelten Techniken auf die Berechnung von mechanischen Größen wie Schwerpunkt, Trägheitsmoment und Anziehungskraft anwenden.

### 5.4.1 Schwerpunkt und Trägheitsmoment

Nach den Grundgesetzen der Mechanik ist der Schwerpunkt  $S$  eines Systems von  $N$  Massepunkten  $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, N$ , mit Massen  $\mu_j$  bestimmt durch

$$S = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^N \mu_j x^{(j)}, \quad \mu = \sum_{j=1}^N \mu_j.$$

Die kinetische Energie des Gesamtsystems bei konstanter Bewegung der Punkte mit Geschwindigkeit  $v$  ist dann

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mu v^2.$$

Ein physikalischer Körper  $K$  nehme im  $\mathbb{R}^3$  ein gleichfalls mit  $K$  bezeichnetes „Volumen“ (abgeschlossene quadrierbare Punktmenge) ein. Seine Masse habe die R-integrierbare Dichteverteilung  $\rho : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Seine Gesamtmasse erhält man dann durch

$$\mu = \int_K \rho(x) dx. \quad (5.4.56)$$

Der Schwerpunkt  $S = (S_1, S_2, S_3)$  des Körpers mit Gesamtmasse  $\mu$  und Massedichte  $\rho$  ist bestimmt durch

$$S := \frac{1}{\mu} \int_K x \rho(x) dx, \quad (5.4.57)$$

wobei das vektorwertige Integral komponentenweise zu berechnen ist. Bei konstanter (d. h. „homogener“) Masseverteilung  $\rho \equiv \rho_0$  reduziert sich dies zu

$$S = \frac{\rho_0}{\mu} \int_K x dx = \frac{1}{|K|} \int_K x dx. \quad (5.4.58)$$

**Beispiel 5.9:** Wir berechnen den Schwerpunkt eines „Rotationsparaboloids“:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq c, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

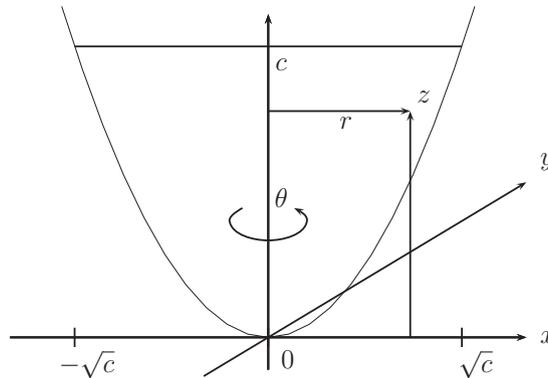


Abbildung 5.13: Abschnitt eines Rotationsparaboloids.

In Zylinderkoordinaten ist

$$K = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : 0 \leq z \leq c, 0 \leq r \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Bei konstanter Massedichte  $\rho \equiv 1$  ergibt sich die Gesamtmasse des Körpers  $K$  zu

$$\mu = \int_K dx = \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r dr d\theta dz = 2\pi \int_0^c \frac{z}{2} dz = \frac{\pi}{2} c^2.$$

Wegen  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  folgt damit für die Koordinaten des Schwerpunkts

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{\mu} \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^2 \cos \theta dr d\theta dz = \frac{1}{\mu} \int_0^c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{z}} r^2 dr \right) \cos \theta d\theta dz = 0, \\ S_y &= \frac{1}{\mu} \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^2 \sin \theta dr d\theta dz = \frac{1}{\mu} \int_0^c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{z}} r^2 dr \right) \sin \theta d\theta dz = 0, \\ S_z &= \frac{1}{\mu} \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r z dr d\theta dz = \frac{2\pi}{\mu} \int_0^c \frac{z^2}{2} dz = \frac{\pi}{3\mu} c^3 = \frac{2}{3} c. \end{aligned}$$

Offensichtlich hängt die Lage des Schwerpunkts eng mit den Symmetrieeigenschaften des Körpers zusammen. Der Schwerpunkt des betrachteten Abschnitts des Rotationsparaboloids liegt auf der Symmetrieachse bzw. im Symmetriemittelpunkt.

Sei  $x$  ein Massepunkt mit Masse  $\mu$  im Abstand  $d(x)$  von einer Drehachse  $A$ . Dann ist  $J_A = \mu d(x)^2$  sein (axiales) „Trägheitsmoment“ bzgl. der Achse  $A$ . Seine kinetische Energie bei Drehung um  $A$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J_A \omega^2.$$

Da sich Trägheitsmomente additiv verhalten, hat ein Körper im Volumen  $K$  mit Massedichte  $\rho$  bzgl. einer Drehachse  $A$  das Trägheitsmoment

$$J_A(K) = \int_K \rho(x) d(x)^2 dx. \quad (5.4.59)$$

Die Definitionen dieser physikalischen Begriffe sind im wesentlichen phänomenologisch, d. h. durch experimentelle Erfahrung, begründet und lassen sich nicht so ohne weiteres wie die Grundbegriffe der Mathematik streng axiomatisch einführen. Die strenge mathematische Schlussweise kommt wieder ins Spiel, wenn bei Akzeptanz ihrer Gültigkeit aus den obigen Beziehungen weitergehende Aussagen abgeleitet werden. Als Beispiel formulieren wir ein klassisches Resultat zur Beziehung der Trägheitsmomente von Körpern bzgl. verschiedener Drehachsen (Satz von Steiner<sup>3</sup>).

**Satz 5.14 (Satz von Steiner):** *Ein Körper mit Massedichte  $\rho > 0$  und Gesamtmasse  $\mu$  nehme ein Volumen  $K \subset \mathbb{R}^3$  ein. Sei  $A$  eine Drehachse durch den Schwerpunkt  $S$  von  $K$  und  $A'$  eine zu  $A$  parallele Drehachse mit Abstand  $d$ . Dann gilt für die Trägheitsmomente des Körpers bzgl.  $A$  und  $A'$ :*

$$J_{A'} = J_A + d^2 \mu. \quad (5.4.60)$$

**Beweis:** Der Ursprung des Koordinatensystems wird in den Schwerpunkt  $S$  des Körpers gelegt, die  $x_3$ -Achse in Richtung der Drehachse  $A$  und die  $x_1$ -Achse von  $S$  in Richtung auf die zweite Drehachse  $A'$ . Dann gilt für die Abstände  $d_A(x)$  und  $d_{A'}(x)$  eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^3$  zu den Achsen  $A$  und  $A'$  (s. Abbildung 5.14)  $d = d_A(x) + d_{A'}(x) = x_1 + d_{A'}(x)$  und folglich

$$d_{A'}(x)^2 = d_A(x)^2 - 2dx_1 + d^2.$$

Also ist

$$J_{A'} = \int_K d_{A'}(x)^2 \rho(x) dx = \int_K d_A(x)^2 \rho(x) dx + d^2 \int_K \rho(x) dx - 2d \int_K x_1 \rho(x) dx.$$

Da der Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt von  $K$  liegt, ist

$$\int_K x_1 \rho(x) dx = S_1 = 0.$$

Also folgt die behauptete Identität  $J_{A'} = J_A + d^2 \mu$ .

Q.E.D.

<sup>3</sup>Jakob Steiner (1796–1863): Mathematiker schweizer Herkunft; später Prof. in Berlin; fundamentale Beiträge zur projektiven Geometrie; zog die Geometrie der Algebra und Analysis vor, da in jenen „Rechnen das Denken ersetzt, während die Geometrie das Denken stimuliert“.

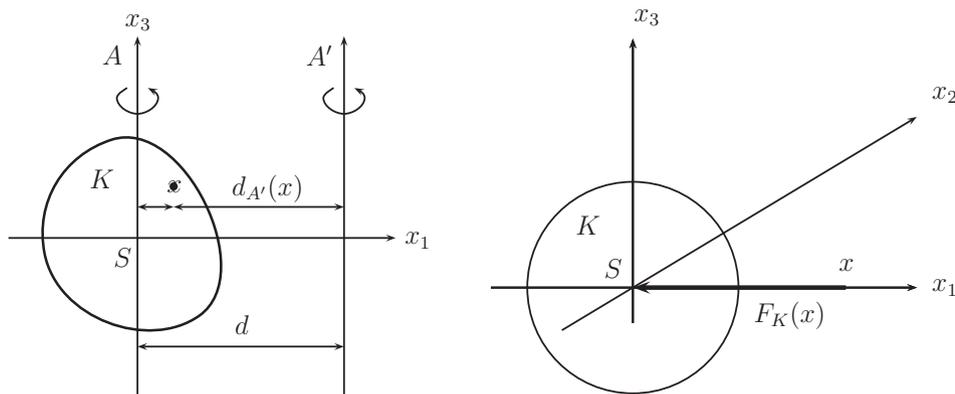


Abbildung 5.14: Trägheitsmomente (links) und Gravitationskraft (rechts).

### 5.4.2 Gravitationskraft

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz übt eine Masse  $\mu$  im Punkt  $a \in \mathbb{R}^3$  auf eine Einheitsmasse im Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  die Kraft

$$F(x) = -\gamma\mu \frac{x - a}{\|x - a\|^3}$$

aus, wobei  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} [cm^3/g \text{ sec}^2]$  die Gravitationskonstante ist. Dieses Gravitationskraftfeld ist der Gradient eines Potentials:

$$U(x) = -\frac{\gamma\mu}{\|x - a\|}, \quad F(x) = -\nabla U(x),$$

welches „Gravitationspotential“ genannt wird. Entsprechend übt ein Körper im (kompakten) Volumen  $K$  mit Massedichte  $\rho = \rho(x)$  auf eine Einheitsmasse im Punkt  $x$  die Kraft

$$F_K(x) = -\gamma \int_K \rho(y) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dy. \quad (5.4.61)$$

aus. Das zugehörige Potential ist

$$U_K(x) = -\gamma \int_K \frac{\rho(y)}{\|x - y\|} dy. \quad (5.4.62)$$

Damit diese Gleichungen Sinn machen, muss die Existenz der jeweiligen Integrale gesichert sein. Wir wollen dies als Übung mit Hilfe der bisher gewonnenen Methoden begründen. Mit Hilfe von Satz 5.13 ergibt sich unmittelbar die Existenz der R-Integrale (5.4.61) und (5.4.62) im Falle  $x \notin K$ . Ferner gilt dann:

$$F_K(x) = -\nabla U_K(x), \quad x \notin K. \quad (5.4.63)$$

Der Fall  $x \in K$  ist etwas subtiler, da es sich dann um uneigentliche R-Integrale handelt.

**Lemma 5.11:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  quadrierbar und kompakt. Dann existiert für eine stetige Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  das (gegebenenfalls uneigentliche) R-Integral

$$F(x) := \int_K \frac{f(y)}{\|x - y\|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Darüberhinaus ist  $F$  stetig und sogar stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\nabla F(x) = - \int_K f(y) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (5.4.64)$$

wobei das Integral wieder als (gegebenenfalls uneigentliches) R-Integral existiert.

**Beweis:** Für  $x \notin K$  ergibt sich die behaupteten Aussage aus Satz 5.13. Wir konzentrieren uns also auf den Fall  $x \in K$ .

i) Von den beiden zu betrachtenden Integralen ist das über  $f(y)(x - y)\|x - y\|^{-3}$  das schwierigere, so dass wir nur dieses diskutieren. Aufgrund der Abschätzung

$$\left\| f(y) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} \right\| \leq \frac{\max_K |f|}{\|x - y\|^2}$$

genügt, es das Integral von  $\|x - y\|^{-2}$  zu betrachten. Für  $\varepsilon > 0$  ist der Integrand auf der Menge  $K \setminus K_\varepsilon(x)$  stetig, so dass die zugehörigen R-Integrale existieren. Für  $\varepsilon > \varepsilon' > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K \setminus K_\varepsilon(x)} \frac{dy}{\|x - y\|^2} - \int_{K \setminus K_{\varepsilon'}(x)} \frac{dy}{\|x - y\|^2} \right| \leq \int_{K_\varepsilon(x) \setminus K_{\varepsilon'}(x)} \frac{dy}{\|x - y\|^2} \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{\varepsilon'}^\varepsilon \frac{r^2 \sin \varphi}{r^2} dr d\varphi d\theta = 4\pi(\varepsilon - \varepsilon'). \end{aligned}$$

Für alle Nullfolgen  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sind also die Folgen der Integrale über die Mengen  $K \setminus K_{\varepsilon_k}(x)$  Cauchy-Folgen mit demselben Limes. Also existiert das betrachtete Integral als uneigentliches R-Integral.

ii) Sei  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit Limes  $x$ . Wir haben die Konvergenz  $F(x^k) \rightarrow F(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) zu zeigen. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Es gibt ein  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|x^k - x\| < \varepsilon, \quad k \geq k_\varepsilon.$$

Mit der Kugelumgebung  $K_{2\varepsilon}(x)$  gilt dann

$$\begin{aligned} |F(x^k) - F(x)| &= \left| \int_{K \setminus K_{2\varepsilon}(x)} f(y) \left( \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{K_{2\varepsilon}(x) \cap K} f(y) \left( \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right) dy \right| \end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge  $K \setminus K_{2\varepsilon}(x)$  konvergiert gleichmäßig

$$\frac{f(y)}{\|x^k - y\|} \rightarrow \frac{f(y)}{\|x - y\|} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Für  $k \geq k'_\varepsilon \geq k_\varepsilon$  hinreichend groß gilt also für das erste Integral:

$$\left| \int_{K \setminus K_{2\varepsilon}(x)} f(y) \left( \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right) dy \right| < \varepsilon.$$

Das zweite Integral wird wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K_{2\varepsilon}(x) \cap K} f(y) \left( \frac{1}{\|x^k - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right) dy \right| \\ & \leq \max_K |f| \left( \int_{K_{3\varepsilon}(x^k)} \frac{1}{\|x^k - y\|} dy + \int_{K_{2\varepsilon}(x)} \frac{1}{\|x - y\|} dy \right) \\ & \leq \max_K |f| \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{3\varepsilon} r \sin \varphi dr d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\varepsilon} r \sin \varphi dr d\varphi d\theta \right) \\ & = \max_K |f| 2\pi (9\varepsilon^2 + 4\varepsilon^2) \leq 26 \max_K |f| \pi \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Für  $k \geq k'_\varepsilon$  ergibt sich also

$$|F(x^k) - F(x)| \leq (1 + 26 \max_K |f| \pi \varepsilon) \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon$  folgt die Stetigkeit von  $F$  in  $x$ . Auf der kompakten Menge  $K$  ist  $F$  gleichmäßig stetig.

iii) Analog wie in (ii) zeigt man die gleichmäßige Stetigkeit der Vektorfunktion

$$G(x) := \int_K f(y) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dy, \quad x \in K.$$

Für jeden der Einheitsvektoren  $e^{(i)}$  gilt dann für kleines  $h > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (F(x + he^{(i)}) - F(x)) &= \frac{1}{h} \int_K f(y) \left( \frac{1}{\|x + he^{(i)} - y\|} - \frac{1}{\|x - y\|} \right) dy \\ &= - \int_K f(y) \left( \int_0^1 \frac{(x + she^{(i)} - y)_i}{\|x + she^{(i)} - y\|^3} ds \right) dy. \end{aligned}$$

Analog wie in Teil (ii) zeigt man nun die Konvergenz dieses Integrals für  $h \rightarrow 0$ , d. h. die Existenz der partiellen Ableitung

$$\partial_i F(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x + he^{(i)}) - F(x)) = \int_K f(y) \frac{(x - y)_i}{\|x - y\|^3} dy.$$

Die nicht ganz einfachen Details dieser Argumentation werden ausgespart. Die Stetigkeit dieser Ableitungen  $\partial_i F$  wurde bereits oben gezeigt. Q.E.D.

**Bemerkung 5.10:** Die Aussagen von Lemma 5.11 gelten auch im Fall, dass die Funktion  $f$  nur einfach R-integrierbar ist.

**Satz 5.15:** Sei  $K$  ein kugelförmiger Körper mit Mittelpunkt  $a$  und homogener Masseverteilung  $\rho_0$ . Dann wird auf einen Massepunkt  $x$  außerhalb der Kugel dieselbe Gravitationskraft ausgeübt, wie wenn die Masse  $\mu$  im Mittelpunkt der Kugel konzentriert wäre:

$$F_K(x) = -\frac{\gamma\mu}{\|x - a\|^2}, \quad x \notin K. \quad (5.4.65)$$

**Beweis:** Der Radius der Kugel sei  $R > 0$ . Der Abstand des Punktes  $x$  zum Mittelpunkt der Kugel sei  $\eta > R$ . Wir bestimmen zunächst die Masse der Kugel:

$$\mu = \int_K \rho_0 dx = \rho_0 |K| = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0.$$

Zur Berechnung der auf  $x$  wirkenden Anziehungskraft wird zweckmäßigerweise der Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel und die  $x_3$ -Achse durch den Punkt  $x$  gelegt. Bezüglich dieses Koordinatensystems ist dann  $x = (0, 0, \eta)$ . Die auf  $x$  wirkende Gravitationskraft hat die Komponenten

$$F_i(x) = -\gamma\rho_0 \int_K \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^3} dy, \quad i = 1, 2, 3.$$

Da der Abstand von  $x$  zum Kugelmittelpunkt größer als der Radius ist, ist dieses Integral ein normales Riemann-Integral. Die Anziehungskraft der Kugel ist zum Mittelpunkt hin orientiert. Folglich gilt

$$F_1(x) = F_2(x) = 0,$$

und es bleibt  $F_3(x)$  zu berechnen. Dafür gilt:

$$F_3(0, 0, \eta) = -\gamma\rho_0 \int_K \frac{\eta - y_3}{(y_1^2 + y_2^2 + (\eta - y_3)^2)^{3/2}} dy = \gamma\rho_0 \int_K \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + (\eta - y_3)^2}} dy.$$

Nach Satz 5.13 kann hier Differentiation und Integration vertauscht werden:

$$F_3(0, 0, \eta) = \gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} \int_K \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + (\eta - y_3)^2}} dy.$$

Transformation auf Zylinderkoordinaten (alternativ Kugelkoordinaten) und Verwendung des Satzes von Fubini liefert nun

$$\begin{aligned} F_3(0, 0, \eta) &= \gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\eta - z)^2}} r d\theta dr dz \\ &= 2\pi\gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R \sqrt{r^2 + (\eta - z)^2} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} dz \\ &= 2\pi\gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R \{ \sqrt{R^2 - z^2 + (\eta - z)^2} - \sqrt{(\eta - z)^2} \} dz \\ &= 2\pi\gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} \int_{-R}^R \{ \sqrt{R^2 - 2\eta z + \eta^2} - |\eta - z| \} dz. \end{aligned}$$

Wir betrachten die folgenden Einzelintegrale (Man beachte  $\eta > R$ ):

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2\eta z + \eta^2} dz &= -\frac{1}{3\eta} (R^2 - 2\eta z + \eta^2)^{3/2} \Big|_{-R}^R \\ &= -\frac{1}{3\eta} ((R^2 - 2\eta R + \eta^2)^{3/2} - (R^2 + 2\eta R + \eta^2)^{3/2}) \\ &= -\frac{1}{3\eta} ((\eta - R)^3 - (R + \eta)^3) \\ &= -\frac{1}{3\eta} (\eta^3 - 3\eta^2 R + 3\eta R^2 - R^3 - R^3 - 3R^2 \eta - 3R\eta^2 - \eta^3) \\ &= \frac{1}{3\eta} (6\eta^2 R + 2R^3). \end{aligned}$$

sowie

$$-\int_{-R}^R |\eta - z| dz = \frac{1}{2} (\eta - z)^2 \Big|_{-R}^R = \frac{1}{2} ((\eta - R)^2 - (\eta + R)^2) = -2\eta R.$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$F_3(0, 0, \eta) = 2\pi\gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{3\eta} (6\eta^2 R + 2R^3) - 2\eta R \right) = 2\pi\gamma\rho_0 \frac{d}{d\eta} \frac{2R^3}{3\eta} = -\gamma\rho_0 \frac{4\pi R^3}{3\eta^2}.$$

Dies ist gerade die Anziehungskraft, welche durch eine Masse  $\mu = \rho_0 |K_R(a)|$  im Mittelpunkt der Kugel auf den Massepunkt  $x \notin K_R(a)$  ausgeübt wird:

$$F_3(0, 0, \eta) = -\gamma\rho_0 |K_R(a)| \frac{(x_3 - a_3)}{\|x - a\|^3} = -\gamma\rho_0 \frac{4\pi R^3}{3\eta^2}.$$

Q.E.D.

## 5.5 Übungen

**Übung 5.1:** Seien  $A_k \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , beschränkte Mengen mit der Eigenschaft  $A_{k+1} \subset A_k$  und  $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ . Man beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussage für den äußeren Jordan-Inhalt  $|\cdot|_a$ :

$$|A|_a = \lim_{k \rightarrow \infty} |A_k|_a.$$

(Hinweis: Es kann die Eigenschaft  $|M|_a = |\overline{M}|_a$  des äußeren Inhalts verwendet werden.)

**Übung 5.2:** Welche von den folgenden Aussagen für den „äußeren“ Jordan-Inhalt  $|\cdot|_a$  von Mengen  $M \in \mathbb{R}^n$  ist richtig (mit Begründung)?

$$i) \quad |M|_a = |M^\circ|_a, \quad ii) \quad |M|_a = |\overline{M}|_a, \quad iii) \quad |\partial M|_a = 0.$$

Wie lauten die Antworten für den „inneren“ Jordan-Inhalt  $|\cdot|_i$  und im Fall quadrierbarer Mengen für den Jordan-Inhalt?

**Übung 5.3:** Es seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $N \subset \mathbb{R}^m$  (beschränkte) quadrierbare Mengen. Man zeige, dass dann auch die „Produktmenge“

$$M \times N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in M, y \in N\}$$

als Menge in  $\mathbb{R}^{n+m}$  quadrierbar ist, und dass die folgende „Produktformel“ gilt:

$$|M \times N| = |M| |N|.$$

(Hinweis: Die Produktformel ist offensichtlich richtig für Intervalle.)

**Übung 5.4:** Man untersuche, ob der Graph der durch

$$f(x) := \sin(1/x), \quad x \in (0, 1], \quad f(0) := 0,$$

gegebenen Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Jordan-Nullmenge im  $\mathbb{R}^2$  ist. (Bemerkung: Die Funktion  $f$  ist *nicht* überall stetig.)

**Übung 5.5:** Man zeige, dass die Einheitskugel  $K_1^{(n)}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$  des  $\mathbb{R}^n$  quadrierbar ist. (Hinweis: Man interpretiere den Rand der Einheitskugel als Vereinigung von Funktionsgraphen.)

**Übung 5.6:** a) Man berechne das R-Integral der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

über dem Würfel  $D = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  mit Hilfe seiner Definition als Limes Riemannscher Summen. (Bemerkung: Der zur Lösung dieser Aufgabe erforderliche Aufwand motiviert die Suche nach leistungsfähigeren Methoden zur Integraberechnung ( $\rightarrow$  Satz von Fubini).)

b) Man berechne dasselbe Integral mit Hilfe des Satzes von Fubini.

**Übung 5.7:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine quadrierbare Menge und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine R-integrierbare Funktion. Man begründe, warum dann auch die folgenden R-Integrale existieren:

$$J_1 := \int_D |f(x)|^m dx, \quad m \in \mathbb{N}, \quad J_2 := \int_D \exp(f(x)) dx, \quad J_3 := \int_D \sqrt{|f(x)|} dx.$$

(Hinweis: Man verwende so weit wie möglich Sätze aus dem Text.)

**Übung 5.8:** Man skizziere die folgende Mengen und berechne ihren Jordan-Inhalt:

- $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq \pi, \sin(x_1) \leq x_2 \leq \sin(x_1) + 1\}$ ,
- $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ ,
- $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq e^{-x_1}\}$ .

(Hinweis: Man fasse die Mengen als „Ordinatenmengen“ auf. Die Menge in c) ist unbeschränkt, so dass ihr „Jordan-Inhalt“ gegebenenfalls als Limes der Jordan-Inhalte zu einer ausschöpfenden Folge von Teilmengen zu verstehen ist.)

**Übung 5.9:** Seien  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine quadrierbare Menge und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  R-integrierbare Funktionen, d. h.:  $f, g \in R(D)$ . Man beweise mit den Mittel aus dem Text die Schwarzsche Ungleichung

$$\left| \int_D f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \int_D |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_D |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

(Hinweis: Durch die linke Seite wird auf dem Vektorraum  $R(D)$  nur ein Semi-Skalarprodukt definiert.)

**Übung 5.10:** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  quadrierbar. Man zeige, dass für eine beschränkte, R-integrierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auch die durch

$$a) \quad F_1(x) = f(x)^p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad b) \quad F_2(x) = e^{f(x)}.$$

gegebenen Funktionen  $F_1, F_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  über  $D$  R-integrierbar sind.

**Übung 5.11:** Man skizziere die folgenden Mengen und berechne ihren Jordan-Inhalt:

$$a) \quad M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\},$$

$$b) \quad M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sin y, 0 \leq y \leq \pi\}.$$

(Hinweis: Man fasse die Mengen als Ordinatenmengen auf und verwende ein Resultat aus dem Text.)

**Übung 5.12:** Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die durch

$$g(x, y) := \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) := 0,$$

definierte Funktion. Man zeige, dass für jedes  $y \in \mathbb{R}$  die Integrale

$$f(y) = \int_0^1 g(x, y) dx, \quad f^*(y) = \int_0^1 \partial_y g(x, y) dx$$

wohldefiniert sind und dass die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist, jedoch

$$f'(0) \neq f^*(0).$$

Dieses Beispiel zeigt, dass bei der Differentiation von parameterabhängigen Integralen nicht ohne weiteres auf die Annahme der Stetigkeit der Funktionen verzichtet werden kann.

**Übung 5.13:** Seien  $f$  und  $\partial_y f$  im Rechteck  $D = [a, b] \times [c, d]$  stetig und  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b$ . Man zeige, dass dann gilt:

$$\frac{d}{dy} \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y) dx = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \partial_y f(x, y) dx + \varphi'(y)f(\varphi(y), y) - \psi'(y)f(\psi(y), y).$$

(Hinweis: Man untersuche die Konvergenz der zugehörigen Differenzenquotienten.)

**Übung 5.14:** Man berechne mit Hilfe der Regeln des Satzes von Fubini das folgende R-Integral:

$$J = \int_I \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} d(x,y), \quad I := [0,1] \times [0,1].$$

(Hinweis: Man überlege sich eine günstige Reihenfolge für die eindimensionalen Integrationen.)

**Übung 5.15:** Mehrdimensionale R-Integrale der Form

$$J := \int_D F(\|x\|_2) dx$$

auf einem rotationssymmetrischen Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$  berechnet man am einfachsten mit Hilfe der Substitutionsregel und des Satzes von Fubini.

a) Man beschreibe die entsprechende Argumentation zur Berechnung eines solchen Integrals im Fall  $n = 2$  für  $D = K_R(0) \setminus K_r(0)$  (mit Angabe der verwendeten Koordinatentransformation und der zugehörigen Urbild- und Bildbereiche). Dabei bezeichnet  $K_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq R\}$  die  $R$ -Kugel in  $\mathbb{R}^2$ .

b) Man berechne die Integrale

$$a) J_1 = \int_{K_2(0) \setminus K_1(0)} \frac{1}{\|x\|_2^2} dx, \quad b) J_2 = \int_{K_1(0)} \cos(\|x\|_2^2) dx.$$

**Übung 5.16:** Man untersuche, welches der folgenden Integrale als uneigentliches R-Integral existiert:

$$\begin{aligned} a) J_1 &= \int_{K_1^{(2)}(0)} \frac{1}{\|x\|_2^2} dx, & b) J_2 &= \int_{K_1^{(3)}(0)^c} \frac{1}{\|x\|_2^4} dx, \\ c) J_3 &= \int_{K_1^{(2)}(0)} \frac{1}{1 - \|x\|_2} dx & d) J_4 &= \int_{K_1^{(2)}(0)^c} \frac{1}{\|x\|_2^2} dx \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $K_1^{(n)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$  die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  um den Nullpunkt und  $K_1^{(n)}(0)^c$  ihr Komplement.

**Übung 5.17:** Man berechne mit Hilfe der Substitutionsregel die folgenden R-Integrale in  $\mathbb{R}^2$ :

$$a) J_1 := \int_{K_2(0) \setminus K_1(0)} \frac{1}{\|x\|_2} dx, \quad b) J_2 = \int_{K_1(0)} e^{\|x\|_2^2} dx.$$

Dabei ist  $K_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < r\}$  die  $r$ -Kugel in  $\mathbb{R}^2$

**Übung 5.18:** Sei  $K_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$  und  $f, g : \overline{K_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und rotationssymmetrisch, d. h. für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| = \|y\|$  gilt:

$$f(x) = f(y), \quad g(x) = g(y).$$

Man zeige, dass dann die durch

$$F(x) := \int_{K_R(0)} f(y)g(x-y) dy$$

definierte „Faltungsfunktion“  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls rotationssymmetrisch ist. (Hinweis: Zu je zwei Punkten  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| = \|y\|$  gibt es eine orthogonale Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $y = Qx$ . Es genügt also zu zeigen, dass  $F(x) = F(Qx)$  für jede solche orthogonale Matrix. Dazu verwende man den Transformationsatz.)

**Übung 5.19:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^2$  eine quadrierbare, kompakte Menge und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  eine Riemann-integrierbare Funktion. Man zeige, dass die durch

$$F(x) := \int_K \frac{f(y)}{\|x-y\|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

definierte Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. (Hinweis: Im Fall  $x \in K$  zerlege man das Integral über  $K$  in zwei Integrale über  $K \setminus K_\varepsilon(x)$  und  $K_\varepsilon(x) \cap K$ .)

**Übung 5.20:** Sei  $F(x)$  die Gravitationskraft, welche eine Kugel  $K \subset \mathbb{R}^3$  mit Radius  $R > 0$  und konstanter Massedichte  $\rho_0$  auf einen Massepunkt  $x$  im Abstand  $\eta > 0$  vom Mittelpunkt der Kugel ausübt. Für den Fall  $\eta < R$ , d. h. für Punkte im Innern der Kugel, zeige man die Formel

$$F(x) = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0\eta, \quad x \in K.$$

*Bemerkung:* Erstaunlicherweise hängt  $F(x)$  in diesem Fall nicht vom Radius  $R$  der Kugel ab, d. h.: Die äußeren Kugelschichten üben keine Anziehungskräfte auf den Massepunkt  $x$  aus. Für Punkte außerhalb der Kugel gilt dagegen die im Text bewiesene Formel

$$F(x) = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0\frac{R^3}{\eta^2}, \quad x \notin K.$$