4 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Theorie der sog. „gewöhnlichen Differentialgleichungen“ entwickelt, soweit das mit den bisher bereitgestellten analytischen Mitteln möglich ist. Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen treten meist sog. „Anfangswertaufgaben“ auf, bei denen Werte der gesuchten Funktion zu einem Anfangszeitpunkt t_0 vorgeschrieben sind. Mir diesen wollen wir uns im Folgenden auch ausschließlich beschäftigen. Daneben gibt auch sog. „Randwertaufgaben“, bei denen Werte der gesuchten Funktion in Rand- oder Zwischenpunkten des zugrunde liegenden Definitionsintervalls vorgeschrieben sind.

4.1 Anfangswertaufgaben

Die allgemeinste (skalare) gewöhnliche Differentialgleichung d-ter Ordnung für eine d-mal differenzierbare Funktion $u(t)$ auf einem Intervall $I=[t_0,t_0{+}T]$ hat die *implizite* Gestalt

$$F(t,u(t),u'(t),...,u^{(d)}(t))=0\,,\quad t\in I\,, \tag{4.1.1}$$

mit einer Funktion $F(t,x_0,x_1,...,x_d)$. Im Fall $\partial F/\partial x_d\neq 0$ kann nach dem Satz über implizite Funktionen in (4.1.1) lokal nach $u^{(d)}$ aufgelöst werden, und man erhält eine *explizite* Differentialgleichung

$$u^{(d)}(t)=f(t,u,u',...,u^{(d-1)})\,,\quad t\in I\,. \tag{4.1.2}$$

Durch Einführung der Hilfsfunktionen $u_1{:=}u, u_2{:=}u', \dots, u_d{:=}u^{(d-1)}$ kann die Gleichung (4.1.2) d-ter Ordnung in ein dazu äquivalentes System von Gleichungen erster Ordnung überführt werden:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t)\,,\\ &\vdots\\ u_{d-1}'(t) &= u_d(t)\,,\\ u_d'(t) &= f(t,u_1(t),\dots,u_d(t))\,. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

In kompakter Notation lautet dies

$$u'(t)=f(t,u(t))\,, \tag{4.1.4}$$

mit den Vektorfunktionen $u(t)=(u_1(t),\dots,u_d(t))^T$ und $f(t,x)=(f_1(t,x),\dots,f_d(t,x))^T$. Ausgehend von einem Anfangspunkt $(t_0,u^0)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^d$ werden Lösungen $u(t)$ auf dem „Zeit“-intervall $I=[t_0,t_0+T]$ gesucht mit der Eigenschaft $u(t_0)=u_0$. Diese Aufgabenstellung wird in diesem Zusammenhang als „Anfangswertaufgabe“ bezeichnet. Hat die Vektorfunktion $f(t,x)$ die Form

$$f(t,x)=A(t)x+b(t)$$

mit einer Matrixfunktion $A(t)\in\mathbb{R}^{d\times d}$ und einer Vektorfunktion $b(t)\in\mathbb{R}^d$, so nennt man die Differentialgleichung bzw. die Anfangswertaufgabe „linear“. Diese Bezeichnung ist analog zu der bei *linearen* Gleichungssystemen $Ax=b$.

4.1.1 Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

Die folgenden Beispiele aus verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen vermitteln einen Eindruck von der Vielfältigkeit der auftretenden Probleme.

Beispiel 4.1 (Zweikörperproblem): Gefragt ist nach der Bewegung zweier astronomischer Körper im wechselseitigen Schwerefeld. Sie werden dabei als Punkteinheitsmassen beschrieben. Das Koordinatensystem der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei so gelegt, dass der Ursprung $(0,0)$ in dem einen Körper liegt. Die Position des zweiten Körpers ist dann eine Funktion der Zeit mit Koordinatenfunktionen, $(x(t), y(t))$, welche nach dem Newtonschen Gesetz dem folgenden System von Gleichungen genügen:

$$x''(t) = -\frac{\gamma}{r(t)^3}x(t), \quad y''(t) = -\frac{\gamma}{r(t)^3}y(t), \quad r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2)}. \tag{4.1.5}$$

Die „Anfangsbedingungen“ sind z. B. $(0 \le \varepsilon < 1)$:

$$x(0) = 1 - \varepsilon\,, \quad x'(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = \sqrt{\gamma(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)}\,.$$

Für diese als „Anfangswertproblem“ bezeichnete Aufgabe existieren periodische Lösungen mit der Periode $\omega = 2\pi/\gamma$. Ihr Orbit ist eine Ellipse mit Exzentrizität ε und einem Brennpunkt in $(0,0)$.

Beispiel 4.2 (Populationsmodell): Die zeitliche Entwicklung einer gemischten Population von Füchsen, $f(t)$, und Kaninchen, $r(t)$, wird unter den Annahmen

- unbeschränkter Futtervorrat für Kaninchen,
- Kaninchen einzige Nahrung für Füchse,

durch das Modell beschrieben:

$$r'(t) = 2r(t) - \alpha r(t)f(t), \quad f'(t) = -f(t) + \alpha r(t)f(t), \tag{4.1.6}$$

wobei zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gewisse Werte für die Populationen angenommen werden, etwa $r(0) = r_0$ und $f(0) = f_0$. Im Falle $\alpha > 0$ dezimieren die Füchse die Kaninchen mit einer Rate proportional zum Produkt der Individuenzahlen und vermehren sich selbst mit derselben Rate. Für $\alpha = 0$ besteht keine Wechselwirkung zwischen Kaninchenpopulation und Fuchspopulation, und die Lösung ist

$$f(t) = f_0 e^{-t} \quad \text{(Aussterben)}, \qquad r(t) = r_0 e^{2t} \quad \text{(Bevölkerungsexplosion)}.$$

Beispiel 4.3 (Chemische Reaktionskinetik): In einem Gefäß befinden sich drei Chemikalien $A_i,\ i = 1,2,3$, mit Konzentrationen $c_i(t)$, welche wechselseitig miteinander reagieren mit Reaktionsraten k_i:

$$A_1 \xrightarrow{k_1} A_2\,, \quad A_2 + A_3 \xrightarrow{k_2} A_1 + A_3\,, \quad 2A_2 \xrightarrow{k_3} A_3\,.$$

Bei Vorgabe der Anfangskonzentrationen $c_i(0)$ ist die zeitliche Entwicklung von c_i bestimmt durch die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -k_1c_1(t) + k_2c_2(t)c_3(t) \\ c_2'(t) &= k_1c_1(t) - k_2c_2(t)c_3(t) - 2k_3c_2(t) \\ c_3'(t) &= 2k_3c_2(t)\,. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Beispiel 4.4 (Lorenz-System): Der Meteorologe und Mathematiker E. N. Lorenz[1] hat 1963 das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen angegeben, um die Unmöglichkeit einer Langzeitwettervorhersage zu illustrieren:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sigma x(t) + \sigma y(t)\,, \\ y'(t) &= rx(t) - y(t) - x(t)z(t)\,, \\ z'(t) &= x(t)y(t) - bz(t)\,, \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

mit den Anfangswerten $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Tatsächlich hat er dieses System durch mehrere stark vereinfachende Annahmen aus den Grundgleichungen der Strömungsmechanik, den sog. Navier-Stokes-Gleichungen, welche u. a. auch die Luftströmungen in der Erdatmosphäre beschreiben, abgeleitet.

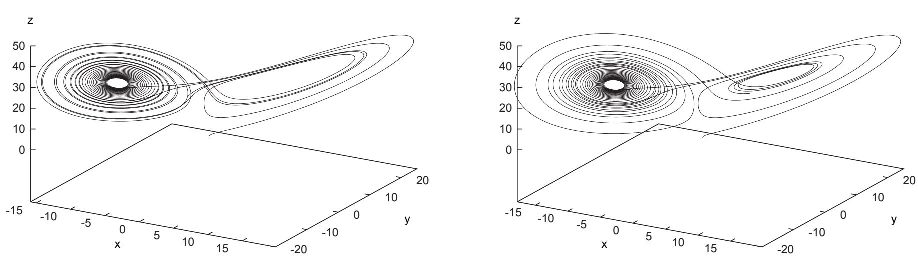

Abbildung 4.1: *Numerisch berechnete Lösungstrajektorie für das Lorenz-System auf dem Intervall $I = [0,25]$: qualitativ korrekte Approximation (links) und qualitativ falsches Resultat (rechts).*

Für die Parameterwerte

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad r = 28,$$

besitzt das *Lorenz-System* eine eindeutige Lösung, die aber extrem sensitiv gegenüber Störungen der Anfangsdaten ist. Kleine Störungen in diesen werden z. B. über das verhältnismäßig kurze Zeitintervall $I = [0,25]$ bereits mit einem Faktor $\approx 10^8$ verstärkt.

[1]Edward N. Lorenz (1916–. . .): US-amerikanischer Mathematiker und Meteorologe; Prof.em. am MIT in Boston; fundamentale Beiträge zur Theorie dynamischer Systeme („deterministisches Chaos“).

In Abb. 4.1 sind zwei Approximationen der Lösungstrajektorie über das Zeitintervall $I = [0, 25]$ dargestellt, wie sie mit verschiedenen numerischen Verfahren berechnet worden sind; das linke Ergebnis ist das qualitativ korrekte. Man erkennt zwei Zentren im $\mathbb{R}^3$, um welche der Lösungspunkt $(x(t), y(t), z(t))$ mit fortlaufender Zeit kreist, wobei gelegentlich ein Wechsel von dem einen Orbit in den anderen erfolgt.

4.1.2 Konstruktion von Lösungen

Eine skalare Differentialgleichung $u' = f(t, u)$ bestimmt ein „Richtungsfeld", d. h.: In jedem Punkt $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ wird durch $u' = f(t, x)$ eine Steigung gegeben; s. Abb. 4.2 und 4.3. Gesucht sind differenzierbare Funktionen $u(t)$ deren Graph $G(u) := \{(t, x) : x = u(t)\}$ in jedem seiner Punkte gerade die vorgegebene Steigung hat.

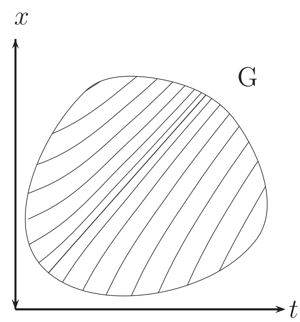

Abbildung 4.2: *Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung* $u' = f(t, u)$.

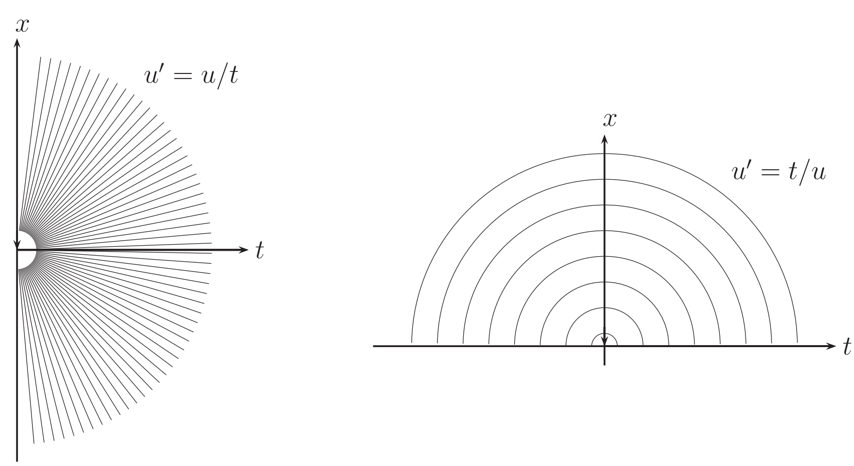

Abbildung 4.3: *Richtungsfelder der Differentialgleichgungen* $u' = u/t$ *(links) und* $u' = -t/u$ *(rechts).*

In einfachen Fällen kann man aus ihrem Richtungsfeld die möglichen Lösungen einer Differentialgleichungen ersehen. So besitzt die Differentialgleichung

$$u'(t) = \frac{u(t)}{t}$$

die Geraden $u(t) = ct$ als Lösungen. Als Lösungen der Differentialgleichung

$$u'(t) = -\frac{t}{u(t)}$$

ergeben sich die Funktionen (Halbkreise) $u(t) = \sqrt{c - t^2}$, $|t| < \sqrt{c}$.

A) Methode der „Trennung der Variablen"

Wir betrachten die „separable" Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)) = a(t)g(u(t)),$$

bei der in der rechten Seite die Variablen t und u separiert auftreten. Sei u eine Lösung. Im Fall $g(u(t)) \neq 0$ gilt dann

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{g(u(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Mit Hilfe der Substitution $z := u(s)$ im linken Integral ergibt sich mit $dz = u'(s)\, ds$:

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{g(z)}\, dz = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Hieraus lässt sich in konkreten Fällen häufig eine Lösung $u(t)$ berechnen. Z. B. ergibt sich für die Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t)^2$$

durch den Ansatz

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{z^2}\, dz = -\frac{1}{z}\Big|_{u_0}^{u(t)} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}$$

eine Lösung der Form

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}.$$

Diese existiert nicht für alle $t \geq t_0$ (Singulariät bei $t = t_0 + u_0^{-1}$), obwohl die Funktion $f(x) = x^2$ ein Polynom ist. Speziell für $t_0 = 0$ und $u_0 = 1$ ist

$$u(t) = \frac{1}{1 - t}, \quad 0 \leq t < 1.$$

B) Methode der „Variation der Konstanten“

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t), \quad t \in I := [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}, \tag{4.1.9}$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$. Die zugehörige „homogene“ Differentialgleichung

$$v'(t) = a(t)v(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

hat eine Lösung der Form

$$v(t) := c \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\Big),$$

mit einer freien Konstante $c \in \mathbb{R}$, was man direkt nachrechnet. Sei $v(t)$ eine Lösung mit $c = 1$. Zur Bestimmung einer Lösung der „inhomogenen“ Differentialgleichung (4.1.9) wird c als Funktion von t angesetzt und so bestimmt, dass $u(t) := c(t)v(t)$ die Differentialgleichung erfüllt, d. h.:

$$u'(t) = c(t)v'(t) + c'(t)v(t) = a(t)u(t) + b(t).$$

Daher wird diese Methode auch „Variation der Konstante“ genannt. Wegen $c(t)v'(t) = c(t)a(t)v(t) = a(t)u(t)$ ergibt sich die Bedingung

$$c'(t)v(t) = b(t)$$

bzw.

$$c(t) = \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^\tau a(s)\, ds\Big) b(\tau)\, d\tau + \gamma$$

mit einer freien Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$. Damit wird

$$u(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\Big) \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^\tau a(s)\, ds\Big) b(\tau)\, d\tau + \gamma \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\Big).$$

Durch Wahl der Konstante $\gamma = u_0$ kann erreicht werden, dass die Funktion $u(t)$ einen gegebenen Anfangswert $u(t_0) = u_0$ annimmt. Entsprechend schreiben wir

$$u(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\Big)\Big[u_0 + \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^\tau a(s)\, ds\Big) b(\tau)\, d\tau\Big]. \tag{4.1.10}$$

Diese Funktion erfüllt dann die lineare Differentialgleichung (4.1.9). Wir werden im Folgenden sehen, dass diese Lösung durch die Vorgabe eines Anfangswertes $u(t_0) = u_0$ eindeutig festgelegt ist. Im einfachsten Fall konstanter Koeffizienten hat die homogene Differentialgleichung

$$u'(t) = au(t)$$

eine Lösung der Form $u(t) = ce^{at}$. Diese hat das asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned}
a < 0: &\quad |u(t)| \to 0 \quad (t \to \infty)\,,\\
a = 0: &\quad |u(t)| = |c|\,,\\
a > 0: &\quad |u(t)| \to \infty \quad (t \to \infty)\,.
\end{aligned}$$

Die inhomogene Differentialgleichung

$$u'(t) = au(t) + b(t)$$

hat nach dem oben Gezeigten eine Lösung der Form

$$u(t) = e^{at}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b(\tau)\,d\tau. \tag{4.1.11}$$

Jede dieser Lösungen ist, wie wir später sehen werden, durch ihren „Anfangswert“ $u(t_0) = u_0$ eindeutig bestimmt.

4.1.3 Existenz von Lösungen

Wir betrachten im folgenden allgemeine Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung der oben beschriebenen Form

$$u'(t) = f(t, u(t))\,. \tag{4.1.12}$$

Die Vektorfunktion $f(t,x)$ sei auf einem abgeschlossenen Bereich $D = I \times \Omega \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ des (t,x)-Raumes, welcher den Punkt (t_0, u_0) enthält, definiert und dort stetig. Weiterhin werden die Standardnotationen für das euklidische Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^d$, sowie für die zugehörige natürliche Matrizennorm $\|A\|$ („Spektralnorm“) verwendet. Ferner werden partielle Ableitungen einer Funktion $f(t,x)$ nach t und x_i wieder mit $\partial_t f := \partial f/\partial t$ bzw. $\partial_i f := \partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, d$, abgekürzt.

Definition 4.1 (AWA): *Bei einer „Anfangswertaufgabe“ (kurz AWA) zum Differentialgleichungssystem (4.1.12) ist zu einem gegebenen Punkt $(t_0, u_0) \in D$ eine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$ gesucht mit den Eigenschaften:*

i) $\mathrm{Graph}(u) := \{(t, u(t)), t \in I\} \subset D$,

ii) $u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I$,

iii) $u(t_0) = u_0$ *(„Anfangsbedingung“).*

Im Folgenden bezeichnen wir mit AWA stets eine Situation mit diesen Gegebenheiten.

Aufgrund des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung ist eine stetige Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$ offenbar genau dann Lösung der AWA, wenn $\mathrm{Graph}(u) \subset D$ ist, und u die „Integralgleichung“

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds, \quad t \in I, \tag{4.1.13}$$

erfüllt. Im Spezialfall $f(t,x) = f(t)$ ist damit die Lösung der AWA äquivalent zur Bestimmung eines Integrals:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds.$$

Im allgemeinen Fall ist die Lösung nicht so einfach aus (4.1.13) bestimmbar. Trotzdem ist diese Integraldarstellung der Ausgangspunkt zum Nachweis der Existenz von Lösung der AWA.

Bemerkung 4.1: Die Integralgleichung (4.1.13) ist ein Spezialfall einer sog. „Volterraschen[2] Integralgleichung"

$$u(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,s,u(s))\,ds, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{4.1.14}$$

mit gegebener „Inhomogenität" $g(t)$ und „Integralkern" $k(t,s,x)$. Ist die obere Integrationsgrenze fest gegeben,

$$u(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t_1} k(t,s,u(s))\,ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

spricht man von einer „Fredholmschen[3] Integralgleichung".

Eine allgemeine Aussage über die *lokale* Existenz von Lösungen der AWA macht der folgende fundamentale Satz von Peano[4]:

Satz 4.1 (Existenzsatz von Peano): *Die Funktion* $f(t,x)$ *sei stetig auf dem* $(d+1)$*-dimensionalen Zylinder*

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d : |t-t_0| \le \alpha\,, \|x-u_0\| \le \beta\}\,.$$

Dann existiert eine Lösung $u(t)$ *der* AWA *auf dem Intervall* $I := [t_0 - T, t_0 + T]$, *wobei*

$$T := \min\Big(\alpha, \frac{\beta}{M}\Big), \qquad M := \max_{(t,x)\in D} \|f(t,x)\|.$$

Beweis: Zum Beweis konstruieren wir mit Hilfe einer „Differenzenmethode" eine Folge von stückweise linearen Funktionen, welche eine Teilfolge besitzt, die (gleichmäßig) gegen eine Lösung der AWA konvergiert. O.B.d.A. genügt es, das Halbintervall $I = [t_0, t_0 + T]$ zu betrachten. Zu einem Schrittweitenparameter $h > 0\,(h \to 0)$ wird eine äquidistante Unterteilung des Intervalls I gewählt:

$$t_0 < \ldots < t_n < \ldots < t_N = t_0 + T\,, \quad h = |t_n - t_{n-1}|\,.$$

Ausgehend von $u_0^h := u_0$ erzeugt dann das sog. „Eulersche Polygonzugverfahren" Werte u_n^h durch die sukzessive Vorschrift

$$u_n^h = u_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, u_{n-1}^h)\,, \quad n \ge 1\,. \tag{4.1.15}$$

[2]Vito Volterra (1860–1940): Italienischer Mathematiker; Prof. in Pisa, Turin und Rom; Beiträge zur Analysis, Differential- und Integralgleichungen, zu Problemen der mathematischen Physik und Biologie.

[3]Erik Ivar Fredholm (1866–1927): Schwedischer Mathematiker; Prof. in Stockholm; Beiträge zur Analysis, Integralgleichungen, Potentialtheorie und Spektraltheorie.

[4]Guiseppe Peano (1858–1932): Italienischer Mathematiker; Prof. in Turin; Beiträge zur Analysis, gewöhnlichen Differentialgleichungen, einer der Väter der Mathematischen Logik

Diese *diskreten* Funktionswerte werden linear interpoliert zu einer stetigen Funktion:

$$u^h(t) := u^h_{n-1} + (t-t_{n-1}) f(t_{n-1}, u^h_{n-1})\,, \quad t_{n-1} \le t \le t_n\,.$$

i) Wir zeigen zunächst, dass diese Konstruktion durchführbar ist, d. h.: $\mathrm{Graph}(u^h) \subset D$. Sei $(t, u^h(t)) \in D$ für $t_0 \le t \le t_{k-1}$. Offenbar ist $u^{h\prime}(t) \equiv f(t_{k-1}, u^h_{k-1})\,, t \in [t_{k-1}, t_k]$. Nach Konstruktion gilt dann für $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} u^h(t) - u_0 &= u^h(t) - u^h_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \{u^h_i - u^h_{i-1}\} \\ &= (t-t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h_{k-1}) + h \sum_{i=1}^{k-1} f(t_{i-1}, u^h_{i-1}) \end{aligned}$$

und folglich

$$\|u^h(t) - u_0\| \le (t-t_{k-1})M + (t_{k-1}-t_0)M = (t-t_0)M \le \beta\,.$$

Also ist $(t, u^h(t)) \in D$ für $0 \le t \le t_k$. Durch Induktion folgt $\mathrm{Graph}(u^h) \subset D$.

ii) Wir zeigen als nächstes, dass die Funktionenfamilie $\{u^h\}_{h>0}$ *gleichgradig* stetig ist. Seien dazu $t, t' \in I$, $t' \le t$ beliebig mit $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $t' \in [t_{j-1}, t_j,]$ für gewisse $t_j \le t_k$. Im Fall $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$ ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u^h_{k-1} + (t-t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) - u^h_{k-1} - (t'-t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) \\ &= (t-t') f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) \end{aligned}$$

und somit $\|u^h(t) - u^h(t')\| \le M|t-t'|$. Im Fall $t_j < t_k$ ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u^h(t) - u^h_{k-1} + \sum_{i=j}^{k-1} \{u^h_i - u^h_{i-1}\} + u^h_{j-1} - u^h(t') \\ &= (t-t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h_{k-1}) + h \sum_{i=j}^{k-1} f(t_{i-1}, u^h_{i-1}) + (t_{j-1}-t') f(t_{j-1}, u^h_{j-1}) \\ &= (t-t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h_{k-1}) + h \sum_{i=j+1}^{k-1} f(t_{i-1}, u^h_{i-1}) + (h + t_{j-1}-t') f(t_{j-1}, u^h_{j-1}) \end{aligned}$$

und folglich

$$\|u^h(t) - u^h(t')\| \le M\big\{(t-t_{k-1}) + (t_{k-1}-t_j) + (t_j - t')\big\} \le M|t-t'|\,.$$

Also ist die Familie $\{u^h\}_{h>0}$ gleichgradig stetig (sogar gleichgradig Lipschitz-stetig). Ferner sind die Funktionen u^h wegen der gemeinsamen Anfangswerte $u^h(t_0) = u_0$ auch gleichmäßig beschränkt:

$$\|u^h(t)\| \le \|u^h(t) - u_0\| + \|u_0\| \le MT + \|u_0\|, \quad t \in]t_0, t_0+T].$$

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (s. Kapitel 4 im Band Analysis 1) existiert dann eine Nullfolge $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion u auf I, so dass

$$\max_{t\in I}\|u^{h_i}(t)-u(t)\|\to 0 \ \ (i\to\infty)\,. \tag{4.1.16}$$

Offenbar ist dann auch $\mathrm{Graph}(u)\subset D$.

iii) Es bleibt zu zeigen, dass die Limesfunktion u die Integralgleichung (4.1.13) erfüllt. Für $t\in[t_{k-1},t_k]\subset I$ setzen wir $u^i(t):=u^{h_i}(t)$. Für jedes i gilt zunächst

$$\begin{aligned}
u^i(t) &= u^i_{k-1}+(t-t_{k-1})f(t_{k-1},u^i_{k-1})\\
&= u^i_{k-2}+(t_{k-1}-t_{k-2})f(t_{k-2},u^i_{k-2})+(t-t_{k-1})f(t_{k-1},u^i_{k-1})\\
&\ \ \vdots\\
&= u_0+\sum_{j=1}^{k}(t_j-t_{j-1})f(t_{j-1},u^i_{j-1})+(t-t_{k-1})f(t_{k-1},u^i_{k-1})\\
&= u_0+\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1},u^i_{j-1})\,ds+\int_{t_{k-1}}^{t} f(t_{k-1},u^i_{k-1})\,ds\\
&= u_0+\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\big\{f(t_{j-1},u^i_{j-1})-f(s,u^i(s))\big\}\,ds\\
&\quad +\int_{t_k}^{t}\big\{f(t_{k-1},u^i_{k-1})-f(s,u^i(s))\big\}\,ds+\int_{t_0}^{t} f(s,u^i(s))\,ds\,.
\end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge D ist die stetige Funktion $f(t,x)$ auch gleichmäßig stetig. Ferner sind die Funktionen der Folge $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Zu beliebig gegebenen $\varepsilon>0$ gibt es also ein δ_ε, so dass für $|t-t'|<\delta_\varepsilon$ gilt:

$$\|u^i(t)-u^i(t')\|\le\varepsilon'\le\varepsilon,$$

und weiter für $|t-t'|<\delta_\varepsilon,\ \|x-x'\|<\varepsilon'$:

$$\|f(t,x)-f(t',x')\|<\varepsilon.$$

Für hinreichend großes $i\ge i_\varepsilon$, d. h. hinreichend kleines h_i, folgt damit

$$\max_{s\in[t_{k-1},t_k]}\|f(t_{k-1},u^i(t_{k-1}))-f(s,u^i(s))\|\le\varepsilon\,.$$

Dies ergibt

$$\Big|u^i(t)-u_0-\int_{t_0}^{t} f(s,u^i(s))\,ds\Big|\le\varepsilon|t-t_0|,\quad i\ge i_\varepsilon.$$

Die gleichmäßige Konvergenz $u^i\to u$ auf I impliziert auch die gleichmäßige Konvergenz

$$f(\cdot,u^i(\cdot))\to f(\cdot,u(\cdot))\quad(i\to\infty).$$

Für hinreichend großes $i \geq i_\varepsilon$ ergibt sich damit

$$\Big| u(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \Big| \leq \varepsilon |t - t_0|.$$

Wegen der beliebigen Wahl von ε folgt, dass die Limesfunktion u die Integralgleichung (4.1.13) erfüllt, was zu zeigen war. Q.E.D.

Wenn die AWA höchstens eine Lösung u auf I hat, erschließt man durch ein Widerspruchsargument, dass für jede Nullfolge des Schrittweitenparameters h die ganze vom Eulerschen Polygonzugverfahren gelieferte Folge $(u^h)_h$ für $h \to 0$ gegen u konvergiert (Übungsaufgabe).

Der Beweis von Satz 4.1 zeigt, dass das Existenzintervall $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ der durch den Existenzsatz von Peano gelieferten lokalen Lösung im wesentlichen nur von den Stetigkeitseigenschaften der Funktion $f(t, x)$ abhängt. Durch wiederholte Anwendung dieses Argumentes ergibt sich die folgende Aussage.

Satz 4.2 (Fortsetzungssatz): *Sei die Funktion $f(t, x)$ stetig auf einem abgeschlossenen Bereich D des $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$, welcher den Punkt (t_0, u_0) enthält, und sei u eine Lösung der* AWA *auf einem Intervall $I = [t_0 - T, t_0 + T]$. Dann ist die lokale Lösung u nach rechts und links über jeden Zeitpunkt hinaus auf ein „maximales“ Existenzintervall $I_{\max} = (t_0 - T_*, t_0 + T^*)$ (stetig differenzierbar) fortsetzbar, solange der Graph von u nicht an den Rand von D stößt. Dabei kann* $\text{Graph}(u) := \{(t, u(t)), t \in I_{\max}\}$ *unbeschränkt sein sowohl durch $t \to t_0 + T^* = \infty$ als auch durch $\|u(t)\| \to \infty \ (t \to t_0 + T^*)$.*

Beweis: O.B.d.A. wird nur die Fortsetzbarkeit der lokalen Lösung auf das rechtsseitige Intervall $[t_0, t_0 + T^*)$ betrachtet. Anwendung des Existenzsatzes von Peano liefert zunächst die Existenz einer Lösung u^0 der AWA auf einem Anfangsintervall $[t_0, t_1]$, $t_1 := t_0 + T_0$ der Länge

$$T_0 := \min(\alpha_0, \beta_0 / M_0).$$

Dabei hängt T_0 über die Konstanten α_0, β_0 nur von der Schranke M_0 für die Funktion $f(t, x)$ auf dem Zylinderbereich

$$Z_0 := \big\{(t, x) \in D,\ |t - t_0| \leq \alpha_0,\ \|x - u_0\| \leq \beta_0\big\}$$

ab. Da $(t_1, u(t_1))$ nicht auf dem Rand ∂D liegt, kann ausgehend von t_1 und dem Anfangswert $u_1 = u(t_1)$ der Satz von Peano erneut angewendet werden und liefert die Existenz einer Lösung u^1 dieser AWA auf einem Intervall $[t_1, t_2]$, $t_2 := t_1 + T_1$ der Länge $T_1 := \min(\alpha_1, \beta_1 / M_1)$. Dabei ist M_1 eine Schranke für $f(t, x)$ auf dem Zylinderbereich

$$Z_1 := \big\{(t, x) \in D,\ |t - t_0| \leq \alpha_1,\ \|x - u_1\| \leq \beta_1\big\}$$

Die so gewonnenen Lösungsstücke u^0, u^1 ergeben zusammengesetzt eine stetige und wegen der Stetigkeit von $f(t, x)$ sogar eine stetig differenzierbare Funktion $u(t)$ auf dem

Intervall $[t_0, t_0 + T_0 + T_1]$; im Übergangspunkt t_1 gilt für die rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen:

$$u^{0\prime}(t_1) = f(t, u^0(t_1)) = f(t, u^1(t_1)) = u^{1\prime}(t_1).$$

Nach Konstruktion ist u daher (lokale) Lösung der AWA. Dieser Prozeß lässt sich offensichtlich fortsetzen, solange der Graph der Lösung nicht an den Rand von D stößt. Dabei kann es nicht passieren, dass die gewonnene Folge $(t_k, u(t_k)) \in D$ eine Teilfolge hat, welche gegen einen inneren Punkt (t_*, x_*) von D konvergiert, denn dann könnte man für diesen Punkt als Startpunkt wieder den Satz von Peano anwenden und so das Existenzintervall der Lösung über den Zeitpunkt t_* hinaus erweitern, was der Annahme widerspräche. Q.E.D.

Korollar 4.1 (Globale Existenz): *Sei die Funktion $f(t, x)$ in der* AWA *auf ganz $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ definiert und stetig. Besteht dann für jede durch den Satz von Peano gelieferte „lokale" Lösung $u(t)$ eine Abschätzung der Form*

$$\|u(t)\| \leq \rho(t), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{4.1.17}$$

mit einer festen stetigen Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so lässt sich u zu einer „globalen" Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Beweis: Wegen der Schranke (4.1.17) für alle möglichen lokalen Lösungen kann keine von diesen auf einem beschränkten Zeitintervall einen unbeschränkten Graphen haben. Also impliziert der Fortsetzungssatz die Existenz einer globalen Lösung. Q.E.D.

Beispiel 4.5: Die skalare AWA

$$u'(t) = u(t)^{1/3}, t \geq 0, \quad u(0) = 0, \tag{4.1.18}$$

besitzt für beliebiges $c \geq 0$ eine Lösung der Form

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq c \\ \left[\frac{2}{3}(t - c)\right]^{3/2} & , \quad c < t\,. \end{cases}$$

Das Eulersche Polygonzugverfahren liefert für alle $c > 0$ die Lösung $u_c(t) \equiv 0$. Die anderen (überabzählbar vielen!) Lösungen können also so nicht approximiert werden.

Beispiel 4.6: Die AWA

$$u'(t) = u(t)^2, \quad 0 \leq t < 1, \quad u(0) = 1, \tag{4.1.19}$$

besitzt eine (lokale) Lösung der Form $u(t) = (1 - t)^{-1}$. Obwohl $f(t, x) = x^2$ eine glatte Funktion ist, wird die Lösung $u(t)$ für $t \to 1$ singulär.

Beispiel 4.7: Die Leistungsfähigkeit des Satzes von Peano sieht man z. B. anhand der stark nichtlinearen d-dimensionalen AWA

$$u'(t) = e^{-\|u(t)\|} \prod_{i=1}^{d} \sin(u_i(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1. \tag{4.1.20}$$

Der Definitionsbereich der zugehörigen Funktion $f(t,x) = e^{-\|x\|} \prod_{i=1}^{d} \sin(x_i)$ ist der ganze $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$, und die Funktion f ist auf diesem gleichmäßig beschränkt. Folglich existiert (mindestens) eine Lösung u auf ganz $\mathbb{R}$, was anhand der Form der Differentialgleichung nicht so einfach direkt zu sehen ist.

Aus der Integralgleichungsdarstellung (4.1.13) ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage über die Regularität von Lösungen der AWA.

Satz 4.3 (Regularitätssatz): *Sei u eine Lösung der* AWA *in Definition 4.1 auf dem Intervall I. Im Falle $f \in C^m(D)$, für ein $m \geq 1$, ist dann $u \in C^{m+1}(I)$.*

Beweis: Aus der Beziehung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds, \quad t \in I,$$

für die lokale Lösung u der AWA entnehmen wir, dass u im Falle $f \in C^1(D)$ zweimal stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$u''(t) = d_t f(t, u(t)) = \partial_t f(t, u(t)) + \nabla_x f(t, u(t)) \cdot u'(t).$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Arguments folgt dann die Richtigkeit der Behauptung für $m \geq 1$. Q.E.D.

4.1.4 Eindeutigkeit und lokale Stabilität

Wir wenden uns nun den Fragen nach der eindeutigen Bestimmtheit von Lösungen sowie ihrer Stabilität zu. Die Wichtigkeit der Kenntnis von Stabilität oder Instabilität von Lösungen wird durch das Beispiel des Lorenz-Systems illustriert.

Definition 4.2 (Lipschitz-Bedingung): *i) Die Funktion $f(t,x)$ genügt in $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ einer „Lipschitz-Bedingung", wenn mit einer stetigen Funktion $L(t) > 0$ (L-Konstante) gilt:*

$$\|f(t,x) - f(t,x')\| \leq L(t)\|x - x'\|, \quad (t,x), (t,x') \in D. \tag{4.1.21}$$

ii) Die Funktion $f(t,x)$ genügt in D einer „lokalen" Lipschitzbedingung, wenn $f(t,x)$ auf jeder beschränkten Teilmenge von D einer Lipschitz-Bedingung genügt (mit einer möglicherweise von dieser Teilmenge abhängigen Lipschitz-Konstante).

Bemerkung 4.2: Hat die Funktion $f(t,x)$ auf der *konvexen* Menge D stetige und beschränkte partielle Ableitungen nach x, so folgt aus dem Mittelwertsatz, dass mit der Konstante $L(t) := \sup_{x\in D} \|\nabla_x f(t,x)\|$ gilt:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L(t)\|x-y\|, \quad (t,x),(t,y) \in D. \tag{4.1.22}$$

Satz 4.4 (Stabilitäts und Eindeutigkeitssatz): *i) Die Funktion $f(t,x)$ sei stetig auf $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Dann gilt für zwei beliebige Lösungen u, v der Differentialgleichung*

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad t \in I, \tag{4.1.23}$$

auf einem gemeinsamen Existenzintervall I:

$$\|u(t) - v(t)\| \le e^{L(t-t_0)}\|u(t_0) - v(t_0)\|, \quad t \in I, \tag{4.1.24}$$

mit der L-Konstante $L = L_K$ von $f(t,x)$ auf einer beschränkten Teilmenge $K \subset D$, welche die Graphen von u und v enthält.

ii) Aus der Stabilitätsungleichung (4.1.24) folgt, dass die durch den Existenzsatz von Peano und den Fortsetzungssatz gelieferte lokale Lösung u der AWA eindeutig bestimmt ist.

Beweis: i) Sei $K \subset D$ eine beschränkte Teilmenge, welche die Graphen von u und v enthält. Für die Differenz $e(t) = u(t) - v(t)$ gilt

$$e(t) = \int_{t_0}^t \big\{ f(s,u(s)) - f(s,v(s)) \big\}\, ds + u(t_0) - v(t_0)\,.$$

Hieraus folgt

$$\|e(t)\| \le L_K \int_{t_0}^t \|e(s)\|\, ds + \|u(t_0) - v(t_0)\|\,,$$

d. h.: Die (stetige) Funktion $w(t) = \|e(t)\|$ genügt einer linearen Integralungleichung. Mit Hilfe des Lemmas von Gronwall[5] (Hilfssatz 4.1) ergibt sich daraus die gewünschte Abschätzung (4.1.24).

ii) Seien $u(t)$ und $v(t)$ zwei Lösungen der AWA auf einem Intervall $I = [t_0, t_0 + T]$ mit demselben Anfangswert $u(t_0) = v(t_0)$. Aufgrund der Abschätzung (4.1.24) gilt dann mit der L-Konstante L von $f(t,\cdot)$ auf K:

$$\|u(t) - v(t)\| \le e^{L(t-t_0)}\|u(t_0) - v(t_0)\| = 0, \quad t \in I.$$

Also ist $u(t) = v(t)$ auf dem gemeinsamen Existenzintervall I. Q.E.D.

[5]T. H. Gronwall (Hakon Grönwall) (1877–1932): Schwedisch-amerikanischer Mathematiker und Ingenieur, zeitweise in Princeton (1913–1914); Beiträge zur komplexen Funktionentheorie, Zahlentheorie und Differentialgleichungen, aber auch zur physikalischen Chemie.

Lemma 4.1 (Gronwallsches Lemma): *Die stückweise stetige Funktion $w(t) \ge 0$ genüge mit zwei Konstanten $a, b \ge 0$ der Integralungleichung*

$$w(t) \le a \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + b, \quad t \ge t_0. \tag{4.1.25}$$

Dann gilt die Abschätzung

$$w(t) \le e^{a(t-t_0)} b\,, \quad t \ge t_0\,. \tag{4.1.26}$$

Beweis: Für die Funktion

$$\psi(t) := a \int_{t_0}^{t} w(t)\,ds + b$$

gilt $\psi'(t) = aw(t)$ und somit gemäß Voraussetzung $\psi'(t) \le a\psi(t)$. Dies impliziert

$$\big(e^{-at}\psi(t)\big)' = e^{-at}\big(\psi'(t) - a\psi(t)\big) \le 0,$$

d. h.: Die Funktion ist $e^{-at}\psi(t)$ ist monoton fallend. Dies bedeutet, dass

$$e^{-at}w(t) \le e^{-at}\psi(t) \le \psi(t_0)e^{-at_0} = be^{-at_0}, \quad t \ge t_0,$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt. Q.E.D.

Bemerkung 4.3: Die Abschätzung (4.1.26) im Gronwallschen Lemma lässt verschiedene Verallgemeinerungen zu. Besteht z. B. eine Beziehung der Form

$$w(t) \le \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)\,ds + b(t), \quad t \ge t_0,$$

mit einer stetigen Funktion $a(t) \ge 0$ und einer nichtfallenden Funktion $b(t) \ge 0$, so folgt (Übungsaufgabe)

$$w(t) \le \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big) b(t)\,, \quad t \ge t_0. \tag{4.1.27}$$

Beispiel 4.8: Die Funktion $f(t,x) = x^{1/3}\,(d=1)$ aus Beispiel 4.5 ist auf dem Intervall $I = [0,1]$ in $x = 0$ nicht Lipschitz-stetig, woraus sich die Mehrdeutigkeit der Lösung der zugehörigen AWA erklärt. Für die Anfangsbedingung $u(0) = 1$ ergibt sich dagegen die Lösung $u(t) = [\frac{2}{3}t + 1]^{3/2}$, welche eindeutig ist, da die Funktion $f(t,x) = x^{1/3}$ bei $x = 1$ Lipschitz-stetig ist.

Beispiel 4.9: Die Funktion $f(t,x) = x^2\,(d=1)$ aus Beispiel 4.6 ist nur „lokal" Lipschitz-stetig, d. h. nur für beschränkte Argumente:

$$|x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \le L|x-y|$$

mit $L = \max\{|x+y|\,,\, x,y \in D\}$. Solange die Lösung der zugehörigen AWA existiert, ist sie also eindeutig.

Korollar 4.2: *Wir betrachten eine skalare Differentialgleichung d-ter Ordnung der Form*

$$u^{(d)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(d-1)}(t)), \tag{4.1.28}$$

mit einer stetigen Funktion $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$*, welche bezüglich der letzten* d *Argumente einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann existiert für jeden Satz von* d *Werten* $u_0, \dots, u_{d-1} \in \mathbb{R}$*, genau eine lokale Lösung* $u \in C^d[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ *der Gleichung (4.1.28), welche den Anfangsbedingungen genügt:*

$$u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_1,\ \dots,\ u^{(d-1)}(t_0) = u_{d-1}.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den vorangegangenen Resultaten angewendet auf das zu der Gleichung (4.1.28) d-ter Ordnung äquivalente System 1-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t)\,, \\ &\vdots \\ u_{d-1}'(t) &= u_d(t)\,, \\ u_d'(t) &= f(t, u_1(t), \dots, u_d(t)), \end{aligned}$$

wobei $u_1 := u, u_2 := u^{(1)}, \dots, u_d := u^{(d-1)}$. Die zugehörige Vektorfunktion $F(t, u_1, \dots, u_d)$ ist offensichtlich stetig und genügt der Lipschitz-Bedingung. Q.E.D.

Beispiel 4.10: Die lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung (harmonischer Oszillator)

$$u''(t) + ku(t) = 0$$

mit einem festen $k \in \mathbb{R}_+$ besitzt die beiden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen $u_1(t) = \cos(\sqrt{k}t)$ und $u_2(t) = \sin(\sqrt{k}t)$. Für beliebig gegebene $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ist auch die Linearkombination $u(t) = c_0 u_1(t) + c_1 u_2(t)$ Lösung. Wegen $u(0) = c_0$ und $u'(0) = c_1\sqrt{k}$ ist $u(t)$ nach Korollar 4.2 die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung zu diesen Anfangswerten. Die Lösung zu den Anfangsdaten $c_0 = 0$ und $u'(0) = c_1$ ist

$$u(t) = \frac{c_1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t) = A \sin\Big(\frac{2\pi}{T}t\Big),$$

d. h. eine Sinusschwingung mit der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\sqrt{k}$ und der Amplitude $A = c_1/\sqrt{k}$

Der Existenzsatz von Peano zusammen mit dem Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.4 enthält einen Teil der Aussagen des klassischen Existenzsatzes von Picard[6]-Lindelöf[7], den wir im Folgenden formulieren.

[6]Charles Emile Picard (1856–1941): Französischer Mathematiker; Prof. in Toulouse und Paris; Beiträge zu Analysis, Funktionentheorie, Differentialgleichungen und Analytische Geometrie.

[7]Ernst Leonhard Lindelöf (1870–1946): Finnischer Mathematiker; Prof. in Helsinki; Beiträge zu Analysis, Differentialgleichungen und Funktionentheorie.

Satz 4.5 (Existenzsatz von Picard-Lindelöf): *Die stetige Funktion* $f : D \to \mathbb{R}^d$ *genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es zu jedem Paar* $(t_0, u_0) \in D$ *ein* $\varepsilon > 0$ *und eine Lösung* $u : I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^d$ *der AWA*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I, \quad u(t_0) = u_0. \tag{4.1.29}$$

Beweis: Wir führen einen Beweis, der unabhängig vom Satz von Peano ist und auf dem Banachschen Fixpunktsatz basiert. Ausgangspunkt ist wieder die zur AWA äquivalente Integralgleichung (4.1.13):

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

i) Es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$K := \Big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \le \delta, \|x - u_0\| \le \delta\Big\} \subset D.$$

Auf K erfüllt $f(t, x)$ eine Lipschitz-Bedingung mit Konstante L_K:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le L_K \|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in K.$$

Da K kompakt und f stetig ist, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|f(t, x)\| \le M, \quad (t, x) \in K.$$

Wir setzen

$$\varepsilon := \min\Big(\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L_K}\Big), \qquad I_\varepsilon := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

und definieren den Vektorraum $V := C[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$; dieser ist versehen mit der Norm

$$\|u\|_\infty = \max_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|u(t)\|$$

ein Banach-Raum.

ii) Auf dem Banach-Raum V definieren wir die Abbildung $g : V \to V$ durch

$$g(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds, \quad t \in I_\varepsilon.$$

Für Funktionen u aus der abgeschlossenen Teilmenge

$$V_0 := \{v \in V : \max_{t \in I_\varepsilon} \|v(t) - u_0\| \le \delta\} \subset V$$

gilt für $t \in I_\varepsilon$:

$$\|g(u)(t) - u_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s))\|\, ds \le M|t - t_0| \le M\varepsilon \le \delta,$$

d. h.: Die Abbildung g bildet die Teilmenge $V_0 \subset V$ in sich ab. Weiter gilt für je zwei Funktionen $u, v \in V_0$ aufgrund der L-Stetigkeit von $f(t,\cdot)$:

$$\begin{aligned}\|g(u)(t) - g(v)(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|\,ds \\ &\le L|t-t_0|\|u-v\|_\infty \le L\varepsilon\|u-v\|_\infty.\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|g(u) - g(v)\|_\infty \le \tfrac{1}{2}\|u-v\|_\infty,$$

d. h. g ist auf V_0 eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat g in V_0 genau einen Fixpunkt u^*, d. h.:

$$u^*(t) = g(u^*)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u^*(s))\,ds, \quad t \in I_\varepsilon.$$

Wegen der Äquivalenz dieser Integralbeziehung zur AWA ergibt sich die Behauptung des Satzes. Q.E.D.

Die im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf konstruierte Lösung u^* der Integralgleichung (4.1.13) erhält man durch die im Banach-Raum $V = C[I_\varepsilon]$ konvergente Fixpunktiteration (sog. „sukzessive Approximation“)

$$u^k(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u^{k-1}(s))\,ds, \quad t \in I_\varepsilon, \tag{4.1.30}$$

für irgendeine Startfunktion $u^0 \in M$. Dieses Iterationsverfahren kann in einfachen Situationen zur tatsächlichen Berechnung der Lösung der AWA verwendet werden.

Beispiel 4.11: Zur Lösung der AWA

$$u'(t) = 1 + u(t)^2, \quad t \ge 0, \qquad u(0) = 0,$$

wird die Fixpunktiteration mit der Startfunktion $u^0 \equiv 0$ verwendet:

$$u^k(t) = \int_0^t \big(1 + u^{k-1}(s)^2\big)\,ds, \quad t \ge 0.$$

Wir finden

$$\begin{aligned}
u^1(t) &= \int_0^t ds = t, \quad u^2(t) = \int_0^t (1+s^2)\,ds = t + \tfrac{1}{3}t^3 \\
u^3(t) &= \int_0^t (1 + s^2 + \tfrac{2}{3}t^4 + \tfrac{1}{9}s^6)\,ds = t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + \tfrac{1}{63}t^7 \\
u^4(t) &= \int_0^t (1 + s^2 + \tfrac{2}{3}s^4 + (\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{15})s^6 + \tfrac{1}{63}s^8 + \dots)\,ds \\
&= t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + (\tfrac{1}{63} + \tfrac{1}{105})t^7 + \tfrac{1}{567}t^9 + \dots \\
u^5(t) &= \int_0^t (1 + s^2 + \tfrac{2}{3}s^4 + (\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{15})s^6 + \tfrac{4}{45}s^8 + \dots)\,ds \\
&= t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + (\tfrac{1}{63} + \tfrac{4}{105})t^7 + \dots .
\end{aligned}$$

Dies scheint die Taylor-Reihe der Funktion $u(t) = \tan(t)$ zu ergeben:

$$\tan(t) = t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + \tfrac{17}{315}t^7 + \dots .$$

Dies ist tatsächlich die (eindeutig bestimmte) Lösung der AWA, da

$$\tan'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t), \quad \tan(0) = 0.$$

4.1.5 Globale Stabilität

Wir wenden uns nun der Frage nach der „globalen“ Stabilität von Lösungen von AWAn zu. Neben der Lipschitz-Bedingung (L) wird dazu noch eine weitere Struktureigenschaft der Funktion $f(t,x)$ benötigt.

Definition 4.3 (Monotone AWA): *Die Funktion $f(t,x)$ genügt einer „Monotoniebedingung“, wenn mit einer Konstanten $\lambda > 0$ (bzgl. euklidischem Skalarprodukt und Norm) gilt:*

$$-(f(t,x) - f(t,y), x - y) \geq \lambda \|x - y\|^2 , \quad (t,x)\,,\,(t,y) \in D\,. \tag{4.1.31}$$

Eine AWA der Form (4.1), die einer Lipschitzbedingung bzw. der Monotoniebedingung genügt nennen wir kurz „L-stetig“ und „(stark) monoton“. Ihre Lösungen haben besonders starke Stabilitätseigenschaften.

Definition 4.4 (Exponentielle Stabilität): *Eine globale Lösung $u(t)$ einer* AWA *wird „exponentiell stabil“ genannt, wenn es positive Konstanten δ , α , A gibt, so dass folgendes gilt: Zu jedem Zeitpunkt $t_* \geq t_0$ und zu jedem $w_* \in \mathbb{R}^d$ mit $\|w_*\| < \delta$ hat die gestörte* AWA

$$v'(t) = f(t, v(t))\,, \quad t \geq t_*\,, \quad v(t_*) = u(t_*) + w_*\,, \tag{4.1.32}$$

eine ebenfalls globale Lösung $v(t)$, und es gilt

$$\|v(t) - u(t)\| \leq A\, e^{-\alpha(t-t_*)} \|w_*\|\,, \quad t \geq t_*\,. \tag{4.1.33}$$

Neben dem Begriff der „exponentiellen“ Stabilität findet man in der Literatur noch eine Reihe anderer (schwächerer) Stabilitätsdefinitionen, z. B.: „asymptotische“ Stabilität.

Satz 4.6 (Globaler Stabilitätssatz): *Alle Lösungen einer L-stetigen und monotonen* AWA *sind global und exponentiell stabil mit δ beliebig und $\alpha = \lambda$, $A = 1$. Im Falle* $\sup_{t>0} \|f(t,0)\| < \infty$ *sind alle Lösungen gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: i) Nach Voraussetzung gilt

$$\|f(t,x)\| \le \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \le L\|x\| + \|f(t,0)\|,$$

d. h.: Die Funktion $f(t,x)$ ist linear beschränkt. Folglich existieren sowohl für die AWA

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad t \ge t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$

als auch für jede gestörte AWA

$$v'(t) = f(t,v(t)), \quad t \ge t_*, \quad v(t_*) = u(t_*) + w_*,$$

eindeutige, globale Lösungen (Übungsaufgabe). Subtraktion der beiden Gleichungen und skalare Multiplikation mit $w(t) := v(t) - u(t)$ ergibt

$$(w'(t), w(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 - (f(t,v(t)) - f(t,u(t)), w(t)) = 0$$

und, unter Ausnutzung der Monotonieeigenschaft,

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2\lambda\|w(t)\|^2 \le 0\,.$$

Wir multiplizieren dies mit $e^{2\lambda(t-t_*)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{2\lambda(t-t_*)}\|w(t)\|^2\Big] = e^{2\lambda(t-t_*)}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2\lambda e^{2\lambda(t-t_*)}\|w(t)\|^2 \le 0,$$

bzw. nach Integration über $[t_*, t]$,

$$\|w(t)\| \le e^{-\lambda(t-t_*)}\|w_*\|\,, \quad t \ge t_*\,.$$

ii) Schließlich zeigen wir die gleichmäßige Beschränktheit der Lösung. Dazu multiplizieren wir die Gleichung

$$u'(t) - f(t,u(t)) + f(t,0) = f(t,0)$$

mit $u(t)$ und erhalten

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 - (f(t,u(t)) - f(t,0), u(t) - 0) = (f(t,0), u(t)).$$

Ausnutzung der Monotonieeigenschaft ergibt (verwende die Ungleichung $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \lambda\|u(t)\|^2 \le \|f(t,0)\|\|u(t)\| \le \frac{1}{2\lambda}\|f(t,0)\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|u(t)\|^2$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \lambda\|u(t)\|^2 \le \frac{1}{\lambda}\|f(t,0)\|^2.$$

Wir multiplizieren nun diese Ungleichung mit $e^{\lambda(t-t_0)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{\lambda(t-t_0)}\|u(t)\|^2\Big] \le e^{\lambda(t-t_0)}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \lambda e^{\lambda(t-t_0)}\|u(t)\|^2 \le \frac{1}{\lambda}e^{\lambda(t-t_0)}\|f(t,0)\|^2.$$

Integration über $[t_0, t]$ ergibt

$$e^{\lambda(t-t_0)}\|u(t)\|^2 \le \|u_0\|^2 + \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^t \big\{e^{\lambda(s-t_0)}\|f(s,0)\|^2\big\}\,ds,$$

und folglich

$$\|u(t)\|^2 \le e^{-\lambda(t-t_0)}\|u_0\|^2 + \frac{1}{\lambda}\max_{s\in[t_0,t]}\|f(s,0)\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)}\int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)}\,ds.$$

Wegen

$$e^{-\lambda(t-t_0)}\int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)}\,ds = \frac{1}{\lambda}\big\{1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\big\},$$

erhalten wir schließlich die Abschätzung

$$\|u(t)\|^2 \le e^{-\lambda(t-t_0)}\|u_0\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\max_{s\in[t_0,t]}\|f(s,0)\|^2, \quad t \ge t_0, \tag{4.1.34}$$

welche die Beschränktheit der Lösung bedeutet. Q.E.D.

4.1.6 Lineare Systeme

Wir betrachten nun *lineare* Differentialgleichungssysteme mit rechten Seiten der Form

$$f(t,x) = A(t)x + b(t)$$

mit Matrixfunktionen $A(\cdot): I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektorfunktionen $b(\cdot): I \to \mathbb{R}^n$.

Satz 4.7 (Lineare AWA): *Die Matrixfunktion $A : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ und die Vektorfunktion $b : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ seien stetig.*

i) Dann besitzt die lineare AWA

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \ge t_0, \quad u(t_0) = u_0, \tag{4.1.35}$$

eine eindeutige „globale“ Lösung $u : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^d$.

ii) Ist auf $[t_0,\infty)$ die Matrixfunktion $A(\cdot)$ gleichmäßig negativ definit und die Funktion $b(\cdot)$ beschränkt, so ist die Lösung $u(t)$ beschränkt und exponentiell stabil.

Beweis: i) Für die durch den Peanoschen Satz gelieferte *lokale* Lösung u auf einem Intervall $I = [t_0, t_0+T]$ gilt:

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int_{t_0}^t \big\{\|A(t)\|\|u(s)\| + \|b(s)\|\big\}\,ds, \quad t \in I.$$

Mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \le \exp\Big(\int_{t_0}^t \|A(s)\|\,ds\Big)\Big\{\|u_0\| + \int_{t_0}^t \|b(s)\|\,ds\Big\}, \quad t \in I,$$

d. h.: $\|u(t)\|$ bleibt auf jedem Existenzintervall unterhalb einer nur von T und den Funktionen $A(t)$, $b(t)$ abhängigen Schranke. Nach Satz 4.2 lässt sich der Graph von u aber bis zum Rand von D fortsetzen. Folglich existiert u für alle $t \geq t_0$. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich wegen der L-Stetigkeit der Funktion $f(t,x) := A(t)x + b(t)$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)x + b(t) - A(t)y - b(t)\| \leq \|A(t)\|\,\|x - y\|,$$

direkt aus Satz 4.4.

ii) Für eine negativ definite Koeffizientenmatrix $A(t)$ genügt die zugehörige Funktion $f(t,x)$ der Monotoniebedingung:

$$-(f(t,x) - f(t,y), x - y) = -(A(t)(x - y), x - y) \geq \lambda\|x - y\|^2,$$

mit einer Konstante $\lambda > 0$. Ferner ist

$$\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|f(t,0)\| = \sup_{t\in[t_0,\infty)} \|b(t)\| < \infty.$$

Satz 4.6 liefert also die Beschränktheit sowie die exponentielle Stabilität der globalen Lösung u der linearen AWA. Q.E.D.

Satz 4.8 (Homogene lineare Systeme): *i) Die Menge der Lösungen des „homogenen“ d-dimensionalen lineare Differentialgleichungssystems*

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{4.1.36}$$

bildet einen Vektorraum.

ii) Zu jeder Basis $\{u_0^i, i = 1,\dots,d\}$ *des* $\mathbb{R}^d$ *erhält man mit den zugehörigen Lösungen der* d *AWAn*

$$u^{i\prime}(t) = A(t)u^i, \quad t \geq t_0, \qquad u^i(t_0) = u_0^i, \quad i = 1,\dots,d, \tag{4.1.37}$$

eine Basis $\{u^i, i = 1,\dots,d\}$ *dieses Lösungsraums, d. h.: Es ist* $\dim H = d$.

iii) Ist $\{u^i, i = 1,\dots,d\}$ *eine Basis des Lösungsraums, so bilden für jedes* $t \geq t_0$ *die Vektoren* $\{u^i(t), i = 1,\dots,d\}$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^d$.

Beweis: i) Sei H die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung (4.1.36). Offenbar ist die Nullfunktion in H, und jede Linearkombination $\alpha u+\beta v$ von Funktionen $u, v \in H$ ist wegen

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' = \alpha A(t)u + \beta A(t)v' = A(t)(\alpha u + \beta v)$$

ebenfalls in H. Also ist H ein Vektorraum.

ii) Sei $\{u_0^i, i = 1,\dots,d\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^d$ und $\{u^i\}$ die nach Satz 4.7 eindeutigen globalen Lösungen der AWAn (4.1.37). Gibt es dann Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i u^i(t) = 0, \quad t \geq t_0,$$

so folgt, da dies auch für $t = t_0$ gilt, notwendig $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$. Die Funktionen $\{u^i, i = 1, \dots, d\}$ sind also linear unabhängig. Umgekehrt kann es nicht mehr als d linear unabhängige Funktionen in H geben, denn dann müssten auch deren Anfangswerte linear unabhängig sein, was nicht möglich ist. Also ist $\dim H = d$.

iii) Die Argumentation verläuft analog wie unter (ii). Q.E.D.

Definition 4.5: *Eine Basis $\{\varphi^i, \dots, \varphi^d\}$ des Lösungsraumes des linearen Differentialgleichungssystems (4.1.36) etwa zu den Anfangswerten $\varphi^i(t_0) = e^i$ wird „Fundamentalsystem" der Gleichung genannt. Die Matrix $\Phi = [\varphi^1, \dots, \varphi^d]$ der Spaltenvektoren φ^i heißt „Fundamentalmatrix" des Systems. Diese ist regulär und genügt der Matrix-AWA (komponentenweise zu verstehen)*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad t \geq t_0, \quad \Phi(t_0) = I. \tag{4.1.38}$$

Satz 4.9 (Inhomogene lineare Systeme): *Die Matrixfunktion $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{d \times d}$ und die Vektorfunktion $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ seien stetig. Der Vektorraum der Lösungen der zugehörigen homogenen Systems sei mit H bezeichnet. Dann erhält man eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \tag{4.1.39}$$

in der Form

$$u_b(t) = \Phi(t)\Big(\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds + c \Big), \tag{4.1.40}$$

mit einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$. Jede andere Lösung der inhomogenen Gleichung hat die Gestalt $u(t) = u_b(t) + v(t)$ mit einer Funktion $v \in H$. Bei Wahl von $c = u_0$ erfüllt u die Anfangsbedingung $u_b(t_0) = u_0$.

Beweis: i) Wir setzen

$$\psi := \int_{t_0}^t \Phi^{-1} b\, ds + c, \qquad \psi' = \Phi^{-1} b.$$

Dann gilt für $u_b := \Phi\psi$ die Beziehung $u_b' = \Phi'\psi + \Phi\psi'$, woraus wegen $\Phi' = A\Phi$ folgt:

$$u_b' = A\Phi\psi + \Phi\psi' = Au_b + \Phi\psi' = Au_b + \Phi\Phi^{-1}b = Au_b + b.$$

Also ist u_b Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und für $c = u_0$ auch Lösung der entsprechenden AWA.

ii) Sei u eine zweite Lösung der inhomogenen Gleichung. Dann erfüllt $w := u - u_b$ die Beziehung

$$w' = u' - u_b' = Au + b - Au_b - b = Aw,$$

d. h.: Es ist $w \in H$. Q.E.D.

Bemerkung 4.4: Die Aussagen dieses Abschnitts zeigt, dass zwischen der Theorie der Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen und der linearer Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^d$ eine weitgehende Analogie besteht.

Bemerkung 4.5: Die Darstellung

$$u(t) = \Phi(t)\Big(\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s)\,ds + u_0\Big),$$

der (eindeutigen) Lösung der linearen AWA

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \geq t_0,$$

entspricht der am Anfang dieses Kapitels für *skalare* lineare AWAn

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t), \quad t \geq t_0,$$

mit Hilfe der Methode der Variation der Konstante gefundenen Darstellung

$$u(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big)\Big[u_0 + \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds\Big) b(\tau)\,d\tau\Big].$$

Bemerkung 4.6: Für lineare Differentialgleichungssysteme mit *konstanten* Koeffizienten

$$u'(u) = Au(t) \tag{4.1.41}$$

bzw. skalare Gleichungen höherer Ordnung

$$u^{(d)}(t) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^{(i)}(t) \tag{4.1.42}$$

gibt es eine vollständige Lösungstheorie, die sich weitgehend algebraischer Argumente bedient. Diese hat enge Beziehungen zu den sog. „orthogonalen“ Polynomem, welche in der Numerik eine große Rolle spielen (z. B. Gauß-Integration).

4.2 Randwertaufgaben

Die bisher betrachteten Anfangswertaufgaben können als Spezialfall der allgemeinen „Randwertaufgabe“ (abgekürzt: RWA)

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I = [a, b]\,, \qquad r(u(a), u(b)) = 0\,, \tag{4.2.43}$$

aufgefasst werden. Dabei sind $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $r : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gegebene, i. Allg. vektorwertige Funktionen, welche im folgenden stets als stetig differenzierbar bzgl. aller ihrer Argumente vorausgesetzt sind, und gesucht ist eine stetig differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$. In der Literatur findet sich für (4.2.43) auch die Bezeichnung „Zweipunkt-Randwertaufgabe“ zur Abgrenzung von allgemeineren Problemen mit mehrpunktigen Nebenbedingungen der Form $r(u(t_1), \dots, u(t_k)) = 0$.

Beispiel 4.12: Wir geben zwei Beispiele von RWAn gewöhnlicher Differentialgleichungen mit unterschiedlichen Typen von Randbedingungen.

i) Ein wärmeleitfähiger Draht nehme das Intervall $I = [a, b]$ ein. Er werde durch eine Wärmequelle mit Temperaturdichte $f(t)$ (z. B. eine Streichholzflamme) erhitzt. Am linken und rechten Rand des Intervalls sei der Draht isoliert (d. h. kein Wärmefluss über den Rand). Ist dann $p(t)$ die „Wärmeleitfähigkeit" des Drahtmaterials, so wird die Temperaturverteilung $u(t)$ näherungsweise beschrieben durch die lineare „Neumannsche" RWA

$$-[pu']'(t) = f(t), \quad t \in I, \qquad u'(a) = u'(b) = 0. \tag{4.2.44}$$

ii) Eine Saite sei über der x-Achse zwischen zwei Punkten (a, g_a) und (b, g_b) eingespannt. Bei Ausübung einer vertikalen Kraft mit Dichte $f(t)$ (z. B. durch Zupfen mit dem Finger) erfährt diese eine als streng vertikal angenommene Auslenkung, die mit $u(t)$ bezeichnet sei. Diese wird näherungsweise durch die lineare „Dirichletsche" Randwertaufgabe

$$-[pu']'(t) = f(t), \quad t \in I, \qquad u(a) = g_a, \ \ u(b) = g_b, \tag{4.2.45}$$

beschrieben, wobei $p(t) > 0$ eine durch das Material der Saite bestimmte Funktion ist.

4.2.1 Existenz von Lösungen

Im Gegensatz zu den AWAn existiert für RWAn keine allgemeine Existenztheorie; nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen lässt sich für nichtlineare Probleme die Existenz von Lösungen a priori garantieren. Da diese Voraussetzungen bei den in der Praxis auftretenden Problemen meist nicht erfüllt sind, wird hier auf die Darstellung solcher Resultate verzichtet. Für das Folgende begnügen wir uns mit der Annahme, dass die Aufgabe (4.2.43) eine Lösung $u(t)$ besitzt, welche wenigstens *lokal* eindeutig (bzw. *isoliert*) ist, d. h.: Es gibt eine Umgebung

$$U_R(u) := \{v \in C[a, b], \ \|u - v\|_\infty < R\}$$

von u, in der es keine zweite Lösung $\tilde{u} \neq u$ gibt. Bezeichnen

$$f'_x(t, x) = (\partial_j f_i(t, x))_{i,j=1}^d ,$$

$$r'_x(x, y) = (\partial_j r_i(x, y))_{i,j=1}^d , \qquad r'_y(x, y) = (\partial_j r_i(x, y))_{i,j=1}^d$$

wieder die Jacobi-Matrizen der Vektorfunktionen $f(t, \cdot)$ und $r(\cdot, \cdot)$, so haben wir für die lokale Eindeutigkeit einer Lösung u von (4.2.43) die folgende Charakterisierung:

Satz 4.10 (Lokale Eindeutigkeit): *Eine Lösung u von Problem (4.2.43) ist genau dann lokal eindeutig, wenn die lineare, homogene RWA*

$$\begin{aligned} &v'(t) - f'_x(t, u(t))\, v(t) = 0 , \quad t \in I \\ &r'_x(u(a), u(b))\, v(a) + r'_y(u(a), u(b))\, v(b) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.46}$$

nur die triviale Lösung $v \equiv 0$ besitzt.

Zum Beweis von Satz 4.10 müssen wir uns zunächst mit der Lösbarkeit der linearen Aufgabe (4.2.46) beschäftigen; dafür existiert glücklicherweise eine vollständige Theorie. Wir betrachten die allgemeine inhomogene lineare RWA

$$\begin{aligned} u'(t) - A(t)u(t) &= f(t)\,, \quad t \in I \\ B_a u(a) + B_b u(b) &= g \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

mit Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{d\times d}$, einer stetigen Matrixfunktion $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ sowie einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ und einem Vektor $g \in \mathbb{R}^d$. Der RWA (4.2.47) werden die folgenden $d+1$ AWAn zugeordnet:

$$\begin{aligned} &\varphi^{0\prime}(t) - A(t)\varphi^0(t) = f(t)\,, \quad t \ge a\,, \quad \varphi^0(a) = 0\,, \\ &\varphi^{i\prime}(t) - A(t)\varphi^i(t) = 0\,, \quad t \ge a\,, \quad \varphi^i(a) = e^i\,, \quad i = 1,\dots,d\,, \end{aligned} \tag{4.2.48}$$

mit den kartesischen Einheitsvektoren $e^i \in \mathbb{R}^d$. Mit den eindeutigen Lösungen φ^0 und $\varphi^1,\dots,\varphi^d$ von (4.2.48) wird dann die „Fundamentalmatrix“

$$\Phi(t) := \begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_1^d(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_d^1(t) & \dots & \varphi_d^d(t) \end{bmatrix}$$

des Systems (4.2.48) gebildet und der Lösungsansatz

$$u(t;s) = \varphi^0(t) + \sum_{i=1}^d s_i\varphi^i(t) = \varphi^0(t) + \Phi(t)s$$

gemacht. Offensichtlich genügt dieser Ansatz der Differentialgleichung

$$u'(t;s) - A(t)u(t;s) = f(t)\,, \quad t \ge a\,.$$

Es bleibt also, den Vektor $s \in \mathbb{R}^d$ so zu bestimmen, dass gilt:

$$B_a u(a;s) + B_b u(b;s) = g\,. \tag{4.2.49}$$

Dass dies nicht immer möglich ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 4.13: Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u''(t) + u(t) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad u_1'(t) - u_2(t) = 0 \\ t \in [0,\pi] \quad & \qquad\quad\; u_2'(t) + u_1(t) = 0 \end{aligned}$$

hat die allgemeine Lösung: $u(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$. Für verschiedene Randbedingungen ergibt sich ein qualitativ unterschiedliches Lösbarkeitsverhalten.

i) $u(0) = u(\pi),\ u'(0) = u'(\pi)$: $\quad u(t) \equiv 0 \quad$ (eindeutig bestimmt),

ii) $u(0) = u(\pi) = 0:$ $\qquad u(t) = c_1 \sin t \quad$ (unendlich viele Lösungen),

iii) $u(0) = 0,\ u(\pi) = 1:$ $\qquad$ keine Lösung.

Die Randbedingung (4.2.49) kann durch Einsetzen des Ansatzes für $u\,(t)$ umgeschrieben werden in ein lineares Gleichungssystem für s:

$$B_a \underbrace{\varphi^0(a)}_{=\,0} + B_a \underbrace{\Phi(a)}_{=\,I} s + B_b\varphi^0(b) + B_b\Phi(b)s = g\,,$$

d. h.:

$$[B_a + B_b\Phi(b)]s = g - B_b\varphi^0(b)\,. \tag{4.2.50}$$

Damit erhalten wir das folgende Resultat

Satz 4.11 (Existenzsatz für lineare RWAn): *Die lineare RWA (4.2.46) besitzt genau dann für beliebige Daten $f(t)$ und g eine eindeutige Lösung $u(t)$, wenn die Matrix $B_a + B_b\Phi(b) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär ist, bzw. wenn die zugehörige homogene RWA nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ hat.*

Beweis: Ist die Matrix $B_a + B_b\Phi(b)$ regulär, so ist das System (4.2.50) eindeutig lösbar, und die zugehörige Funktion $u(t;s)$ löst dann nach unserer Konstruktion die RWA (4.2.47). Umgekehrt lässt sich aber jede Lösung $u(t)$ von (4.2.46) in der Form

$$u(t) = \varphi^0(t) + \Phi(t)s$$

mit einem $s \in \mathbb{R}^d$ darstellen, da der Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung von den Funktionen $\{\varphi^1, \dots, \varphi^d\}$ aufgespannt wird. Die Regularität von $B_a + B_b\Phi(b)$ ist also notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit möglicher Lösungen von (4.2.47).
Q.E.D.

Bemerkung 4.7: Die eigentliche Bedeutung von Satz 4.11 liegt darin, dass er eine starke Analogie zwischen *linearen* RWAn und *linearen* (quadratischen) Gleichungssystemen aufzeigt. Bei beiden Problemtypen genügt es zum Nachweis der Existenz von Lösungen zu zeigen, dass eventuell existierende Lösungen notwendig eindeutig sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Beweis von Satz 4.11 führen.

Beweis: [Beweis von Satz 4.10] Die Funktion $f(t,x)$ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig auf einer Umgebung U_R des Graphen von $u(t)$. Daher gibt es ein $\rho > 0$, so dass für jede Lösung $v(t)$ der AWA

$$v'(t) = f(t, v(t)), \quad t \in I, \quad v(t_0) = v_0\,,$$

mit $t_0 \in I$, $\|v_0 - u(t_0)\| \le \rho$, notwendig gilt (Folgerung aus dem Stabilitätssatz 4.4):

$$\max_{t\in I} \|u(t) - v(t)\| \le R\,.$$

D. h.: Jede zweite Lösung $v(t)$ der RWA, deren Graph dem von $u(t)$ um weniger als ρ nahekommt, verläuft ganz in U_R. Sei nun $v(t)$ eine zweite Lösung der RWA mit Graph$(v) \subset U_R$. Dann gilt für $w := u - v$:

$$\begin{aligned} w'(t) &= f(t,u(t)) - f(t,v(t)) = \int_0^1 f'_x(t, v(t) + s(u{-}v)(t))w(t)\,ds \\ &= f'_x(t,u(t))w(t) + \underbrace{\Big(\int_0^1 \{f'_x(t,v(t)+sw(t)) - f'_x(t,u(t))\}\,ds\Big)}_{=:\,\alpha(t)} w(t)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= r(u(a),u(b)) - r(v(a),v(b)) \\ &= r(u(a),u(b)) - r(v(a),u(b)) + r(v(a),u(b)) - r(v(a),v(b)) \\ &= \int_0^1 r'_x(v(a){+}sw(a),u(b))w(a)\,ds + \int_0^1 r'_y(v(a),v(b){+}sw(b))w(b)\,ds \\ &= r'_x(u(a),u(b))\,w(a) + r'_y(u(a),u(b))w(b) \\ &\quad + \underbrace{\Big(\int_0^1 r'_x(v(a){+}sw(a),u(b)) - r'_x(u(a),u(b))\,ds\Big)}_{=:\,\beta_a} w(a) \\ &\quad + \underbrace{\Big(\int_0^1 (r'_y(v(a),v(b){+}sw(b)) - r'_y(u(a),u(b))\,ds\Big)}_{=:\,\beta_b} w(b)\,. \end{aligned}$$

Die Funktion w löst also die homogene lineare RWA

$$\begin{aligned} &w'(t) - [f'_x(t,u(t)) + \alpha(t)]\,w(t) = 0\,, \quad t \in I\,, \\ &[r'_x(u(a),u(b)) + \beta_a]\,w(a) + \big[r'_y(u(a),u(b)) + \beta_b\big]\,w(b) = 0\,. \end{aligned} \tag{4.2.51}$$

Wegen der angenommenen Lipschitz-Stetigkeit von $f'_x(t,\cdot), r'_x(\cdot,y)$ und $r'_y(x,\cdot)$ kann man die Matrizen $\alpha(t), \beta_a$ und β_b normmäßig beliebig klein machen durch hinreichend kleine Wahl von R. Im Hinblick auf den Stabilitätssatz 4.4 für AWAn kann damit auch die Abweichung der Matrix $\tilde B_a + \tilde B_b\,\tilde\Phi(b)$ von der zum System (4.2.51) gehörenden Matrix $B_a + B_b\,\Phi(b)$ klein gemacht werden. Da dieses System nur die triviale Lösung haben soll, ist nach Satz 4.11 notwendig $B_a + B_b\,\Phi(b)$ regulär. Für hinreichend kleines R ist dann auch $\tilde B_a + \tilde B_b\,\tilde\Phi(b)$ regulär und folglich wieder nach Satz 4.4 $w \equiv 0$ die einzige Lösung von (4.2.51).

Der Beweis der Umkehrung dieser Aussage kann hier nicht ausgeführt werden. Q.E.D.

4.2.2 Sturm-Liouville-Probleme

Wir wollen nun Satz 4.11 anwenden auf die für die Praxis wichtige Klasse der sog. „(regulären) Sturm-Liouville-Probleme“:

$$
\begin{aligned}
&-[p\,u']'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t)\,, \quad t \in I = [a,b]\,,\\
&\alpha_1 u'(a) + \alpha_0 u(a) = g_a\,, \quad \beta_1 u'(b) + \beta_0 u(b) = g_b\,.
\end{aligned} \tag{4.2.52}
$$

Dabei seien $p \in C^1(I)$, $q, r, f \in C(I)$ und $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, g_a, g_b \in \mathbb{R}$. Die Bezeichnung „regulär“ bezieht sich auf die Tatsache, dass die Koeffizienten p, q, r nicht singulär und das Intervall I als beschränkt vorausgesetzt sind.

Die RWA (4.2.52) ist von zweiter Ordnung und muss zunächst in ein System erster Ordnung umgeschrieben werden: $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv u'$

$$
\begin{aligned}
&u_1' = u_2, \quad -[pu_2]' + qu_2 + ru_1 = f,\,, \quad t \in I\,,\\
&\alpha_1 u_2(a) + \alpha_0 u_1(a) = g_a\,, \quad \beta_1 u_2(b) + \beta_0 u_1(b) = g_b\,.
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung $p(t) \ge \rho > 0$ ist dies äquivalent zu dem System

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r/p & (q-p')/p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{matrix} 0 \\ -f/p \end{matrix}\right)\,, \quad t \in [a,b]\,,\\
&\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(a) \\ u_2(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(b) \\ u_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a \\ g_b \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.53}
$$

in der Standardform (4.2.47). Für diese RWA lassen sich sehr allgemeine Existenzsätze beweisen. Wir beschränken uns hier auf den Spezialfall sog. „Dirichletscher“ Randbedingungen

$$
u(a) = g_a\,, \quad u(b) = g_b\,. \tag{4.2.54}
$$

Satz 4.12 (Sturm-Liouville-Probleme): *Es sei $p(t) \ge \rho$. Dann besitzt das Sturm-Liouville-Problem (4.2.52) mit Dirichletschen Randbedingungen (4.2.54) im Falle*

$$
\rho + (b-a)^2 \min_{t\in I} \Big\{ r(t) - \frac{1}{2} q'(t) \Big\} > 0, \quad t \in I, \tag{4.2.55}
$$

eine eindeutige Lösung $u(t) \in C^2(I)$. Im Falle

$$
\rho + (b-a)^2 \min_{t\in I} \Big\{ r(t) - \frac{1}{2} q'(t) \Big\} \ge \gamma > 0, \quad t \in I, \tag{4.2.56}
$$

mit einer Konstante γ gilt für diese die folgende a priori Abschätzung bzgl. der L^2-Norm:

$$
\|u\|_2 + \|u'\|_2 + \|u''\|_2 \le c\big\{ \|f\|_2 + |g_a| + |g_b| \big\}, \tag{4.2.57}
$$

mit einer von u und f unabhängigen Konstante $c > 0$.

Die Ungleichungsbedingungen (4.2.55) und (4.2.56) in Satz 4.12 sind z. B. erfüllt für

$$q(t) = q_0, \quad r(t) \geq 0, \quad t \in I. \tag{4.2.58}$$

Beweis: i) Wegen der Äquivalenz des Sturm-Liouville-Problems (4.2.52) mit der RWA (4.2.53) genügt es, im Hinblick auf Satz (4.11) zu zeigen, dass das homogene Problem (4.2.52) mit $f(t) \equiv 0$, $g_a = g_b = 0$ nur die triviale Lösung $u(t) \equiv 0$ besitzt. Sei also $u(t)$ die Lösung von

$$-[pu']' + qu' + ru = 0\,, \quad t \in I\,, \quad u(a) = u(b) = 0\,.$$

Multiplikation mit u und Integration über I ergibt

$$-\int_I [pu']'u\,dt + \frac{1}{2}\int_I qu^{2\prime}\,dt + \int_I ru^2\,dt = 0\,.$$

Durch partielle Integration folgt also bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\int_I p|u'|^2\,dt - \underbrace{pu'u}_{=0}\Big|_a^b + \int_I \Big\{r - \frac{1}{2}q'\Big\}|u|^2\,dt + \underbrace{\frac{1}{2}qu^2}_{=0}\Big|_a^b = 0\,.$$

Also ist

$$\rho\int_I |u'|^2\,dt + \min_{t\in I}\Big\{r - \frac{q'}{2}\Big\}\int_I |u|^2\,dt \leq 0\,.$$

Aus der Identität

$$u(t) = \underbrace{u(a)}_{=0} + \int_a^t u'(s)\,ds$$

erschließt man die (eindimensionale) „Poincarésche Ungleichung“

$$\int_I |u|^2\,dt \leq \int_I \Big(\int_a^t u'\,ds\Big)^2\,dt \leq (b-a)^2\int_I |u'|^2\,dt\,.$$

Damit erhalten wir

$$(b-a)^{-2}\rho\int_I |u|^2\,dt + \min_{a\leq t\leq b}\Big\{r - \frac{1}{2}q'\Big\}\int_I |u|^2\,dt \leq 0\,.$$

Unter der Voraussetzung (4.2.55) folgt

$$\int_I |u|^2\,dt \leq 0$$

bzw. $u \equiv 0$.

iia) Zum Nachweis der a priori Abschätzung (4.2.57) schreiben wir die RWA zunächst in eine solche mit homogenen Dirichlet-Daten um. Die lineare Funktion (Lagrangesches Interpolationspolynom)

$$l(t) := \frac{t-b}{a-b}\,g_a + \frac{t-a}{b-a}\,g_b$$

erfüllt die Randbedingungen $l(a) = g_a$ und $l(b) = g_b$. Diese Funktion besitzt Schranken der Form

$$\int_I |l|^2\,dt + \int_I |l'|^2\,dt \le c_0\{|g_a|^2 + |g_b|^2\}$$

mit einer von $g_a,\, g_b$ unabhängigen Konstante $c_0 > 0$. Wir führen nun die neue Funktion $v := u - l$ ein. Diese hat homogene Dirichlet-Randwerte $v(a) = v(b) = 0$ und genügt auf dem Intervall I der Differentialgleichung

$$-[p\,v']'(t) + q(t)v'(t) + r(t)v(t) = \tilde f(t) := f(t) - [p\,l']'(t) + q(t)l'(t) + r(t)l(t). \quad (4.2.59)$$

Wir werden für v die folgende a priori Abschätzung zeigen

$$\int_I |v|^2\,dt + \int_I |v'|^2\,dt + \int_I |v''|^2\,dt \le c_1 \int_I |\tilde f|^2\,dt, \quad (4.2.60)$$

mit einer von v und $\tilde f$ unabhängigen Konstante $c_1 > 0$. Wegen

$$\int_I |\tilde f|^2\,dt \le c_2\Big\{ \int_I |f|^2\,dt + |g_a|^2 + |g_b|^2\Big\}$$

ergibt dies dann in Verbindung mit den Schranken für l (bachte auch $l'' \equiv 0$)

$$\int_I |u|^2\,dt + \int_I |u'|^2\,dt + \int_I |u''|^2\,dt \le c\Big\{ \int_I |f|^2\,dt + |g_a|^2 + |g_b|^2\Big\}$$

mit einer neuen Kanstante $c > 0$.

iib) Zum Nachweis der Hilfsabschätzung (4.2.60) multiplizieren wir in der Gleichung (4.2.59) mit v, integrieren über I und erhalten analog wie in (i):

$$\rho \int_I |v'|^2\,dt + \int_I \Big\{r - \frac{1}{2}q'\Big\}|v|^2\,dt \le \int_I \tilde f v\,dt,$$

und weiter mit Hilfe der Poinceréschen Ungleichung:

$$\Big(\rho(b-a)^{-2} + \min_{a\le t\le b}\big\{r - \tfrac{1}{2}q'\big\}\Big) \int_I |v|^2\,dt \le \int_I \tilde f v\,dt\,.$$

Wegen der Hölderschen Abschätzung

$$\int_I \tilde f v\,dt \le \Big(\int_I |\tilde f|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_I |v|^2\,dt\Big)^{1/2}$$

folgt aus den letzten beiden Abschätzungen:

$$\int_I |v|^2\,dt + \int_I |v'|^2\,dt \le c_3 \int_I |\tilde f|^2\,dt.$$

Ausnutzung der Differentialgleichung in der Form $-pv'' + (q-p')v' + rv = \tilde f$ ergibt

$$\rho \int_I |v''|^2\,dt \le c_4\Big\{ \int_I |v'|^2\,dt + \int_I |v|^2\,dt + \int_I |\tilde f|^2\,dt\Big\},$$

woraus in Verbindung mit den bereits gezeigten Abschätzungen die behauptete a priori Abschätzung folgt. Q.E.D.

Bemerkung 4.8: Unter den Voraussetzungen von Satz 4.12 gilt für die Lösung u der RWA auch eine a priori Abschätzung bzgl. der Maximumnorm:

$$\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty \leq c\big\{\|f\|_\infty + |g_a| + |g_b|\big\}. \tag{4.2.61}$$

Diese erschließt man leicht mit Hilfe der (eindimensionalen) „Sobolewschen[8] Ungleichungen“

$$\|u\|_\infty \leq (b-a)^{-1/2}\|u\|_2 + (b-a)^{1/2}\|u'\|_2, \tag{4.2.62}$$

$$\|u'\|_\infty \leq (b-a)^{-1/2}\|u'\|_2 + (b-a)^{1/2}\|u''\|_2, \tag{4.2.63}$$

und der L^2-Abschätzung (4.2.57). Den Beweis der Sobolewschen Ungleichungen (ähnlich wie der der Poinaréschen Ungleichung) und der L^∞-Abschätzung wird als Übungsaufgabe gestellt.

4.3 Übungen

Übung 4.1: Man forme das System von Differentialgleichungen 4. Ordnung

$$v^{\mathrm{iv}}(t) - au''(t) = f(t), \quad u''(t) + bv(t) = g(t),$$

in ein äquivalentes System erster Ordnung um.

Übung 4.2: a) Man forme die auf einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ gestellte skalare, lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung (sog. „Sturm-Liouville-Problem“)

$$-[pu']'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \quad u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,$$

in ein äquivalentes System erster Ordnung in expliziter Form um. Dabei sind $p \in C^1[a,b]$ mit $p > 0$ und $q, r, f \in C[a,b]$ gegebene Koeffizientenfunktionen.

b) Die skalare lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) + u(t) = 1$$

hat die allgemeine Lösung $u(t) = A\sin t + B\cos t + 1$. Man verifiziere, dass

1. zu den Randbedingungen $u(0) = 0,\ u(\pi/2) = 0$ genau eine,
2. zu den Randbedingungen $u(0) = 0,\ u(\pi) = 1$ keine,
3. zu den Randbedingungen $u(0) = 1,\ u(\pi) = 1$ unendlich viele

[8]Sergei Lvovich Sobolew (1908–1989): Russischer Mathematiker; wirkte zunächst in Leningrad (St. Petersburg) und dann am berühmten Steklov-Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften in Moskau; fundamentale Beiträge zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Konzept der verallgemeinerten (distributionellen) Lösung, Sobolew-Räume; beschäftigte sich auch mit numerischen Methoden, numerische Quadratur.

Lösungen dieser Gestalt existieren. Dies demonstriert die Schwierigkeiten einer einheitlichen Existenztheorie für RWAn selbst im linearen Fall.

Übung 4.3: Man konstruiere mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen eine Lösung für die folgende AWA:

$$\begin{aligned} &a) \quad u'(t) = u(t)^{1/4}, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1, \\ &b) \quad u'(t) = -\sin(t)u(t)^2, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1. \end{aligned}$$

Man begründe, dass dies jeweils die einzigen Lösungen sind. Was passiert, wenn die Anfangsbedingung in a) bzw. in b) in $u(0) = 0$ geändert wird?

Übung 4.4: Der Beweis des Existenzsatzes von Peano aus der Vorlesung sichert die gleichmäßige Konvergenz der mit dem Eulerschen Verfahren konstruierten Polygonzüge u^h gegen eine lokale Lösung u der AWA

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad u(t_0) = u_0,$$

mit stetigem $f(t, x)$ für eine gewisse Schrittweitennullfolge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

a) Seien $u^1(t)$ und $u^2(t)$ zwei durch den Satz von Peano gelieferte lokale Lösungen auf den Intervallen $I_1 = [t_0, t_1]$ bzw. $I_2 = [t_1, t_2]$ zu den Anfangswerten $u^1(t_0) = u_0$ bzw. $u^2(t_1) = u^1(t_1)$. Man begründe, warum dann die zusammengesetzte Funktion

$$u(t) := \begin{cases} u^1(t), & t \in [t_0, t_1], \\ u^2(t), & t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

eine (stetig differenzierbare) Lösung der AWA auf dem Intervall $I_1 \cup I_2 = [t_0, t_2]$ ist.

b) Man zeige durch ein Widerspruchsargument, dass im Falle der *eindeutigen* Lösbarkeit der AWA die gesamte Folge der u^h für $h \to 0$ gegen u konvergiert, d. h. dass für *jede* Nullfolge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die zugehörigen Polygonzüge konvergieren: $u^{h_i} \to u \ (i \to \mathbb{N})$.

Übung 4.5: Die Funktion $f(t, x)$ in der RWA

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$

sei auf $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ stetig und „linear beschränkt“, d. h.: Es gelte:

$$\|f(t, x)\| \leq A(t)\|x\| + B(t),$$

mit stetigen, nicht-negativen Funktionen $A(t)$, $B(t)$. Man zeige, dass dann die AWA eine globale, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt. (Hinweis: Gronwallsches Lemma)

Übung 4.6: Man untersuche die folgenden AWA hinsichtlich Existenz von Lösungen, deren Eindeutigkeit und Existenzintervall, Beschränktheit und exponentielle Stabilität:

$$\begin{aligned} &a) \qquad u'(t) = -u(t)^5 - u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1; \\ &b) \qquad u'(t) = \sin(u(t)) - 2u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1. \end{aligned}$$

(Hinweis: Man wende die Sätze aus dem Text an.)

Übung 4.7: Man beweise die folgende Verallgemeinerung der Gronwallschen Ungleichung der Vorlesung: Besteht für eine stückweise stetige Funktion $w(t) \geq 0$ eine Beziehung der Form

$$w(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)\,ds + b(t), \quad t \geq t_0,$$

mit einer integrierbaren Funktion $a(t) \geq 0$ und einer nichtfallenden Funktion $b(t) \geq 0$, so folgt

$$w(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big) b(t)\,, \quad t \geq t_0.$$

Übung 4.8: Die Funktion $f(t,x)$ in der AWA

$$u'(t) = f(t,u(t)), \ \ t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$

sei auf $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ stetig und „linear beschränkt“, d. h. es gelte:

$$\|f(t,x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen, nicht-negativen Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$.

a) Man zeige, dass dann die AWA eine, nicht notwendig eindeutige, aber globale, d. h. auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt. (Hinweis: Gronwallsches Lemma)

b) Sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ linear-beschränkt,

$$f_1(t,x) = t|x_1|^{1/2} + \sin(t)x_2, \qquad f_2(t,x) = e^{-t^2|x_1|} + x_1(1+x_2^2)^{-1},$$

und wann sind die Lösungen der zugehörigen AWA eindeutig?

Übung 4.9: Gegeben sei die d-dimensionale lineare autonome AWA

$$u'(t) = Au(t) + b, \ \ t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^d$ (unabhängig von t).

a) Man zeige, dass die eindeutige globale Lösung der AWA die Darstellung

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b\,ds$$

besitzt, mit der durch ihre Taylor-Entwicklung definierten Matrix-Exponentialfunktion

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k.$$

(Hinweis: Das Integral über eine Vektor- oder Matrix-Funktion ist im komponentenweisen Sinne definiert.)

b) Wie lautet die natürliche Verallgemeinerung dieser Lösungsformel für den nichtautonomen Fall mit t-abhängigen Matrix- und Vektorfunktionen $A(t)$, $b(t)$?

Übung 4.10: Gegeben sei die lineare AWA (d-dimensionales System)

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u^0,$$

mit einer stetigen Matrix-Funktion $A(\cdot)$, $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, und Vektorfunktion $b(\cdot)$, $b(t) \in \mathbb{R}^d$. Nach einem Resultat aus dem Text hat diese AWA eine eindeutig bestimmte, globale Lösung.

a) Man rekapituliere den Begriff (stark) monoton. Anschließend zeige man, dass diese AWA „(stark) monoton“ ist, wenn die Matrix $-A(t)$ symmetrisch und gleichmäßig für t positiv definit ist, d. h.: $A(t) = A(t)^T$ und

$$(-A(t)x, x)_2 \geq \gamma \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einer Konstante $\gamma > 0$. Hier bezeichnen $(\cdot,\cdot)_2$ das euklidische Skalarprodukt und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm. Dies ist gleichbedeutend damit, dass alle Eigenwerte der Matrizen $A(t)$ negativ und gleichmäßig von Null wegbeschränkt sind.

b) Man begründe, dass die Bedingung in a) für die Matrix mit den Elementen

$$a_{ii} = -50, \quad a_{i,i\pm 1} = 20, (i \pm 1 \in \{1,\dots,d\}) \;\; a_{ij} = 0 \;\text{ sonst} \quad (i,j = 1,\dots,d),$$

erfüllt ist.

c) Man begründe mit den Resultaten aus dem Text, dass die eindeutige Lösung der AWA dann für $t \to \infty$ gleichmäßig beschränkt ist, wenn

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \|b(t)\|_2 < \infty.$$

Übung 4.11: Die lineare Differentialgleichung

$$u''(t) + u(t) = 1$$

hat die allgemeine Lösung $u(t) = A\sin t + B\cos t + 1$. Man verifiziere, dass

1. zu den Randbedingungen $u(0) = 0,\, u(\pi/2) = 0$ genau eine,
2. zu den Randbedingungen $u(0) = 0,\, u(\pi) = 1$ keine,
3. zu den Randbedingungen $u(0) = 1,\, u(\pi) = 1$ unendlich viele

Lösungen dieser Gestalt existieren. Dies demonstriert die Schwierigkeiten einer einheitlichen Existenztheorie für RWAn selbst im linearen Fall.

Übung 4.12: Man betrachte das spezielle (reguläre) Sturm-Liouville-Problem

$$-[pu']'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \quad t \in I = [a,b],$$

mit sog. „Neumannschen Randbedingungen“

$$u'(a) = g_a, \quad u'(b) = g_b.$$

Man formuliere eine Bedingung an die Koeffizienten q und r, unter der diese RWA für beliebige (regulären) Daten eine eindeutige Lösung besitzt.

Übung 4.13: Im Falle $p, q, r, f \in C^1[a,b]$ mit $p(t) \geq \rho > 0$ und

$$\rho + (b-a)^2 \min_{t\in I} \Big\{ r(t) - \frac{1}{2} q'(t) \Big\} > 0, \quad t \in I,$$

ist nach der Vorlesung jede Lösung u der RWA

$$-[pu']'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \quad t \in I = [a,b],$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ in $C^2(I)$ und genügt der L^2-Abschätzung

$$\|u''\|_2 + \|u'\|_2 + \|u\|_2 \leq c\,\|f\|_2,$$

mit einer von u, f unabhängigen Konstante $c > 0$. Man beweise unter denselben Voraussetzungen die verwandte a priori Abschätzung

$$\|u''\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u\|_\infty \leq c\,\|f\|_\infty,$$

bzgl. der Maximumnorm $\|u\|_\infty := \max_I |u|$. (Hinweis: Man zeige zum Beweis die Sobolewschen Ungleichungen $\|u\|_\infty \leq c\{\|u\|_2 + \|u'\|_2\}$ und $\|u'\|_\infty \leq c\{\|u'\|_2 + \|u''\|_2$.)