0 Vorwort

Der vorliegende zweite Teil des Analysiskurses beschäftigt sich hauptsächlich mit der Differential- und Integralrechnung für Funktionen *mehrerer* reeller Veränderlicher. Wir entwickeln die Theorie dabei zugunsten größerer Anschaulichkeit im n-dimensionalen Zahlenraum und verzichten auf ihre Darstellung im allgemeinen Kontext metrischer Räume.

Kapitel 1 behandelt den n-dimensionalen Zahlenraum $\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C})$ als „normierten“ Raum. Es werden die grundlegenden topologischen Begriffe wie „offen“, „abgeschlossen“ und „kompakt“ für Punktmengen eingeführt und die mehrdimensionale Variante des Satzes von Bolzano-Weierstraß bereitgestellt.

Kapitel 2 ist dann den skalarwertigen und vektorwertigen Funktionen $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ bzw. $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ in mehreren Veränderlichen gewidmet. Für stetige skalarwertige Funktionen werden die mehrdimensionalen Analoga der uns bereits bekannten fundamentalen Sätze von der Beschränktheit und vom Extremum übertragen. Vektorwertige Funktionen treten im Zusammenhang mit Gleichungssystemen auf. Hierfür werden grundlegende Existenzsätze basierend auf dem Kontraktionsprinzip und dem Monotonieprinzip bewiesen.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Erweiterung der Differentialrechnung auf Funktionen mehrerer Variabler. Dazu werden die Begriffe „partielle“ und „totale“ Ableitung eingeführt. Dies erlaubt dann die Ableitung von Extremalkriterien und führt auch zu einem mehrdimensionalen Analogon der Taylor-Entwicklung. Zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme werden der Satz über implizite Funktionen, die Umkehrbarkeit von regulären Abbildungen sowie das mehrdimensionale Newton-Verfahren diskutiert.

In Kapitel 4 wird die Theorie der „Anfangsaufgaben“ von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$

entwickelt. Dazu gehört u. a. der Nachweis der Existenz von Lösungen, deren Eindeutigkeit und Stabilität sowie ihre Fortsetzbarkeit für alle Zeiten $t \geq t_0$. Am Schluss wird noch ein Einblick in die Theorie der entsprechenden linearen „Randwertaufgaben“

$$u'(t) - A(t)u(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad B_a u(a) + B_b u(b) = g,$$

gegeben und insbesondere deren enge Beziehung zu linearen algebraischen Gleichungssystemen gezeigt.

In Kapitel 5 wird der Jordan-Inhalt von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ behandelt und dann darauf aufbauend das mehrdimensionale Analogon des Riemann-Integrals entwickelt. Wichtigste Resultate sind der Satz von Fubini über die Reduktion eines n-dimensionalen Integrals auf sukzessive eindimensionale Intgeration

$$\int_D f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\, dy \Big) dx,$$

und die n-dimensionale Variante des Substitutionssatzes

$$\int_{\Phi(D)} f(y)\,dy = \int_D f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\,dx.$$

Damit und mit Hilfe des Konzepts des „uneigentlichen“ mehrdimensionalen Riemann-Integrals lassen sich die meisten praktisch relevanten Integrationsaufgaben lösen.