7 Fourier-Analysis

Neben den Polynomen werden die trigonometrischen Funktionen $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ als besonders „einfache“, d. h. leicht auswertbare, Funktionen angesehen. In diesem Kapitel untersuchen wir in Analogie zur Taylor-Entwicklung die Approximation von Funktionen durch Linearkombination von solchen trigonometrischen Funktionen, die sog. Fourier[1]-Entwicklung.

7.1 Der Funktionenraum $R[a, b]$

Bisher haben wir reellwertige Funktionen betrachtet. Für das Folgende benötigen wir den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit auch für *komplexwertige* Funktionen. Dabei verwenden wir wieder die Bezeichnung $\mathbb{K}$ je nach Situation für den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir erinnern an die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen:

$$\overline{\overline{a}} = a, \quad a\overline{a} = |a|^2, \quad a + \overline{a} = 2\mathrm{Re}\, a, \quad a - \overline{a} = 2i\,\mathrm{Im}\, a,$$

wobei $\overline{a} := \mathrm{Re}\, a - i\,\mathrm{Im}\, a$ den konjugiert komplexen Wert von einem $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

Wir nennen eine auf einem Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ „Riemann-integrierbar“, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil Riemann-integrierbar sind, und setzen

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\, dx + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\, dx.$$

Diese Definition fällt natürlich für reellwertige Funktionen mit $\mathrm{Im}\, f \equiv 0$ mit der üblichen zusammen. Analog werden auch uneigentliche Riemann-Integrale für komplexwertige Funktionen definiert. Die üblichen Rechenregeln für das *reelle* Riemann-Integral übertragen sich sinngemäß auch auf komplexwertige Integrale. Insbesondere gilt

$$\int_a^b \overline{f(x)}\, dx = \overline{\int_a^b f(x)\, dx}.$$

Wir hatten schon gesehen, dass stetige und allgemeiner auch Funktionen mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar sind. Letztere Eigenschaft wird in der folgenden Definition präzisiert.

Definition 7.1: *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ heißt „stückweise stetig“, wenn sie in $[a, b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist, und wenn in jeder*

[1] Jean-Baptiste Baron de Fourier (1768–1830): Französischer Mathematiker und Physiker; Mitglied der Pariser Akademie lehrte an der École Polytechniqe; begleitete Napoleon auf seinem Feldzug nach Ägypten; zählt zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jahrhunderts; fand bei seinen Arbeiten zur Theorie der Wärmeleitung die Darstellbarkeit periodischer Funktionen durch triginometrische Reihen.

dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a,b]$ *die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte* $f(\xi_\pm) := \lim_{h\downarrow 0} f(\xi \pm h)$ *existieren. In den Ausnahmenstellen* $\xi \in (a,b)$ *sei gesetzt:*

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$

(Diese zunächst willkürliche Festlegung hat keinen Einfluss auf den Wert des Riemann-Integrals von f *.) Die Menge der in diesem Sinne auf* $[a,b]$ *stückweise stetigen (Riemann-integrierbar) Funktionen bilden offenbar einen Vektorraum, der mit* $R[a,b]$ *bezeichnet wird.*

Bemerkung 7.1: Wir erinnern an die vollständige Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit durch den Satz von Lebesgue: *Die Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Riemann-integerierbar, wenn sie auf* $[a,b]$ *beschränkt und fast überall, d. h. bis auf eine Nullmenge von Ausnahmestellen, stetig ist.* Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist Nullmenge, wenn sie durch endlich oder abzählbar unendlich viele Intervalle I_k mit beliebig kleiner Gesamtlänge $\sum_{k=1}^\infty |I_k| < \varepsilon$ überdeckbar ist. Jede endliche oder abzählbar unendliche Punktmenge (z. B. die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen) ist Nullmenge; es gibt aber auch überabzählbare Nullmengen (z. B. das „Cantorsche Diskontinuum“).

Für Funktionen $f, g \in R[a,b]$ ist auch das Produkt $f\overline{g}$ stückweise stetig und damit über $[a,b]$ Riemann-integrierbar. Damit ist auf $R[a,b]$ die „Sesquilinearform“

$$(f,g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\,,$$

wohl definiert. Der Name „Sesquilinearform“ rührt von der Tatsache her, dass für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g), \tag{7.1.1}$$
$$(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2), \tag{7.1.2}$$

was unmittelbar aus der Linearität des Riemann-Integrals folgt. Genauso ergeben sich die „Symmetrieeigenschaft“

$$(f,g) = \int_a^b f\overline{g}\,dx = \overline{\int_a^b \overline{f} g\,dx} = \overline{\int_a^b g\overline{f}\,dx} = \overline{(g,f)}, \tag{7.1.3}$$

sowie die „Semi-Definitheit“

$$(f,f) = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \geq 0. \tag{7.1.4}$$

Eine Sesquilinearform mit der Eigenschaft (7.1.3) wird im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ „hermitesch“ und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ „symmetrisch“ genannt. Für Funktionen aus $R[a,b]$ folgt, wie man sich leicht überlegt, aus $(f,f) = 0$ notwendig $f \equiv 0$. Auf $R[a,b]$ besitzt die Sesquilinearform $(\cdot,\cdot)$ also die Eigenschaften eines sog. „Skalarprodukts“; dieses wird „L^2-Skalarprodukt“ (auf $[a,b]$) genannt.

Lemma 7.1: *Für ein Skalarprodukt* $(\cdot,\cdot)$ *gilt die sog. „Schwarzsche[2] Ungleichung“*

$$|(f,g)|^2 \le (f,f)\,(g,g). \tag{7.1.5}$$

Beweis: Im Fall $g=0$ (d. h.: g ist die Nullfunktion.) gilt trivialerweise

$$|(f,g)|^2 = 0 = (f,f)\,(g,g).$$

Sei nun $g \neq 0$. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ ist

$$0 \le (f+\alpha g, f+\alpha g) = (f,f) + \alpha(g,f) + \overline{\alpha}(f,g) + \alpha\overline{\alpha}(g,g).$$

Mit $\alpha := -(f,g)(g,g)^{-1}$ impliziert dies

$$\begin{aligned} 0 &\le (f,f) - (f,g)(g,g)^{-1}(g,f) - \overline{(f,g)}(g,g)^{-1}(f,g) + (f,g)\overline{(f,g)}(g,g)^{-1} \\ &= (f,f) - |(f,g)|^2(g,g)^{-1} \end{aligned}$$

bzw.

$$0 \le (f,f)(g,g) - |(f,g)|^2.$$

Dies zeigt die Richtigkeit der Behauptung. Q.E.D.

Durch die Setzung $\|f\| := (f,f)^{1/2}$ erhalten wir dann auf $R[a,b]$ eine durch das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ induzierte „Norm“, die sog. „L^2-Norm“ . Die Normeigenschaften, Positivität, Homogenität und Subadditivität (Dreiecksungleichung) ergeben sich dabei unmittelbar aus den Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\|f\| = 0 \quad \Rightarrow \quad (f,f) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0,$$

$$\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{1/2} = \big(|\alpha|^2 (f,f)\big)^{1/2} = |\alpha|\,\|f\|,$$

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= (f+g, f+g)^{1/2} = \big(\|f\|^2 + (f,g) + (g,f) + \|g\|^2\big)^{1/2} \\ &\le \big(\|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2\big)^{1/2} = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Norm $\|\cdot\|$ lässt sich die sog. „Konvergenz im Quadratischen Mittel“ (oder kurz „L^2-Konvergenz“) von Funktionen $f_n \in R[a,b]$ gegen eine Funktion $f \in R[a,b]$ erklären:

$$f_n \to_{L^2} f \quad :\Leftrightarrow \quad \|f_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dies bedeutet, dass das quadratische Mittel der Abweichung zwischen f_n und f gegen Null geht, d. h.:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

[2]Hermann Schwarz (1843–1921): Deutscher Mathematiker; wirkte in Halle, Göttingen und Berlin; leistete grundlegende Beiträge zur Funktionentheorie, Differentialgeometrie und Variationsrechnung.

Aus der Abschätzung

$$\|f_n - f\| = \Big(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \le \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,\sqrt{b-a}$$

sehen wir, dass die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f auch ihre Konvergenz im L^2-Sinne impliziert. Die umgekehrte Aussage ist i. Allg. nicht richtig; eine L^2-konvergente Funktionenfolge muss nicht einmal punktweise konvergieren. Umgekehrt impliziert aber die punktweise Konvergenz auch nicht automatisch die L^2-Konvergenz (Übungsaufgabe). Analog zur L^2-Norm ist auf $R[a,b]$ für beliebiges $p \in [1,\infty)$ die sog. L^p-Norm definiert

$$\|f\|_p := \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Der zugehörigen Konvergenzbegriff ist die sog. L^p-Konvergenz. Für $p=2$ ergibt sich die L^2-Norm. Den Nachweis der Normeigenschaften, insbesondere der Dreicksungleichung, verschieben wir auf später. Speziell für $p=1$ erhalten wir die L^1-Norm

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

für welche die Normeigenschaften direkt aus denen des Absolutbetrags folgen.

Beispiel 7.1: Die Folge der durch $f_n(x) := x^n,\ x \in [-1,1]$, definierten Funktionen $f_n \in R[-1,1]$ konvergiert wegen

$$\|f_n\|^2 = \int_{-1}^1 x^{2n}\,dx = 2\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{2}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_0^1 \le \frac{2}{2n+1}$$

im L^2-Sinne gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$. Sie konvergiert aber offenbar wegen $f_n(1) = 1,\ n \in \mathbb{N}$ nicht punktweise gegen Null und wegen $f_n(-1) = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$ in $x = -1$ sogar überhaupt nicht. Trotzdem würde man die Funktion $f_n(x) = x^n$ für große n „im Mittel“ als gute Approximation zu $f_\infty(x) \equiv 0$ ansehen.

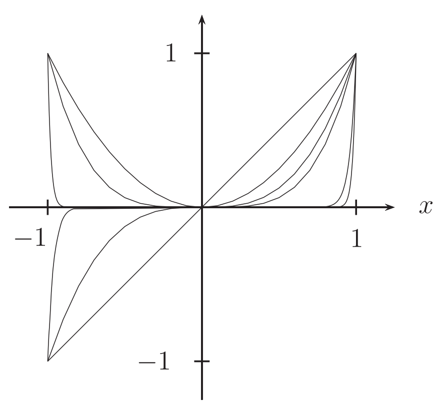

Abbildung 7.1: Eine im L^2-Sinne aber nicht punktweise konvergente Funktionenfolge: $f(x) = x^n$ für $n = 1,2,3,4,19,20$.

Bemerkung 7.2: Wir hatten früher schon gesehen, dass der Raum $C[a,b]$ der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen versehen mit der Maximumnorm

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

vollständig ist, d. h. dass in ihm jede Cauchy-Folge einen Limes hat. Damit wird $C[a,b]$ zu einem sog. „Banach-Raum" ($\Leftrightarrow$: *vollständiger normierter Raum*). Es stellt sich nun die Frage, ob auch der Raum $R[a,b]$ versehen mit der L^2-Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist. Dies ist aber nicht der Fall. Es gibt Cauchy-Folgen in $R[a,b]$, die keinen Limes in $R[a,b]$ haben. Dies legt einen Vervollständigungsprozess über Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen nahe (analog zur Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$). Der so entstehende *vollständige* normierte Raum wird $L^2(a,b)$ genannt und als der „Lebesguesche Hilbert-Raum" über $[a,b]$ bezeichnet. Seine Elemente können identifiziert werden mit den auf (a,b) im Lebesgueschen Sinne quadratintegrablen Funktionen ($\Rightarrow$ Lebesgue-Intergral). Die „L^2-Norm" ist daher auf diesem Raum zunächst nur eine „Semi-Norm" (nicht streng definit); sie wird zur Norm, wenn man alle Funktionen identifiziert, welche sich höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden. Wir haben dieses Problem für unstetige Funktionen aus $R[a,b]$ dadurch umgangen, dass die Werte an den Unstetigkeitsstellen als Mittelwerte der rechts- und linksseitigen Grenzwerte festgelegt wurden.

Das L^2-Skalarprodukt und die L^2-Norm stehen zueinander ähnlich wie das euklidische Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ zur euklidischen Norm. Damit können wir in $R[a,b]$ Geometrie betreiben, d. h. den geometrischen Begriff „Orthogonalität" einführen.

Definition 7.2: *Zwei Funktionen $f, g \in R[a,b]$ werden „orthogonal" genannt, wenn gilt:*

$$(f,g) = 0. \tag{7.1.6}$$

Eine Teilmenge $S \subset R[a,b]$ heißt „Orthogonalsystem", wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind.

Satz 7.1: *Die trigonometrischen Funktionen*

$$c_0(x) :\equiv 1, \quad c_k(x) := \cos(kx), \quad s_l(x) := \sin(lx) \quad (k,l \in \mathbb{N}),$$

bilden bzgl. des L^2-Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)$ ein Orthogonalsystem in $R[0,2\pi]$. Speziell gilt für $k,l \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)\,dx = \int_0^{2\pi} s_l(x)\,dx = \int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,dx = 0, \tag{7.1.7}$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,dx = \pi\delta_{kl}, \qquad \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,dx = \pi\delta_{kl}, \tag{7.1.8}$$

mit der Abkürzung $\delta_{kl} := 1$ für $k = l$ und $\delta_{kl} := 0$ für $k \neq l$ („Kronecker-Delta" oder „Kronecker-Symbol").

Beweis: Zunächst erhalten wir durch partielle Integration für $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)\,dx = \frac{1}{k}s_k(x)\Big|_0^{2\pi} = 0, \qquad \int_0^{2\pi} s_l(x)\,dx = -\frac{1}{l}c_l(x)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Analog ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,dx = \frac{1}{k}s_k(x)s_l(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{k}s_k(x)lc_l(x)\,dx, \tag{7.1.9}$$

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,dx = \frac{1}{k}s_k(x)c_l(x)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{k}s_k(x)ls_l(x)\,dx \tag{7.1.10}$$

$$\int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,dx = -\frac{1}{k}c_k(x)s_l(x)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{k}c_k(x)lc_l(x)\,dx. \tag{7.1.11}$$

Die Randterme verschwinden alle wegen der 2π-Periodiziät von $s_k(x)$ und $c_k(x)$. Für $k = l$ folgern wir aus (7.1.9):

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)s_k(x)\,dx = -\int_0^{2\pi} c_k(x)s_k(x)\,dx,$$

sowie aus (7.1.10) und (7.1.11):

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)^2\,dx = \int_0^{2\pi} s_k(x)^2\,dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k(x)^2\,dx,$$

und damit wie behauptet

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)s_k(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} c_k(x)^2\,dx = \int_0^{2\pi} s_k(x)^2\,dx = \pi.$$

Für $k \neq l$ erhalten wir durch Kombination von (7.1.10) und (7.1.11):

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,dx = k^{-1}l\int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,dx = k^{-2}l^2\int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,dx,$$

und damit wie behauptet

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,dx = \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,dx = 0.$$

Schließlich ergibt nochmalige partielle Integration in (7.1.9):

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,dx = k^{-2}l^2\int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,dx,$$

und damit für $k \neq l$ die noch fehlende Aussage

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,dx = 0.$$

Q.E.D.

7.2 Fourier-Entwicklung

Im Folgenden wollen wir die „Entwickelbarkeit“ periodischer Funktionen in Summen von trigonometrischen Funktionen untersuchen. Wir erinnern daran, dass eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ „periodisch“ heißt, mit Periode $L>0$, wenn

$$f(x+L)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Dann gilt natürlich auch $f(x+nL)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$ für alle $n\in\mathbb{Z}$. Durch eine Variablentransformation kann jede L-periodische Funktion $f(\cdot)$ in eine 2π-periodische Funktion $F(\cdot)$ überführt werden und umgekehrt:

$$F(x):=f\Big(\frac{L}{2\pi}x\Big),\qquad f(x)=F\Big(\frac{2\pi}{L}x\Big),$$
$$F(x+2\pi)=f\Big(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)\Big)=f\Big(\frac{L}{2\pi}x+L\Big)=f\Big(\frac{L}{2\pi}x\Big)=F(x).$$

Wir werden uns daher im Folgenden auf die Betrachtung von 2π-periodischen Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ beschränken. Wir sprechen dabei von einer „2π-periodischen Funktion $f\in R[0,2\pi]$“, wenn f auf $[0,2\pi]$ (und damit wegen der Periodizität auf jedem endlichen Intervall) Riemann-Integrierbar ist. Wegen der geforderten Periodizität muss dann $f(0)=f(2\pi)$ sein. In diesem Sinne kann jede Funktion $f\in R[0,2\pi]$ gegebenenfalls durch Abänderung der Funktionswerte in $x=0$ oder $x=2\pi$ zu einer 2π-periodischen Funktion $\tilde f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ fortgesetzt werden. Ihre Riemann-Interierbarkeit über $[0,2\pi]$ bleibt davon unberührt.

Beispiel 7.2: Zu der auf $[0,2\pi]$ definierten Funktion $f(x):=x-\pi$ erhält man durch

$$\tilde f(x)=\begin{cases}x-\pi, & 0<x<2\pi,\\ 0, & x\in\{0,2\pi\},\end{cases}$$

und anschließende 2π-periodische Fortsetzung eine 2π-periodische Funktion $\tilde f\in R[0,2\pi]$ (siehe Abb. 7.2).

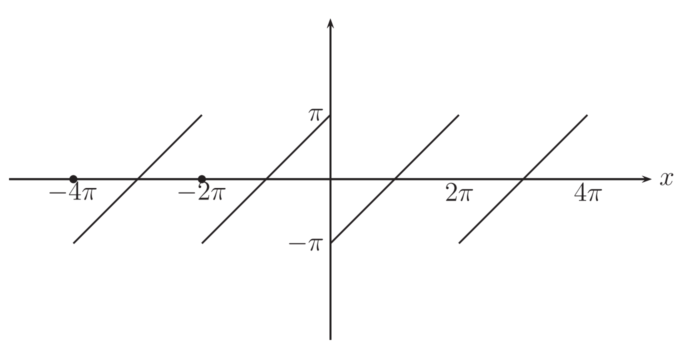

Abbildung 7.2: Eine 2π-periodische, unstetige Zackenfunktion.

Spezielle 2π-periodische Funktionen sind die sog. „trigonometrischen Polynome“

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big\{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big\}.$$

Im Falle $a_n \neq 0$ oder $b_n \neq 0$ spricht man von einem „trigonometrischen Polynom“ vom Grad n. Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen (7.1.7) und (7.1.8) gilt, für $l \in N_0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} T_n(x)\cos(lx)\,dx &= \tfrac{1}{2}a_0 \int_0^{2\pi} \cos(lx)\,dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \Big\{a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx + \int_0^{2\pi} b_k \sin(kx)\cos(lx)\,dx\Big\} \\ &= a_l \int_0^{2\pi} \cos(lx)\cos(lx)\,dx = a_l\pi,\end{aligned}$$

sowie für $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} T_n(x)\sin(lx)\,dx &= \tfrac{1}{2}a_0 \int_0^{2\pi} \sin(lx)\,dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \Big\{a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx + \int_0^{2\pi} b_k \sin(kx)\sin(lx)\,dx\Big\} \\ &= b_l \int_0^{2\pi} \sin(lx)\sin(lx)\,dx = b_l\pi,\end{aligned}$$

und wir erhalten die Beziehungen, für $k \in \mathbb{N}$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)\,dx\,, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)\cos(kx)\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)\sin(kx)\,dx\,.$$

Dies motiviert für eine beliebige Funktion $f \in R[0,2\pi]$ die Definition der zugehörigen trigonometrischen Summe, sog. „Fourier-Summe“,

$$F_n^f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big\{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big\} \tag{7.2.12}$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\,.$$

Wegen der 2π-Periodizität der Funkion f können die zugehörigen Fourier-Koeffizienten auch durch Integration über ein beliebiges anderes Intervall der Länge 2π berechnet werden.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Frage, in wie weit die formale Fourier-Summe F_n^f einer Funktion $f \in R[a,b]$ diese für $n \to \infty$ tatsächlich approximiert.

Es erweist sich als zweckmäßig, diese Untersuchung unter Verwendung der komplexen Schreibweise durchzuführen. Mit Hilfe der Beziehungen (Man beachte $i^{-1} = -i$.)

$$\cos(x) = \tfrac{1}{2}\big(e^{ix} + e^{-ix}\big), \qquad \sin(x) = \tfrac{1}{2i}\big(e^{ix} - e^{-ix}\big) = -\tfrac{i}{2}\big(e^{ix} - e^{-ix}\big) \tag{7.2.13}$$

kann die Fourier-Summe

$$F_n^f = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big\{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big\}$$

in eine sog. „Exponentialsumme" umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} F_n^f &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big\{\tfrac{1}{2}a_k e^{ikx} + \tfrac{1}{2}a_k e^{-ikx} - \tfrac{i}{2}b_k e^{ikx} + \tfrac{i}{2}b_k e^{-ikx}\big\} \\ &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$c_0 := \tfrac{1}{2}a_0, \qquad c_k := \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} := \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

Wegen $\cos(kx) \pm i\sin(kx) = e^{\pm ikx}$ gilt auch

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\big(\cos(kx) - i\sin(kx)\big)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{7.2.14}$$

Definition 7.3 (Fourier-Reihe): *Für eine Funktion $f \in R[0,2\pi]$ heißen die Zahlen*

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

„Fourier-Koeffizienten" und die damit gebildeten Summen

$$F_n^f(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

„Fourier-Summen". Im Falle von deren Konvergenz für $n \to \infty$ heißt der Limes

$$F_\infty^f(x) := \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

die „Fourier-Reihe" der Funktion f.

Lemma 7.2: *Sei* $f \in R[0,2\pi]$ *eine* 2π*-periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten* c_k, $k \in \mathbb{Z}$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\|f - F_n^f\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \tag{7.2.15}$$

Beweis: Wir setzen zur Abkürzung $e_k(x) := e^{ikx}$. Mit dem oben eingeführten L^2-Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ gilt (Übungsaufgabe)

$$(e_k, e_l) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx}\, dx = \begin{cases} 2\pi, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

und

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}\, dx = \frac{1}{2\pi}(f, e_k).$$

Für $F_n^f := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ folgt damit

$$(f, F_n^f) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k (f, e_k) = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2,$$

$$(F_n^f, F_n^f) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{k=-l}^{l} c_k \overline{c}_l (e_k, e_l) = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Mit diesen Identitäten erschließen wir nun

$$\begin{aligned} \|f - F_n^f\|^2 &= (f - F_n^f, f - F_n^f) = (f,f) - (f, F_n^f) - (F_n^f, f) + (F_n^f, F_n^f) \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Satz 7.2 (Besselsche Ungleichung): *Sei* $f \in R[0,2\pi]$ *eine* 2π*-periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten* c_k, $k \in \mathbb{Z}$. *Dann konverghieren die Quadratsummen der Fourier-Koeffizienten, und es gilt die sog. „Besselsche*[3] *Ungleichung“:*

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|^2. \tag{7.2.16}$$

[3] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846): Deutscher Astromom und Mathematiker; Direktor des Observatoriums in Königsberg und Mitglied der Berliner Akademie; grundlegende Beiträge zur mathematischen Fehlerkorrektur bei astronomischen Beobachtungen und zur Sternpositionierung.

Beweis: Die behauptete Ungleichung ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung

$$2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \|f\|^2 - \|f - F_n^f\|^2 \leq \|f\|^2$$

durch Grenzübergang $n \to \infty$ und Beachtung der Monotonie der Folge der Partialsummen $\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$. Q.E.D.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen die Fourier-Summen einer periodischen Funktion $f \in R[0, 2\pi]$ für $n \to \infty$ im quadratischen Mittel gegen f konvergiert. Nach Lemma 7.2 ist dies äquivalent zu der Beziehung

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \tag{7.2.17}$$

Wir stellen zunächst drei Hilfssätze bereit.

Lemma 7.3 (Riemannsches Lemma): *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für $x \in [a, b]$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt dann:*

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy)\, dy \to 0 \quad (|s| \to \infty), \tag{7.2.18}$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig für $x \in [a, b]$ ist.

Beweis: Für $s \neq 0$ ergibt sich durch partielle Integration

$$F_s(x) = -f(y)\frac{\cos(sy)}{s}\Big|_a^x + \frac{1}{s}\int_a^x f'(y)\cos(sy)\, dx.$$

Da f und f' auf $[a, b]$ stetig sind, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

$$|f(y)| \leq M, \qquad |f'(y)| \leq M, \quad y \in [a, b].$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M(b-a)}{|s|},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt. Q.E.D.

Lemma 7.4: *a) Auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ mit $\delta > 0$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \tag{7.2.19}$$

gleichmäßig.

b) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \Big(\frac{x-\pi}{2}\Big)^2 - \frac{\pi^2}{12}, \tag{7.2.20}$$

konvergiert gleichmäßig für $x \in \mathbb{R}$ *. Insbesondere für* $x = 0$ *gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{7.2.21}$$

Beweis: i) Wir benötigen die folgende Identität:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)}. \tag{7.2.22}$$

Zu ihrem Beweis rekapitulieren wir die Beziehungen

$$\cos(kx) = \tfrac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \qquad \sin(kx) = \tfrac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}).$$

Damit gilt:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k = e^{-inx} \frac{1 - e^{(2n+1)ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-inx} - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{2i} \, \frac{2i}{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)},\end{aligned}$$

woraus sich die behauptete Identität ergibt.
ii) Wir beweisen nun die Beziehung (7.2.19). Für beliebiges $x \in (0, 2\pi)$ gilt

$$\int_{\pi}^{x} \cos(ky)\, dy = \frac{\sin(ky)}{k}\Big|_{\pi}^{x} = \frac{\sin(kx)}{k},$$

und folglich unter Verwendung von (7.2.22):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^{x} \sum_{k=1}^{n} \cos(ky)\, dy = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{2\sin(\frac{1}{2}y)}\, dy - \frac{x-\pi}{2}.$$

Die Funktion $f(y) := \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}y)^{-1}$ ist auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig differenzierbar, so dass nach Lemma 7.3 gilt:

$$\int_{\pi}^{x} \frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}y)} \sin((n+\tfrac{1}{2})y)\, dy \to 0 \quad (n \to \infty),$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig für $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ist. Dies impliziert (7.2.19).

iii) Wir beweisen schließlich (7.2.20). Die Reihe

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

konvergiert offenbar nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}$ und stellt eine stetige Funktion dar. Die Reihe der zugehörigen Ableitungen

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{x-\pi}{2}$$

konvergiert nach Teil a) für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$. Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Summation folgt für $x \in (0, 2\pi)$:

$$F'(x) = \tfrac{1}{2}(x-\pi), \qquad F(x) = \tfrac{1}{4}(x-\pi)^2 + c$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$. Da F stetig ist, gilt dies auf ganz $[0, 2\pi]$. Zur Bestimmung der Konstante c schreiben wir

$$\int_0^{2\pi} F(x)\, dx = \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\, dx + \int_0^{2\pi} c\, dx = \tfrac{1}{12}(x-\pi)^3 \Big|_0^{2\pi} + 2\pi c = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c.$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

gilt dann nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Summation

$$\int_0^{2\pi} F(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} = 0.$$

Also folgt $c = -\pi^2/12$, womit der Beweis vollständig ist. Q.E.D.

Lemma 7.5: *Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π-periodische Treppenfunktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe F_∞^f von f im quadratischen Mittel gegen f.*

Beweis: i) Wir betrachten zunächst den Fall einer Treppenfunktion mit nur einer Unstetigkeitsstelle $a \in (0, 2\pi)$:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0,5, & x \in \{0, a\}, \\ 0, & a < x < 2\pi. \end{cases}$$

Für diese gilt offenbar $\|f\|^2 = a$. Ihre Fourier-Koeffizienten sind

$$c_0 = \frac{a}{2\pi}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi(-ik)}(e^{-ika} - 1) = \frac{i}{2\pi k}(e^{-ika} - 1), \quad k \neq 0.$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}|c_k|^2 &= \frac{i(-i)}{4\pi^2k^2}(e^{ika}-1)(e^{-ika}-1) = \frac{1}{4\pi^2k^2}(1-e^{ika}-e^{-ika}+1)\\ &= \frac{1}{2\pi^2k^2}\Big(1-\frac{e^{ika}+e^{-ika}}{2}\Big) = \frac{1-\cos(ka)}{2\pi^2k^2}\end{aligned}$$

und somit unter Verwendung von Lemma 7.4, da $\cos(x)$ gerade ist:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 &= c_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\big\{|c_{-k}|^2+|c_k|^2\big\} = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos(ka)}{\pi^2k^2}\\ &= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(ka)}{k^2}\\ &\to_{n\to\infty} \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\Big(\frac{(\pi-a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\Big) = \frac{a}{2\pi}.\end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = a = \int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx = \|f\|^2.$$

Nach Lemma 7.2 folgt hieraus die L^2-Konvergenz der Fourier-Reihe:

$$\|f-F_n^f\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

ii) Sei nun $f \in R[0,2\pi]$ eine beliebige 2π-periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen $x_i \in (a,b)$, $i = 1,\dots,m$. Die dazu gehörenden „einfachen“ Treppenfunktionen $f_k \in R[a,b]$ mit einziger Sprungstelle $a = x_k$ und Werten $f(x) \in \{0,1\}$ spannen dann einen m-dimensionalen Unterraum von $R[a,b]$ auf, der die Funktion f enthällt, d. h.: Es gibt Konstanten $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, so daß

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k f_k(x), \quad x \in [a,b].$$

Dies macht man sich mit einer einfachen geometrischen Überlegung klar. Mit den n-ten Fourier-Summen F_n^f und $F_n^{f_k}$ gilt dann

$$F_n^f(x) = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k F_n^{f_k}(x)$$

und folglich

$$\|f-F_n^f\| = \Big\|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(f_k-F_n^{f_k})\Big\| \le \sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|\,\|f_k-F_n^{f_k}\|.$$

Nach Teil (i) konvergiert die rechte Seite für $n\to\infty$ gegen Null. Q.E.D.

Nach diesen Vorbereitungen können wir das Hauptergebnis zur Fourier-Analyse periodischer Funktionen beweisen.

Satz 7.3 (Vollständigkeitsrelation): *Sei $f \in R[0,2\pi]$ eine 2π-periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f, und mit ihren Fourier-Koeffizienten c_k gilt die sog. „Vollständigkeitsrelation“ (auch „Parseval-sche[4] Gleichung“ genannt)*

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2. \tag{7.2.23}$$

Beweis: i) Da Realteil und Imaginärteil von f getrennt behandelt werden können, kann f o.B.d.A. als reellwertig angenommen werden. Ferner erlaubt es der Übergang von f zu $\tilde{f}(x) := f(x)/M$ mit $M := \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$ o.B.d.A. anzunehmen, dass $|f(x)| \le 1$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ 2π-periodische Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$-1 \le \varphi_\varepsilon \le f \le \psi_\varepsilon \le 1, \qquad \max_{x\in[0,2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \le \frac{1}{16\pi}\varepsilon^2.$$

Zur Konstruktion einer solchen Einschließung gehen wir wie folgt vor: Nach Satz 4.1 ist f auf jedem seiner Stetigkeitsintervalle auch *gleichmäßig* stetig. Sei $I = [c,d] \subset [0,2\pi]$ ein solches Intervall. Es gibt dann zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$x, x' \in [c,d],\ |x - x'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $(d-c)/n < \delta_\varepsilon$. Mit den Teilpunkten

$$x_k := c + \frac{d-c}{n}k, \quad k = 0.\dots, n,$$

erhalten wir so eine „äquidistante“ Unterteilung des Intervalls $[c,d]$:

$$c = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = d,$$

mit $|x_k - x_{k-1}| < \delta_\varepsilon$. Dazu definieren wir nun zwei Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon,\ \psi_\varepsilon : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch die Setzung

$$x_{k-1} < x < x_k: \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &:= \inf\{f(x)|\, x_{k-1} < x < x_k\} \ge -1, \\ \psi(x) &:= \sup\{f(x)|\, x_{k-1} < x < x_k\} \le 1, \end{aligned}$$

mit der üblichen Mittelwertsvorgabe in den Sprungpunkten x_k. Für diese gilt dann konstruktionsgemäß $\varphi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x)$ in allen $x \in [c,d]$. Wegen der Stetigkeit der Fortsetzung von f auf $[c,d]$ existieren in jedem der abgeschlossenen Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ Punkte $\xi_k,\ \eta_k$ mit

$$f(\xi_k) = \inf\{f(x) :\ x_{k-1} < x < x_k\}, \qquad f(\eta_k) = \sup\{f(x) :\ x_{k-1} < x < x_k\}.$$

[4]Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836): Französischer Mathematiker; Arbeiten über partielle Differentialgleichungen der Physik (nur fünf mathematische Publikationen); bekannt durch die nach ihm benannte Gleichung, die er aber ohne Beweis und Bezug zu Fourier-Reihen angegeben hat.

Nach Wahl von δ_ε gilt daher für $x \in [x_{k-1}, x_k)$:

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x)| = |f(\xi_k) - f(\eta_k)| \le |f(\xi_k) - f(x)| + |f(x) - f(\eta_k)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,.$$

Durchführung dieser Konstruktion auf den (endlich vielen) Stetigkeitsintervallen von f liefert Treppenfunktionsstücke, die zusammengesetzt die gewünschte Einschließung bilden (nach geeigneter Umdefinition von ε).

ii) Mit den obigen Bezeichnungen gilt nun für $g := f - \varphi_\varepsilon$:

$$|g|^2 = |f - \varphi_\varepsilon|^2 \le |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \le (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \le 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon),$$

d. h.:

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|^2\,dx \le 2\int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x))\,dx \le \frac{4\pi}{16\pi}\varepsilon^2 \le \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Mit den zugehörigen n-ten Fourier-Summen F_n^f, $F_n^{\varphi_\varepsilon}$ und F_n^g gilt dann $F_n^f = F_n^g + F_n^{\varphi_\varepsilon}$. Nach Lemma 7.5 gibt es nun ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|\varphi_\varepsilon - F_n^{\varphi_\varepsilon}\| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \ge n_\varepsilon.$$

Weiter ist nach Lemma 7.2

$$\|g - F_n^g\|^2 \le \|g\|^2 \le \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Daher gilt für alle $n \ge n_\varepsilon$:

$$\|f - F_n^f\| \le \|\varphi_\varepsilon - F_n^{\varphi_\varepsilon}\| + \|g - F_n^g\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Die Fourier-Reihe konvergiert also im L^2-Sinne gegen f. Dies bedeutet nach Lemma 7.2 auch, dass aus der Besselschen Ungleichung eine Gleichung wird. Q.E.D.

Beispiel 7.3: Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le \pi, \\ -1, & \pi < x \le 2\pi, \end{cases}$$

definierte 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

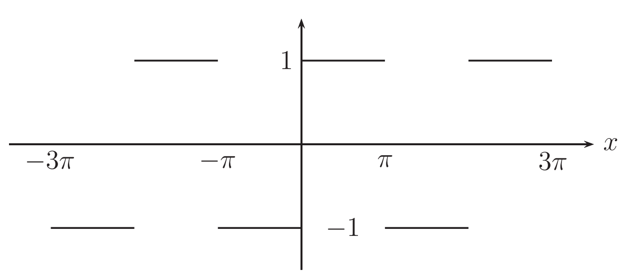

Abbildung 7.3: Eine 2π-periodische Treppenfunktion.

Wir wollen die Fourier-Reihe in der „komplexen“ Form

$$F_\infty^f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

bestimmen. Die zugehörigen Fourier-Koeffizienten sind

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^\pi dx - \int_\pi^{2\pi} dx\Big) = 0$$

und

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^\pi e^{-ikx}\,dx - \int_\pi^{2\pi} e^{-ikx}\,dx\Big) = -\frac{1}{2\pi ik}\big(e^{-ikx}\big|_0^\pi - e^{-ikx}\big|_\pi^{2\pi}\big) = -\frac{1}{2\pi ik}\big(2e^{-ik\pi} - 2\big).$$

d. h.: $c_k = 0$ für gerades k und $c_k = \frac{2}{ik\pi}$ für ungerades k. Folglich ist die Fourier-Reihe von f gegeben durch

$$F_\infty^f(x) = \frac{2}{i\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i(2k-1)x} - e^{-i(2k-1)x}}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Man beachte, dass an den Unstetigkeitsstellen $x = k\pi$ die Fourier-Summen jeweils den Mittelwert approximieren:

$$\lim_{n\to\infty} F_n^f(\pi) = 0.$$

Dabei scheint der Approximationsfehler bei Annäherung an die Unstetigkeitsstellen für $n \to \infty$ nicht gegen Null zu gehen; dies wird „Gibbs'sches[5] Phänomen“ genannt. Die obige Fourier-Reihe konvergiert punktweise gegen die Funktion f, aber nicht gleichmäßig.

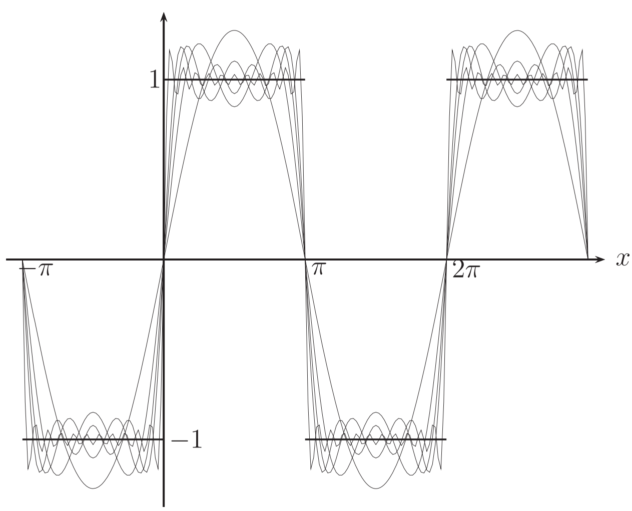

Abbildung 7.4: Fourier-Summen $F_1^f(x), F_3^f(x), F_5^f(x), F_7^f(x)$ und $F_{21}^f(x)$.

[5] Josiah Willard Gibbs (1839–1903): US-amerikanischer Mathematiker; Prof. an der Yale-University in New Haven; Mitbegründer der Vektorrechnung und statistischen Mechanik.

Definition 7.4: *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt „gerade“, wenn $f(-x) = f(x)$, und „ungerade“, wenn $f(-x) = -f(x)$.*

Typische Beispiele von geraden bzw. ungeraden Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen; für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind $\cos(kx)$ gerade und $\sin(kx)$ ungerade.

Beispiel 7.4: Wir betrachten die stetige, periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi - x, & 0 < x \le \pi, \\ x - \frac{3}{2}\pi, & \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

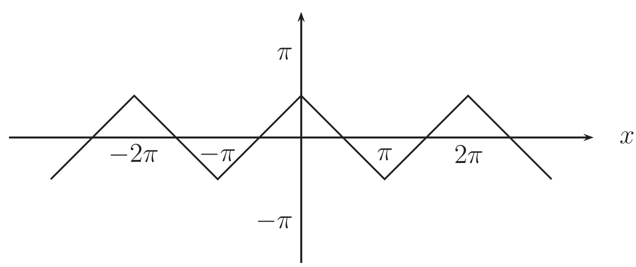

Abbildung 7.5: Eine stetige Zickzack-Funktion.

Diesmal wollen wir die Fourier-Reihe in der „reellen“ Form

$$F_\infty^f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\}$$

bestimmen. Da die Funktion f gerade ist, d. h. $f(x) = f(-x)$, sind die Fourier-Koeffizienten $b_k = 0$ (Übungsaufgabe). Weiter ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\tfrac{1}{2}\pi - x) \cos(kx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (x - \tfrac{3}{2}\pi) \cos(kx)\, dx.$$

Offenbar ist $a_0 = 0$ (geometrische Überlegung), und für $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi k} (\tfrac{1}{2}\pi - x) \sin(kx) \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi k} \int_0^\pi \sin(kx)\, dx \\ &\quad + \frac{1}{\pi k} (x - \tfrac{3}{2}\pi) \sin(kx) \Big|_\pi^{2\pi} - \frac{1}{\pi k} \int_\pi^{2\pi} \sin(kx)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi k^2} \cos(kx) \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi k^2} \cos(kx) \Big|_\pi^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi k^2} \big(\cos(k\pi) - \cos(0) \big) + \frac{1}{\pi k^2} \big(\cos(k2\pi) - \cos(k\pi) \big) \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \big(1 - \cos(k\pi) \big) = \frac{2}{\pi k^2} \big(1 - (-1)^k \big). \end{aligned}$$

Also ist $a_k = 0$ für gerades k, und wir erhalten

$$F_\infty^f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert, konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen die Funktion f.

Beispiel 7.5: Wir betrachten die unstetige, periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Anfang dieses Kapitels:

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x \in \{0, 2\pi\}, \end{cases}$$

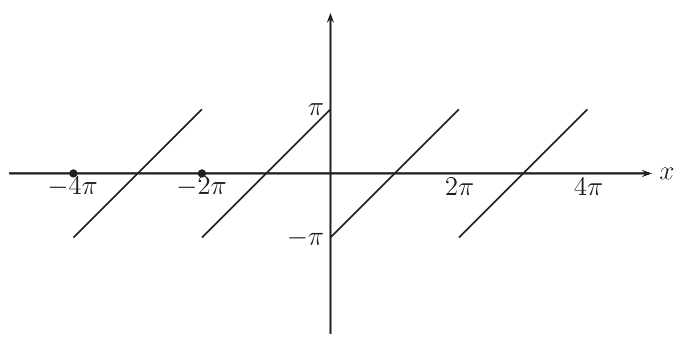

Abbildung 7.6: Eine 2π-periodische, unstetige Zackenfunktion.

In der zugehörigen Fourier-Reihe

$$F_\infty^f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\}$$

ist $a_k = 0$, da f ungerade ist, i.e., $f(x) = -f(-x)$ (Übungsaufgabe). Weiter ist

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)\sin(kx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi k}(x-\pi)\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi k}\big(\pi\cos(k2\pi) + \pi\cos(0)\big) = -\frac{2}{k} \end{aligned}$$

und folglich

$$F_\infty^f(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}.$$

Diese Fourier-Reihe konvergiert punktweise gegen die Funktion f, aber nicht gleichmäßig (s. Lemma 7.4).

Bemerkung 7.3: Die Konvergenzfrage der Fourier-Reihe scheint mit dem obigen allgemeinen Satz 7.3 im Wesentlichen erledigt. Dies ist aber nicht der Fall. Die Konvergenz im quadratischen Mittel impliziert, wie obiges Beispiel gezeigt hat, nicht notwendig auch die gleichmäßige oder punktweise Konvergenz. Im 19. Jahrhundert spielte das Problem der punktweisen Konvergenz der Fourier-Reihe, d. h. der Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Fourier-Reihe (analog zur Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Taylor-Reihe) eine wichtige Rolle. Im Jahre 1871 konstruierte Du Bois-Reymond[6] eine stetige 2π-periodische Funktion, deren Fourier-Reihe in einem Punkt nicht einmal konvergiert. Allein die Stetigkeit der darzustellenden Funktion genügt also nicht.

Bemerkung 7.4: Aus der folgenden Abschätzung für die Fourier-Summen einer Funktion $f \in R[0,2\pi]$,

$$\Big|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\Big| \le \sum_{k=-n}^{n} |c_k|,$$

entnehmen wir, dass die Fourier-Reihe absolut und gleichmäßig auf $[0,2\pi]$ (gegen eine stetige Funktion) konvergiert, wenn für die Fourier-Koeffizienten gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty. \tag{7.2.24}$$

Wir werden dieses handliche Kriterium unten noch ausnutzen. Leider bedeutet es für viele interessante Fälle eine zu starke Einschränkung, da sich die Fourier-Koeffizienten häufig gerade wie $|c_k| \approx 1/k$ (harmonische Reihe!) verhalten. Meistens haben die Fourier-Koeffizienten oszillierendes Vorzeichen, so dass die Fourier-Reihe zwar einfach konvergiert aber nicht absolut. In diesem Fall ist zu beachten, was „Konvergenz" bedeutet: Aus der Konvergenz der Partialsummenfolge $\sum_{k=-n}^{n} a_k$ für $n \to \infty$ folgt zwar die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{n}(a_k + a_{-k})$ aber nicht notwendig die der Einzelsummen $\sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sum_{k=1}^{n} a_{-k}$. Dies zeigt das Beispiel mit $a_k := k$. Die Konvergenz beider Teilreihen erst macht die Schreibweise $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k$ sinnvoll. Erst unter geeigneten Voraussetzungen an die Funktion f erhält man Abschätzungen für ihre Fourier-Koeffizienten c_k, aus denen man die absolute und gleichmäßige Konvergenz erschließen kann.

Satz 7.4: *Sei $f \in R[0,2\pi]$ eine 2π-periodische Funktion, die in $[0,2\pi]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen x_j, $j = 1,\dots,m$, differenzierbar ist mit stückweise definierter*

[6] Paul Du Bois-Reymond (1831–1889): Deutscher Mathematiker; Prof. in Freiburg i. Br. und Tübingen; Beiträge zur Fourier-Analysis und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Ableitung $\tilde{f}' \in R[a,b]$ *. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von* f *auf ganz* $[0, 2\pi]$ *punktweise gegen* f *, und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall, auf dem* f *stetig ist. Insbesondere gilt in jeder der Ausnahmestellen* $\xi := x_j$ *:*

$$F_n^f(\xi) \to \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2} \quad (n \to \infty), \tag{7.2.25}$$

mit den links- und rechtsseitigen Grenzwerten $f(\xi_-) := \lim_{h\downarrow 0} f(\xi - h)$ *und* $f(\xi_+) := \lim_{h\downarrow 0} f(\xi + h)$ *.*

Beweis: Wir geben den Beweis nur für die zwei Hauptaussagen des Satzes und verweisen für den Rest auf die einschlägige Literatur.

i) Wir nehmen zunächst an, dass die Funktion f stetig ist. Auf den Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, m$, $(x_0 := 0,\ x_m := 2\pi)$ hat f gemäß Voraussetzung stetige Ableitungen, die mit f_j' bezeichnet seien. Bezeichne $\tilde{f}' \in R[a,b]$ die aus diesen Ableitungsstücken zusammengesetzte, 2π-periodische Funktion:

$$\tilde{f}'|_{[x_{j-1}, x_j]} := f_j'.$$

Für die Fourier-Koeffizienten γ_k von $\tilde{f}'$ gilt nach der Besselschen Ungleichung

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 \le \|\tilde{f}'\|^2.$$

Weiter gilt für die Fourier-Koeffizienten c_k von f für $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Durch partielle Integration erhalten wir für die einzelnen Integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) e^{-ikx}\, dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos(kx)\, dx - i \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \sin(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{k} f(x) \sin(kx)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{1}{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_k'(x) \sin(kx)\, dx \\
&\quad + \frac{i}{k} f(x) \cos(kx)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{i}{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_k'(x) \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{i}{k} f(x) e^{-ikx}\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{i}{k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k'(x) e^{-ikx}\, dx.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich unter Ausnutzung der Stetigkeit und Periodizität von f:

$$c_k = -\frac{i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \tilde{f}'(x) e^{-ikx}\, dx = -\frac{i}{k} \gamma_k.$$

Mit Hilfe der Ungleichung $|\alpha\beta| \le \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2$ folgt weiter

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| \le \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty.$$

Die Fourier-Reihe F_∞^f von f konvergiert also absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g. Da dies auch die Konvergenz im L^2-Sinne impliziert gilt $\|f-g\| = 0$, woraus wegen der Stetigkeit von f und g auch $f \equiv g$ folgt.

ii) Wir betrachten nun noch den Fall, dass die Funktion f Unstetigkeitstellen hat. O.B.d.A. habe f genau eine, mit $\xi \in [0, 2\pi)$ bezeichnete Unstetigkeitsstelle. Wir verwenden die durch

$$\varphi(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x - \pi, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x \in \{0, 2\pi\}, \end{array} \right\} = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

definierte stückweise differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Sie hat die Werte $\varphi(0_\pm) = \mp\pi$, und für ihre Fourier-Reihe gilt offenbar $F_\infty^\varphi(0) = 0$. Die durch

$$g(x) := f(x) + \frac{f(\xi_+) - f(\xi_-)}{2\pi}\,\varphi(x - \xi)$$

definierte (stückweise differenzierbare) Funktion g ist auch stetig in ξ:

$$\begin{aligned} g(\xi_\pm) &= f(\xi_\pm) + \frac{f(\xi_+) - f(\xi_-)}{2\pi}\,\varphi(\xi_\pm - \xi) = f(\xi_\pm) + \frac{f(\xi_+) - f(\xi_-)}{2\pi}\,\varphi(0_\pm) \\ &= f(\xi_\pm) + \frac{f(\xi_+) - f(\xi_-)}{2\pi}\,(\mp\pi) = f(\xi_\pm) \mp \frac{f(\xi_+) - f(\xi_-)}{2} \\ &= \frac{2f(\xi_\pm) \mp f(\xi_+) \pm f(\xi_-)}{2} = \frac{f(\xi_+) + f(\xi_-)}{2}. \end{aligned}$$

Somit ist nach Teil (i) g gleichmäßiger Limes seiner Fourier-Reihe. Insbesondere gilt also

$$F_\infty^f(\xi) = F_\infty^g(\xi) - \frac{f(\xi_+) + f(\xi_-)}{2\pi} F_\infty^\varphi(0) = g(\xi) = \frac{f(\xi_+) + f(\xi_-)}{2},$$

was den Beweis vervollständigt. Q.E.D.

Zur genaueren Analyse des oben schon beschriebenen Gibbs-Phänomens betrachten wir wieder die Fourier-Entwicklung der durch

$$f(x) := \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x \in \{-\pi, 0, \pi\}, \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

2π-periodischen Funktion $f \in R[0, 2\pi]$. Die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion wuden bereits berechnet:

$$a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\frac{1 - (-1)^k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die zugehörigen Fourier-Summen haben damit die Gestalt:

$$F^f_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots + \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}\Big) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Wir interessieren uns für das Verhalten dieser Summen in der Umgebung von $x = 0$. Zur Bestimmung ihrer Maximalwerte berechnen wir ihre Ableitung:

$$\frac{d}{dx}F^f_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x).$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$2\sin(nx)\cos(mx) = \sin(n-m)x + \sin(n+m)x, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

folgt

$$\begin{aligned}\pi\sin(x)\frac{d}{dx}F^f_{2n-1}(x) &= 4\sum_{k=1}^{n} \sin(x)\cos((2k-1)x) = 2\sum_{k=1}^{n}\big\{ \sin(2-2k)x + \sin(2kx)\big\}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\big\{ -\sin(2k-2)x) + \sin(2kx)\big\} = 2\sin(2nx).\end{aligned}$$

Die Extremalstellen von F^f_{2n-1} sind also gegeben durch $2nx = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm(2n-1)\pi$. Da die Funktion f ungerade ist, beschränken wir uns auf die Betrachtung ihres Verhaltens rechts von $x = 0$ mit dem nahesten Extremalpunkt $x = \frac{\pi}{2n}$. An dieser Stelle ist

$$F^f_{2n-1}(\tfrac{\pi}{2n}) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)\frac{\pi}{2n})}{2k-1}.$$

Dies kann interpretiert werden als eine Riemannsche Summe für die Funktion $F(x) = \sin(x)/x$ zur Zerlegung $\{k\pi/n,\ k = 1, \ldots, n\}$ von $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned}F^f_{2n-1}(\tfrac{\pi}{2n}) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)\frac{\pi}{2n})}{2k-1}\\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\big(\frac{2k-1}{2n}\pi\big)}{\frac{2k-1}{2n}\pi}\Big) \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Durch Taylor-Entwicklung von $\sin(x)$ folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi^4}{300} - \frac{\pi^6}{17\,600} + \ldots = 1,18\ldots.$$

Dies bedeutet, dass in der vorliegenden Situation für die Fourier-Reihe in der Umgebung der Unstetigkeitsstelle $x = 0$ gilt

$$\limsup_{x\to 0_+} F^f_{2n-1}(\tfrac{\pi}{2n}) = 1,18\ldots,$$

was die Existenz des „Gibbs-Phänomens“ belegt.

7.3 Übungen

Übung 7.1 (Aufgabe zum komplex-wertigen Integral): Komplexwertige Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ sind Riemann-integrierbar, wenn ihre Real- und Imaginärteile es sind, und es wird gesetzt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}f(x)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}f(x)\,dx.$$

Man verifiziere die Beziehung

$$\int_a^b \overline{f(x)}\,dx = \overline{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Übung 7.2 (Aufgabe zu den Konvergenzbegriffen): Man rekapituliere die Eigenschaften „punktweise konvergent", „gleichmäßig konvergent" und „konvergent im quadratischen Mittel" für Folgen von Funktionen $f_n \in R[a,b],\ n\in\mathbb{N}$ (Was bedeutet $R[a,b]$ und wie unterscheidet sich dieser Funktionenraum vom $C[a,b]$?). Man bestimme die punktweisen Grenzwerte der beiden durch

$$a)\quad f_n(x) := \sin\left(\tfrac{1}{n}x\right),\quad x\in[-\pi,\pi],\qquad b)\quad f_n(x) := nx(1-x)^n,\quad x\in[0,1],$$

definierten Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Liegt auch gleichmäßige Konvergenz oder Konvergenz im quadratischen Mittel vor? Man zeige durch weitere Beispiele, dass tatsächlich keiner dieser drei Konvergenzbegriffe äquivalent zu einem der anderen ist.

Übung 7.3 (Aufgabe zur Konvergenz im quadratischen Mittel): Man überlege, ob die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0,2\pi]$ im quadratischen Mittel konvergieren und bestimme gegebenenfalls ihren Limes:

$$a)\quad f_n(x) := \cos(\tfrac{1}{n}x),\qquad b)\quad f_n(x) := (x+\tfrac{1}{n})^{-1/2}.$$

Übung 7.4 (Aufgabe zur Konvergenz im quadratischen Mittel): Man rekapituliere die Gestalt der L^2-Norm und der L^1-Norm auf dem Funktionenraum $R[a,b]$. Man untersuche, ob die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0,1]$ bzgl. der L^2-Norm, d. h. im quadratischen Mittel, konvergieren und bestimme gegebenenfalls ihren Limes:

$$i)\quad f_n(x) := \sin(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{n}x),\qquad ii)\quad f_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{(x^2+\frac{1}{n^2})^{1/2}}.$$

Wie steht es mit ihrer Konvergenz bzgl. der L^1-Norm?

Übung 7.5 (Aufgabe zum Orthogonalsystem): Man zeige die Beziehungen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ilx}\,dx = \delta_{kl},\quad k,l\in\mathbb{N},$$

mit dem sog. Kronecker-Delta $\delta_{kl} := 0$ für $k\neq l$ und $\delta_{kk} := 1$. (Hinweis: Man erinnere sich an die Eulersche Formel und die Eigenschaften der Sinus- und Cosinus-Funktionen.)

Übung 7.6 (Aufgabe zur Fourier-Entwicklung): Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist „gerade“ im Falle $f(-x)=f(x)$ und „ungerade“ im Falle $f(-x)=-f(x)$. Man zeige, dass die Fourier-Entwicklungen gerader bzw. ungerader Funktionen f die folgende Form haben:

$$F_\infty^f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^\infty a_k\cos(kx)\qquad\text{bzw.}\qquad F_\infty^f(x)=\sum_{k=1}^\infty b_k\sin(kx).$$

Übung 7.7 (Aufgabe zur konkreten Fourier-Entwicklung): Man bestimme die Fourier-Reihe der durch

$$f(x)=|x|,\quad -\pi\le x\le\pi$$

gegebenen 2π-periodischen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Konvergiert die Fourier-Reihe gegen die Funktion f, und in welchen Punkten stellt sie die Funktion dar?

Übung 7.8 (Aufgabe zur konkreten Fourier-Entwicklung): a) Man gebe die allgemeine (reelle) Form der Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und die Formeln für ihre Koeffizienten an.

b) Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt „gerade“ im Falle $f(-x)=f(x)$ und „ungerade“ im Falle $f(-x)=-f(x)$. Man zeige, dass für die Fourier-Entwicklungen gerader bzw. ungerader Funktionen f die folgenden speziellen Formen haben:

$$F_\infty^f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^\infty a_k\cos(kx)\qquad\text{bzw.}\qquad F_\infty^f(x)=\sum_{k=1}^\infty b_k\sin(kx).$$

c) Man bestimme die Fourier-Reihe der durch

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(-\pi,\pi),\\ 0, & x=\pm\pi,\end{cases}$$

definierten 2π-periodischen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. In welchem Sinne konvergiert diese Fourier-Reihe und wo stellt sie die Funktion dar?

Übung 7.9 (Aufgabe zu konkreten Fourier-Reihen): Man zeige, dass

a) durch

$$(i)\quad f_2(x):=\sum_{k=1}^\infty\frac{\cos(kx)}{k^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\cos(kx)}{k^3},\quad x\in[0,2\pi],$$
$$(ii)\quad f_1(x):=\sum_{k=1}^\infty\frac{\cos(kx)}{k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\cos(kx)}{k^2},\quad x\in[0,2\pi],$$

2π-periodische, gerade Funktionen in $R[0,2\pi]$ erklärt sind,

b) diese Funktionen auf $(0,2\pi)$ stetig differenzierbar sind, und

c) mit ihrern Fourier-Reihen übereinstimmt.

Übung 7.10 (Aufgabe zum Riemannschen Lemma): Das Riemannsche Lemma aus der Vorlesung besagt speziell, dass für jede Funktion $f \in C^1[0, 2\pi]$ gilt:

$$(i) \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

a) Man zeige, dass für $f \in C^1[0, 2\pi]$ auch gilt:

$$(ii) \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

b) Man begründe, dass (i) und (ii) sogar allgemein für Funktionen $f \in R[0, 2\pi]$ gelten.

Übung 7.11 (Aufgabe zur konkreten Fourier-Entwicklung): a) Man bestimme die Fourier-Reihe der durch

$$f(x) := \begin{cases} e^x, & x \in (0, 2\pi), \\ \frac{1}{2}(e^{2\pi} + 1), & x \in \{0, 2\pi\}, \end{cases}$$

2π-periodischen Funktion $f \in R[0, 2\pi]$ in reller und komplexer Darstellung:

$$(i) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx), \quad x \in [0, 2\pi],$$

$$(ii) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

b) In welchem Sinne konvergieren diese Reihendarstellungen?

Übung 7.12 (Aufgabe zur Konvergenz der Fourier-Entwicklung): Der Satz der Vorlesung zur punktweisen Konvergenz der Fourier-Entwick- lung besagt: *Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π-periodische Funktion, die in $[0, 2\pi]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen x_j, $j = 1, \dots, m$, differenzierbar ist mit stückweise definierter Ableitung $\tilde{f}' \in R[a, b]$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f auf ganz $[0, 2\pi]$ punktweise gegen f, und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall, auf dem f stetig ist. Insbesondere gilt in jeder der Ausnahmestellen $\xi := x_j$:*

$$F_n^f(\xi) \to \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2} \quad (n \to \infty),$$

mit den links- und rechtsseitigen Grenzwerten $f(\xi_-) := \lim_{h\downarrow 0} f(\xi - h)$ und $f(\xi_+) := \lim_{h\downarrow 0} f(\xi + h)$.

a) Man begründe, dass für eine unstetige Funktion $f \in R[0, 2\pi]$ die Konvergenz der Fourier-Reihe

$$f = \lim_{n\to\infty} F_n^f, \qquad F_n^f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx),$$

nicht gleichmäßig sein kann. Ist dies auch für jede Teilfolge so?

b) Man leite hieraus ab, dass es insbesondere in der Umgebung einer Unstetigkeitsstelle $\xi \in (0, 2\pi)$ stets Punkte $x_n \in (0, 2\pi)$ geben muss, so dass

$$|x_n - \xi| \to 0 \ \ (n \to \infty), \qquad |f(x_n) - F_n^f(x_n)| \geq c_\xi > 0,$$

gilt mit einer Konstante $c_\xi > 0$. Dies ist das sog. „Gibbs'sche“ Phänomen.