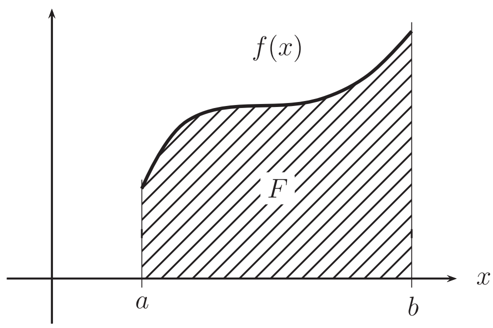
6 Integration

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der sog. „Integration“ von Funktionen, welche aus der klassischen Aufgabe der „Inhaltsmessung“ entstanden ist. Gesucht ist die Fläche des Bereiches zwischen dem Graphen der Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse. Wir werden sehen, dass der Prozeß der Integration in gewissem Sinne als Umkehrung der Differentiation aufgefasst werden kann.



$$|F| = \int_a^b f(x)\,dx$$

Abbildung 6.1: „Integral“ einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ als Fläche unter ihrem Graphen.

6.1 Das Riemann-Integral

Eine Unterteilung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$,

$$a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b,$$

eines (beschränkten) Intervalls $I = [a,b]$ in Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ heißt eine (endliche) „Zerlegung“ von I mit „Feinheit“

$$h := \max_{k=1,\dots,n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Die Menge aller solcher Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ sei mit $\mathcal{Z}(a,b)$ bezeichnet. Eine „Verfeinerung“ $Z' = \{x'_0, \dots, x'_{n'}\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ von $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ enthält die Zerlegungspunkte von Z und möglicherweise noch weitere; insbesondere gilt für ihre Feinheit:

$$h' = \max_{k=1,\dots,n'} (x'_k - x'_{k-1}) \le h\,.$$

Für zwei Zerlegungen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(a,b)$ besteht die „gemeinsame Verfeinerung“ Z_{12} aus allen Unterteilungspunkten von Z_1 und Z_2, und es ist $h_{12} \le \min\{h_1, h_2\}$. Eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $|x_k - x_{k-1}| = h \ (k = 1, \dots, n)$ heißt „äquidistant“.

Für eine beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ definieren wir die zugehörige „Obersumme“ $\overline{S}_Z(f)$ und „Untersumme“ $\underline{S}_Z(f)$ von f durch

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in I_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \underline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in I_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1}).$$

Das „Oberintegral“ und das „Unterintegral“ von f sind nun wie folgt definiert:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)} \overline{S}_Z(f), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)} \underline{S}_Z(f).$$

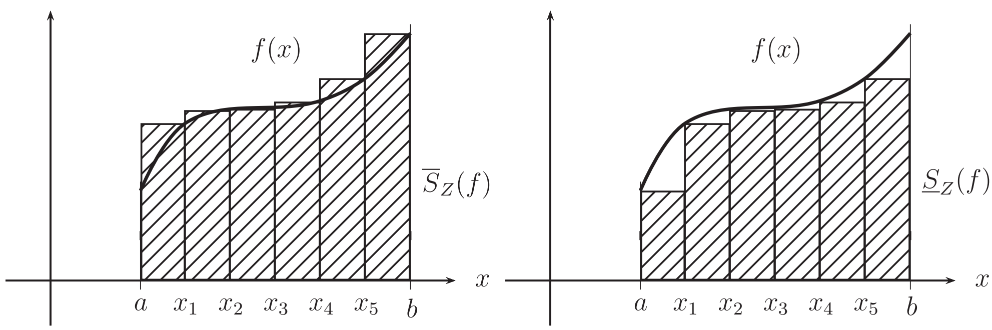


Abbildung 6.2: Ober- (links) und Untersumme (rechts) einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 6.1: Die obige Konstruktion von Ober- und Untersummen einer Funktion f lässt sich auch interpretieren als die auf natürliche Weise definierten Integrale zweier f einschließenden Treppenfunktionen $\underline{t}_Z(f) \le f \le \overline{t}_Z(f)$ zur Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}$:

$$\underline{t}_Z(f)_{|I_k} := \inf_{x\in I_k} f(x), \qquad \overline{t}_Z(f)_{|I_k} := \sup_{x\in I_k} f(x).$$

Das Ober- und das Unterintegral entsprechen dann dem Infinum bzw. dem Supremum der Integrale aller f nach oben bzw. nach unten beschränkenden Treppenfunktionen. Wir werden auf diesen Aspekt der Integraldefinition später nochmals zurückkommen.

Lemma 6.1: *Für eine beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren das Ober- sowie das Unterintegral, und für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ $(n \in \mathbb{N})$ mit Feinheiten $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{Z_n} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}. \tag{6.1.1}$$

Beweis: i) Die Ober- und Untersummen der beschränkten Funktion f sind beschränkt gemäß

$$\inf_{x\in I} f(x)\,(b-a) \;\le\; \underline{S}_Z(f) \;\le\; \overline{S}_Z(f) \;\le\; \sup_{x\in I} f(x)\,(b-a).$$

Die Existenz von Ober- und Unterintegral folgt dann wieder aus der Existenz von Supremum und Infimum beschränkter Zahlenmengen.

ii) Sei eine Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheiten $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gegeben. Zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es nach Definition von Supremum und Infimum Zerlegungen Z_ε, $Z^\varepsilon \in \mathcal{Z}(a,b)$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) + \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad \overline{S}_{Z^\varepsilon}(f) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Da die Zerlegungen Z_ε und Z^ε nur endlich viele Teilungspunkte haben und die Feinheiten h_n von Z_n gegen Null gehen, kann $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt werden, dass die Teilintervalle von Z_n, welche Teilungspunkte von Z_ε oder Z^ε enthalten, insgesamt eine Länge $L < \frac{1}{2}\varepsilon/M$ mit $M := \sup_{x\in I}|f(x)|$ haben. Dafür gilt dann:

$$\underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) \le \underline{S}_{Z_n}(f) + \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad \overline{S}_{Z_n}(f) \le \overline{S}_{Z^\varepsilon}(f) + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

und folglich

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{S}_{Z_n}(f) + \varepsilon, \qquad \overline{S}_{Z_n}(f) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Dies impliziert wegen der Beliebigkeit der Wahl von ε die Richtigkeit der Behauptung. Q.E.D.

Definition 6.1 (Riemann-Integral): *Sind Ober- und Unterintegral für eine beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (bestimmte) „Riemann[1]-Integral“ von f über I,*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

und die Funktion f wird „Riemann-integrierbar“ genannt.

Aus der Definition des Riemann-Integrals ergibt sich unmittelbar die folgende Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit:

Satz 6.1 (Riemannsches Integrabilitätskriterium): *Eine beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann über I Riemann-integrierbar, wenn es zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ gibt, so dass für die zugehörigen Ober- und Untersummen gilt:*

$$\left|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right| < \varepsilon. \tag{6.1.2}$$

[1] Bernhard Riemann (1826–1866): Deutscher Mathematiker; Prof. in Göttingen als Nachfolger Dirichlets; Mitbegründer der Funktionentheorie und der modernen Geometrie; einer der bedeutendsten Mathematiker des 19. Jh.s, von großem Einfluß auch auf die theoretische Physik.

Definition 6.2 (Riemannsche Summe): *Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ wird die mit irgend welchen Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gebildete Summe*

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als eine „Riemannsche Summe" von f bezeichnet.

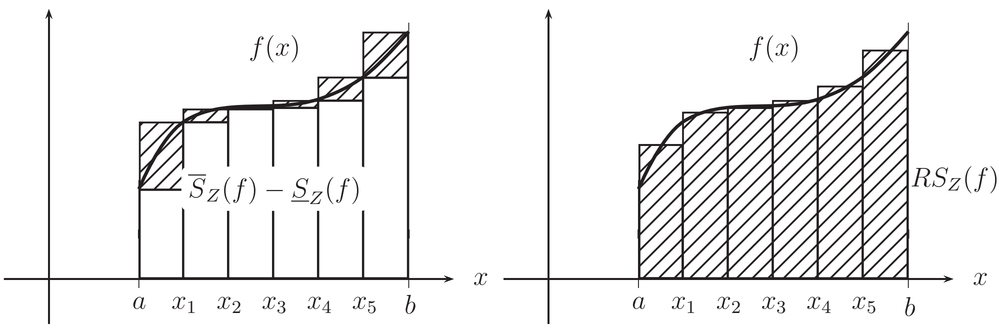


Abbildung 6.3: Differenz von Ober- und Untersumme (links) und die Riemannsche Summe (rechts) einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Satz 6.2: *Eine beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$ alle zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und denselben Limes haben:*

$$RS_{Z_n}(f) \to \int_a^b f(x)\,dx \quad (n \to \infty). \tag{6.1.3}$$

Beweis: i) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Auf jeder Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit h gilt offenbar

$$\underline{S}_Z(f) \le RS_Z(f) \le \overline{S}_Z(f).$$

Aus der Konvergenz $|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)| \to 0$ $(h \to 0)$ folgt die Konvergenz der Riemannschen Summen gegen den Integralwert.

ii) Seien alle Riemannschen Summen von f konvergent gegen denselben Limes. Für jede Ober- und Untersumme $\overline{S}_Z(f)$, $\underline{S}_Z(f)$ auf einer beliebigen Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ gibt es dann zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ Riemannsche Summen $\overline{RS}_Z(f)$, $\underline{RS}_Z(f)$ mit

$$\underline{RS}_Z(f) - \varepsilon \le \underline{S}_Z(f) \le \overline{S}_Z(f) \le \overline{RS}_Z(f) + \varepsilon.$$

Aus der Konvergenz (für Feinheit $h \to 0$) aller Riemannscher Summen gegen denselben Limes und der Beliebigkeit der Wahl von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ folgt damit

$$\big|\underline{S}_Z(f) - \overline{S}_Z(f)\big| \to 0 \quad (h \to 0),$$

d. h. die Riemann-Integrierbarkeit von f. Q.E.D.

Satz 6.3: *Eine stetige Funktion* $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

Beweis: Auf dem kompakten Intervall I ist die stetige Funktion f auch *gleichmäßig* stetig. Zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es also ein $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so dass gilt:

$$x, x' \in I,\ |x - x'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ von I mit Feinheit $h < \delta_\varepsilon$ gilt dann

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| \ \le\ \sum_{k=1}^n \Big| \sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \Big| (x_k - x_{k-1}) \ \le\ \varepsilon\,(b-a).$$

Dies impliziert die Existenz des Riemann-Integrals von f. Q.E.D.

Satz 6.4: *Eine (beschränkte) monotone Funktion* $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-intergrierbar.*

Beweis: O.b.d.A. sei f monoton steigend. Dann gilt $f(a) \le f(x) \le f(b)$ für $x \in I$. Ferner gilt für jede Zerlegung Z von I mit Feinheit h:

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\ &\le h \sum_{k=1}^n \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = h\big(f(b) - f(a)\big). \end{aligned}$$

Für beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es also ein $h_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so dass für $h \le h_\varepsilon$ gilt:

$$|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \varepsilon.$$

Dies impliziert die Existenz des Riemann-Integrals von f. Q.E.D.

Beispiel 6.1: Nicht alle beschränkten Funktionen $f : I = [0,1] \to \mathbb{R}$ sind auch Riemann-integrierbar; z. B. gilt für die pathologische Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

auf jeder Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(0,1)$:

$$\underline{S}_Z(f) = 0 < 1 = \overline{S}_Z(f).$$

Bemerkung 6.2 (Regelintegral): Wir haben bereits in Kapitel 4 gesehen, dass sich jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ stetige Funktion f gleichmäßig durch Treppenfunktionen t_n bzgl. Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit Feinheiten $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$ approximieren lässt:

$$\|f - t_n\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Für diese Treppenfunktionen ist das Integral auf natürliche Weise erklärt durch

$$\int_a^b t_n(x)\, dx := \sum_{k=1}^n t_{n;k}(x_k - x_{k-1}).$$

Damit lässt sich dann auch das Integral für die Grenzfunktion f über folgenden Grenzprozeß definieren:

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\, dx.$$

Dieses sog. „Regelintegral“ ist unabhängig von der speziellen Wahl der approximierenden Folge von Treppenfunktionen. Das Regelintegral ist für alle Funktionen erklärbar, welche sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Die Klasse solcher sog. „Regelfunktionen“ auf dem Intervall $I = [a, b]$ umfasst neben den stetigen Funktionen auch die monotonen Funktionen; insbesondere ist die Menge der Regelfunktionen ein Vektorraum und vollständig bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz. Für Regelfunktionen entspricht das Regelintegral dem Riemann-Integral, d. h.: Regelfunktionen sind Riemann-integrierbar. Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen ist aber echt größer als die der Regelfunktionen. Als Beispiel betrachten wir auf dem Intervall $[0, 1]$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin(1/x), & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Diese ist keine Regelfunktion aber Riemann-integrierbar. Dies sehen wir wie folgt:

i) Seien $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ und $t : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine zugehörige Treppenfunktion. Auf dem halboffenen Teilintervall $(0, x_1]$ ist t konstant; es gibt aber Punkte $x \in (0, x_1]$ mit $\sin(1/x) = 1$ und solche mit $\sin(1/x) = -1$. Also ist

$$\|f - t\|_\infty \ge \sup_{x\in(0,x_1]} |\sin(1/x) - t(x)| \ge 1.$$

Folglich kann f keine Regelfunktion sein.

ii) Andererseits ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und hat nur die eine Unstetigkeitsstelle $x = 0$. Damit ist f Riemann-integrierbar, was wir mit Hilfe des Riemannschen Integrabilitätskriteriums erschließen. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $\delta \in (0, 1]$, mit dem gilt:

$$\sup_{x\in(0,\delta]} |f(x)|\delta < \tfrac{1}{4}\varepsilon.$$

Auf dem Teilintervall $[\delta, 1]$ ist f stetig und damit Riemann-integrierbar. Es gibt also eine Zerlegung $Z_\delta \in \mathcal{Z}(\delta, 1)$ sowie zugehörige Ober- und Untersummen $\overline{S}_{Z_\delta}(f)$, $\underline{S}_{Z_\delta}(f)$, so dass

$$\left|\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Wir ergänzen nun die Zerlegung Z_δ um das Teilintervall $[0, \delta]$ und machen sie so zu einer Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(0, 1)$. Für die zugehörigen Ober- und Untersummen gilt dann aufgrund des eben Gezeigten:

$$\left|\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right| \le \left|\overline{S}_{Z_\delta}(f) - \underline{S}_{Z_\delta}(f)\right| + 2 \sup_{x\in(0,\delta]} |f(x)|\delta < \varepsilon.$$

Folglich ist die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ über $[0, 1]$ Riemann-integrabel (trotz ihres oszillierenden Verhaltens bei $x = 0$).

Satz 6.5 (Zusammengesetzte Integrale): *a) Eine (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch über jedem Teilintervall $[a', b'] \subset [a, b]$ Riemann-integrierbar; insbesondere gilt für $c \in (a, b)$:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{6.1.4}$$

b) Ist eine (beschränkte) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ für ein $c \in (a, b)$ über den Teilintervallen $[a, c]$ und $[c, b]$ Riemann-integrierbar, so ist sie auch über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt ebenfalls (6.1.4).

Beweis: a) Seien $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ Zerlegungen von $[a, b]$, mit Feinheiten $h_n \to 0$ und $RS_{Z_n}(f)$ zugehörige Riemannsche Summen, so daß

$$RS_{Z_n}(f) \to \int_a^b f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

i) Wir zeigen zunächst die Integrierbarkeit von f über $[a', b']$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß die obigen Zerlegungen Z_n die Intervallenden a', b' als Teilungspunkte enthalten. Wir betrachten nun zwei beliebige Folgen von Zerlegungen $Z_n^{(1)}$ und $Z_n^{(2)}$ in $\mathcal{Z}(a', b')$, mit Feinheiten $h_n^{(1)}, h_n^{(2)} \to 0$, und irgendwelche zugehörige Riemannsche Summen $RS_{Z_n^{(1)}}(f)$ und $RS_{Z_n^{(2)}}(f)$. Die Zerlegungen $Z_n^{(1)}$ und $Z_n^{(2)}$ lassen sich durch Verwendung von gleichen Teilungspunkten aus $[a, a']\cup[b', b]$ und gleichen Funktionswerten von f zu Zerlegungen $\tilde{Z}_n^{(1)}$ bzw. $\tilde{Z}_n^{(2)}$ in $\mathcal{Z}(a, b)$ und zugehörigen Riemannschen Summen $RS_{\tilde{Z}_n^{(1)}}(f)$ bzw. $RS_{\tilde{Z}_n^{(2)}}(f)$ mit Feinheiten $\tilde{h}_n^{(1)}, \tilde{h}_n^{(2)} \to 0$ erweitern. Nach Konstruktion gilt dann:

$$\left|RS_{Z_n^{(1)}}(f) - RS_{Z_n^{(2)}}(f)\right| = \left|RS_{\tilde{Z}_n^{(1)}}(f) - RS_{\tilde{Z}_n^{(2)}}(f)\right| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Hieraus folgern wir, dass jede Folge von Riemannschen Summen $RS_{Z'_n}(f)$ zu Zerlegungen $Z'_n \in \mathcal{Z}(a', b')$ mit $h' \to 0$ Cauchy-Folge ist, und dass alle solche Folgen gegen denselben Limes konvergieren. Also ist f über $[a', b']$ integrierbar.

ii) Sei nun $c \in (a,b)$. Nach Teil (i) ist f auch über die Teilintervalle $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar. Da jedes Paar $RS_{Z^{(1)}}(f)$ und $RS_{Z^{(2)}}(f)$ von Riemannschen Summen über $[a,c]$, bzw. $[c,b]$ zu einer solchen $RS_Z(f)$ über $[a,b]$ kombiniert werden kann, erhalten wir durch Grenzübergang $h \to 0$:

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= \lim_{h\to 0} RS_{Z^{(1)}}(f) + \lim_{h\to 0} RS_{Z^{(2)}}(f) \\ &= \lim_{h\to 0}\big(RS_{Z^{(1)}}(f) + RS_{Z^{(2)}}(f)\big) = \lim_{h\to 0} RS_Z(f) = \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

b) Sei f über die Teilintervalle $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar. Jede Riemannsche Summe über $[a,b]$ mit c als Teilungspunkt besteht aus zwei Riemannsche Summen, $RS_{Z^{(1)}}(f)$ über $[a,c]$ und $RS_{Z^{(2)}}(f)$ über $[c,b]$. Die Konvergenz

$$\lim_{h\to 0} RS_{Z^{(1)}}(f) = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \lim_{h\to 0} RS_{Z^{(2)}}(f) = \int_c^b f(x)\,dx,$$

impliziert dann auch die Konvergenz

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= \lim_{h\to 0} RS_{Z^{(1)}}(f) + \lim_{h\to 0} RS_{Z^{(2)}}(f) \\ &= \lim_{h\to 0}\big(RS_{Z^{(1)}}(f) + RS_{Z^{(2)}}(f)\big) = \lim_{h\to 0} RS_Z(f) =: \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Korollar 6.1: *Eine beschränkte Funktion $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$, welche bzgl. einer Zerlegung $Z = \{x_0,\dots,x_n\} \in \mathcal{Z}(a,b)$ von I „stückweise stetig“ oder „stückweise monoton“ ist, ist über I Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx. \tag{6.1.5}$$

Satz 6.6 (Linearität des Riemann-Integrals): *Sind $f,g: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktionen, so ist auch jede Linearkombination $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ über I Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.1.6}$$

Beweis: Wegen der Integrabilität von f und g existieren Riemannsche Summen $RS_Z(f)$ und $RS_Z(g)$ mit Feinheiten $h \to 0$, so dass

$$\lim_{h\to 0} RS_Z(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \lim_{h\to 0} RS_Z(g) = \int_a^b g(x)\,dx,$$

wobei o.B.d.A. angenommen werden kann, dass die Zerlegungen $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ sowie die Auswertungspunkte $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ für beide Riemannsche Summen dieselben sind. Dann ist für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ auch

$$RS_Z(\alpha f + \beta g) := RS_Z(\alpha f) + RS_Z(\beta g) = \alpha RS_Z(f) + \beta RS_Z(g)$$

Riemannsche Summe von $\alpha f + \beta g$, und es gilt:

$$\begin{aligned}\alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx &= \alpha \lim_{h\to 0} RS_Z(f) + \beta \lim_{h\to 0} RS_Z(g)\\ &= \lim_{h\to 0} RS_Z(\alpha f) + \lim_{h\to 0} RS_Z(\beta g)\\ &= \lim_{h\to 0} RS_Z(\alpha f + \beta g) =: \int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Bemerkung 6.3: Satz 6.6 besagt, dass das Riemann-Integral eine *lineare* Abbildung von der Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen in $\mathbb{R}$ definiert. Eine solche spezielle Abbildung wird „lineares Funktional“ genannt.

Satz 6.7 (Monotonie des Riemann-Integrals): *Seien $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktionen mit $g(x) \geq f(x),\ x \in [a,b]$. Dann gilt auch*

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.1.7}$$

Beweis: Für die Riemannschen Summen zu f und g zu gleichen Zerlegungen $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ und Auswertungspunkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt gemäß der Voraussetzung:

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = RS_Z(g).$$

Durch Grenzübergang $h \to 0$ folgt dann die behauptete Ungleichung. Q.E.D.

Korollar 6.2: *Für eine (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ gilt*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \tag{6.1.8}$$

Beweis: Die konstante Funktion $g(x) = 1$ hat (als Treppenfunktion) auf $[a,b]$ das Integral $\int_a^b dx = b - a$. Mit der Monotonie des Riemann-Integrals folgt also:

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

Q.E.D.

Korollar 6.3: *Es seien* $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

a) Die Funktionen $f_+ := \max\{f, 0\}$ *und* $f_- := \min\{f, 0\}$ *sind Riemann-integrierbar.*

b) Der Absolutbetrag $|f|$ *ist Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6.1.9}$$

c) Für jedes $p \in [1, \infty)$ *ist* $|f|^p$ *Riemann-integrierbar.*

d) Das Produkt fg *ist Riemann-integrierbar.*

Beweis: a) Für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ gilt:

$$0 \le \overline{S}_Z(f_+) - \underline{S}_Z(f_+) \le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f),$$
$$0 \le \overline{S}_Z(f_-) - \underline{S}_Z(f_-) \le \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f),$$

d. h.: Mit f sind auch f_+ und f_- integrierbar.

b) Wegen $|f| = f_+ - f_-$ folgt die Integrabilität von $|f|$ aus der von f_+ und f_-. Die Integralungleichung (6.1.9) folgt wegen $f \le |f|, -f \le |f|$ aus der Monotonie des Riemann-Integrals.

c) Sei $M := \sup_{x\in[a,b]} |f|$. Mit f ist nach (b) auch $|f|$ und weiter wegen der Linearität des Riemann-Integrals auch $|f|/M$ integrierbar. Wir brauchen also nur den Fall $0 \le f \le 1$ zu betrachten. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung folgt für $0 \le x < y \le 1$:

$$y^p - x^p = p\,\xi^{p-1}(y - x), \quad x < \xi < y, \qquad |y|^p - |x|^p \le p(|y| - |x|).$$

Für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ gilt daher:

$$\overline{S}_Z(|f|^p) - \underline{S}_Z(|f|^p) \le p\big(\overline{S}_Z(|f|) - \underline{S}_Z(|f|)\big),$$

d. h.: Mit $|f|$ ist auch $|f|^p$ integrierbar.

d) Wegen $fg = \frac{1}{4}\big((f + g)^2 - (f - g)^2\big)$ folgt die Integrabilität von fg mit Hilfe von (c).

Q.E.D.

Bemerkung 6.4: Man beachte, dass i. Allg. gilt (z. B. für $f \equiv 1$):

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \ne \Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)\,dx\Big).$$

Korollar 6.4 (Definitheit des Riemann-Integrals): *Sei* $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(x) \ge 0,\ x \in [a, b]$. *Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0. \tag{6.1.10}$$

Beweis: Angenommen, es ist $f \not\equiv 0$, d. h.: Es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von f ein Teilintervall $I_\varepsilon := [x_0, x_0+\varepsilon]$ oder $I_\varepsilon := [x_0-\varepsilon, x_0]$, auf dem f positiv ist: $f(x) \geq \delta > 0,\ x \in I_\varepsilon$. Da jede Zerlegung Z von I mit hinreichend kleiner Feinheit h ein Teilintervall $I_k \subset I_\varepsilon$ beinhaltet, gilt für die zugehörigen Untersummen

$$0 < \delta(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{x\in I_k} f(x)\,(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Q.E.D.

Das Riemannsche Integral ist bisher für Funktionen auf (beschränkten) Intervallen $I = [a,b]$ erklärt worden, d. h.: Die obere Integrationsgrenze b ist größer als die untere Integrationsgrenze a. Aus technischen Gründen wollen wir das Riemann-Integral aber auch für den Fall definieren, dass die obere Integrationsgrenze gleich oder sogar kleiner als die untere Integrationsgrenze ist. Für $a \leq b$ setzen wir:

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx := 0. \tag{6.1.11}$$

Der folgende „Mittelwertsatz" der Integration hat eine ähnlich große Bedeutung wie sein Analogon für die Differentiation.

Satz 6.8 (1. Mittelwertsatz): *Es seien $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und g habe in I keinen Vorzeichenwechsel. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in [a,b]$, so dass gilt:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.1.12}$$

Beweis: Die Behauptung ist eine Konsequenz des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen. Wir betrachten o.B.d.A. nur den Fall $g \geq 0$. Da f stetig ist, existieren

$$m := \min_{x\in I} f(x), \qquad M := \max_{x\in I} f(x).$$

Damit gilt wegen $g \geq 0$:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Aufgrund des Zwischenwertsatzes, angewendet auf die lineare Funktion

$$\varphi(t) := \big(m(1-t) + Mt\big)\int_a^b g(x)\,dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

sowie die Funktion f gibt es zunächst ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx,$$

und dann ein $\xi \in [a,b]$ mit $\mu = f(\xi)$. Dies beweist die Behauptung. Q.E.D.

Aus dem 1. Mittelwertsatz 6.8 ergeben sich unmittelbar die folgenden Beziehung:

Korollar 6.5: *a) Sei* $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt mit einem* $\xi \in I$ *:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{6.1.13}$$

b) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $m \leq f(x) \leq M, \quad x \in I$ *und* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar mit* $g \geq 0$ *. Dann gilt:*

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.1.14}$$

Beispiel 6.2: Die folgenden Beispiele zeigen, dass auf die zentralen Voraussetzungen im 1. Mittelwertsatz nicht verzichtet werden kann:

1. *Stetigkeit*: Für die durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

definierte *unstetige* Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ gilt für alle $\xi \in [0,2]$:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 1 \neq f(\xi)(2-0).$$

2. *Positivität*: Für die durch

$$f(x) := x, \qquad g(x) := \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

definierten Funktionen $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ gilt für alle $\xi \in [0,2]$:

$$\int_0^2 f(x)g(x)\,dx = -\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x\,dx = 1 \neq f(\xi)\int_0^2 g(x)\,dx = 0.$$

6.2 Berechnung von Integralen

Die Definition des Riemannschen Integrals als Limes Riemannscher Summen ist sehr unhandlich für seine praktische Berechnung. Diese wird wesentlich erleichtert durch die Erkenntnis, dass die Integration in gewissem Sinne die Umkehrung der Differentiation ist.

6.2.1 Das unbestimmte Riemann-Integral

Definition 6.3: *Eine Funktion $F : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt „unbestimmtes Integral" (oder „Stammfunktion") einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar ist und wenn gilt:*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I. \tag{6.2.15}$$

Wir verwenden für diesen Zusammenhang die (nicht ganz unproblematische) Schreibweise

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Satz 6.9 (Fundamentalsatz der Analysis): *a) Für eine stetige Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist das bestimmte Riemann-Integral*

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy, \quad x \in [a,b], \tag{6.2.16}$$

aufgefasst als Funktion der oberen Grenze x eine Stammfunktion von f. Jede weitere Stammfunktion von f unterscheidet sich von F nur durch eine Konstante.

b) Ist umgekehrt die Funktion $F : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion einer stetigen Funktion f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a). \tag{6.2.17}$$

Beweis: a) Wir betrachten Differenzenquotienten der Funktion $F(x)$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(y)\,dy - \int_a^x f(y)\,dy\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy.$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz gilt dann mit einem $\xi_h \in [x, x+h]$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\xi_h \to x$, so dass wegen der Stetigkeit von f folgt:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Sei G eine weitere Stammfunktion von f. Dann gilt $F' - G' = (F-G)' = 0$, d. h.: $F - G$ ist konstant.

b) Sei nun F Stammfunktion von f, d. h. $F'(x) = f(x)$. Mit der Funktion

$$G(x) := \int_a^x f(y)\,dy, \quad G(a) = 0,$$

ist dann gemäß Teil (a) $F - G$ konstant. Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Bemerkung 6.5: Satz 6.9 besagt, dass Integration und Differentiation zu einander inverse Prozesse sind:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy = f(x), \qquad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,dy. \tag{6.2.18}$$

Aus den Regeln für die Differentiation in Kapitel 4 gewinnen wir die folgenden speziellen Stammfunktionen:

1. Allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int y^\alpha\,dy = \tfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\,; \tag{6.2.19}$$

2. Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$:

$$\int \sum_{k=0}^n a_k y^k\,dy = \sum_{k=1}^n \tfrac{1}{k+1}a_k x^{k+1}; \tag{6.2.20}$$

3. Allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)},\ a \in \mathbb{R}_+$:

$$\int a^y\,dy = \int e^{y\ln(a)}\,dy = \frac{e^{x\ln(a)}}{\ln(a)} = \frac{a^x}{\ln(a)}\,; \tag{6.2.21}$$

4. Reziproke Funktion $f(x) = 1/x,\ x \neq 0$;

$$\left.\begin{array}{ll} x > 0: & \ln'(x) = x^{-1}, \\ x < 0: & \ln'(-x) = x^{-1}, \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|x|)\,; \tag{6.2.22}$$

5. Sinus $f(x) = \sin(x)$ und Cosinus $f(x) = \cos(x)$:

$$\int \sin(y)\,dy = -\cos(x), \qquad \int \cos(y)\,dy = \sin(x)\,. \tag{6.2.23}$$

Wir listen im Folgenden ohne Kommentar einige weitere Stammfunktionen:

$$\int \frac{dy}{\cos^2(y)} = \tan(x), \qquad \int \frac{dy}{\sin^2(y)} = -\cot(x)\,; \tag{6.2.24}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(x), \qquad \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(x)\,. \tag{6.2.25}$$

Korollar 6.6 (2. Mittelwertsatz): *Es seien $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton und $g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in [a,b]$, so dass gilt:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx. \tag{6.2.26}$$

Beweis: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass f monoton fallend ist. Die Funktion

$$\varphi(t) := f(a)\int_a^t g(x)\,dx + f(b)\int_t^b g(x)\,dx, \quad a \le t \le b,$$

ist nach dem Fundamentalsatz 6.9 stetig, und es gilt wegen der Monotonie von f:

$$\varphi(a) = f(b)\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le f(a)\int_a^b g(x)\,dx = \varphi(b).$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\varphi(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

was zu beweisen war. Q.E.D.

Beispiel 6.3: Das folgende Beispiel zeigt, dass auf die Monotonievoraussetzung im 2. Mittelwertsatz nicht verzichtet werden kann: Für die durch

$$f(x) := x^2, \qquad g(x) := 1,$$

definierten Funktionen $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gilt für alle $\xi \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} f(-1)\int_{-1}^{\xi} g(x)\,dx + f(1)\int_{\xi}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx &= 2 \\ \ne \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

6.2.2 Integrationsformeln

Wir beschreiben im Folgenden einige nützliche Methoden zur Berechnung von bestimmten Integralen bzw. zur Bestimmung von Stammfunktionen.

Lemma 6.2 (Partielle Integration): *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (fg)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{6.2.27}$$

Beweis: Durch Integration der Identität

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

erhalten wir

$$\int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = \int_a^b (fg)'(x)\,dx = (fg)(x)\Big|_a^b,$$

woraus die behauptete Formel folgt. Q.E.D.

Anwendung 6.2.1: Als Anwendung der partiellen Integration wollen wir einige spezielle Integrale berechnen:

1. Wir setzen $f(x) := x,\ g(x) := e^x$ und erhalten
$$\int_a^b xe^x\,dx = xe^x\Big|_a^b - \int_a^b e^x\,dx = xe^x\Big|_a^b - e^x\Big|_a^b = e^b(b-1) - e^a(a-1).$$

2. Wir setzen $f(x) := \sin(x),\ g(x) = -\cos(x)$ und erhalten
$$\begin{aligned}\int_a^b \sin^2(x)\,dx &= -\sin(x)\cos(x)\Big|_a^b + \int_a^b \cos^2(x)\,dx \\ &= -\sin(x)\cos(x)\Big|_a^b + \int_a^b (1-\sin^2(x))\,dx.\end{aligned}$$

   Folglich gilt:
$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\Big|_a^b.$$

3. Wir setzen $f(x) := \ln(x),\ g(x) := x$ und erhalten
$$\int_a^b \ln(x)\,dx = x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx = b\big(\ln(b)-1\big) - a\big(\ln(a)-1\big).$$

4. Wir setzen zunächst $f(x) := \sin(x),\ g(x) = e^x$ und dann $f(x) := \cos(x),\ g(x) = e^x$ und erhalten durch zweimalige partielle Integration
$$\begin{aligned}\int_a^b e^x\sin(x)\,dx &= e^x\sin(x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x\cos(x)\,dx \\ &= e^x\sin(x)\Big|_a^b - e^x\cos(x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x\sin(x)\,dx.\end{aligned}$$

   Dies ergibt
$$\int_a^b e^x\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x\big(\sin(x)-\cos(x)\big)\Big|_a^b.$$

Anwendung 6.2.2: Wir wollen eine Integraldarstellung des Restglieds in der Taylor-Entwicklung (5.3.19) von Satz 5.8 ableiten:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x), \tag{6.2.28}$$

wobei
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{6.2.29}$$

Zum Beweis verwenden wir ein Induktionsargument. Für $n = 0$ gilt zunächst aufgrund des Fundamentalsatzes:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Sei nun (6.2.29) bereits gezeigt für $n \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = -\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \Big(\frac{d}{dt}(x-t)^n\Big) f^{(n)}(t)\,dt \\
&= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,
\end{aligned}$$

was die Richtigkeit der Behauptung für $n + 1$ impliziert.

Satz 6.10 (Substitutionsregel): *Seien $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und $\varphi : [a, b] \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt die sog. „Substitutionsregel“:*

$$\int_a^b f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx. \tag{6.2.30}$$

Beweis: Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Die Komposition $F \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dann stetig differenzierbar, und nach der Kettenregel gilt:

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y) = f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y).$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes (6.9) folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(y)\,dy = (F \circ \varphi)(y)\Big|_a^b = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Bemerkung 6.6: Die Aussage des Substitutionssatzes läßt sich am einfachsten merken, wenn man sich der folgenden symbolischen Schreibweise bedient:

$$\int_a^b f\big(\varphi(y)\big)\,d\varphi(y) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx, \qquad d\varphi(y) := \varphi'(y)dy,$$

wobei x durch $\varphi(y)$ ersetzt ist und die Integrationsgrenzen entsprechend angepasst sind.

Anwendung 6.2.3: Wir geben einige Anwendungen der Substitutionsregel zur Berechnung von bestimmten oder unbestimmten Integralen:

1. Die Funktion $\varphi(y) := \sin(y)$ bildet das Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 1]$ ab, und es ist dort $\cos(y) \geq 0$. Wir erhalten damit für $x = \varphi(y)$:

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\frac{1}{2}\pi+\delta}^{\frac{1}{2}\pi-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-\varphi(y)^2}} \varphi'(y)\, dy = \int_{-\frac{1}{2}\pi+\delta}^{\frac{1}{2}\pi-\delta} \frac{\cos(y)}{\cos(y)}\, dy = \pi - 2\delta.$$

Für $\varepsilon \to 0$ geht $\delta \to 0$ und wir finden:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Dies ist ein Spezialfall sog. „uneigentlicher“ Riemann-Integrale, die wir im nächsten Abschnitt betrachten werden.

2. Wir setzen $f(z) := 1/z$ und $\varphi(y) := \cos(y)$ und erhalten

$$\int \tan(y)\, dy = \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\, dy = \int f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\, dy = -\int \frac{dz}{z} = -\ln(|\cos(x)|).$$

3. Wir setzen $f(y) := 1/y$ und $z = \varphi(y) := \tan(\frac{1}{2}y)$ mit

$$\varphi'(y) = \frac{1}{2\cos^2(\frac{1}{2}y)}, \quad \sin(y) = 2\sin(\tfrac{1}{2}y)\cos(\tfrac{1}{2}y)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sin(y)} &= \int \frac{dy}{2\sin(\frac{1}{2}y)\cos(\frac{1}{2}y)} = \int \frac{dy}{\tan(\frac{1}{2}y) 2\cos^2(\frac{1}{2}y)} = \int f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\, dy \\ &= \int f(z)\, dz = \int \frac{dz}{z} = \ln(|z|) = \ln(|\tan(\tfrac{1}{2}y)|). \end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Jede rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_r x^r + \cdots + a_0}{a_s x^s + \cdots + b_0}, \quad r < s,$$

lässt sich schreiben als Summe von Partialbrüchen der folgenden zwei Typen:

$$r_1(x) = \frac{A}{(x+a)^n}, \quad r_2(x) = \frac{B + Cx}{(x^2 + 2bx + c)^n}, \quad n \geq 1.$$

Dies ist eine Folgerung der Produktzerlegung des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Hilfe seiner reellen und (möglicherweise) komplexen Nullstellen in der Form (4.3.9):

$$q(x) = b_s \prod_{k=1}^{m'} (x - x_k)^{\mu_k} \prod_{k=m'+1}^{m} (x^2 - 2\mathrm{Re}\, x_k x + |x_k|^2)^{\mu_k}.$$

Wir wollen dies nicht beweisen, sondern nur durch ein Beispiel illustrieren.

Beispiel 6.4: Für den Ansatz

$$r(x) = \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^4-1} = \frac{x^3+2x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B+Cx}{x^2+1}$$

erhalten wir durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+x-1 &= A_1(x-1)(x^2+1) + A_2(x+1)(x^2+1) + (B+Cx)(x^2-1) \\ &= (A_1+A_2+C)x^3 + (-A_1+A_2+B)x^2 + (A_1+A_2-C)x \\ &\quad - A_1 + A_2 - B. \end{aligned}$$

und dann durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 + A_2 + C \\ 2 &= -A_1 + A_2 + B \\ 1 &= A_1 + A_2 - C \\ -1 &= -A_1 + A_2 - B. \end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten sowie der zweiten und vierten Gleichung erhalten wir $C = 0$ und $B = \frac{3}{2}$. Kombination der ersten und zweiten Gleichung liefert ferner $A_2 = \frac{3}{4}$ und $A_1 = \frac{1}{4}$. Dies ergibt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^4-1} = \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2+1}.$$

Mit der obigen Partialbruchzerlegung ist die Integration allgemeiner rationaler Funktionen auf die der speziellen Funktionen r_1 und r_2 zurückgeführt. Wir wollen nun deren Stammfunktionen bestimmen.

a) Es gilt mit $n \geq 2$:

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln(|x+a|), \qquad \int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}}\,. \tag{6.2.31}$$

b) Da das Polynom $= x^2+2bx+c = (x+b)^2 + c - b^2$ konstruktionsgemäß irreduzibel ist, muss $d := c - b^2 > 0$ sein. Die Substitution $y = (x+b)/d$ ergibt dann

$$\int \frac{B+Cx}{(x^2+2bx+c)^n}\,dx = \int \frac{B'+C'y}{(y^2+1)^n}\,dy,$$

mit gewissen Zahlen B', C'. Zunächst gilt dann wieder mit $n \geq 2$:

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \tfrac{1}{2}\ln(y^2+1), \qquad \int \frac{y}{(y^2+1)^n}\,dy = \frac{1}{2(1-n)(y^2+1)^{n-1}}.$$

Aus der Beziehung

$$I_n := \int \frac{1}{(y^2+1)^n}\,dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}\,dy$$

erhalten wir durch partielle Integration mit $f(y) := y$ und $g'(y) := y(y^2+1)^{-n}$:

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \frac{y}{2(1-n)(y^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}\, dy \\ &= \frac{3-2n}{2-2n} I_{n-1} - \frac{y}{(2-2n)(y^2+1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser rekursiven Beziehung kann man ausgehend von

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan(x)$$

sukzessiv r_2 für $n \geq 2$ berechnen.

6.3 Uneigentliche Integrale

Wir wollen nun das Konzept des (bestimmten) Riemann-Integrals für Funktionen auf unbeschränkten Intervallen und mit Singularitäten ausdehnen. Solche Integrale werden „uneigentlich“ genannt.

Uneigentliche Integrale auf endlichen Intervallen

Wir nennen eine Funktion auf einem endlichen, halboffenen Intervall $(a, b]$ „integrierbar“, wenn sie auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a', b] \subset (a, b]$ im oben definierten Sinne Riemann-integrierbar ist.

Satz 6.11 (Uneigentliches Riemann-Integral 1): *Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem halboffenen Intervall $(a, b]$ aber nicht auf dem Abschluss $[a, b]$ im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion. Existiert für jede Folge von Punkten $a_n \in (a, b]$ der Limes*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{a_n \downarrow a} \int_{a_n}^b f(x)\, dx,$$

so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und heißt das „uneigentliche Integral“ von f über $[a, b]$.

Beweis: Ist $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine zweite Folge mit

$$\lim_{a'_n \downarrow a} \int_{a'_n}^b f(x)\, dx = A',$$

so konvergieren gemäß Voraussetzung auch die Integrale zu der zusammengesetzten Folge $\{a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots, a_n, a'_n, \ldots\}$ gegen einen Limes A''. Da aber Teilfolgen gegen denselben Limes konvergieren wie die Gesamtfolge, muss $A'' = A'$ sein. Also konvergieren alle Integralfolgen gegen denselben Limes. Q.E.D.

Lemma 6.3: *Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ auf $(a,b]$ aber nicht auf $[a,b]$ integrierbar. Existiert dann das uneigentliche Integral von $|f|$ über $[a,b]$, so existiert auch das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$, und es gilt*

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx \Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6.3.32}$$

Beweis: Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon < b-a$, schreiben wir

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2}\,dx - \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2}\,dx.$$

Die Integrale rechts sind für $\varepsilon \to 0$ nach Voraussetzung gleichmäßig beschränkt und wegen der Nichtnegativität der Integranden jeweils monoton wachsend,

$$\Big| \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2}\,dx \Big| + \Big| \int_{a+\varepsilon}^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2}\,dx \Big| \le 2 \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)|\,dx \le 2 \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Folglich konvergieren die Integrale für $\varepsilon \to 0$. Damit hat auch das linke Integral für $\varepsilon \to 0$ einen Limes, d. h. f besitzt über $[a,b]$ ein uneigentliches Integral. Q.E.D.

Bemerkung 6.7: Die Umkehrung der Aussage von Lemma 6.3, d. h. dass aus der uneigentlichen Integrierbarkeit von f auch die von $|f|$ folgt (in Analogie zum regulären Riemann-Integral) ist i. Allg. nicht richtig. Beim uneigentlichen Riemann-Integral muss also wie bei Reihen zwischen „einfacher“ und „absoluter“ Konvergenz unterschieden werden.

Beispiel 6.5: Wir betrachten eine typische Anwendung von Satz 6.11: Wir untersuchen die Integrierbarkeit der Funktion $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ für $\mu > 0$. Im Fall $\mu = 1$ ist

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\varepsilon) \to \infty \quad (\varepsilon \to 0),$$

d. h.: Das uneigentliche Integral über $[a,b]$ existiert nicht. Im Fall $\mu \ne 1$ gilt

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \frac{1}{1-\mu} \frac{1}{(x-a)^{\mu-1}}\Big|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{(-\varepsilon)^{\mu-1}} \right).$$

Offenbar existiert für $0 < \mu < 1$ das uneigentliche Integral, während es für $\mu \ge 1$ nicht existiert.

Bemerkung 6.8 (Cauchyscher Hauptwert): Das Beispiel

$$\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_{-1}^{\varepsilon} = \ln(\varepsilon), \qquad \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_{\varepsilon}^1 = -\ln(\varepsilon)$$

zeigt, dass man durch Zusammenfassung singulärer Teilintegrale gemäß

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right)=0$$

durchaus zu konvergenten Prozessen gelangen kann, auch wenn die Einzelintegrale selbst nicht als uneigentliche Integrale existieren. Diesen Limes nennt man dann den „Cauchyschen Hauptwert“ des Integrals, d. h. im betrachteten Beispiel:

$$\text{CH}-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} := 0.$$

Uneigentliche Integrale auf unendlichen Intervallen

Wir nennen eine Funktion auf einem unendlichen, halboffenen Intervall $[a,\infty)$ „lokal intergrierbar“, wenn sie auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a,b'] \subset [a,\infty)$ im oben definierten Sinne Riemann-integrierbar ist.

Satz 6.12 (Uneigentliches Riemann-Integral 2): *Sei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Existiert für jede Folge von Punkten $b_n \in [a,\infty)$ der Limes*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b_n\to\infty}\int_a^{b_n} f(x)\,dx,$$

so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und heißt das „uneigentliche Integral“ von f über $[a,\infty)$.

Beweis: Das Argument ist analog wie im Beweis von Satz 6.11. Q.E.D.

Lemma 6.4: *Sei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ lokal integrierbar. Existiert dann das uneigentliche Integral von $|f|$ über $[a,\infty)$, so existiert auch das uneigentliche Integral von f über $[a,\infty)$, und es gilt*

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx. \tag{6.3.33}$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 6.3. Q.E.D.

Das folgende Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale stammt von Dirichlet und ist das Analogon des entsprechenden Kriteriums für Reihen aus Abschnitt 3.2.1.

Satz 6.13: *Sei $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ in $[a,\infty)$ integrierbar mit*

$$\sup_{x\ge a}\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| = M < \infty. \tag{6.3.34}$$

Ferner sei $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$ *differenzierbar und monoton gegen Null fallend. Dann existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)g(x)\,dx. \tag{6.3.35}$$

Beweis: Mit f und g ist auch das Produkt fg in $[a, \infty)$ lokal integrabel. Das Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ist nach dem Hauptsatz Stammfunktion von f. Für $a < x < \infty$ erhalten wir dann durch partielle Integration:

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = F(t)g(t)\Big|_a^x - \int_a^x F(t)g'(t)\,dt.$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dazu gibt es ein $\beta_\varepsilon > a$, so dass

$$g(x) < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad x \ge \beta_\varepsilon.$$

Für beliebige $\beta \ge \alpha \ge \beta_\varepsilon$ folgt damit wegen $g' \le 0$:

$$\Big|\int_\alpha^\beta F(t)g'(t)\,dt\Big| \le M \int_\alpha^\beta |g'(t)|\,dt = -M \int_\alpha^\beta g'(t)\,dt = -M\,g(t)\Big|_\alpha^\beta \le \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium hat daher das Integral $\int_a^x F(t)g'(t)\,dt$ für $x \to \infty$ einen Limes. Mit

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)g(t)\,dt = \underbrace{\lim_{x\to\infty} F(x)g(x)}_{=0} - \underbrace{F(a)}_{=0} g(a) - \int_a^\infty F(t)g'(t)\,dt$$

folgt so die Richtigkeit der Behauptung. Q.E.D.

Satz 6.14: *Es sei* $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ *eine stetige, positive, monoton fallende Funktion. Dann gilt:*

$$\sum_{k=n_0}^\infty f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{n_0}^\infty f(x)\,dx < \infty. \tag{6.3.36}$$

Beweis: i) Die Reihe sei konvergent. Wegen der Monotonie von f gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$:

$$\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=n_0}^n \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=n_0}^n f(k) \le \sum_{k=n_0}^\infty f(k).$$

Folglich existiert das uneigentliche Integral über $[n_0, \infty)$.

ii) Das uneigentliche Integral existiere. Wegen der Beziehung, für alle $n > n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \le f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1) \le f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$$

ist dann auch die Reihe konvergent. Q.E.D.

Beispiel 6.6: Wir betrachten ein paar typische Anwendungen der vorausgehenden Sätze:

1. Wir untersuchen die Integrierbarkeit der Potenzfunktion $f(x) = x^{-\mu}$ auf $[1,\infty)$ für $\mu > 0$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\int_1^{1/\varepsilon} \frac{dx}{x^\mu} = \frac{1}{(1-\mu)x^{\mu-1}}\Big|_1^{1/\varepsilon} = \frac{1}{(1-\mu)}\Big(\frac{1}{\varepsilon^{1-\mu}} - 1\Big).$$

   Das uneigentliche Integral existiert also für $\mu > 1$, während es für $\mu \le 1$ nicht existiert.

2. Wir haben die folgende Stammfunktion

$$\int \frac{dx}{x\ln^2(x)} = -\frac{1}{\ln(x)},$$

   d. h.: Das folgende uneigentliche Integral existiert:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

   Da die Funktion $f(x) := 1/(x\ln^2(x))$ auf dem Intervall $[2,\infty)$ positiv und monoton fallen ist, folgt nach Satz 6.14 die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2(k)} < \infty.$$

3. Die Integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx, \qquad \int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,dx$$

   existieren nach Satz 6.13 mit der Setzung $f(x) := \sin(x)$ bzw. $f(x) := \cos(x)$ und $g(x) := 1/x$. Ebenso erhalten wir die Existenz der Integrale

$$\int_2^{\infty} \frac{\sin(x)}{\ln(x)}\,dx, \qquad \int_3^{\infty} \frac{\sin(x)}{\ln(\ln(x))}\,dx.$$

6.4 Kurvenlänge

Wir wollen die bisher gewonnenen Ergebnisse zur Bestimmung der Länge sog. „ebener Kurven“ verwenden. Beipiel einer solchen Kurve ist der Graph

$$G(f) = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\, x \in [a, b]\big\}$$

einer stetigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$. Wir führen die folgende Diskussion aber in einem etwas allgemeineren Kontext.

Definition 6.4: *Es seien φ, ψ zwei stetige Funktionen eines Parameters $t \in [a, b]$. Sind die Punkte der Ebene $(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in [a, b]$, alle verschieden, so nennt man die Punktmenge*

$$\Gamma := \big\{(\varphi(t), \psi(t)) \,|\, t \in [a, b]\big\}$$

ein ebenes „Kurvenstück“ mit der Parameterdarstellung $\{\varphi, \psi\}$.

Der Graph einer Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ ist in diesem Sinne ein Kurvenstück mit der Parameterdarstellung

$$\varphi(t) := t, \;\; \psi(t) := f(t), \quad t \in [a, b].$$

Durch Aneinanderfügung von endlich vielen Kurvenstücken $K_1, \dots, K_n$ erhält man eine „ebene Kurve“; diese heißt „geschlossen“ , wenn der Endpunkt von K_n gleich dem Anfangspunkt von K_1 ist.

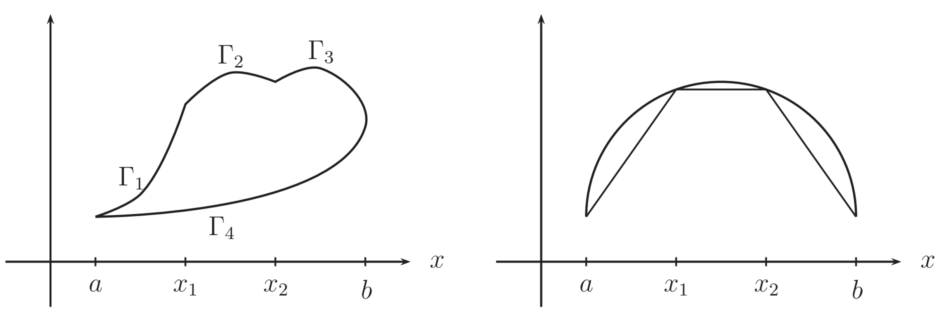


Abbildung 6.4: Aus Kurvenstücken zusammengesetzte ebene Kurve (links) und Polygonapproximation eines Kurvenstücks (rechts).

Wir wollen die „Länge“ eines Kurvenstücks K bestimmen. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ eine Zerlegung des Parameterintervalls $[a, b]$ in Teilpunkte $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ mit Feinheit $h = \max_{k=1,\dots,n}(t_k - t_{k-1})$. Wir approximieren das Kurvenstück durch einen Polygonzug $p_Z(\Gamma)$ (aneinander gefügte lineare Kurvenstücke) zu den Stützpunkten $(\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $k = 0, \dots, n$. Die Länge $|p_Z(\Gamma)|$ des Polygonzugs ist die Summe der Längen seiner einzelnen linearen Teilstücke, welche wiederum als der euklidische Abstand ihrer Endpunkte definiert ist, d.h.:

$$|p_Z(\Gamma)| := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\big)^2 + \big(\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})\big)^2}.$$

Definition 6.5: *Haben die Längen aller Polygonzüge $p_Z(\Gamma)$ zu einem Kurvenstück Γ eine (endliche) obere Grenze, so heißt Γ „rektifizierbar“ mit der „Länge*

$$|\Gamma| := \sup_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)} |p_Z(\Gamma)|.$$

Satz 6.15 (Kurvenlänge): *Ist die Parameterdarstellung des Kurvenstücks Γ stetig differenzierbar, so ist es rektifizierbar, und seine Länge ist gegeben durch*

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \tag{6.4.37}$$

Beweis: Mit φ' und ψ' ist auch $\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}$ stetig und folglich Riemann-integrierbar über $[a, b]$. Das Integral in (6.4.37) existiert daher als Limes Riemannscher Summen. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ eine Zerlegung und $p_Z(\Gamma)$ der zugehörige Polygonzug. Für die Länge $|p_Z|$ erhalten wir mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned}
|p_Z(\Gamma)| &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\Big(\frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\Big)^2 + \Big(\frac{\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\Big)^2}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\varphi'(\tau_k)^2 + \psi'(\tau_k')^2},
\end{aligned}$$

mit gewissen Zwischenstellen $\tau_k, \tau_k' \in [t_{k-1}, t_k]$. Dies sieht fast aus wie eine Riemannsche Summe für das Integral in (6.4.37), ist es aber nicht, da i. Allg. $\tau_k \neq \tau_k'$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von ψ' auf $[a, b]$ existiert nun ein $h_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so dass für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit Feinheit $h \le h_\varepsilon$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{|\psi'(\tau_k')^2 - \psi'(\tau_k)^2|} < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, dass für $h \le h_\varepsilon$ auch gilt:

$$\Big| \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\varphi'(\tau_k)^2 + \psi'(\tau_k)^2} \Big| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Dies zusammengenommen impliziert dann auch

$$\Big| \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt - \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\varphi'(\tau_k)^2 + \psi'(\tau_k')^2}\, \Big| < \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von ε folgt die Konvergenz

$$|p_Z(\Gamma)| \to \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \quad (h \to 0),$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Beispiel 6.7: Wir bestimmen mit Hilfe der gerade entwickelten Theorie die Länge des Einheitskreisbogens K. Zunächst betrachten wir den oberen Kreisbogen als Graph der Funktion

$$f(t) := \sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1, 1].$$

Dass der Graph dieser Funktion tätsächlich der obere Einheitskreisbogen ist, entnehmen wir der Beziehung $f(t)^2 + t^2 = 1$ bei Berücksichtigung des Satzes von Pythogoras. Da die Ableitung von f,

$$f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \sqrt{1 + f'(t)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

für $t \to \pm 1$ singulär wird, kann die Formel (6.4.37) nicht direkt angewendet werden. Um dieses Problem zu lösen, kann man entweder versuchen, das Integral in (6.4.37) für singuläre Integranden als „uneigentliches“ Riemann-Integral zu erklären, oder eine andere Parameterdarstellung mit beschränkten Ableitungen zu finden.

i) Unter Ausnutzung der bereits gewonnenen Kenntnisse über die trigonometrischen Funktionen können wir die folgende Parameterdarstellung verwenden:

$$\varphi(t) := \sin(t), \quad \psi(t) := \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Für $0 \le t \le 2\pi$ durchläuft der Punkt $\big(\sin(t), \cos(t)\big)$ wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ den ganzen Kreisbogen K. Für seine Länge finden wir aus Formel (6.4.37):

$$|K| = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

was natürlich nicht überraschend ist. Diese Überlegung kann offenbar nicht zur Definition von π verwendet werden, da in ihr π in der oberen Integrationsgrenze erscheint.

ii) Ausgehend von der Parameterdarstellung

$$\varphi(t) := t, \quad \psi(t) := \sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1, 1].$$

erhalten wir aus Satz 6.15 für das Teilintervall $[\varepsilon-1, 1-\varepsilon]$ als Länge des zugehörigen Kreisbogenabschnitts:

$$
\begin{aligned}
|K_\varepsilon| &= \int_{\varepsilon-1}^{1-\varepsilon} \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt = \int_{\varepsilon-1}^{1-\varepsilon} \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt \\
&= \int_{\varepsilon-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin(x)\Big|_{\varepsilon-1}^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin(\varepsilon-1).
\end{aligned}
$$

Da der Arcussinus auf dem ganzen Intervall $[-1,1]$ definiert und stetig ist, können wir zum Limes $\varepsilon \to 0$ übergehen und erhalten das uneigentliche Integral

$$
|K| = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin(1)-\arcsin(-1) = \tfrac{1}{2}\pi - (-\tfrac{1}{2}\pi) = \pi.
$$

Diese Beziehung könnte auch zur Definition der Zahl π verwendet werden, alternativ zur obigen Definition über die kleinste positive Nullstelle des Cosinus. Damit ist der Zusammenhang zur traditionellen, auf geometrischer Anschauung basierenden Einführung der Trigonometrie hergestellt.

Bemerkung 6.9: Der Begriff der „Kurvenlänge“ ist heikler, als man sich auf der Basis naiver Anschauung vorstellen mag.

a) Die Differenzierbarkeit der Parameterdarstellung einer (ebenen) Kurve ist eine wesentliche Voraussetzung für ihre Rektifizierbarkeit. Man kann beschränkte Kurven mit stetiger (aber nicht differenzierbarer) Parameterdarstellung konstruieren, welche eine im obigen Sinne *unendliche* Länge haben.

b) Die „Länge“ des Graphen einer rektifizierbaren Funktion ist als Limes der Längen einer Folge von interpolierenden Polygonzügen definiert worden. Durch die Interpolationseigenschaft wird sichergestellt, dass auch die Ableitungen der Polygonzüge gegen die Ableitungen der Funktion konvergieren. Dies ist wesentlich, wie das folgende Beispiel zeigt: Auf äquidistanten Zerlegungen $Z_n = \{t_k = k/n,\ k=0,\dots,n\}$ des Einheitsintervalls $[0,1]$ definieren wir „Zickzack-Funktionen“ p_n durch

$$
p_n(t) := \begin{cases} t - t_{k-1}, & t_{k-1} \le t \le t_{k-1}+\frac{1}{2}h, \\ t_k - t, & t_{k-1}+\frac{1}{2}h \le t \le t_k, \end{cases} \quad , \qquad k=1,\dots,n.
$$

Die Polygonzüge p_n konvergieren auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion; ihre Graphen haben aber alle die Länge $|p_n| = \sqrt{2}$.

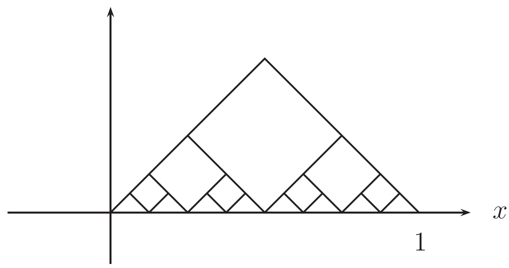


Abbildung 6.5: Zickzack-Polygonapproximation der Nullfunktion.

6.5 Integration und Grenzprozesse

Wir stellen nun wieder die Frage nach der Stabilität der Integrierbarkeit gegenüber Störungen. Sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$, welche punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert:

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty), \quad x \in I. \tag{6.5.38}$$

Die Frage ist dann, ob auch die Limesfunktion f wieder intergrierbar ist und ob die Grenzprozesse Integration und Folgenkonvergenz vertauschbar sind:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{6.5.39}$$

Letzteres muß i. Allg. nicht der Fall sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$f_n(x) := nxe^{-nx^2},\ x \in [0,1], \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Big(-\tfrac{1}{2} e^{-nx^2} \Big|_0^1 \Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(-\tfrac{1}{2} e^{-n} + \tfrac{1}{2} \Big) = \tfrac{1}{2}.$$

Ein einfaches Kriterium für die Vertauschbarkeit der Grenzprozesse ist wieder die *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz $f_n \to f\ (n \to \infty)$.

Satz 6.16 (Gleichmäßige Konvergenz): *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger (und Riemann-integrierbarer) Funktionen $f_n : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig (und Riemann-integrierbar), und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \tag{6.5.40}$$

Beweis: Die gleichmäßige Konvergenz der stetigen Funktionen f_n impliziert nach Satz 4.6 auch die Stetigkeit der Grenzfunktion f. Ferner ist daher nach Satz 6.3 mit f_n auch f integrierbar. Aufgrund der Eigenschaften des Riemann-Integrals gilt

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| &= \Big|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,dx\Big| \\ &\le \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx \le \|f_n - f\|_\infty (b-a).\end{aligned}$$

Die gleichmäßige Konvergenz $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ impliziert dann die Beziehung (6.5.40). Q.E.D.

Satz 6.17: *Für eine Folge stetiger Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiere die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k$ auf dem Intervall $I = [a,b]$ gleichmäßig. Dann stellt die Reihe eine integrierbare Funktion dar, und es gilt:*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^\infty f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_a^b f_k(x)\,dx, \tag{6.5.41}$$

d. h.: Es darf in der Reihe gliedweise integriert werden.

Beweis: Wegen der Stetigkeit der einzelnen Reihenglieder f_k sind auch alle Partialsummen der Reihe stetige Funktionen und damit integrierbar. Aufgrund der vorausgestzten gleichmäßigen Konvergenz der Partialsummen ist auch ihr Limes, d. h. die Reihe, eine stetige und damit integrierbare Funktion. Es gilt:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^\infty f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x)\,dx + \int_a^b \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\,dx.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe gibt es zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für $n \ge n_\varepsilon$ gilt:

$$\Big|\int_a^b \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\,dx\Big| \le \varepsilon(b-a).$$

Dies impliziert die Konvergenz

$$\Big|\int_a^b \sum_{k=1}^\infty f_k(x)\,dx - \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x)\,dx\Big| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Q.E.D.

Satz 6.18: *Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty c_k(x-x_0)^k$ habe den Konvergenzradius $\rho > 0$; sie stellt also auf dem Intervall $I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine stetige Funktion dar. Deren Stammfunktion erhält man dann durch gliedweise Integration, und diese hat denselben Konvergenzradius ρ:*

$$\int \sum_{k=0}^\infty c_k(x-x_0)^k\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + c. \tag{6.5.42}$$

Beweis: Sei $|x - x_0| \le R < \rho$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auf dem Intervall $[x_0 - R, x_0 + R]$ für $n \ge n_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| R^k < \varepsilon.$$

Ferner gilt:

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_k (y - x_0)^k \, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$$

Q.E.D.

Bemerkung 6.10: Die Aussage von Satz 6.16 gilt sinngemäß auch für Folgen von uneigentlich integrierbaren Funktionen auf *beschränkten* Intervallen. Bei uneigentlichen Integralen auf *unbeschränkten* Intervallen reicht die gleichmäßige Konvergenz der approximierenden Folge i. Allg. nicht aus. Dies sieht man an folgendem Beispiel:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \le x \le n, \\ 0, & x > n, \end{cases} .$$

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $I = [0, \infty)$ gleichmäßig gegen Null, aber es ist

$$\int_0^{\infty} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, dx = 0 \ne 1 = \lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) \, dx.$$

Die folgenden beiden Konvergenzsätze sind insbesondere auf uneigentliche Integrale zugeschnitten. Wir verzichten hier auf die Angabe der Beweise, da sogar noch etwas stärkere Ergebnisse später im Zusammenhang mit dem sog. „Lebesgue-Integral“ abgeleitet werden.

Satz 6.19 (Monotone Konvergenz): *Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von auf einem beschränkten Intervall $I = [a, b)$ (uneigentlich) integrierbaren Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Ist die Konvergenz $f_n \to f$ monoton wachsend, und ist f ebenfalls (uneigentlich) integrierbar, so gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, dx. \tag{6.5.43}$$

Satz 6.20 (Beschränkte Konvergenz): *Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von auf einem Intervall $I = [a, b)$ oder $I = [a, \infty)$ (uneigentlich) integrierbaren Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Ist die Grenzfunktion f ebenfalls (uneigentlich) integrierbar und sind die Funktionen f_n gleichmäßig beschränkt durch eine auf I (uneigentlich) integrierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, d. h. $|f_n(x)| \le g(x)$, $x \in I$, so gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, dx. \tag{6.5.44}$$

6.6 Charakterisierung der Riemann-Integrabilität

Wir wissen bereits, dass alle auf $[a,b]$ stetigen und monotonen Funktionen in $R[a,b]$ sind. Dies gilt auch für Funktionen, die nur „stückweise" stetig oder monoton sind, mit *endlich vielen* Ausnahmepunkten. Gehen wir einen Schritt weiter und lassen auch Funktionen mit unendlich vielen, aber nicht zu vielen, solcher Ausnahmepunkte zu, so gelangen wir zu einer vollständigen Charakterisierung des Raumes $R[a,b]$ durch den grundlegenden Satz von Lebesgue[2], den wir im Folgenden ableiten wollen.

Definition 6.6 (Nullmenge): *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt „Nullmenge" (genauer „Lebesgue-Nullmenge"), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar unendlich viele abgeschlossene (oder offene) Intervalle $I_1, I_2, \dots$ gibt, so dass gilt:*

$$M \subset \bigcup_k I_k, \qquad \sum_k |I_k| \le \varepsilon.$$

Man nennt das System der Intervalle I_k eine abzählbare (offene bzw. abgeschlossene) „Überdeckung" der Menge M. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Eigenschaft (z. B. stetig oder differenzierbar) „fast überall", wenn die Menge der Punkte, in denen sie die Eigenschaft nicht besitzt, eine Nullmenge ist.

Lemma 6.5: *Es gelten die folgenden Aussagen:*
i) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist ebenfalls Nullmenge.
ii) Endliche und abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Nullmengen.
iii) Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.
iv) Eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ ist genau dann Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene (oder offene) Intervalle I_k, $k = 1, \dots, n$, gibt, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} |I_k| \le \varepsilon. \tag{6.6.45}$$

Beweis: i) Da jede Intervallüberdeckung einer Nullmenge auch jede ihrer Teilmengen überdeckt, ist diese Aussage evident.

ii) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge von Punkten. Dann ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ jeder der Punkte $x_k \in M$ Mittelpunkt eines Intervalls $I_k := [x_k - 2^{-k-1}\varepsilon, x_k + 2^{-k-1}\varepsilon]$. Damit gilt

$$M \subset \bigcup_k I_k, \qquad \sum_k |I_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon,$$

d. h.: M ist Nullmenge.

iii) Seien M_k höchstens abzählbar viele Nullmengen. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ lässt sich M_k

[2]Henri Léon Lebesgue (1875–1941): Französischer Mathematiker, Prof. am Collège de France in Paris, lieferte grundlegende Beiträge zur modernen Integrationstheorie („Lebesgue-Intgeral")

durch höchstens abzählbar viele Intervalle I_{kl} überdecken, so dass $\sum_j |I_{kl}| \le 2^{-l}\varepsilon$. Dann überdecken die höchstens abzählbar vielen Intervalle I_{kl} auch die Vereinigung $\cup_k M_k$, und es gilt

$$\sum_{k,l} |I_{kl}| = \sum_k \Big(\sum_l |I_{kl}| \Big) \le \sum_k 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon.$$

Die Vereinigung $\cup_k M_k$ ist also ebenfalls Nullmenge.

iv) Diese Aussage wird später in etwas allgemeinerem Rahmen für Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ bewiesen werden. Da wir sie für das Folgende nicht benötigen, verzichten wir hier auf den Beweis. Q.E.D.

Bemerkung 6.11: a) Die Aussage (ii) in obigem Lemma erscheint zunächst etwas verwirrend, da sie u. a. impliziert, dass die im Intervall $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ dicht liegenden Menge $I_{\mathbb{Q}} := I \cap \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen in $[0,1]$ eine Nullmenge ist. Man könnte meinen, dass jede Intervallüberdeckung von $I_{\mathbb{Q}}$ automatisch auch das ganze Intervall I überdeckt und damit das Maß $|I| = 1$ hat. Dies ist aber ein Trugschluss, dessen Kern man sich selbst genau klar machen sollte.

b) Es gibt auch überabzählbare Punktmengen, die Nullmengen sind. Ein Beispiel ist das sog. „Cantorsche Diskontinuum". Diese Teilmenge von $M_0 := [0,1] \subset \mathbb{R}$ wird wie folgt konstruiert: Aus der Menge M_0 entfernt mann das offene mittlere Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ und erhält die Menge

$$M_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Aus den beiden Teilintevallen von M_1 werden nun jeweils wieder die offenen mittleren Drittel entfernt, was auf

$$M_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$$

führt. So fortfahrend erhalten wir nach k Schritten eine Menge M_k , die aus 2^k disjunkten, kompakten Intervallen besteht. Durch Wegnahme der jeweiligen offenen mittleren Drittel dieser Teilintervalle entsteht die nächste Menge $M_{k+1} \subset M_k$. Die Schnittmenge

$$C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k$$

wird „Cantorsches Diskontinuum" genannt. Das Cantorsche Diskontinuum ist nun überabzählbar, aber dennoch eine Nullmenge (Übungsaufgabe).

Wir hatten früher schon den Begriff der „kompakten" Menge eingeführt: *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ (oder allgemeiner $M \subset \mathbb{C}$) heißt „kompakt", wenn sie abgeschlossen ist und jede (unendliche) Folge von Punkten in M einen Häufungswert hat.* Der folgende Satz von Heine[3] und Borel[4] ist neben dem Satz von Bolzano-Weierstraß (*„Eine Teilmenge*

[3]Eduard Heine (1821–1881): Deutscher Mathematiker; Prof. in Halle; einer der wichtigsten Vertreter der „Weierstraßschen Schule" im 19. Jahrhundert; Beiträge zur Theorie der reellen Funktionen, Potentialtheorie und Theorie der Differentialgleichungen.

[4]Félix Éduard Justin Émile Borel (1871–1956): Französischer Mathematiker, u. a. Prof. an der Universität Sorbonne in Paris; wichtige Beiträge zur Maßtheorie und zur Spieltheorie; war auch politisch aktiv (1925-1940 Marineminister) und während des Krieges Mitglied der Résistance.

$M \subset \mathbb{R}$ *ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlosen ist.*“) der zweite fundamentale Satz über kompakte Teilmengen des Zahlenraumes $\mathbb{R}$.

Satz 6.21 (Satz von Heine-Borel): *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn jede ihrer offenen Überdeckungen eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

Beweis: i) Sei zunächst M kompakt. Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nehmen also an, dass es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von M gibt, welche keine endliche Überdeckung enthält. Die Menge M ist beschränkt, ist also in einem beschränkten Intervall $I_0 = [a, b]$ enthalten. Mindesten eine der beiden Hälften von I_1 enthält einen Teil von M, der sich nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdecken lässt. Eine solche Hälfte wird ausgewählt und mit I_1 bezeichnet. Durch Fortsetzung dieser Konstruktion ergibt sich eine Folge von Intervallen I_n mit den Eigenschaften

$$I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_0, \qquad |I_n| \le 2^{-n}|I_0|,$$

und keins der I_n kann durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden. Diese Intervallschachtelung definiert nach dem Intervallschachtelungsprinzip eine reelle Zahl

$$x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Für beliebige $x_n \in I_n \cap M$ gilt dann $|x_n - x| \to 0 \ (n \to \infty)$, so dass nach Voraussetzung $x \in M$ sein muß. Dann liegt x aber in einer der Mengen $U \in \mathcal{U}$. Da U offen ist, gibt es ein Intervallumgebung $I_\varepsilon = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ von x mit $I_\varepsilon \subset U$. Ferner liegt eins der Intervalle I_m in U, denn fast alle der linken und rechten Endpunkte der I_n gehören zu U. Es gilt also

$$M \cap I_m \subset I_m \subset I_\varepsilon \subset U.$$

Dies besagt, dass die Teilmenge $M \cap I_m$ durch das endliche Teilsystem $\{U\}$ von $\mathcal{U}$ überdecken lässt, im Widerspruch zur Konstruktion der $M \cap I_m$.

ii) Wir nehmen nun an, dass jede offene Überdeckung von M eine endliche Überdeckung enthält. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M. Wir müssen zeigen, dass sie eine Teilfolge enthält, welche gegen einen Punkt aus M konvergiert. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen entsprechend an, dass keine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Limes in M besitzt. Dies bedeutet, dass die Folge keinen Häufungswert in M hat. Ist also y ein beliebiger Punkt in M, so gibt es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(y)$ von y, so dass die Beziehung $x_n \in U_\varepsilon(y)$ für höchstens endlich viele Indizes n gilt. Das System aller Umgebungen $U_\varepsilon(y),\ y \in M$, überdeckt M. Nach Voraussetzung gibt es dann endlich viele Punkte, etwa $y_k,\ k = 1, \dots, m$, so dass gilt:

$$M \subset \cup_{k=1}^{m} U_\varepsilon(y_k).$$

Daraus folgt aber, dass die Beziehung

$$x_n \in \cup_{k=1}^{m} U_\varepsilon(y_k)$$

für alle n gilt, im Widerspruch dazu, dass dies nach Konstruktion nur für endlich viele n gelten kann. Q.E.D.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die angekündigte Charakterisierung der Riemann-Intergierbarkeit beweisen.

Satz 6.22 (Satz von Lebesgue): *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integerierbar, wenn sie auf $[a, b]$ beschränkt und fast überall stetig ist.*

Beweis: i) Sei f beschränkt mit $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le C_f$, und die Menge M seiner Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge. Für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ kann M durch abzählbar viele offene Intervalle $\{J_k, k \in \mathbb{N}\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \varepsilon$$

überdeckt werden. Die zugehörigen abgeschlossenen Intervalle $\bar{J}_k$ überdecken dann erst recht M und auch für ihre Längen gilt die obige Ungleichung. In jedem Punkt $x \in [a, b] \setminus M$ ist f stetig. Dazu gibt es offene Intervalle J_x mit $x \in J_x$ und

$$\sup_{\bar{J}_x \cap [a,b]} f - \inf_{\bar{J}_x \cap [a,b]} f < \varepsilon.$$

Das System der offenen Intervalle J_k und J_x bildet nun eine Überdeckung von $[a, b]$. Nach dem Satz von Heine-Borel wird dann $[a, b]$ bereits durch ein endliches Teilsystem $\{J_{k_1}, \dots, J_{k_n}, J_{x_1}, \dots, J_{x_m}\}$ überdeckt. Erst recht wird $[a, b]$ von dem System der zugehörigen abgeschlossenen Intervallen überdeckt. Wir wählen nun eine so feine Zerlegung Z von $[a, b]$, so dass jedes ihrer Teilintervalle $I_1, \dots, I_r$ in einem der Intervalle J_{k_i}, J_{x_j} enthalten ist. Wir wollen das Riemannsche Integrabilitätskriterium anwenden. Dazu betrachten wir die Differenz

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|I_k| = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

wobei Σ_1 die Summe ist über alle $(M_k - m_k)|I_k|$, bei denen I_k in einem der Intervalle J_{k_i} liegt, und Σ_2 die Summe über alle anderen $(M_k - m_k)|I_k|$ bedeutet. Nach Konstruktion gilt dann

$$\Sigma_1 < 2C_f\varepsilon, \qquad \Sigma_2 < \varepsilon\,|b - a|.$$

Folglich ist

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < (2C_f + |b - a|)\varepsilon.$$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium ist die Funktion f also über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

ii) Sei nun $f \in R[a, b]$. Dann ist f notwendig beschränkt, da es sonst keine beschränkten Obersummen von f geben könnte. Es bleibt also nachzuweisen, dass die Menge M der Unstetigkeitsstellen von f notwendig das Maß Null hat. Dieser Beweis ist sehr technisch und wird daher hier nicht ausgeführt; für einen vollständige Beweis siehe H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, B. G. Teubner, Stuttgart 1991. Q.E.D.

Bemerkung 6.12: Wir hatten bereits die beiden durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} 1/s, & \text{für} \quad x = r/s,\ r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ s \in \mathbb{N} \text{ (teilerfremd)}, \\ 1 & \text{für} \quad x = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

definierten pathologischen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennengelernt und gesehen, dass f nirgends, g aber in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. Die Funktion f ist über kein Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar, da Ober- und Untersummen sich immer um den Wert $|b-a|$ unterscheiden. Dagegen ist die nicht minder pathologische Funktion g offenbar nach dem Satz von Lebesgue über jedes Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

6.7 Übungen

Übung 6.1 (Aufgabe zum Fundamentalsatz): Man zeige, dass für eine stetige Funktion $f(t, x)$ und ein $u_0 \in \mathbb{R}$ die beiden folgenden Aufgabenstellungen äquivalent sind:
i) Bestimme eine Funktion $u \in C^1[0, \infty)$ als Lösung der „Anfangswertaufgabe"

$$u'(t) = f(t, u(t)), \ \ t \geq 0, \quad u(0) = u_0,$$

ii) Bestimme eine Funktion $u \in C[0, \infty)$ als Lösung der „Integralgleichung"

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds, \ \ t \geq 0.$$

Übung 6.2 (Aufgabe zur Stammfunktion): Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt „Stammfunktion" einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar ist und wenn gilt:

$$F'(x) = f(x), \quad x \in D.$$

Man bestimme Stammfunktionen zu

$$\begin{aligned} &a) \quad f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}, \ \ x > 0, \\ &b) \quad f(x) = \sin(x)\cos(x), \ \ x \in \mathbb{R}, \\ &c) \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}, \ \ x \neq -1, \\ &d) \quad f(x) = \frac{2}{1-x^2}, \ \ x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Übung 6.3 (Aufgabe zum bestimmten Integral): Man beweise die folgenden Beziehungen

$$a) \quad \int_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx = 4\,, \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)}.$$

Übung 6.4 (Aufgabe zur partiellen Integration): Man berechne die folgenden Integrale:

$$a) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\, dx, \qquad b) \quad \int_0^{\pi} x\sin(x)\, dx.$$

Übung 6.5 (Aufgabe zum uneigentlichen Integral): Welcher von den Ausdrücken

$$a) \quad \int_0^{\infty} \sin(x)\, dx, \qquad b) \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2)\, dx,$$

existiert als uneigentliches Riemann-Integral? (Hinweis: Bei (b) versuche man die Substitution $y := x^2$ und erinnere sich an das Leibnizsche Konvergenzkriterium für alternierende Reihen.)

Übung 6.6 (Aufgabe zur Substitutionsregel): Man berechne das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

(Hinweis: Substitution $x = \sin(y)$)

Übung 6.7 (Aufgabe zur Γ-Funktion): a) Man zeige, dass für $x \in \mathbb{R}_+$ das uneigentliche Riemann-Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

existiert. Die so definierte Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißt „Gamma-Funktion“.

b) Man verifiziere für diese die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

c) Man zeige für die Gamma-Funktion die speziellen Funktionswerte

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Gamma-Funktion interpoliert also die Fakultäts-Funktion. (Hinweis: Man bestimme $\Gamma(1)$.)

Übung 6.8 (Aufgabe über Integralnormen): Man zeige, dass auf dem Vektorraum der über einem Intervall $[c, d]$ definierten und stetigen Funktionen durch

$$\|g\|_1 := \int_c^d |g(x)|\, dx$$

eine Norm definiert ist. Man zeige, dass jede auf $[c, d]$ gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen auch bzgl. dieser Norm konvergiert.