

4 Funktionen und Stetigkeit

Da im Folgenden wieder die meisten Aussagen sowohl für reelle als auch für komplexe Zahlen gelten, werden wir den zugrunde liegenden Zahlkörper allgemein mit \mathbb{K} bezeichnen, was dann innerhalb von Ausdrücken einheitlich für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ stehen kann. Wenn nur die reellen Zahlen gemeint sind, wird dies jeweils durch explizite Verwendung des Symbols \mathbb{R} angedeutet.

4.1 Funktionen und Abbildungen

Zunächst führen wir einige Begriffe ein.

Definition 4.1 (Funktion): Sei D eine Teilmenge des Zahlenraums \mathbb{K} . Ist durch eine Vorschrift jeder Zahl $x \in D$ eindeutig eine Zahl $y = f(x) \in \mathbb{K}$ zugeordnet, so nennen wir $f(\cdot)$ eine „Funktion“ von x mit dem „Definitionsbereich“ D und dem „Bildbereich“ $B = \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$.

Im Reellen sind Definitionsbereiche in der Regel Vereinigungen von Intervallen oder selbst Intervalle, wobei letztere meistens mit I bezeichnet werden. Bei Vorgabe von Anfangs- und Endpunkten $-\infty < a \leq b < \infty$ bedeutet:

| | |
|---|---------------------------------------|
| $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ | („abgeschlossenes“ Intervall) |
| $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ | („offenes“ Intervall) |
| $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ | („nach rechts halboffenes“ Intervall) |
| $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ | („nach links halboffenes Intervall“) |

Das Intervall $[a, a]$ enthält nur den Punkt a . Diese Intervalle sind alle „endlich“ bzw. „beschränkt“. Es kommen auch „unendliche“ Intervalle der Form $[a, \infty)$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ und $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ vor. Jede (eindeutige) reelle Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen sog. „Graphen“

$$G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D\},$$

welcher in der Regel durch einer Kurve in der (x, y) -Ebene darstellbar ist.

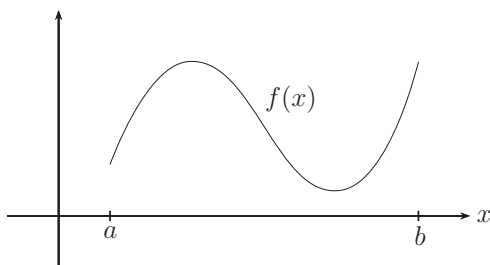


Abbildung 4.1: Graph $G(f)$ einer Funktion $f(x)$.

Für eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ sind Realteil $\operatorname{Re} f$, Imaginärteil $\operatorname{Im} f$ und Absolutbetrag $|f|$ erklärt:

$$(\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re} f(x), \quad (\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im} f(x), \quad |f|(x) := |f(x)|.$$

Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist ihre „Restriktion“ $f|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{K}$ auf eine Teilmenge $D' \subset D$ ihres Definitionsbereichs auf natürliche Weise definiert. Für Paare von Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}$ sind Summe, Produkt und für $g(x) \neq 0, x \in D$, auch der Quotient definiert durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ein $x_0 \in D$ heißt „Nullstelle“ der Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, wenn $f(x_0) = 0$ ist. Die Funktion wird „identisch Null“ genannt, wenn $f(x) = 0$ ist für alle $x \in D$.

Eine Funktion heißt „injektiv“, wenn die durch sie definierte Abbildung zwischen ihrem Definitions- und ihrem Bildbereich injektiv ist. Zu einer injektiven Funktion $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}$ ist die „Umkehrfunktion“ (oder auch „inverse Funktion“) $f^{-1} : B \rightarrow D$ auf dem Bildbereich $B \subset \mathbb{K}$ von $f(x)$ definiert durch

$$f^{-1}(y) := x \Leftrightarrow y = f(x).$$

(Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ darf nicht mit der reziproken Funktion $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ verwechselt werden.) Für zwei Funktionen $g : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}$ und $f : B \rightarrow \mathbb{K}$ ist die Komposition $f \circ g : D \rightarrow \mathbb{K}$ definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad x \in D.$$

Beispiel 4.1: Wir listen einige Beispiele häufig auftretender Funktionen mit den zugehörigen Umkehrfunktionen (soweit diese existieren):

1. Die *konstante* Funktion $f(x) = c, x \in \mathbb{K}$, für irgend ein festes $c \in \mathbb{K}$, beschreibt im Reellen eine Parallele zur x -Achse.
2. Die *Identitätsfunktion* $f(x) = x$ hat im Reellen als Graph die Winkelhalbierende des ersten Quadranten durch den Nullpunkt. Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = x$.

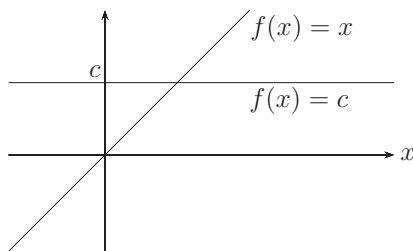


Abbildung 4.2: Graphen von $f(x) = c$ und $f(x) = x$.

3. Der *Absolutbetrag* $f(x) = |x|$ ist eine Funktion von \mathbb{K} nach $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Diese besitzt keine Umkehrfunktion, wenn man deren Eindeutigkeit verlangt.
4. Die *abgeschnittene* Funktion $f(x) = \min\{x, 1\}$ ist auf ganz \mathbb{R} definiert, besitzt aber keine Umkehrfunktion.

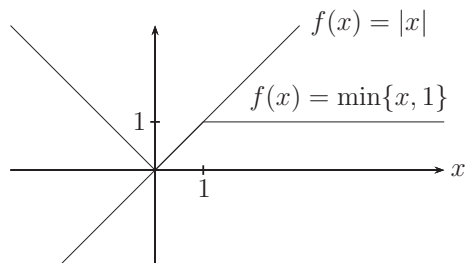


Abbildung 4.3: Graphen von $f(x) = |x|$ und $f(x) = \min\{x, 1\}$.

5. Die (reelle) k -te *Wurzelfunktion* $f(x) = \sqrt[k]{x}$, für ein $k \in \mathbb{N}$, ist zunächst als Funktion von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ definiert. Durch die natürliche Setzung $f(0) = \sqrt[k]{0} := 0$ ist sie zu einer Funktion $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ „fortgesetzt“. Für negative Argumente ist sie im Reellen nicht definiert, wohl aber im Komplexen. Ihr „maximaler“ Definitionsbereich im Reellen ist also $D = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Die zugehörige Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ist

$$f^{-1}(x) = x^k.$$

Für rationalen Exponenten $r = p/q$, mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, ist die Funktion $f(x) = x^{p/q}$ definiert als Komposition der Funktionen

$$f_1(x) = x^p, \quad f_2(x) = \sqrt[q]{x} : \quad f(x) = f_1(f_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

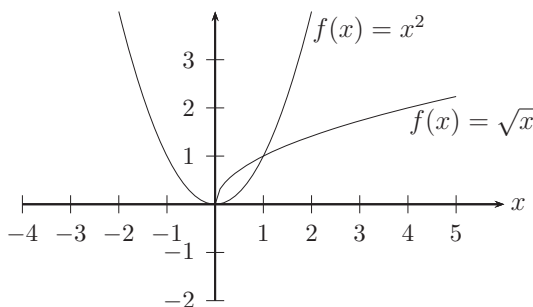


Abbildung 4.4: Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = x^2$.

6. Die *Polynomfunktion* („ganze“ rationale Funktion) vom „Grad“ $n \in \mathbb{N}_0$,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$, ist auf ganz \mathbb{K} definiert.

7. Die *rationale Funktion*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m},$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$, und $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{K}$, $b_m \neq 0$, ist in allen Punkten $x \in \mathbb{K}$ definiert, in denen $q(x) \neq 0$ ist.

8. Die (reelle) *Treppenfunktion* zu einer endlichen Zerlegung eines Intervalls $[a, b]$ durch Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:

$$f(x) = c_k, \quad x \in (x_{k-1}, x_k).$$

In den Zerlegungspunkten x_k bleibt die Funktion unbestimmt oder wird dort dem jeweiligen Zweck entsprechend geeignet gesetzt; z. B. $f(x_{k-1}) := c_k$.

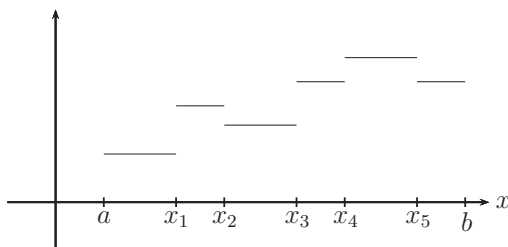


Abbildung 4.5: Graph einer Treppenfunktion.

9. Die (reelle) *Exponentialfunktion* $f(x) = \exp(x) = e^x$ ist eine Funktion von ganz \mathbb{R} nach \mathbb{R}_+ . Ihre Umkehrfunktion ist der sog. „natürliche Logarithmus“ $f^{-1}(x) = \ln(x)$, den wir weiter unten noch eingehender betrachten werden.
10. „Pathologische“ Funktionen ohne darstellbaren Graphen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{N} \text{ Primzahl,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 4.2 (Monotonie): Eine (reelle) Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „monoton steigend“ bzw. „monoton fallend“, wenn für Punkte $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x \geq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \quad \text{bzw.} \quad x \geq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

Gelten diese Beziehungen jeweils mit den strikten Ungleichheitszeichen, so heißt die Funktion „strikt“ (oder auch „streng“) monoton steigend bzw. fallend.

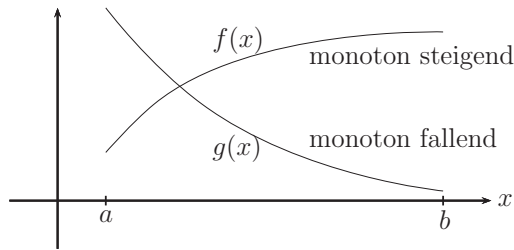


Abbildung 4.6: Graph einer monoton fallenden und einer monoton steigenden Funktion.

Beispiel 4.2: i) Das einfachste Beispiel einer strikt monoton steigenden bzw. fallenden Funktion haben wir mit der (reellen) Identitätsfunktion $f(x) = x$ bzw. $f(x) = -x$.

ii) Die reelle Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist wegen $e^h > 1$, $h > 0$ und

$$x' = x + h > x \quad \Rightarrow \quad e^{x'} = e^x e^h > e^x$$

ebenfalls strikt monoton steigend.

iii) Die Funktion $f(x) = \min\{x, 1\}$ ist zwar monoton steigend aber nicht *streng* monoton steigend.

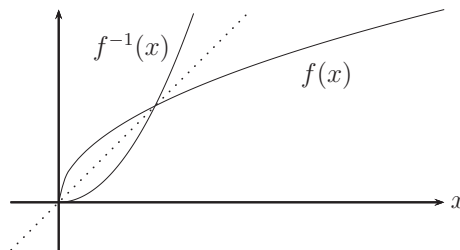


Abbildung 4.7: Graph einer monoton steigenden Funktion und ihrer Umkehrfunktion.

Lemma 4.1 (Umkehrfunktion): Für eine streng monoton steigende (fallende) Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert auf dem Bild $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in I\}$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow I$ und ist ebenfalls streng monoton steigend (fallend).

Beweis: i) Wir zeigen zunächst die Injektivität von f . Für zwei verschiedene $x, x' \in D$ gilt entweder $x' > x$ oder $x < x'$. Aufgrund der strengen Monotonie von f ist also entweder $f(x') > f(x)$ oder $f(x') < f(x)$. Folglich ist f injektiv auf D , so dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow D$ existiert.

ii) Zum Nachweis der Monotonie von f^{-1} seien $y, y' \in B$ mit $y' > y$. Dann gibt es definitionsgemäß $x, x' \in D$, so dass $y = f(x)$, $y' = f(x')$. Wir haben $x' > x$ zu zeigen. Dies geschieht durch ein Widerspruchsargument. Angenommen, es gilt $x' \leq x$. Da $x = x'$ wegen der Injektivität von f ausgeschlossen ist, muss $x' < x$ sein. Die strenge Monotonie von f impliziert dann aber $y = f(x) > f(x') = y'$, im Widerspruch zur Annahme. Q.E.D.

Häufig sind Funktionen zunächst auf einer kleineren Menge D definiert und sollen auf einen größeren Definitionsbereich $\bar{D} \supset D$ fortgesetzt werden. Diesem Zweck dient die folgende Konstruktion. Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ ist der „Abschluß“ \bar{M} definiert durch

$$\bar{M} := \{x \in \mathbb{K} \mid \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}.$$

d. h.: \bar{M} enthält u. a. alle Häufungspunkte von M . Im Falle $M = \bar{M}$ ist dann die Menge im Sinne der früheren Definition „abgeschlossen“. Beispiele sind das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ als Abschluss des offenen Intervalls (a, b) und ganz \mathbb{K} als Abschluss der „gelochten“ Menge $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Definition 4.3: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ hat einen („regulären“) Limes $a \in \mathbb{K}$ in einem Punkt $x_0 \in \bar{D}$, wenn für alle Folgen von Punkten $x_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty),$$

Dies wird auch in der Kurzform $a = \lim_{x \in D, x \rightarrow x_0} f(x)$ geschrieben. Eine analoge Bezeichnung wird auch für „singuläre“ Limiten, d. h. im Fall $|x| \rightarrow \infty$, verwendet.

Beispiel 4.3:

1. Für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1,$$

da für $|x| \leq 1$:

$$|e^x - 1| \leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = |x|(e - 1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

Betrachtet man nun die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x},$$

so ist diese zunächst nur auf $D = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ definiert. Mit Hilfe der Beziehung, für $|x| \leq 1$,

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{e^x - 1 - x}{x} \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow 0)$$

hat in $x = 0$ den regulären Limes $f(0) := 1$.

2. Für ein reelles Polynom der Form $p(x) = a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ gilt:

$$p(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$p(x) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (x \rightarrow -\infty),$$

da wegen

$$p(x) = x^n \left\{ \frac{a_0}{x^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1 \right\}$$

das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ offenbar durch den „führenden“ Term x^n bestimmt ist.

4.2 Stetigkeit

Definition 4.4 (Stetigkeit): Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt „stetig“ in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D gilt:

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad (n \rightarrow \infty);$$

andernfalls heißt sie „unstetig“ in x_0 . Sie heißt „stetig auf ihrem Definitionsbereich D “, wenn sie stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$ ist.

Im Reellen ist der Begriff der „Stetigkeit“ einer Funktion intuitiv verständlich anhand ihres Graphen. Anschaulich ist eine Funktion stetig, wenn ihr Graph zusammenhängend ist, d. h. wenn man ihn ohne abzusetzen zeichnen kann.

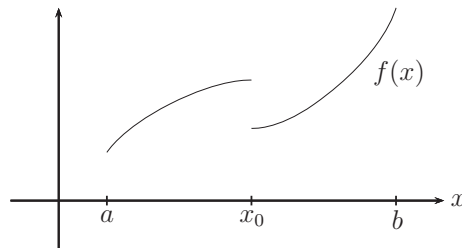


Abbildung 4.8: Graph einer unstetigen Funktion.

Lemma 4.2: i) Für eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist auch jede Restriktion $f|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{K}$ auf eine Teilmenge $D' \subset D$ stetig.

ii) Mit einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ sind in einem Punkt $x_0 \in D$ auch ihr Realteil $\operatorname{Re} f$ und Imaginärteil $\operatorname{Im} f$ sowie ihr Absolutbetrag $|f|$ stetig.

iii) Für stetige Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}$ sind in einem Punkt x_0 auch ihre Summe $f + g$ und Produkt $f \cdot g$. Im Fall $g(x_0) \neq 0$ ist dann auch der Quotient f/g stetig.

iv) Für stetige Funktionen $g : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}$ und $f : B \rightarrow \mathbb{K}$ ist auch die Komposition $f \circ g : D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig.

Beweis: i) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit.

ii) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(x')|^2 + |\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(x')|^2 &= |f(x) - f(x')|^2, \\ ||f(x)| - |f(x')|| &\leq |f(x) - f(x')|. \end{aligned}$$

iii) Die Stetigkeit von Summe, Produkt und Quotient ergibt sich aus den entsprechenden Resultaten für konvergente Zahlenfolgen. Bei der Behandlung des Quotienten ist zu beachten, daß dieser für ein $x_0 \in D$ mit $g(x_0) \neq 0$ nach Korollar 4.1 auf einer ganzen ε -Umgebung von x_0 definiert ist.

iv) Sei $x_0 \in D$ und $x_n \in D$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Wegen der Stetigkeit von g konvergiert $y_n = g(x_n) \rightarrow g(x_0) = y_0$ ($n \rightarrow \infty$) und dann wegen der Stetigkeit von f :

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(y_n) \rightarrow f(y_0) \quad (x_n \rightarrow x_0).$$

Mit $f(y_0) = f(g(x_0)) = (f \circ g)(x_0)$ ergibt sich die Behauptung.

Q.E.D.

Lemma 4.3: *Die auf einer beschränkten, abgeschlossenen (d. h. kompakten) Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ definierte Funktion $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}$ sei injektiv und stetig. Dann ist auch ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow D$ stetig.*

Beweis: Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B mit $y_n \rightarrow y_0 \in B$ ($n \rightarrow \infty$). Wir haben zu zeigen, dass dann $x_n := f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0) =: x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Urbildfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, da in der beschränkten Menge D enthalten. Sei $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $x_{n_k} \rightarrow \xi \in D$. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert dann $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\xi)$. Es gilt aber auch $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow y_0$, d. h.: $f(x_0) = f(\xi)$. Wegen der Injektivität von f folgt $\xi = x_0$. Also sind alle Häufungswerte der (beschränkten) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleich x_0 , so dass notwendig $x_n \rightarrow x_0$.

Q.E.D.

Die obige qualitative Definition der Stetigkeit ist häufig unpraktisch für Beweis Zwecke und zur Beschreibung weitergehender Stetigkeitseigenschaften von Funktionen. Daher geben wir die folgende mehr quantitative Charakterisierung.

Lemma 4.4 (Stetigkeit per ε/δ -Argument): *Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist stetig in einem Punkt $x_0 \in D$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:*

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (4.2.1)$$

Beweis: i) Sei f stetig. Gäbe es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ einen Punkt $x \in D$ gibt mit $|x_0 - x| \leq \delta$, aber $|f(x_0) - f(x)| \geq \varepsilon$, so wäre dies ein Widerspruch zu $f(x_0) - f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0$).

ii) Die andere Richtung der Behauptung ist evident.

Q.E.D.

Korollar 4.1: Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, sei in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig, und es sei $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für jede sog. ε -Umgebung $U_\varepsilon := \{x \in D \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ von x_0 mit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\varepsilon$.

Beweis: Wir setzen $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von f ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Also folgt für solche x :

$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon - \varepsilon = 0,$$

was zu zeigen war.

Q.E.D.

Definition 4.5: i) Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt „gleichmäßig stetig“ auf ihrem Definitionsbereich D , wenn in der ϵ/δ -Formulierung der Stetigkeit zu gegebenem ε das δ gleichmäßig für alle Punkte $x \in D$ gewählt werden kann.

ii) Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt „Lipschitz¹-stetig“ (oder kurz „L-stetig“) auf D , wenn mit einer Konstante $L > 0$ (der sog. „Lipschitz-Konstante“) gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in D.$$

Satz 4.1 (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit): Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen (d. h. kompakten) Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Funktion ist dort sogar „gleichmäßig stetig“; d. h.: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für alle $x, x' \in D$ gilt:

$$|x - x'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (4.2.2)$$

Beweis: Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, x'_n \in D$ existieren mit

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon. \quad (4.2.3)$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in D$. Wegen $|x_n - x'_n| < 1/n$ ist auch $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k}$. Da f stetig ist, folgt daraus

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow |f(x) - f(x)| = 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

im Widerspruch zu (4.2.3).

Q.E.D.

Bemerkung 4.1: i) In Satz 4.1 sind die Voraussetzungen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit des Definitionsbereichs D wesentlich. Die auf dem abgeschlossenen, aber unbeschränkten Intervall $I = [0, \infty)$ definierte Funktion

$$f(x) = x^2$$

¹Rudolf O. S. Lipschitz (1832–1903): Deutscher Mathematiker aus Königsberg; seit 1864 Prof. in Bonn; arbeitete auf verschiedenen Gebieten der Mathematik.

ist dort stetig aber nicht *gleichmäßig* stetig, da ihre Stetigkeitseigenschaft für $x \rightarrow \infty$ degeneriert. Für $x = n$ und $x' = x + \frac{1}{n}$ gilt z. B. $x - x' = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), aber

$$|f(x) - f(x')| = |x + x'| |x - x'| = 2 + n^{-2} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die auf dem beschränkten, halboffenen Intervall $I = (0, 1]$ definierte Funktion

$$f(x) = x^{-1}$$

ist dort stetig aber nicht *gleichmäßig* stetig, da ihre Stetigkeitseigenschaft für $x \rightarrow 0$ schlechter wird (Details Übungsaufgabe).

ii) Eine L -stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist auch gleichmäßig stetig auf D (Beweis Übungsaufgabe). Umgekehrt muss eine gleichmäßig stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ nicht notwendig L -stetig sein (Gegenbeispiel Übungsaufgabe).

Beispiel 4.4:

1. Die Stetigkeit des Absolutbetrags hatten wir im Grunde bereits bei der Diskussion der Folgenkonvergenz verwendet. Sie folgt aus der Beziehung

$$||x| - |x_n|| \leq |x - x_n|.$$

2. Die Funktion $f(x) = \min\{x, 1\}$ ist stetig auf ganz \mathbb{R} (Übungsaufgabe).
3. Monomfunktionen $f(x) = x^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ sind stetig, was man mit Hilfe der Beziehung

$$|x^n - x_n^k| = |x - x_n| |x^{k-1} + x^{k-2}x_n + \dots + x x_n^{k-2} + x_n^{k-1}|$$

erschließt. Nach Lemma 4.2 sind damit auch alle Polynomfunktionen als Linearkombinationen von Monomfunktionen stetig. Dasselbe gilt für die rationalen Funktionen in Punkten x_0 , in denen der Nenner nicht Null ist.

4. Die (reelle) Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[k]{x}$ auf $I = [0, \infty)$ ist die Umkehrfunktion der Monomfunktion $f(x) = x^k$, eingeschränkt auf I . Ihre Stetigkeit ergibt sich folglich mit Hilfe von Lemma 4.3.
5. Oben war bereits gezeigt worden, dass die Exponentialfunktion im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist. Für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{K}$ konvergiere nun $x - x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann gilt:

$$\begin{aligned} |e^x - e^{x_n}| &= e^x |1 - e^{-x} e^{x_n}| \\ &= e^x |1 - e^{x_n - x}| \rightarrow e^x |1 - 1| = 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d. h.: Die Exponentialfunktion ist auf ganz \mathbb{K} stetig.

6. Eine (reelle) Treppenfunktion ist in der Regel in den Zerlegungspunkten $a = x_0 < x_1 < \dots < a_n = b$ unstetig.

7. Die pathologische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist nirgends stetig. Um dies zu sehen, betrachten wir für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{Q}$ die Folge mit den Elementen $x_n := x_0 + \sqrt{2}/n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dafür gilt:

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad f(x_0) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es nach Konstruktion von \mathbb{R} eine approximierende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{Q} , für die dann gilt:

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad f(x_0) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Der folgende „Zwischenwertsatz“ für stetige Funktionen im Reellen geht auf Bolzano zurück.

Satz 4.2 (Zwischenwertsatz): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle stetige Funktion. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl y „zwischen“ $f(a)$ und $f(b)$, d. h. $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$, ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.

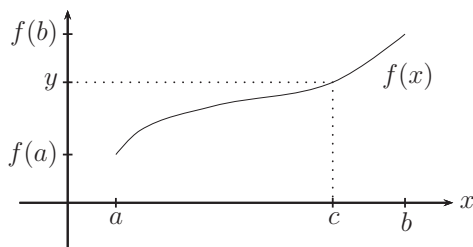


Abbildung 4.9: Illustration zum Zwischenwertsatz.

Beweis: Es sei o.B.d.A. $f(a) < y < f(b)$; die Fälle $y = f(a)$ oder $y = f(b)$ sind uninteressant. Die Funktion $g(x) := f(x) - y$ ist ebenfalls stetig und hat die Eigenschaften $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Gesucht ist also ein $c \in [a, b]$ mit $g(c) = 0$. Wir zeigen dessen Existenz mit Hilfe des Intervallschachtelungsprinzips in \mathbb{R} . Auf dem Ausgangsintervall $I_0 = [a_0, b_0] := [a, b]$ gilt $g(a_0)g(b_0) < 0$. Sei $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ der Mittelpunkt von $[a_0, b_0]$. Im Falle $g(c_0) = 0$ ist dann c_0 Nullstelle von g und wir sind fertig. Andernfalls ist entweder $g(a_0)g(c_0) < 0$ oder $g(c_0)g(b_0) < 0$, und wir setzen:

$$I_1 = [a_1, b_1] := \begin{cases} [a_0, c_0] & \text{für } g(a_0)g(c_0) < 0, \\ [c_0, b_0] & \text{für } g(c_0)g(b_0) < 0. \end{cases}$$

Offenbar gilt dann $g(a_1)g(b_1) < 0$ und $|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b_0 - a_0|$. Mit dem neuen Intervall I_1 verfahren wir nun analog und finden entweder eine Nullstelle $c_1 \in I_1$ von g oder ein weiteres Teilintervall $I_2 = [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ mit $g(a_2)g(b_2) < 0$ und $|b_2 - a_2| = \frac{1}{2}|b_1 - a_1|$. Durch Fortsetzung dieses Prozesses gewinnen wir entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullstelle $c \in [a, b]$ von g oder eine unendliche Folge von geschachtelten Teilintervallen $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften $g(a_n)g(b_n) < 0$ und

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0 - a_0|.$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert ein $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Dieses ist dann Limes der Folgen der Intervallendpunkte: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Da nach Konstruktion $g(a_n)g(b_n) \leq 0$ gilt, ist wegen der Stetigkeit von g auch $g(c)g(c) \leq 0$, d. h.: $g(c) = 0$.
Q.E.D.

Anwendung 4.2.1: Jedes reelle Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

ungeraden Grades hat eine reelle Nullstelle. Im Fall $a_n > 0$ gilt

$$p(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty), \quad p(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Also gibt es Punkte $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$ mit $f(x_-) < 0$ und $f(x_+) > 0$. Nach Satz 4.2 gibt es dann ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$. Im Fall $a_n < 0$ wird entsprechend argumentiert. Die Existenz von Nullstellen auch für allgemeine Polynome *geraden* Grades erfordert die Verwendung des komplexen Zahlkörpers \mathbb{C} und ist die Aussage des „Fundamentalsatzes der Algebra“ (\rightarrow *Algebra und komplexe Funktionentheorie*).

Anwendung 4.2.2: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Bildbereich $B \subset [a, b]$ besitzt einen „Fixpunkt“, d.h. ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$. Dazu betrachten wir die stetige Funktion $g(x) := f(x) - x$. Wegen $f(a), f(b) \in [a, b]$ ist $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$. Also besitzt g in $[a, b]$ eine Nullstelle, welche nach Konstruktion Fixpunkt von f ist. Dieses Resultat ist die einfachste Version des sog. „Brouwerschen Fixpunktsatzes“, der für sehr viel allgemeinere Situationen bewiesen werden kann (\rightarrow *Funktionalanalysis*).

Anwendung 4.2.3: Das im Beweis des Zwischenwertsatzes verwendete Schachtelungsverfahren kann auch zur praktischen Berechnung einer Nullstelle einer stetigen Funktion f verwendet werden; es wird dann als „Bisektionsverfahren“ bezeichnet. Voraussetzung ist die Kenntnis eines Ausgangsintervalls $[a, b]$, auf dem $f(a)f(b) < 0$ ist. Dann hat f (mindestens) eine Nullstelle $x \in [a, b] =: [a_0, b_0]$. Aus der Konstruktion der Folge von geschachtelten Teilintervallen $[a_n, b_n]$ folgt dann für deren Mittelpunkte $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$:

$$|c_n - x| \leq 2^{-1}|b_n - a_n| \leq 2^{-n-1}|b_0 - a_0| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Diese Methode zur Approximation von Nullstellen ist sehr robust, d. h. unempfindlich gegenüber kleinen Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Funktionswerte $f(x_k)$ bedingt etwa durch „Rundungsfehler“, doch auch recht langsam. Zur Erreichung einer Approximationsgenauigkeit von 10^{-6} sind i. Allg. $n = 20$ Bisektionsschritte erforderlich. Wir werden später noch ein wesentlich schnelleres Verfahren zur Nullstellenberechnung kennenlernen.

Satz 4.3 (Satz von der Beschränktheit): Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen (d.h. kompakten) Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist dort beschränkt; d. h.: Es existiert ein $K \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\sup_{x \in D} |f(x)| \leq K. \quad (4.2.4)$$

Beweis: Angenommen, die stetige Funktion $f(x)$ ist nicht beschränkt auf D . Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|f(x_n)| > n$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, da enthalten in der beschränkten Menge D , und hat folglich nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Limes $x \in \mathbb{K}$. Da D abgeschlossen ist, liegt auch $x \in D$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von f

$$|f(x_{n_k})| \rightarrow |f(x)| < \infty \quad (k \rightarrow \infty),$$

im Widerspruch zur Annahme $|f(x_n)| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Q.E.D.

Definition 4.6: Für eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ sind „Supremum“ und „Infimum“ definiert als kleinste obere bzw. größte untere Grenze ihrer Bildmenge:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} f(x) &= \sup B_f := \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid y \leq \beta \forall y \in B_f\}, \\ \inf_{x \in D} f(x) &= \inf B_f := \max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq y \forall y \in B_f\}. \end{aligned}$$

Die Existenz solcher „kleinsten“ oberen und „größten“ unteren Grenzen ist für beschränktes D durch die Trennungseigenschaft von \mathbb{R} garantiert. Existieren Punkte $x_{\max}, x_{\min} \in D$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} f(x) &= f(x_{\max}) =: \max_{x \in D} f(x), \\ \inf_{x \in D} f(x) &= f(x_{\min}) =: \min_{x \in D} f(x), \end{aligned}$$

so spricht man von einem „Maximum“ bzw. einem „Minimum“ (allgemein „Extremum“).

Satz 4.4 (Satz vom Extremum): Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen (d. h. kompakten) Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige, reell-wertige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt dort ein Maximum und ein Minimum; d. h.: Es existieren $x_{\max}, x_{\min} \in D$ mit

$$\sup_{x \in D} f(x) = f(x_{\max}), \quad \inf_{x \in D} f(x) = f(x_{\min}). \quad (4.2.5)$$

Beweis: Die auf D stetige Funktion ist beschränkt mit oberer Grenze K ; d. h.:

$$K = \sup_{x \in [a, b]} f(x) < \infty.$$

Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus D mit $f(x_n) \rightarrow K$ ($n \rightarrow \infty$). Diese Folge ist beschränkt und besitzt folglich eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die, da D abgeschlossen ist, gegen einen Punkt $x \in D$ konvergiert. Für diese gilt dann

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \quad (k \rightarrow \infty);$$

d. h.: Es gilt $f(x) = K$. Das Argument für die untere Grenze ist analog. Q.E.D.

Bemerkung 4.2: Als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.4 haben wir, dass der Absolutbetrag einer stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ auf einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ ein Maximum und Minimum annimmt; d. h.: Es existieren Punkte $x_{\max}, x_{\min} \in D$ mit

$$|f(x_{\max})| = \max_{x \in D} |f(x)|, \quad |f(x_{\min})| = \min_{x \in D} |f(x)|.$$

Bemerkung 4.3: Die drei grundlegenden Sätze für stetige (reelle) Funktionen, der Zwischenwertsatz, der Satz von der Beschränktheit und der Satz vom Extremum, lassen sich zusammen in kurzer Form auch wie folgt formulieren: *Für eine auf einem abgeschlossenen Intervall definierte, stetige Funktion ist der Bildbereich wieder ein abgeschlossenes Intervall.* (Beweis Übungsaufgabe)

Anwendung 4.2.4 (Approximation durch Treppenfunktionen): Zum praktischen Rechnen mit stetigen Funktionen (z. B. auf dem Computer) ist ihre Definition durch Vorgabe von Werten in den überabzählbar vielen Punkten ihres Definitionsintervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nicht geeignet. Daher ist es von Interesse, allgemeine stetige Funktionen durch einfachere, am besten durch endlich viele Werte charakterisierte Funktionen zu approximieren. Kandidaten hierfür sind z. B. die (stückweise konstanten) Treppenfunktionen, die Polygonzüge, die Polynome oder die später noch eingehender untersuchten trigonometrische Funktionen. Hierzu wollen wir folgende Aussage ableiten:

Lemma 4.5 (Treppenapproximation): *Jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte, stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich beliebig gut durch Treppenfunktionen einschließen; d. h.: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\overline{\varphi}_\varepsilon, \underline{\varphi}_\varepsilon$ (o.B.d.A. zur selben endlichen Zerlegung von $[a, b]$ gehörend) mit den Eigenschaften*

$$\underline{\varphi}_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \overline{\varphi}_\varepsilon(x), \quad |\underline{\varphi}_\varepsilon(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b]. \quad (4.2.6)$$

Beweis: Nach Satz 4.1 ist f auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Demnach gibt es zu beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(b - a)/n < \delta_\varepsilon$. Mit den Teilpunkten

$$x_k := a + \frac{b - a}{n}k, \quad k = 0, \dots, n,$$

erhalten wir so eine „äquidistante“ Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

mit $|x_k - x_{k-1}| < \delta_\varepsilon$. Dazu definieren wir nun zwei Treppenfunktionen $\overline{\varphi}_\varepsilon, \underline{\varphi}_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch folgende Setzung:

$$x_{k-1} \leq x < x_k : \quad \begin{aligned} \overline{\varphi}_\varepsilon(x) &:= \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}, \\ \underline{\varphi}_\varepsilon(x) &:= \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}. \end{aligned}$$

Für diese gilt dann konstruktionsgemäß $\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \bar{\varphi}_\varepsilon(x)$ in allen $x \in [a, b]$. Nach Satz 4.4 existieren nun in jedem der abgeschlossenen Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$, Punkte $\bar{\xi}_k, \underline{\xi}_k$ mit

$$f(\bar{\xi}_k) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}, \quad f(\underline{\xi}_k) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}.$$

Nach Wahl von δ_ε gilt daher für $x \in [x_{k-1}, x_k]$:

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon(x)| = |f(\underline{\xi}_k) - f(\bar{\xi}_k)| \leq |f(\underline{\xi}_k) - f(x)| + |f(x) - f(\bar{\xi}_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

und somit $|\varphi_\varepsilon(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, $x \in [a, b]$. Q.E.D.

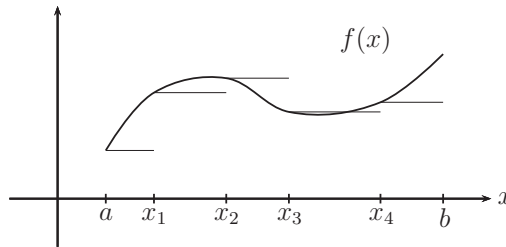


Abbildung 4.10: Approximation einer stetigen Funktion durch eine Treppenfunktion.

4.3 Spezielle Funktionen

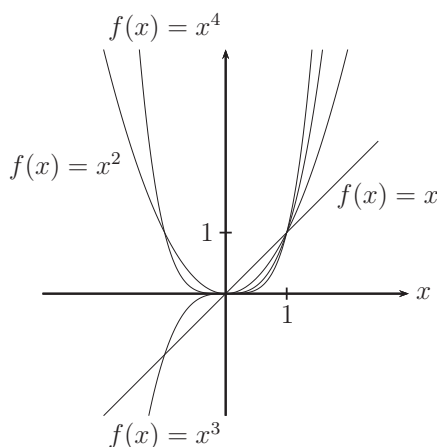
4.3.1 Polynome

Wir wollen uns etwas eingehender mit den Polynomen als einer der wichtigsten Klasse von Funktionen beschäftigen. Ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K},$$

mit $a_n \neq 0$ heißt „vom Grad $\gamma(p) = n$ “. Konstante Polynome $p(x) \equiv a_0$ haben den Grad Null. Den Grad des „trivialen“ Polynoms $p_0(x) \equiv 0$ definieren wir als $\gamma(p_0) := -\infty$. Die Polynome vom Grad $\gamma(p) \leq n \in \mathbb{N}_0$, bilden einen Vektorraum, den wir mit \mathcal{P}_n bezeichnen. Für zwei Polynome p, q vom Grad $\gamma(p)$ und $\gamma(q)$ gilt

$$\begin{aligned} \gamma(p+q) &\leq \max\{\gamma(p), \gamma(q)\}, \\ \gamma(pq) &= \gamma(p) + \gamma(q). \end{aligned}$$

Abbildung 4.11: Graphen einiger Monome $f(x) = x^n$.

Man sagt, dass ein Polynom q ein anderes Polynom p „teilt“, wenn es ein drittes Polynom r mit Grad $\gamma(r) \geq 1$ gibt, so dass $p(x) = q(x)r(x)$, $x \in \mathbb{K}$; q ist dann (echter) „Teiler“ von p . Ein Polynom ohne echten Teiler heißt „irreduzibel“. Zwei Polynome p und q heißen „teilerfremd“, wenn sie keinen (echten) gemeinsamen Teiler haben. Ein $x_1 \in \mathbb{K}$ heißt „Nullstelle“ eines Polynoms p , wenn $p(x_1) = 0$.

Satz 4.5: *Ein (reelles) Polynom p vom Grad $\gamma(p) = n$, das nicht das Nullpolynom ist, hat höchstens n reelle Nullstellen. Für jede Nullstelle x_1 von p besteht die Darstellung*

$$p(x) = (x - x_1)q(x) \quad (4.3.7)$$

mit einem Polynom q vom Grad $\gamma(q) = \gamma(p) - 1$.

Beweis: Sei $x_1 \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $p \in P_n$ mit $a_n \neq 0$. Aufgrund der vertrauten Identität

$$x^k - x_1^k = (x - x_1) \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} x_1^j, \quad k = 1, \dots, n,$$

gilt

$$p(x) - p(x_1) = (x - x_1)q(x)$$

mit einem Polynom $q \in P_{n-1}$. Wegen $p(x_1) = 0$ folgt die behauptete Darstellung (4.3.7). Für jede weitere Nullstelle lässt sich nun dieser Abspaltungsprozeß für das Faktorpolynom q wiederholen. Da dabei der Polynomgrad jedesmal um Eins reduziert wird, ist dies höchsten n -mal möglich ist, so dass es nicht mehr als n Nullstellen geben kann. Q.E.D.

Korollar 4.2: Zwei Polynome $p_1(x)$ und $p_2(x)$ vom Grad kleiner oder gleich n , die in $n + 1$ verschiedenen Punkten übereinstimmen sind identisch. Insbesondere sind zwei als Polynome gegebene Funktionen $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ genau dann identisch, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_k = b_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Beweis: i) Das Differenzpolynom $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$ hat höchstens den Grad n , besitzt aber nach Voraussetzung $n + 1$ Nullstellen. Daher muss es nach Satz 4.5 identisch Null sein.

ii) Das Polynom $(f - g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k)x^k$ ist im Fall $a_k = b_k, k = 0, \dots, n$, die Nullfunktion. Andererseits hat es im Falle $f \equiv g$ mehr als $n + 1$ Nullstellen und ist daher nach (i) das Nullpolynom. Q.E.D.

Bemerkung 4.4: Die Aussage von Satz 4.5 gilt auch für komplexe Polynome

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

mit ihren i. Allg. komplexen Nullstellen. Da aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 2.7) jedes Polynom eine (möglicherweise) komplexe Nullstelle besitzt, hat ein Polynom p über dem Körper \mathbb{C} vom Grad $\gamma(p) = n$ genau n Nullstellen. Sind x_1, \dots, x_m die paarweise verschiedenen von diesen, kann der Abspaltungsprozeß in (4.3.7) weitergeführt werden zu

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\mu_k}, \quad (4.3.8)$$

mit den „Vielfachheiten“ $\mu_k \in \mathbb{N}$ der Nullstellen $x_k \in \mathbb{C}$, wobei $n = \sum_{k=1}^m \mu_k$. Für ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist für eine Nullstelle $x_k \in \mathbb{C}$ wegen

$$p(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(\bar{x}_k) = \overline{p(x_k)} = 0$$

auch ihr konjugiert Komplexes $\bar{x}_k = \operatorname{Re} x_k - i \operatorname{Im} x_k$ Nullstelle. Für eine nicht reelle Nullstelle x_k gilt daher mit $x \in \mathbb{R}$:

$$(x - x_k)(x - \bar{x}_k) = x^2 - (x_k + \bar{x}_k)x + x_k \bar{x}_k = x^2 - 2 \operatorname{Re} x_k x + |x_k|^2 \in \mathbb{R}.$$

Folglich sind die Nullstellen eines reellen Polynoms entweder reell, oder sie treten als Paare komplexer und konjugiert komplexer Zahlen auf. Dies impliziert, dass die Linearfaktorzerlegung (4.3.8) im Fall eines reellen Polynoms die folgende Gestalt annimmt (allgemeine „Linearfaktorzerlegung“):

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{m'} (x - x_k)^{\mu_k} \prod_{k=m'+1}^m (x^2 - 2 \operatorname{Re} x_k x + |x_k|^2)^{\mu_k}, \quad (4.3.9)$$

mit den reellen und den nicht reellen Nullstellen

$$x_1, \dots, x_{m'} \in \mathbb{R}, \quad x_{m'+1}, \dots, x_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

jeweils mit Vielfachheiten $\mu_k \in \mathbb{N}$.

Anwendung 4.3.1 (Polynominterpolation): Gegeben seien $n+1$ verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ sowie Stützwerte $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, die etwa von einer stetigen Funktion $y = f(x)$ herkommen. Gesucht ist ein reelles Polynom $p(x)$ vom Grad n , welches diese Werte „interpoliert“; d.h.:

$$p(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Diese sog. „Lagrangesche² Interpolationsaufgabe“ besitzt eine eindeutige Lösung. Dazu konstruieren wir zunächst explizit eine Lösung und zeigen dann deren Eindeutigkeit. Mit den sog. Lagrangeschen Basispolynomen

$$L_k^{(n)}(x) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, \dots, n,$$

welche offenbar vom Grad n sind, bilden wir die Funktion

$$p(x) := y_0 L_0^{(n)}(x) + \dots + y_n L_n^{(n)}(x). \quad (4.3.10)$$

Diese ist offenbar ebenfalls ein Polynom vom Grad n und erfüllt die Interpolationsbedingungen:

$$p_L(x_k) = y_0 L_0^{(n)}(x_k) + \dots + y_n L_n^{(n)}(x_k) = y_k,$$

da nach Konstruktion

$$L_k^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j, \\ 1 & \text{für } k = j. \end{cases}$$

Damit ist die Existenz des Interpolationspolynoms gezeigt. Zum Nachweis seiner Eindeutigkeit, nehmen wir an, dass es ein zweites Polynom $p_2(x)$ vom Grad n gibt, welches ebenfalls die Interpolationsbedingungen erfüllt. Dann hat das Differenzpolynom $q(x) = p_L(x) - p_2(x)$ den Grad n und wegen $q(x_k) = p_L(x_k) - p_2(x_k) = 0$ die $n+1$ Nullstellen x_0, \dots, x_n . Folglich ist es das Nullpolynom.

Das Lagrangesche Interpolationspolynom $p_L(x)$ kann als Approximation der Funktion $f(x)$, von der die Stützwerte genommen wurden, betrachtet werden. Dann ist man an Abschätzungen des Fehlers $|f(x) - p_L(x)|$ interessiert. Die Vermutung, dass der Fehler für zunehmende Anzahl der Interpolationspunkte, d. h. für wachsenden Polynomgrad $n \rightarrow \infty$, gegen Null geht, ist i. Allg. leider falsch. Um dies zu erreichen, muss der Approximationsprozess anders organisiert werden (\rightarrow *Interpolationstheorie*). Der sog. „Weierstraßsche Approximationssatz“ besagt, dass man in der Tat jede stetige Funktion auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall beliebig gut durch Polynome approximieren kann.

Definition 4.7: Gilt für zwei Polynome p, q mit $\gamma(q) \leq \gamma(p)$ mit einem dritten Polynom r die Beziehung $p = qr$, so heißt p „teilbar“ durch q bzw. q „Teiler“ von p . Im Fall $1 < \gamma(q) < \gamma(p)$ ist q „echter Teiler“ von p . Ein Polynom ohne echte Teiler heißt „irreduzibel“ (oder „prim“), andernfalls „reduzibel“.

²Joseph Louis de Lagrange (1736–1813): Französischer Mathematiker; 1766–87 Direktor der mathem. Klasse der Berliner Akademie, dann Prof. in Paris; bahnbrechende Arbeiten zur Variationsrechnung, zur komplexen Funktionentheorie sowie zur theor. Mechanik und Himmelsmechanik.

Anwendung 4.3.2 (Euklidischer Algorithmus): Zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen verwendet man den euklidischen Algorithmus aus Kapitel 1. Mit einer Variante dieses Algorithmus kann man auch den größten gemeinsamen Teiler zweier Polynome $f \in P_n$ und $g \in P_m$ mit $m \leq n$ bestimmen. Dabei bedeutet das Attribut „größter“, dass es keinen weiteren gemeinsamen Teiler von echt größerem Grad gibt. Grundlage der Konstruktion ist die Darstellbarkeit eines Polynoms $f \in P_n$ vom Grad n als Vielfaches eines Polynoms $g \in P_m$ vom Grad $m < n$ in der Form

$$f = qg + r$$

mit einem Polynom $q \in P_{n-m}$ und einem „Rest“ r vom Grad $\gamma(r) < \gamma(g)$. Der euklidische Algorithmus arbeitet wie folgt: Ausgehend vom dem Polynom $r_0 := g$ sind zunächst Polynome q_0 und r_1 bestimmt durch die Vorschrift

$$f = q_0 r_0 + r_1, \quad \gamma(r_1) < \gamma(r_0).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ wird dies dann rekursive fortgeführt gemäß

$$F r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}, \quad \gamma(r_{k+1}) < \gamma(r_k).$$

Da nach Konstruktion $\gamma(r_{k+1}) < \gamma(r_k)$ ist, muss der Prozess nach spätestens $l \leq m$ Schritten mit Rest $r_l \equiv 0$ abbrechen. Dann ist r_{l+1} , wie man leicht nachrechnet (Übungsaufgabe), größter gemeinsamer Teiler der Polynome f und g . Dieser ist bis auf skalare Faktoren eindeutig bestimmt.

4.3.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Oben haben wir bereits die Exponentialfunktion

$$f(x) = \exp(x) = e^x$$

eingeführt. Diese ist für jedes $x \in \mathbb{K}$ über die absolut konvergente Potenzreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert. Sie ist auf \mathbb{K} stetig und als Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strikt monoton und folglich injektiv. Es ist $e^x > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $e^0 = 1$, und es gilt die Funktionalgleichung

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad x, y \in \mathbb{K}. \quad (4.3.11)$$

Diese Eigenschaften werden später noch zur Einführung der trigonometrischen Funktionen benutzt werden. Die weitere Diskussion der Exponentialfunktion beschränkt sich aber im Folgenden auf ihre reelle Form. Die Untersuchung der Exponentialfunktion und ihrer Umkehrfunktion, des natürlichen Logarithmus, im Komplexen liegt außerhalb dieses einführenden Kurses (\rightarrow *komplexe Funktionentheorie*).

Zur Definition der Logarithmusfunktion benötigen wir noch eine weitere Aussage über die Abbildungseigenschaften der Exponentialfunktion.

Lemma 4.6: Die Exponentialfunktion ist eine bijektive Abbildung von \mathbb{R} auf \mathbb{R}_+ .

Beweis: Die Abbildung $x \mapsto e^x$ ist injektiv, was aus der strikten Monotonie der Exponentialfunktion folgt. Zum Nachweis ihrer Surjektivität sei $a \in \mathbb{R}_+$ beliebig gegeben. Da die Folge $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen $e > 1$ strikt divergiert, und die Folge $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < a < e^n$. Die Exponentialfunktion ist auf \mathbb{R} und damit auch auf dem Intervall $[-n, n]$ stetig. Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann die Existenz eines $c \in [-n, n]$, so dass $e^c = a$. Dies beweist die Behauptung. Q.E.D.

Definition 4.8 (Natürlicher Logarithmus): Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ der reellen Exponentialfunktion ist der sog. „natürliche Logarithmus“ $\ln(x)$:

$$y := \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad :\Leftrightarrow \quad x = e^y.$$

Lemma 4.7: Der natürlichen Logarithmus $\ln(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und strikt monoton steigend, und es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\ln(yy') = \ln(y) + \ln(y'), \quad y, y' \in \mathbb{R}_+, \quad (4.3.12)$$

$$\ln(y^r) = r \ln(y), \quad y \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{Q}. \quad (4.3.13)$$

Beweis: i) Nach Lemma 4.3 ist der natürliche Logarithmus stetig und nach Lemma 4.1 auch strikt monoton auf jedem beschränkten Intervall $[e^a, e^b] \subset \mathbb{R}_+$, welches Bild eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist. Da man mit solchen Intervallen ganz \mathbb{R}_+ überdecken kann, folgen Stetigkeit und Monotonie des Logarithmus auf \mathbb{R}_+ .

ii) Ausgehend von der Formel $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$ für die Exponentialfunktion folgt für $y = e^x$, $y' = e^{x'}$, $yy' = e^{x+x'}$:

$$\ln(yy') = \ln(e^{x+x'}) = x + x' = \ln(y) + \ln(y').$$

Mit der definitionsgemäßen Beziehung $e^{\ln(x)} = x$ ergibt sich:

$$e^{\ln(x^r)} = x^r = (e^{\ln(x)})^r = e^{r \ln(x)}$$

und folglich wegen der Injektivität der Exponentialfunktion: $\ln(x^r) = r \ln(x)$. Q.E.D.

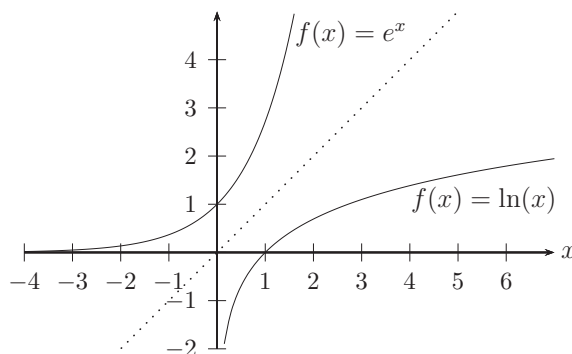


Abbildung 4.12: Graph der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus.

Mit Hilfe des natürlichen Logarithmus und der Exponentialfunktion können wir nun für jede Zahl $a \in \mathbb{R}_+$ eine beliebige reelle Potenz erklären. Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus ergeben sich die folgenden Aussagen:

Korollar 4.3: Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}_+$ wird durch die Setzung

$$a^\alpha := e^{\alpha \ln(a)} > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.3.14)$$

eine beliebige reelle α -Potenz definiert. Für diese gelten die üblichen Rechenregeln:

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta, \quad (4.3.15)$$

$$a^{-\alpha} = (a^\alpha)^{-1}, \quad (4.3.16)$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} = (a^\beta)^\alpha. \quad (4.3.17)$$

Der Ausdruck 0^0 bleibt unbestimmt. Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist auf ganz \mathbb{R} stetig; für $a > 1$ ist sie strikt monoton steigend, für $a = 1$ konstant und für $a < 1$ strikt monoton fallend. Die zugehörige Umkehrfunktion ist der „Logarithmus zur Basis a “:

$$y = \log_a(x) \quad :\Leftrightarrow \quad x = a^y. \quad (4.3.18)$$

Für diese gelten analoge Rechenregeln wie für den natürlichen Logarithmus $\ln(x) = \log_e(x)$ zur Basis e :

$$\log_a(xx') = \log_a(x) + \log_a(x'), \quad (4.3.19)$$

$$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.3.20)$$

Bemerkung 4.5: Der Logarithmus wurde ursprünglich eingeführt, um das Multiplizieren auf das einfachere Addieren zurückzuführen, d. h. geometrische Folgen $\{1, q, q^2, q^3, \dots\}$ auf arithmetische Folgen $\{0, p, 2p, 3p, \dots\}$. Erste Ideen hierzu stammen von Stifel³. Die systematische Begründung der Logarithmen durch Umkehrung der Exponentialfunktion erscheint zum ersten mal in Eulers Lehrbuch „Introductio in Analysin Infinitorum“ (1748).

Zur Berechnung des Produkts xx' zweier Zahlen $x, x' \in \mathbb{R}_+$ werden ausgehend von der Beziehung (4.3.19) zunächst $\log_a(x)$ und $\log_a(x')$ einer „Logarithmentafel“ entnommen, dann die Summe $y = \log_a(x) + \log_a(x')$ gebildet und schließlich der Wert $xx' = e^y$ wieder aus der Logarithmentafel abgelesen. Da eine Tafel natürlich den Logarithmus nur für endlich viele Argumente enthalten kann, müssen eventuell benötigte Zwischenwerte durch Interpolation der Nachbarwerte gewonnen werden.

Bemerkung 4.6: Die obige Definition allgemeiner Potenzen erlaubt es, Ausdrücke so exotischer Art wie z. B.

$$e^\pi, \quad \pi^e := e^{e \ln(\pi)}$$

zu bilden. Eine grobe Abschätzung liefert $21 < e^\pi$, $\pi^e < 24$, aber welche dieser „supertranszendenten“ Zahlen ist die größere von beiden? (Übungsaufgabe)

³Michael Stifel (1487–1567): Deutscher Theologe und Mathematiker; seit 1522 Anhänger Luthers; wirkte in Königsberg und Jena; Beiträge zur Zahlentheorie und Algebra.

Zum asymptotischen Verhalten der reellen Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus gelten die folgenden Aussagen:

Lemma 4.8: Auf \mathbb{R} gilt für beliebig großes $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{e^x}{x^n} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty), \quad \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty). \quad (4.3.21)$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Aus der Definition über die Exponentialreihe folgt

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und somit

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty).$$

Die Substitution $y := \sqrt[n]{\ln(x)}$, für $x \geq 1$, bzw. $x = e^{y^n}$ ergibt für $y > n$:

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = \frac{y^n}{\sqrt[n]{e^{y \dots y}}} \leq \frac{y^n}{\sqrt[n]{e^{ny}}} = \frac{y^n}{e^y} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty),$$

womit die zweite Beziehung folgt.

Q.E.D.

Anwendung 4.3.3: Wir betrachten unendliche Produkte der Form

$$\rho_\infty = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) \quad (4.3.22)$$

mit Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$. Dazu gilt das folgende Resultat: *Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergiert die Folge der Produkte $\prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ gegen einen Limes*

$$\rho_\infty := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \neq 0. \quad (4.3.23)$$

O.B.d.A. betrachten wir den Fall, dass $|a_k| \leq \frac{1}{2}$ für alle k . Dann gilt $|\ln(1 + a_k)| \leq 2|a_k|$ (Übungsaufgabe). Es folgt dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$ ebenfalls absolut konvergiert. Wegen

$$\rho_n := \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k)\right)$$

und der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt weiter, dass die Folge $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen $e^s > 0$ mit $s := \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$. Dies impliziert die Richtigkeit der Behauptung.

4.3.3 Die trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ und $\cot(x)$ werden im Folgenden auf geometrischem, an vertraute Vorstellungen aus der Schule anknüpfendem Wege eingeführt. Die enge Beziehung zur komplexen Exponentialfunktion erlaubt eine streng analytische Ableitung ihrer wichtigsten Eigenschaften.

Die Exponentialfunktion $e^z = \exp(z)$ ist für beliebiges komplexes Argument $z \in \mathbb{C}$ über die absolut konvergente Reihe

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definiert. Ausgangspunkt ist nun die Beobachtung, dass für reelle Argumente x gilt:

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{i\overline{x}} = e^{ix} e^{-ix} = e^{ix} e^{-ix} = 1,$$

d. h. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ liegt die komplexe Zahl e^{ix} auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene.

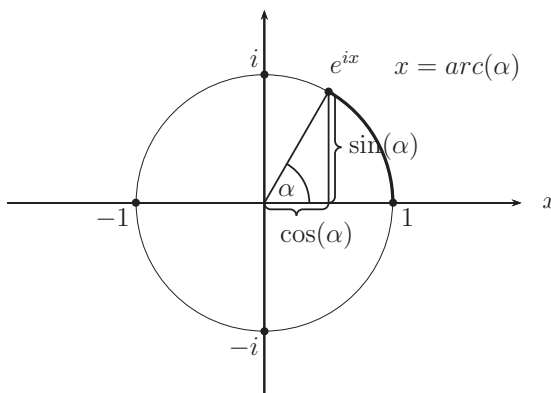


Abbildung 4.13: Geometrische Definition von Sinus und Cosinus.

Bemerkung 4.7: Wir werden später sehen, dass dem Argument x in obigem Bild gerade die „Länge“ des Einheitskreisbogens von Null bis zum Punkt e^{ix} (im Gegenuhrzeigersinn gemessen) entspricht. Dabei ist der Begriff der „Länge“ einer Kurve noch mathematisch präzise zu definieren. Dies ist bei genauer Betrachtung selbst für Geradenstücke, z. B. den Kanten eines Dreiecks, nicht ganz evident. Die naheliegende Verwendung des „Abstands“ der beiden Endpunkte des Geradenstücks erfordert einen „Abstandsbegriff“ für Punkte in der euklidischen Ebene; dafür kann z. B. der natürliche „euklidische Abstand“ von Punkten $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ (in Koordinatenschreibweise),

$$\text{dist}_2(x, y) := (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{1/2}$$

verwendet werden, doch ist dies nicht die einzige Möglichkeit. Alternativen wären z. B.

$$\text{dist}_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad \text{dist}_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Den „euklidische Abstand“ $\text{dist}_2(\cdot, \cdot)$ zeichnet dabei seine Drehinvarianz (d. h. Unabhängigkeit von der Orientierung des verwendeten Koordinatensystems) aus, so dass nur er für eine sinnvolle Längenmessung in der euklidischen Ebene in Frage kommt.

Die klassische Definition des reellen „Sinus“ als Verhältnis der Länge der Gegenkathete zu dem der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck legt im Hinblick auf Abb. 4.13 nun folgende Definition nahe:

Definition 4.9: Die Sinus- und die Cosinus-Funktion sind für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sin(x) := \text{Im } e^{ix} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) := \text{Re } e^{ix} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (4.3.24)$$

Dies ergibt per Definition für $x \in \mathbb{R}$ die sog. „Eulersche Formel“

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (4.3.25)$$

sowie die speziellen Funktionswerte

$$\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1. \quad (4.3.26)$$

Aus der analytischen Definition erhalten wir die anschaulich klare Antisymmetrie des Sinus und die Symmetrie des Cosinus:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} = -\sin(-x), \quad (4.3.27)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} = \cos(-x). \quad (4.3.28)$$

Ferner folgt aus

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \quad (4.3.29)$$

notwendig

$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1. \quad (4.3.30)$$

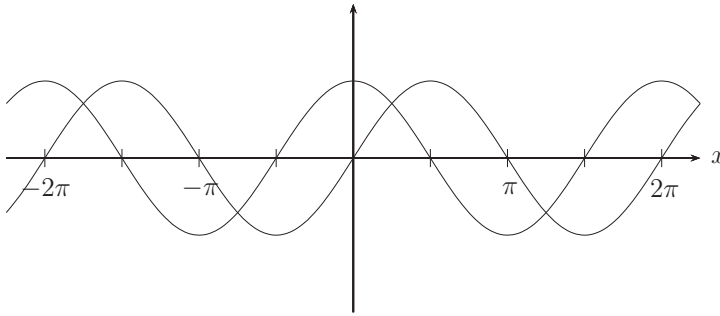


Abbildung 4.14: Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktionen.

Fundamental wichtig für das Folgende sind die sog. „Additionstheoreme“ für Sinus und Cosinus:

Lemma 4.9: *Für die Sinus- und Cosinus-Funktion gelten die Identitäten*

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y), \quad (4.3.31)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y). \quad (4.3.32)$$

Beweis: Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

erhalten wir mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ die Identität

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= (\cos(x) + i \sin(x)) (\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= (\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)) + i (\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)). \end{aligned}$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt dann die behauptete Identität für das + Zeichen. Die entsprechende Aussage für das -- Zeichen ergibt sich durch Übergang von y zu $-y$ und Verwendung der Beziehungen $\sin(y) = -\sin(-y)$ und $\cos(y) = \cos(-y)$.
Q.E.D.

Korollar 4.4: *Aus den Identitäten in Lemma 4.9 ergeben sich die folgenden weiteren Formeln für den Sinus und Cosinus zum doppelten oder halben Argument:*

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \quad (4.3.33)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \quad (4.3.34)$$

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x)), \quad (4.3.35)$$

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x)), \quad (4.3.36)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right), \quad (4.3.37)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right). \quad (4.3.38)$$

Beweis: i) Setzt man in den Additionstheoremen $x = y$, ergeben sich (4.3.33) und (4.3.34).

ii) Aus (4.3.34) für $\frac{1}{2}x$ erhält man durch einfache Umformung dann auch (4.3.35) und (4.3.36):

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x)), \\ \cos(x) &= \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x)).\end{aligned}$$

iii) Anwendung der Additionstheoreme mit den Argumenten $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ sowie $y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y)$ ergibt

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) + \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right), \\ \sin(y) &= \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) - \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right), \\ \cos(x) &= \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right), \\ \cos(y) &= \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) + \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right).\end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der ersten und der vierten von der dritten dieser Identitäten führt auf (4.3.37) und (4.3.38). Q.E.D.

Lemma 4.10: Die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf ganz \mathbb{R} stetig (und dort sogar gleichmäßig stetig)

Beweis: Die Stetigkeit von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ folgt wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion aus Lemma 4.2. Die gleichmäßige Stetigkeit ergibt sich mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin(x) &= \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x) \\ &= \sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 4.11: Für die Sinus- und Cosinus-Funktion bestehen die folgenden absolut konvergenten Potenzreihendarstellungen:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots, \quad (4.3.39)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \quad (4.3.40)$$

Für die „Restglieder“ in den Summendarstellungen

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x), \quad (4.3.41)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x), \quad (4.3.42)$$

gelten die Abschätzungen

$$|r_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad |x| \leq 2n+4, \quad (4.3.43)$$

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad |x| \leq 2n+3. \quad (4.3.44)$$

Beweis: i) Die absolute Konvergenz dieser Reihen folgt unmittelbar aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe, welche eine Majorante ist. Durch Aufspaltung der Exponentialreihe für e^{ix} in Real- und Imaginärteil erhalten wir ($i^2 = -1$):

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(i^2)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Wegen der eindeutigen Bestimmtheit von Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen folgen die behaupteten Identitäten.

ii) Zum Nachweis der Abschätzungen für das Restglied der Cosinus-Entwicklung schreiben wir

$$r_{2n+2}(x) = \pm \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} + \dots \right)$$

und erhalten

$$r_{2n+2}(x) = \pm \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} (1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots),$$

wobei

$$a_k := \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4) \cdot \dots \cdot (2n+2(k+1))}.$$

Da

$$a_k = a_{k-1} \frac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a_0 := 1,$$

ist $1 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > 0$, für $|x| \leq 2n+3$. Wie beim Beweis des Leibnizschen Konvergenzkriteriums folgt daraus

$$0 < \underbrace{1 - a_1}_{> 0} + \underbrace{a_2 - a_3}_{> 0} + \underbrace{a_4 - a_5}_{> 0} + \dots = 1 - \underbrace{a_1 + a_2}_{< 0} - \underbrace{a_3 + a_4}_{< 0} - \underbrace{a_5 + a_6}_{< 0} - \dots < 1.$$

Deswegen ist

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Die Abschätzung für das Restglied des Sinus wird analog bewiesen.

Q.E.D.

Bemerkung 4.8: Wir werden später sehen, dass die obigen Abschätzungen für die Restglieder sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig sind. Mit Hilfe ihrer absolut konvergenten Reihendarstellungen lassen sich die Sinus- und Cosinus-Funktionen auch für komplexe Argumente erklären. Dies wird im Folgenden aber nicht benötigt.

Korollar 4.5: *Die Sinus- und Cosinus-Funktionen haben das folgende Verhalten:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (4.3.45)$$

Beweis: Mit den Reihendarstellungen in Lemma 4.11 gilt für $x \neq 0$ mit $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| &= \left| x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} \right| \leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \leq |x|e, \\ \left| \frac{\cos(x) - 1}{x} \right| &= \left| x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-2}}{(2k)!} \right| \leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \leq |x|e. \end{aligned}$$

Für den Grenzprozess $|x| \rightarrow 0$ folgt die Behauptung.

Q.E.D.

Das Hauptproblem bei der Diskussion der trigonometrischen Funktionen ist die Verwendung der Zahl π , deren klassische Definition sich der geometrischen Begriffe „Kreisbogen“ und „Bogenlänge“ bedient. Im Folgenden wird π nun unabhängig von der geometrischen Interpretation des Sinus und Cosinus auf rein analytischem Wege eingeführt.

Lemma 4.12: *Die Cosinus-Funktion hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle, welche mit $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet wird.*

Beweis: i) Wir zeigen zunächst die Abschätzung $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$. Mit Lemma 4.11 ist:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + r_4(x), \quad |r_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{24}, \quad |x| \leq 5.$$

Speziell für $x = 2$ ergibt sich

$$\cos(2) = 1 - 2 + r_4(2), \quad |r_4(2)| \leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3},$$

bzw. $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, wie behauptet. Wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$ besitzt $\cos(x)$ nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $[0, 2]$ mindestens eine Nullstelle.

ii) Als nächstes zeigen wir, daß $\sin(x) > 0$, für $0 < x \leq 2$. Für $x \neq 0$ schreiben wir

$$\sin(x) = x + r_3 = x \left(1 + \frac{r_3(x)}{x} \right).$$

Mit Lemma 4.11 folgt für $0 < x \leq 2$:

$$\left| \frac{r_3(x)}{x} \right| \leq \frac{|x|^2}{6} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

bzw.

$$\sin(x) \geq x \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{x}{3} > 0.$$

iii) Schließlich zeigen wir, dass die Funktion $\cos(x)$ im Intervall $[0, 2]$ strikt monoton fallend ist. Sei $0 \leq y < x \leq 2$. Dann folgt mit dem eben Gezeigten und den Identitäten in Korollar 4.4 (wegen $0 < \frac{1}{2}(x+y) < 2$ und $0 < \frac{1}{2}(x-y) < 2$):

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \underbrace{\sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)}_{> 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)}_{> 0} < 0.$$

Aufgrund der strikten Monotonie von $\cos(x)$ auf $[0, 2]$ gibt es dort also nur die eine, mit $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnete Nullstelle. Q.E.D.

Korollar 4.6: Die komplexe Exponentialfunktion hat die speziellen Werte

$$e^{\frac{1}{2}i\pi} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}i\pi} = -i, \quad e^{2i\pi} = 1. \quad (4.3.46)$$

Die reelle Sinus- und die Cosinus-Funktion haben die speziellen Werte

$$\sin(0) = 0, \quad \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1, \quad \sin(2\pi) = 0, \quad (4.3.47)$$

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0, \quad \cos(2\pi) = 1. \quad (4.3.48)$$

Beweis: i) Zunächst gilt:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \quad \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1.$$

Wegen $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, 2]$ ist also $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$. Dies ergibt

$$e^{\frac{1}{2}i\pi} = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = i.$$

Die restlichen Behauptungen in (4.3.46) ergeben sich dann hieraus über $e^{\frac{1}{2}in\pi} = i^n$.

(ii) Aus der Definition ergab sich bereits $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. Ferner wurde bereits gezeigt, daß $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$. Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt weiter

$$\begin{aligned} \sin(\pi) &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \\ \cos(\pi) &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1, \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \sin(\pi) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos(\pi) \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1, \\ \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \cos(\pi) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin(\pi) \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \\ \sin(2\pi) &= 2 \sin(\pi) \cos(\pi) = 0, \\ \cos(2\pi) &= \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi) = 1. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Dies erlaubt es nun, die restlichen, wichtigsten Eigenschaften von Sinus und Cosinus abzuleiten, insbesondere ihre 2π -Periodizität und ihre Nullstellen.

Korollar 4.7: *Sinus und Cosinus genügen auf ganz \mathbb{R} den Beziehungen:*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad (4.3.49)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad (4.3.50)$$

$$\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(x), \quad \cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin(x). \quad (4.3.51)$$

Die Nullstellen von Sinus und Cosinus sind gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: i) Aus den Additionstheoremen in Lemma 4.9 folgt bei Beachtung der obigen speziellen Funktionswerte von Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \cos(x) \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} = \sin(x), \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \sin(x) \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} = \cos(x). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= \sin(x) \cos(\pi) + \cos(x) \sin(\pi) = -\sin(x), \\ \cos(x + \pi) &= \cos(x) \cos(\pi) - \sin(x) \sin(\pi) = -\cos(x), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sin(x + \frac{1}{2}\pi) &= \sin(x) \cos(\frac{1}{2}\pi) + \cos(x) \sin(\frac{1}{2}\pi) = \cos(x), \\ \cos(x + \frac{1}{2}\pi) &= \cos(x) \cos(\frac{1}{2}\pi) - \sin(x) \sin(\frac{1}{2}\pi) = -\sin(x). \end{aligned}$$

ii) Die Nullstellen von Sinus und Cosinus ergeben sich wie folgt. Nach Definition von $\frac{1}{2}\pi$ und wegen $\cos(x) > 0$ auf $[0, \frac{1}{2}\pi)$ (s. Beweis von Lemma 4.12) sowie $\cos(-x) = \cos(x)$ ist $\cos(x) > 0$ auf $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Folglich sind $\pm\frac{1}{2}\pi$ die einzigen Nullstellen des Cosinus im Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Die Beziehung $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ impliziert dann die behauptete Nullstellenverteilung des Cosinus. Die entsprechende Aussage für den Sinus folgt aus der Beziehung $\cos(x) = -\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$. Q.E.D.

Bemerkung 4.9: Ausgehend von der komplexen Exponentialfunktion haben wir nun praktisch alle wichtigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen abgeleitet, ohne von der geometrischen Anschauung Gebrauch zu machen. Der „Umweg“ über das Komplexe erweist sich dabei als ausgesprochen fruchtbar. Es ergeben sich Einsichten in Zusammenhänge, die rein im Reellen nicht sichtbar sind; z. B. folgt aus der Eulerschen Formel (4.3.25) durch Spezialisierung auf $x = \pi$ die Beziehung

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (4.3.52)$$

welche auf erstaunlich einfache Weise die Fundamentalzahlen $0, 1, e, \pi, i$ verbindet.

Definition 4.10: Mit Hilfe der Sinus- und Cosinus-Funktionen werden die „Tangens- und Cotangens-Funktionen“ erklärt durch

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}. \quad (4.3.53)$$

Diese sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, in denen der Cosinus bzw. der Sinus nicht Null sind, d. h. auf $D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ bzw. $D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Der Tangens und der Cotangens sind auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig.

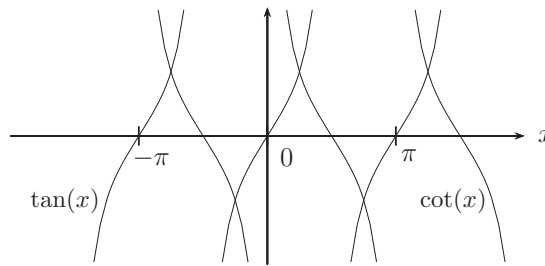


Abbildung 4.15: Graphen der Tangens- und Kotangens-Funktionen.

Bemerkung 4.10: Neben den durch Definition 4.9 eingeführten trigonometrischen Funktionen spielen in vielen Anwendungen die sog. „hyperbolischen Funktionen“ (Sinus hyperbolicus, Cosinus hyperbolicus, Tangens hyperbolicus, Cotangens hyperbolicus) eine Rolle. Diese sind definiert durch:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (4.3.54)$$

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)}. \quad (4.3.55)$$

Für diese gelten ähnliche Beziehungen wie für die trigonometrischen Funktionen, z. B.:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad (4.3.56)$$

und

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y), \quad (4.3.57)$$

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y). \quad (4.3.58)$$

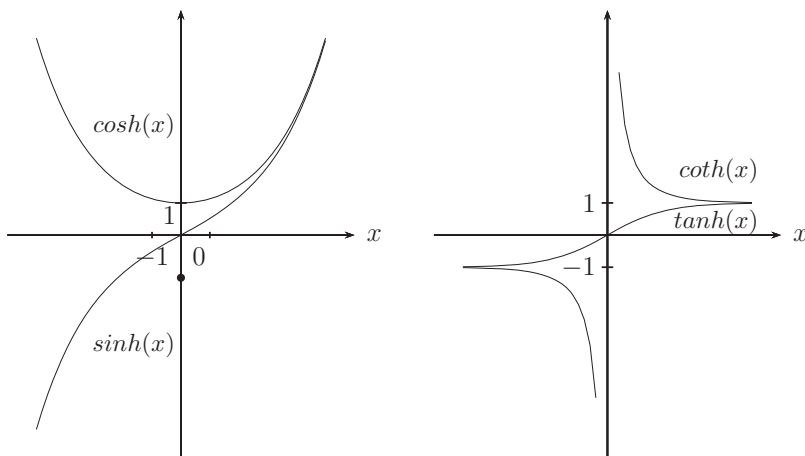


Abbildung 4.16: Graphen der hyperbolischen Funktionen Sinus hyperbolicus, Cosinus hyperbolicus, Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus.

Die Arcus-Funktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind die sog. „Arcus-Funktionen“. Wegen der Schranke

$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1, \quad (4.3.59)$$

können die Umkehrfunktionen von Sinus und Cosinus nur auf dem Intervall $B = [-1, 1]$ definiert sein und sind wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus zwangsläufig mehrdeutig. Beschränkt man sich aber auf geeignete Teilintervalle von \mathbb{R} , so lassen sich Umkehrfunktionen eindeutig definieren.

Definition 4.11: *i) Die Sinus-Funktion ist im Intervall $D = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ streng monoton steigend und bildet dieses Intervall bijektiv auf das Intervall $B = [-1, 1]$ ab; ihre Umkehrfunktion*

$$\arcsin(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \quad (4.3.60)$$

heißt „Arcus-Sinus“.

ii) Die Cosinus-Funktion ist im Intervall $D = [0, \pi]$ streng monoton fallend und bildet dieses Intervall bijektiv auf das Intervall $B = [-1, 1]$ ab; ihre Umkehrfunktion

$$\arccos(\cdot) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \quad (4.3.61)$$

heißt „Arcus-Cosinus“.

iii) Die Tangens-Funktion ist im Intervall $D = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ streng monoton steigend und bildet dieses Intervall bijektiv auf ganz \mathbb{R} ab; ihre Umkehrfunktion

$$\arctan(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \quad (4.3.62)$$

heißt „Arcus-Tangens“.

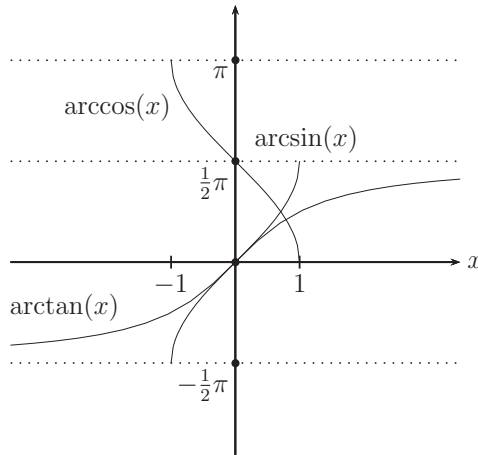


Abbildung 4.17: Graphen („Hauptzweige“) des Arcus-Sinus, Arcus-Cosinus und Arcus-Tangens.

Lemma 4.13: i) Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form („Polardarstellung“)

$$z = |z|e^{i\alpha}, \quad \alpha \in [0, 2\pi). \quad (4.3.63)$$

ii) Für $|z| = 1$ liegt die Zahl $z = e^{i\alpha}$ auf dem Einheitskreis $K_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der komplexen Zahlenebene, und die Abbildung

$$\varphi : [0, 2\pi) \rightarrow K_1 : \quad \varphi(\alpha) = e^{i\alpha} \quad (4.3.64)$$

ist bijektiv.

iii) Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Nullstellen des sog. „Kreisteilungspolynoms“ $p_n(z) = z^n - 1$ gegeben durch

$$\xi_k := e^{k2\pi i/n} = \cos(k2\pi/n) + i \sin(k2\pi/n), \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.3.65)$$

Diese sog. „ n -te Einheitswurzeln“ $\xi_k = \xi_1^k$ liegen auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene und sind alle verschieden.

Beweis: i) Sei zunächst $\operatorname{Im} z \geq 0$. Wir setzen

$$\xi + i\eta := \frac{z}{|z|}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und $\eta = |z|^{-1} \operatorname{Im} z \geq 0$. Wir setzen weiter

$$\alpha := \arccos(\xi).$$

Dann ist $\alpha \in [0, \pi]$, und es gilt $\cos(\alpha) = \xi$ und $\sin(\alpha) \geq 0$. Wegen $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und $\eta \geq 0$ folgt $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \xi^2} = \eta$. Damit haben wir

$$\xi + i\eta = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = e^{i\alpha}, \quad z = |z|e^{i\alpha}.$$

Der Fall $\operatorname{Im} z < 0$ wird durch Betrachtung von $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ auf den eben behandelten zurückgeführt. Aus der dafür gefundenen Darstellung $\bar{z} = |\bar{z}|e^{i\alpha} = |z|e^{i\alpha}$ erhalten wir

$$z = \overline{|z|e^{i\alpha}} = |z|e^{-i\alpha}.$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit dieser Polardarstellung nehmen wir an, dass es eine zweite gibt: $z = |z|e^{i\alpha'}$, $\alpha' \in [0, 2\pi)$. Dann ist $1 = zz^{-1} = e^{i(\alpha - \alpha')}$. Wir erinnern an die Beziehung

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}}{2i} = \frac{e^{-i\frac{1}{2}x}}{2i}(e^{ix} - 1)$$

und die Nullstellenmenge $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ des Sinus. Es muss also $\alpha - \alpha' = 2k\pi$ sein mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\alpha, \alpha' \in [0, 2\pi)$ folgt $\alpha = \alpha'$.

ii) Jeder Punkt (ξ, η) auf dem Einheitskreis K_1 repräsentiert eine komplexe Zahl $z := \xi + i\eta$ mit Realteil $\operatorname{Re} z = \xi$ und Imaginärteil $\operatorname{Im} z = \eta$. Wegen $|z| = 1$ hat diese die Polardarstellung $z = e^{i\alpha}$ mit einem (eindeutig bestimmten) $\alpha \in [0, 2\pi)$. Umgekehrt gilt $|e^{i\alpha}| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1$, d. h.: Die komplexe Zahl $e^{i\alpha}$ liegt auf dem Einheitskreis K_1 .

iii) Zum Nachweis von (4.3.67) notieren wir zunächst, dass die für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n$ definierten Zahlen

$$z_k := e^{k2\pi i/n} = \cos(k2\pi/n) + i \sin(k2\pi/n)$$

die folgende Gleichung erfüllen:

$$z_k^n = e^{k2\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1,$$

d. h.: Die z_k sind n -te Einheitswurzeln. Von diesen gibt es genau n Stück, da das Polynom $p(z) = z^n - 1$ vom Grad $\gamma(p) = n$ höchstens n Nullstellen haben kann, und die z_k nach dem eben Gezeigten alle verschieden sind. Q.E.D.

Bemerkung 4.11: Die „Polardarstellung“ komplexer Zahlen ist manchmal nützlich zur Beschreibung von Punkten der (x, y) -Ebene. Sie erlaubt u. a. eine einfache, geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation: Für zwei Zahlen $x = |x|e^{i\alpha}$ und $y = |y|e^{i\beta}$ ist das Produkt

$$xy = |x| |y| e^{i(\alpha + \beta)} \tag{4.3.66}$$

offenbar eine „Drehstreckung“ in der komplexen Ebene.

Korollar 4.8: Die Sinus- und die Cosinus-Funktionen haben die speziellen Werte

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (4.3.67)$$

Beweis: Die 3-ten Einheitswurzeln $e^{k2\pi i/3}$, $k = 1, 2, 3$, haben nach Korollar 2.3 die Gestalt

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Der Identität

$$e^{2\pi i/3} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right), \quad k = 1, 2, 3,$$

entnehmen wir durch Vergleich der Real- und Imaginärteile und Beachtung von $\sin(x) \geq 0$ auf $[0, \pi]$, dass

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Mit Hilfe der Formeln in Korollar 4.4 für Sinus und Cosinus am halben Argument, $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$ und $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$, ergibt sich dann bei Beachtung von $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \geq 0$ und $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right) &= \frac{1}{2}(1 - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)) = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \cos^2\left(\frac{1}{3}\pi\right) &= \frac{1}{2}(1 + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung der Formeln aus Korollar 4.4 liefert dann die gewünschten Aussagen für das Argument $\frac{1}{6}\pi$:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) &= \frac{1}{2}(1 - \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}, \\ \cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) &= \frac{1}{2}(1 + \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Anwendung 4.3.4 (Berechnung von π): Die Zahl π ist klassisch definiert als das Verhältnis

$$\pi = \frac{U}{D} = 3, 141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643 \dots$$

von Umfang $U = 2\pi R$ zum Durchmesser $D = 2R$ eines Kreises mit Radius R . In der modernen Analysis wird diese geometrische Beschreibung durch die Definition von $\pi/2$ als Nullstelle der Cosinus-Funktion im Intervall $[0, 2]$ ersetzt, was natürlich dieselbe Zahl ergibt. Ausgehend von der geometrischen Definition kann π mit der halben „Länge“ des Einheitskreises (aufgefasst als Kreislinie) identifiziert werden. Zur Erklärung des Begriffes „Länge“ des Kreises bedient man sich der Approximation desselben durch einbeschriebene und umbeschriebene reguläre Polygonzüge, wobei die Länge eines Polygonzugs als intuitiv klar angenommen wird.

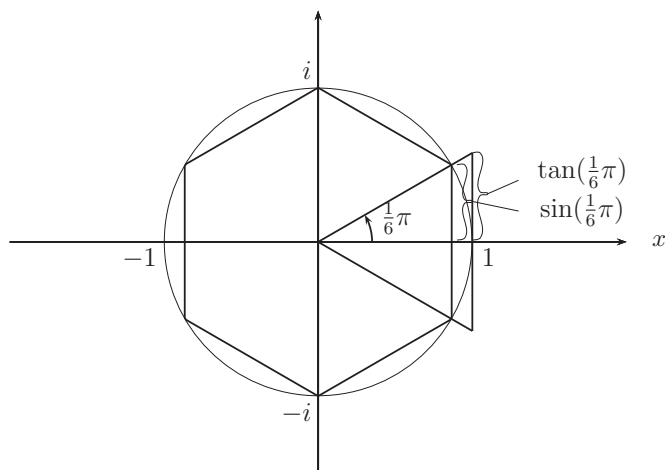


Abbildung 4.18: Polygonapproximation des Kreisbogens.

Für das einbeschriebene halbe n -Eck mit Länge T_n und sein umbeschriebenes Gegenstück mit Länge U_n gilt

$$T_n = n \sin(\pi/n) < \pi < n \tan(\pi/n) = U_n. \quad (4.3.68)$$

Die beiden Folgen $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden dann eine Einschachtelung von π . Zur Rechnung dient unter Ausnutzung von $T_2 = 2 \sin(\frac{1}{2}\pi) = 2$ oder $T_6 = 6 \sin(\frac{1}{6}\pi) = 3$ die rekursive Beziehung (Beweis Übungsaufgabe)

$$T_{2n} = \sqrt{2n^2 - 2n\sqrt{n^2 - T_n^2}}, \quad n \geq 2. \quad (4.3.69)$$

Schon Archimedes (287-212 v. Chr.) gewann so für $n = 96$ die Näherung

$$3,1408\dots = 3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7} = 3,14285\dots$$

Durch Mittelung dieser Schranken erhielt Ptolemaios (150 n.Chr.) $\pi \approx 3,14166$. Lin Hui (263 n.Chr.) erhielt für $n = 3072$ den Wert $\pi \approx 3,14159$ und Al-Kasi (1427) für $n = 3 \cdot 2^{28}$ den auf 17 Stellen genauen Wert $\pi \approx 3.1415926535897932$. Ludolph van Ceulen (1600) berechnete für $n = 3 \cdot 2^{60}$ bereits 35 exakte Stellen; nach ihm wird π auch oft die „Ludolphsche Zahl“ genannt. Von Huygens⁴ stammt der Trick, eine Linearkombination der Polygonzugnäherungen zu verwenden:

$$\pi \approx S_n = \frac{1}{3}(4T_n - T_{n/2}). \quad (4.3.70)$$

⁴Christiaan Huygens (1629–1695): Niederländischer Mathematiker, Astronom und Konstrukteur; lieferte wichtige Beiträge zur Analysis und Variationsrechnung; entwickelte das erste brauchbare Teleskop (1654) und die Pendeluhr (1665).

Für $n = 96$ erhält man so den deutlich verbesserten Wert $\pi \approx S_{96} = 3,141592$. Dahinter steht das sog. „Prinzip der Extrapolation zum Limes“, welches eines der wichtigsten Hilfsmittel beim praktischen Rechnen in der Analysis darstellt (\rightarrow *Numerik*). Durch die Linearkombination wird einfach der führende Fehlerterm $\frac{\pi^3}{3!}h^2$ in der folgenden Reihendarstellung des Sinus eliminiert:

$$T(h) = \frac{1}{h} \sin(h\pi) = \pi - \frac{\pi^3}{3!}h^2 + \frac{\pi^5}{5!}h^4 - \dots + (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}h^{2k} + \dots, \quad (4.3.71)$$

so dass ein Fehler der höheren Ordnung h^4 verbleibt.

4.4 Konvergenz von Funktionenfolgen

Analog zu Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen und ihrer Konvergenz betrachten wir nun Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellen Funktionen und ihre Konvergenzeigenschaften.

Definition 4.12: Seien $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Wir nennen die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ „punktweise konvergent“ gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.4.72)$$

Die Situation, dass eine gegebene Folge von Funktionen gegen eine Grenzfunktion konvergiert, bzw. dass eine gegebene Funktion durch eine Folge von Funktionen „approximiert“ wird, ist typisch für die Anwendungen der Analysis in der mathematischen Modellbildung und numerischen Simulation. Z. B. stellen die Partialsummen der Exponentialreihe Approximationen der Exponentialfunktion dar, d. h.: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad (n \rightarrow \infty).$$

In diesem Fall sind die approximierenden Funktionen (als Polynome) natürlich stetig, und die Grenzfunktion e^x ist es auch. Betrachten wir dagegen die Funktionen

$$f_n(x) = 1 - x^n, \quad x \in [0, 1] \subset \mathbb{R},$$

so gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

wobei die Grenzfunktion $f(x)$ nicht stetig ist. Es stellt sich also die Frage: „*Welche Bedingungen sind zu stellen, damit für eine konvergente Folge stetiger Funktionen auch die Grenzfunktion wieder stetig ist?*“ Dies gehört zu den zentralen Fragen der Analysis nach der „Stabilität“ von Eigenschaften von Funktionen gegenüber Störungen.

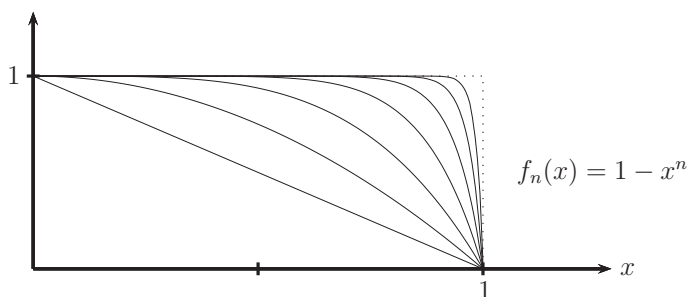


Abbildung 4.19: Graphen einer Folge nicht gleichmäßig konvergenter Funktionen.

Im obigen Beispiel mit unsetziger Grenzfunktion wird die Konvergenz

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

der approximierenden Funktionen bei Annäherung an die Stelle $x = 1$ immer langsamer, was das Problem zu verursachen scheint. Diese Beobachtung gibt Anlass zu der folgenden Definition.

Definition 4.13: Eine Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt „gleichmäßig konvergent“ gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D. \quad (4.4.73)$$

Satz 4.6 (Satz von der gleichmäßigen Konvergenz): Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, so ist auch die Grenzfunktion f stetig.

Beweis: Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Da f_n stetig ist, existiert weiter ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ gilt:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Dann folgt für alle solche $x \in D$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \varepsilon,$$

d. h.: Die Funktion f ist stetig in x_0 .

Q.E.D.

Bemerkung 4.12: Diese Aussage von Satz 4.6 überträgt sich auch auf Reihen von stetigen Funktionen $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Wenn die Partialsummen $\sum_{k=1}^n f_k$ gleichmäßig konvergieren, so ist ihr Limes $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ wieder eine stetige Funktion.

4.5 Der Funktionenraum $C[a, b]$

Nach Lemma 4.2 bilden die stetigen Funktionen auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $D = [a, b]$ einen Vektorraum. Auf diesem wird durch

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

eine Norm, die sog. „Maximumnorm“ erklärt; das Maximum existiert wegen der Stetigkeit des Absolutbetrags auf dem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Der so entstehende normierte Vektorraum wird mit $C[a, b]$ bezeichnet:

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}.$$

Die Normeigenschaften von $\|\cdot\|_{\infty}$ als Abbildung von $C[a, b]$ nach $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften des Absolutbetrags:

$$(N1) \quad \|f\|_{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (\text{Definitheit})$$

$$(N2) \quad \|\alpha f\|_{\infty} = |\alpha| \|f\|_{\infty}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{Homogenität}),$$

$$(N3) \quad \|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Mit Hilfe der Norm $\|\cdot\|_{\infty}$ wird auf $C[a, b]$ eine sog. „Normkonvergenz“, in diesem Fall die „gleichmäßige Konvergenz“, definiert durch:

$$f_n \rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty) \quad :\Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.5.74)$$

Lemma 4.14: Für eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $D = [a, b]$ ist die gleichmäßige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit

$$\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.5.75)$$

Beweis: Der Beweis ist evident.

Q.E.D.

Auf $C[a, b]$ wird analog zu \mathbb{R} der Begriff der Cauchy-Folge eingeführt.

Definition 4.14 (Cauchy-Folge): Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C[a, b]$ heißt „Cauchy-Folge“, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (4.5.76)$$

Lemma 4.15: Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C[a, b]$, welche gegen eine Grenzfunktion $f \in C[a, b]$ konvergiert, ist automatisch eine Cauchy-Folge.

Beweis: Der Beweis verläuft analog wie der entsprechende für konvergente Zahlenfolgen. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty$, womit sich direkt die Behauptung ergibt. Q.E.D.

Satz 4.7 (Satz von der Vollständigkeit): Der Raum $C[a, b]$ ist „vollständig“ bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz; d. h.: Jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $C[a, b]$ besitzt einen Limes in $C[a, b]$.

Beweis: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C[a, b]$. Dann ist für jedes feste $x \in [a, b]$ auch die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und besitzt folglich einen (eindeutig bestimmten) Limes $f(x) \in \mathbb{R}$, d. h.:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty), \quad x \in [a, b].$$

Dies definiert eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann gäbe es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in [a, b]$, so dass

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon.$$

Wegen der Beschränktheit des Intervalls $[a, b]$ und damit der Punktfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt diese nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Limes $x \in [a, b]$. Wegen der Cauchy-Folgeneigenschaft gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für $m \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$\|f_{n_\varepsilon} - f_m\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Wegen der Konvergenz $f_m(x_{n_\varepsilon}) \rightarrow f(x_{n_\varepsilon})$ ($m \rightarrow \infty$) gibt es ein $m_\varepsilon \geq n_\varepsilon$, so dass

$$|f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Damit erschließen wir

$$|f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| \leq \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon})|}_{< \frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{|f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})|}_{< \frac{1}{2}\varepsilon} < \varepsilon,$$

im Widerspruch zu obiger Annahme. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gleichmäßig gegen f . Nach Satz 4.6 ist f stetig; d. h.: $f \in C[a, b]$. Q.E.D.

Vollständige normierte Vektorräume werden „Banach⁵-Räume“ genannt. Der Funktionenraum $C[a, b]$ ist also ein solcher Banach-Raum. Der folgende Satz von Arzelà⁶-Ascoli⁷ bedeutet für den Funktionenraum $C[a, b]$ das, was der Satz von Bolzano-Weierstraß für den Zahlenraum \mathbb{R} ist; er liefert Kriterien für die Existenz von Häufungswerten von Folgen. Wir beweisen ihn im Folgenden in einer etwas vereinfachten Form.

Satz 4.8 (Satz von Arzelà-Ascoli): Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C[a, b]$, welche „gleichmäßig beschränkt“ und zusätzlich „gleichgradig stetig“ sind:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty, \quad (4.5.77)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \max_{\substack{x, x' \in [a, b] \\ |x - x'| \leq \delta_\varepsilon}} |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon. \quad (4.5.78)$$

Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, welche gegen ein $f \in C[a, b]$ konvergiert, d. h.:

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (4.5.79)$$

Beweis: i) Sei $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die auf irgendeine Weise durchnummerierte Folge der rationalen Punkte in $[a, b]$. Für jedes r_k gilt nach Voraussetzung:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(r_k)| < \infty.$$

Durch sukzessive Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß gewinnen wir Existenz einer Folge von Teilfolgen $(n_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, mit den Eigenschaften:

- $(n_j^{(k+1)})_{j \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(n_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}}$.
- Die Folgen $(f_{n_j^{(k)}}(r_k))_{j \in \mathbb{N}}$ sind konvergent.

Gemäß dieser Konstruktion ist $(f_{n_j^{(k)}}(r_l))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergent für $l = 1, \dots, k$. Für die sog. „Diagonalfolge“ $(f_{n_k^{(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$ ist dann $(f_{n_k^{(k)}}(r_j))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{cccccc}
 \boxed{f_{n_1^{(1)}}} & f_{n_2^{(1)}} & f_{n_1^{(1)}} & \dots & f_{n_k^{(1)}} & \dots \\
 f_{n_1^{(2)}} & \boxed{f_{n_2^{(2)}}} & f_{n_1^{(2)}} & \dots & f_{n_k^{(2)}} & \dots \\
 f_{n_1^{(3)}} & f_{n_2^{(3)}} & \boxed{f_{n_3^{(3)}}} & \dots & f_{n_k^{(3)}} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 f_{n_1^{(k)}} & f_{n_2^{(k)}} & f_{n_3^{(k)}} & \dots & \boxed{f_{n_k^{(k)}}} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

⁵Stefan Banach (1892–1945): Polnischer Mathematiker; Prof. in Lvov; begründete die Funktionalanalysis.

⁶Cesare Arzelà (1847–1912): Italienischer Mathematiker in Bologna; lieferte Beiträge zur Analysis und Variationsrechnung.

⁷Giulio Ascoli (1843–1896): Italienischer Mathematiker in Parma; lieferte Beiträge zur Analysis und Variationsrechnung.

ii) Der Einfachheit halber bezeichnen wir die eben konstruierte Diagonalfolge wieder mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wollen ihre gleichmäßige Konvergenz auf $[a, b]$ zeigen. Nach Konstruktion konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in allen rationalen Punkten in $[a, b]$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für jedes $r_k \in [a, b]$ gibt es dann ein $n_\varepsilon(r_k) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(r_k) - f_m(r_k)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon(r_k).$$

Aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit der f_n gibt es ein δ_ε , so dass gilt:

$$x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(x')| \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Wir unterteilen nun das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, mit

$$a = x_0 < \dots < x_n = b, \quad \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| \leq \delta_\varepsilon.$$

Aus jedem I_k wählen wir ein $r_k \in \mathbb{Q}$. Für beliebiges $x \in I_k$ gilt dann für $n, m \geq n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon(r_1), \dots, n_\varepsilon(r_n)\}$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(r_k)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(r_k) - f_m(r_k)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_m(r_k) - f_m(x)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} < \varepsilon.$$

Dies bedeutet, dass für $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge im Banach-Raum $C[a, b]$. Wegen dessen Vollständigkeit existiert ein $f \in C[a, b]$, so dass $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$). Q.E.D.

4.6 Übungen

Übung 4.1 (Aufgabe zur Definition von Funktionen):

Man gebe für die Funktionen

$$a) \quad f(x) = \sqrt{2-x^2}, \quad b) \quad f(x) = \frac{1}{|x+1|}, \quad c) \quad f(x) = \sqrt{\min\{1, x^2\}}$$

die maximalen Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{R}$ an und skizzieren ihre Graphen.

Übung 4.2 (Aufgabe zur Stetigkeit):

a) Man zeige, dass die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind:

$$i) \quad f(x) := \min\{x, 1\}, \quad ii) \quad f(x) := |x|^q, \quad q \in \mathbb{Q}_+.$$

b) Man zeige, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1/s, & \text{für } x = r/s, \quad r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad s \in \mathbb{N} \text{ (teilerfremd)} \\ 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ unstetig ist.

Bemerkung: Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in allen $x \in \mathbb{Q}$ stetig und in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ unstetig ist.

Übung 4.3 (Aufgabe zur „gleichmäßigen“ und „Lipschitz-Stetigkeit“):

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt „Lipschitz-stetig“ (kurz „L-stetig“) mit „Lipschitz-Konstante“ $L \in \mathbb{R}_+$, wenn gilt:

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|, \quad x, x' \in D.$$

a) Man zeige, dass jede L-stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ gleichmäßig stetig ist.

b) Man zeige, dass die durch

$$f(x) := \sqrt{|1 - x|}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[0, 2]$ gleichmäßig stetig aber nicht L-stetig ist.

c) Man zeige, dass die durch

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

definierte Funktion $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $D = (0, 1]$ zwar stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Übung 4.4 (Aufgabe zur Stetigkeit):

Man zeige, dass sich die Aussagen der drei grundlegenden Sätze für stetige (reelle) Funktionen auf einem kompakten Intervall, nämlich der „Zwischenwertsatz“, der „Satz von der Beschränktheit“ und der „Satz vom Extremum“, äquivalent zusammengefaßt auch wie folgt formulieren lassen:

Für eine auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall definierte, stetige Funktion ist der Bildbereich wieder ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall.

(Hinweis: Der im Text angegebene „Beweisvorschlag“ kann als Grundlage der Argumentation verwendet werden, ist aber noch im Detail auszuarbeiten.)

Übung 4.5 (Aufgabe zur Umkehrfunktion):

Die durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 2 & \text{für } x < -2, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ x - 2 & \text{für } x > 2, \end{cases}$$

definierte Funktion $f : D_f := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv, so dass ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow D_f$ existiert. Man zeige, dass f stetig ist, aber f^{-1} nicht. Wieso widerspricht dies nicht dem Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion aus der Vorlesung?

Übung 4.6 (Aufgabe zum Zwischenwertsatz):

Wie sind „Nullstellen“ und „Fixpunkte“ von Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ definiert?

a) Man zeige, dass das reelle Polynom

$$p(x) = x^6 + x^2 + 4x - 5$$

im Intervall $I = [-1, 1]$ mindestens eine Nullstelle hat.

b) Man zeige, dass die durch

$$f(x) := 1 - \sqrt{\frac{e^{(x^2)} - 1}{e - x}}$$

definierte reelle Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mindestens einen Fixpunkt hat. (Hinweis: Man beachte, dass die Wurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion monoton ist.)

Übung 4.7 (Aufgabe zu periodischen Funktionen):

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „periodisch“ mit Periode $\omega \neq 0$, wenn für alle $x \in D$ auch $x + \omega \in D$ ist und $f(x) = f(x + \omega)$ gilt.

a) Man setze die durch

$$f(x) := x$$

definierte Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer auf ganz \mathbb{R} definierten, stetigen und periodischen Funktion f mit Periode $\omega = 2$ fort. Wäre eine Fortsetzung zu einer stetigen Funktion mit der Periode $\omega = 1$ möglich?

b) Man begründe, warum eine reelle, nicht konstante „rationale Funktion“

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ nicht periodisch sein kann.

c) Man begründe, warum eine reelle, nicht konstante „Exponentialsumme“

$$f(x) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{kx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ nicht periodisch sein kann.

Übung 4.8 (Aufgabe zu Funktionsgraphen):

Man skizziere (mit Achsenbezeichnungen) die Graphen der folgenden reellen Funktionen auf ihren maximalen Definitionsbereichen in \mathbb{R} :

i) $f(x) := e^x$;

ii) $f(x) := \ln(x)$;

iii) $f(x) := \sin(1/x)$;

iv) $f(x) := \sqrt{x}$.

Übung 4.9 (Aufgabe zu regulären Limiten):

Man untersuche für $a \in \mathbb{R}_+$ die folgenden Grenzprozesse und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x^{-a} \sin(x), \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} x^a \sin(x^{-1}).$$

Hinweis: Man beachte die Potenzreihendarstellung des Sinus.

Übung 4.10 (Aufgabe zur Berechnung von π):

Man zeige für die Größen $T_n := n \sin(\frac{1}{n}\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, die rekursive Beziehung

$$T_1 = 0, T_2 = 2, \quad T_{2n} = \sqrt{2n^2 - 2n\sqrt{n^2 - T_n^2}}, \quad n \geq 2,$$

und die Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \pi$. Warum gilt diese Formel nicht für $n = 1$?

Hinweis: Man erinnere sich an die in der Vorlesung bereitgestellten Beziehungen für Sinus und Cosinus und an das asymptotische Verhalten von $\sin(x)$ für $x \rightarrow 0$.

Übung 4.11 (Aufgabe zur Konvergenz von Funktionen):

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „punktweise konvergent“ gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn es für $x \in I$ zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $n_\varepsilon = n_\varepsilon(x) \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Sie heißt „gleichmäßig konvergent“ gegen f , wenn n_ε unabhängig von $x \in I$ gewählt werden kann.

a) Man untersuche, ob die durch

$$f_n(x) := |\cos^n(x)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

auf dem Intervall $I := [0, \pi]$ definierte Folge von reellen Funktionen auf I (punktweise) konvergiert und bestimme gegebenenfalls ihren Limes. Ist diese Konvergenz gleichmäßig?

b) Wie lautet das Ergebnis bei Betrachtung der Funktionenfolge auf dem kleineren Intervall $I' = [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] \subset I$?

Bemerkung: Dies ist ein Gegenbeispiel zu der Vermutung (in Anlehnung an das für die Stetigkeit bekannte Resultat), dass aus der *punktweisen* Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen auf einer kompakten Menge auch deren *gleichmäßige* Konvergenz folgt.

Übung 4.12 (Über exotische Zahlen):

Mit Hilfe der Exponentialfunktion $\exp(\cdot)$ und des Logarithmus werden allgemeine reelle Potenzen positiver reeller Zahlen erklärt, u. a. etwa so exotische Ausdrücke wie

$$e^\pi := \exp(\pi), \quad \pi^e := \exp(e \ln(\pi)).$$

(Man rekapituliere die Definitionen der „Eulerschen Zahl“ e und der „Kreiszahl“ π und gebe ihre ungefähren Werte an.)

Eine grobe Abschätzung liefert $21 < e^\pi$, $\pi^e < 24$, aber welche dieser „transzendenten“ Zahlen ist die größere von beiden? Man beantworte diese Frage mit Hilfe analytischer Argumente (Reines Ausprobieren gibt Hinweise, ist aber kein Beweis!).

(Hinweis: Man darf die Beziehung $\pi > e$ verwenden, die zwar „numerisch“ klar ist, aber eigentlich ebenfalls eines Beweises bedarf. Aus der Reihendarstellung haben wir bereits $e < 3$ erschlossen. Die Beziehung $\pi \geq 3$ erhalten wir mit Archimedes über die Approximation des Einheitskreises durch einbeschriebene Polygone oder einfacher aus der Bibel (1. Buch der Könige 7.23: *Und er machte ein Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit, rundumher, und fünf Ellen hoch, und eine Schnur dreißig Ellen lang war das Maß ringsum.*)

Übung 4.13 (Aufgabe zum regulären Limes):

Man zeige, dass für $a \neq 0$ der Grenzwert

$$\lim_{x \neq a, x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

existiert und bestimme diesen.

Übung 4.14 (Aufgabe zur Stetigkeit):

Man beweise die Äquivalenz der beiden folgenden Definitionen der Stetigkeit einer Funktion $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich:

a) Für beliebiges $x_0 \in D$ und für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D gilt:

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

b) Für beliebiges $x_0 \in D$ gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, so daß gilt:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Übung 4.15 (Aufgabe zu Funktionalgleichungen):

Die Funktion $f(x)$ sei für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt, stetig im Punkt $x = 0$ und erfülle für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Man beweise, dass sie dann auf ganz \mathbb{R} stetig ist.

Übung 4.16 (Aufgabe zu trigonometrischen Funktionen):

Man gebe den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ für die durch

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{x^2 - 1}\right)$$

gegebene Funktion an. In welchen Punkten ist sie stetig?

Übung 4.17 (Aufgabe zur „gleichgradigen Stetigkeit“):

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Lipschitz-stetigen Funktionen $f_n := I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem (kompakten) Intervall $I = [a, b]$ mit derselben Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}_+$.

a) Man zeige, dass die Funktionen f_n dann gleichgradig stetig sind.

Ist die Folge zusätzlich gleichmäßig beschränkt, so besitzt sie nach dem Satz von Arzelá-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

b) Man zeige (z. B. durch ein Gegenbeispiel), dass die gleichmäßige Beschränktheit eine notwendige Voraussetzung im Satz von Arzelá-Ascoli ist.

Übung 4.18 (Aufgabe zum Satz von Arzelá-Ascoli):

Man versuche, den Satz von Arzelá-Ascoli für die auf dem Intervall $I = [0, \pi]$ durch

$$f_n(x) := \left(1 + \frac{1}{n}x\right) \sin(x + n\pi)$$

gegebene Folge von Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ anzuwenden, d.h.: Man verifiziere die zugehörigen Voraussetzungen.

Zusatz: Wer etwas mehr Zeit aufwenden will, möge sich an der Folge von Funktionen

$$f_n(x) := n \sin\left(\frac{1}{n}x\right) \cos(x + n\pi)$$

auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ versuchen.