3 Zahlenfolgen und Reihen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Konvergenz von Folgen reeller oder komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und als wichtigen Spezialfall die von zugehörigen Reihen:

$$a_n \to a \quad (n \to \infty), \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \to \ s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (n \to \infty).$$

Die meisten der abzuleitenden Resultate sind sowohl für reelle als auch für komplexe Zahlen gültig; einige sind im vorausgehenden Kapitel bereits für rationale Zahlen formuliert worden. Sie werden hier der Vollständigkeit halber rekapituliert. Wenn eine Aussage allgemein sowohl für reelle als auch für komplexe Zahlen gültig ist, so nennen wir sie gültig für den Körper $\mathbb{K}$, welcher dann sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ bedeuten kann. Nur solche Aussagen, die sich auf die Ordnungsrelationen beziehen, gelten nur auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Einige Aussagen gelten auch allgemein für (unendliche) Teilmengen $M \subset \mathbb{K}$, was gegebenenfalls in Klammern vermerkt wird. Wem der Umgang mit komplexen Zahlen noch zu ungewohnt ist, mag sich im Folgenden auf den Spezialfall reeller Zahlen konzentrieren, d. h. den Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1 Zahlenfolgen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen (und gelegentlich unendliche Teilmengen $M \subset \mathbb{K}$). Dabei brauchen die Folgenelemente nicht notwendig paarweise verschieden zu sein; z. B. die „konstante“ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := a$. Durch die gegebene Nummerierung mit dem Index $n \in \mathbb{N}$ ist eine Folge eindeutig festgelegt. Eine Umnummerierung der Folgenelemente führt auf eine andere Folge mit unter Umständen anderen Eigenschaften. In diesem Sinne unterscheidet sich die Notation einer „Folge“ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von derjenigen der „Menge“ ihrer Elemente $\{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Wir sagen, dass eine Aussage für „fast alle“ Elemente der Folge gilt, wenn sie für alle bis möglicherweise endlich viele ihrer Elemente gilt. Entsprechend kann als Indexmenge einer Folge neben $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ auch jede Zahlmenge der Form $\{n \in \mathbb{Z} |\ n \geq n_0\}$ verwendet werden. Greift man aus einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unendlich* viele Elemente mit Indizes n_k $(k \in \mathbb{N})$, $n_{k+1} > n_k$, heraus, so ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine sog. „Teilfolge“ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 3.1: *Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gegen den „Grenzwert“ (oder „Limes“) $a \in \mathbb{K}$ „konvergiert“, in Symbolen*

$$a_n \to a \ \ (n \to \infty) \quad \textit{oder} \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n \ \ (\textit{auch kurz } \lim a_n = a),$$

wenn für beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ von einem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq n_\varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Dies wird auch in der Form $|a_n - a| \to 0$ $(n \to \infty)$ ausgedrückt. Im Falle $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ spricht man von einer „Nullfolge“. (Bem.: In (3.1.1) kann auch $\leq \varepsilon$ stehen, und das beliebig kleine ε kann durch $1/N$ mit einem beliebig großen $N \in \mathbb{N}$ ersetzt werden.)

Satz 3.1: *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{K}$ *ist konvergent genau dann, wenn sie „Cauchy-Folge" ist, d. h. wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $n, m > n_\varepsilon$ *gilt:*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Beweis: Die „Vollständigkeit" der Zahlkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besagt gerade, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ einen Limes hat. Umgekehrt ist eine gegen ein a konvergierende Folge wegen

$$|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| \;\to\; 0 \quad (n, m \to \infty)$$

notwendig auch Cauchy-Folge. Q.E.D.

Bemerkung 3.1: Die folgenden Aussagen zur Konvergenz von Folgen in $\mathbb{K}$ sind teilweise bereits von Folgen in $\mathbb{Q}$ her bekannt oder ergeben sich durch elementare Argumente:

1. Der Limes einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eindeutig bestimmt, denn aus $a = \lim a_n = a'$ folgt über $|a-a'| \le |a-a_n|+|a_n-a'| \to 0 \ (n \to \infty)$ notwendig $a = a'$.

2. Werden bei einer konvergenten Folge nur endlich viele Folgenelemente geändert, so bleibt die resultierende Folge konvergent mit demselben Limes. Insbesondere ist mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ auch $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+k}$ für festes $k \in \mathbb{N}$.

3. Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist notwendig beschränkt, da für $n \ge n_1 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| \le |a_n - a| + |a| \le 1 + |a|.$$

4. Gilt für die Elemente einer konvergenten reellen Folge $a_n \ge 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt für deren Limes $a \ge 0$. (Warnung: Aus $a_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ kann nicht auf $a > 0$ geschlossen werden.)

5. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Limiten $a := \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $b := \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Dann sind auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und im Fall $b \ne 0,\ b_n \ne 0$ die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\to\infty}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) \;=\; a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \;=\; a \cdot b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) \;=\; a/b\,.$$

Insbesondere ist jede „Linearkombination" $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \alpha, \beta \in \mathbb{K},$ zweier konvergenter Folgen konvergent mit Limes $\alpha a + \beta b$; die konvergenten Folgen bilden also einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\to$ *Lineare Algebra*).

6. Für eine konvergent Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes a sind auch die Folgen der zugehörigen Real- und Imaginärteile sowie der Absolutbeträge konvergent, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n = \mathrm{Re}\, a, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, a_n = \mathrm{Im}\, a, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

Beispiel 3.1: Wir listen ein paar typische Beispiele von Zahlenfolgen und diskutieren die „Tricks“ zur Untersuchung ihrer Konvergenz:

1. Die „konstante“ Folge mit den Elementen $a_n = a \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist offenbar konvergent gegen a.

2. Die Folge mit den Elementen $a_n = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist eine Nullfolge, da es nach dem Archimedischen Axiom zu jedem $1/\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > 1/\varepsilon$. Dasselbe gilt für die Folge mit den Elementen $a_n = n/2^n$ $(n \in \mathbb{N})$, da die Potenz 2^n „schneller wächst“ als n (Beweis durch vollständige Induktion).

3. Die Folge mit den Elementen $a_n = (n+1)/n$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen den Limes $a = 1$, da $a_n - 1 = 1/n$ und $\lim 1/n = 0$.

4. Die Folge mit den Elementen $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist *nicht* konvergent (d. h. „divergent“), da für jedes a_n gilt $|a_{n+1} - a_n| = 2$; d. h.: Die Folge ist keine Cauchy-Folge.

5. Für die Folge mit den rationalen Elementen

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{n^2 - 1}$$

erhalten wir nach Kürzen die Konvergenz

$$a_n = \frac{2 + 3/n}{1 - 1/n^2} \;\to\; 2 \quad (n \to \infty).$$

6. Die Folgen mit den (positiven) Elementen

$$a_n = \frac{10^n}{n!} \quad \text{oder} \quad a_n = \frac{n^{10}}{n!}$$

lassen sich nicht auf so einfache Weise behandeln, da $10^n \to \infty$ (also keine Konvergenz!) und $1/n! \to 0$ für $n \to \infty$. Hier muss etwas feiner argumentiert werden (s. Übungsaufgabe). Man leitet etwa Abschätzungen der Form

$$a_n \le \frac{\alpha}{n} \quad \text{oder} \quad a_n \le \beta\, q^n$$

her mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ und einem $q \in \mathbb{R}_+$, mit $q < 1$, und erschließt hieraus wegen

$$\frac{1}{n} \;\to\; 0 \quad (n \to \infty), \qquad q^n \;\to\; 0 \quad (n \to \infty),$$

dass beide gegebene Folgen Nullfolgen sind. Umgekehrt erschließt man aus Abschätzungen der Form

$$a_n \ge \alpha n \quad \text{oder} \quad a_n \ge \beta\, q^n$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ und einem $q > 1$ wegen $q^n \to \infty$ $(n \to \infty)$ die strenge Divergenz der Folgen.

7. Für die Folge mit den Elementen

$$a_n = \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)$$

gilt

$$a_n = \sqrt{n}\,\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \quad\to\quad \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

8. Für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ folgt aus $a_n \geq b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$, dass auch $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$. Oft ist es nicht unmittelbar klar, wie die Relation $a_n \geq b_n$ allgemein für alle n gezeigt werden kann. In diesem Fall ist man versucht, die „Evidenz“ dieser Eigenschaft durch „numerische Experimente“ (d. h. Stichproben für einzelne n) zu bestätigen. Dies führt unter Umständen zu Fehlschlüssen, wie das folgende Beispiel zeigt:

   Für die ersten 10^6 Elemente der durch

$$a_n := \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \qquad b_n := \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n := \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

   gegebenen Folgen ist $a_n > b_n > c_n$. Trotzdem ergibt die richtige Analyse:

$$a_n \to 0 \;\; (n\to\infty), \quad b_n \to \tfrac{1}{2} \;\; (n\to\infty), \quad c_n \to \infty \;\; (n\to\infty),$$

   im Widerspruch zur experimentell begründeten Vermutung.

9. Wir betrachten für ein festes $c\in\mathbb{R}_+$ die Folge mit den positiven Elementen

$$a_n = \sqrt[n]{c}\,.$$

   Für den trivialen Fall $c=1$ ist offenbar $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Wir wollen zeigen, dass dies auch für allgemeines c gilt. Diese Vermutung motiviert im Fall $c>1$ den Ansatz $a_n = 1+h_n$ mit gewissen $h_n \geq 0$. Damit ist dann

$$c = (1{+}h_n)^n \geq 1+nh_n \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{c-1}{n} \geq h_n \geq 0\,.$$

   Für $n\to\infty$ konvergiert also $h_n \to 0$, was $a_n \to 1$ $(n\to\infty)$ impliziert. Im Fall $c<1$ beachten wir, dass $1/c > 1$, und mit dem eben Gezeigten folgt:

$$1 = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/c}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1/c}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

   Etwas schwieriger steht es bei der Folge mit den Elementen

$$a_n = \sqrt[n]{n}\,.$$

   Wir schreiben wieder $a_n = 1+h_n$ mit gewissen $h_n\geq 0$. Für $n\geq 2$ folgt dann mit Hilfe der binomischen Formel:

$$n = (1{+}h_n)^n \geq 1+\binom{n}{2}h_n^2 = 1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \quad \text{bzw.} \quad n-1 \geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \geq 0,$$

bzw. $h_n \le \sqrt{2/n}$. Damit finden wir

$$\big|\sqrt[n]{n} - 1\big| = h_n \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Schließlich betrachten wir die Folge mit den Elementen

$$a_n = \sqrt[n]{n!}\,.$$

Diese ist nun streng divergent gemäß $\sqrt[n]{n!} \to \infty \; (n \to \infty)$ (Übungsaufgabe). Daran schließt sich die Frage nach dem Verhalten der Folgen mit den Elementen

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{oder} \quad a_n = \Big(\frac{n^n}{n!}\Big)^{1/n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$$

an, was ebenfalls als Übungsaufgabe gestellt sei.

10. Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden häufig auch rekursiv definiert; z. B. erhält man durch

$$a_0 := 0,\; a_1 := 1, \qquad n \ge 2: \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2},$$

die sog. „Fibonacci[1]-Zahlen" $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$, welche wegen $a_{n+1} \ge n$ divergent ist. Der Limes

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

ist der sog. „goldene Schnitt" in der Proportionenlehre (Übungsaufgabe). Die Quotienten $g_n := a_{n+1}/a_n$ genügen der rekursiven Beziehung

$$g_{n+1} = 1 + \frac{1}{g_n}.$$

Im Falle der Konvergenz $g_n \to g \; (n \to \infty)$ genügt der Limes also der zugehörigen „Fixpunktgleichung"

$$g = 1 + \frac{1}{g},$$

aus der man ihn als $g = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ bestimmt. Dieses heuristische Argument kann aber i. Allg. nicht den formalen Nachweis der Konvergenz der Folge ersetzen. Zu der Folge mit den Elementen

$$a_0 := 0, \quad n \in \mathbb{N}: \;\; a_{n+1} = (1 + a_n)a_n - 3,$$

gehört die Fixpunktgleichung $a = (1 + a)a - 3$ mit den Lösungen $a = \pm\sqrt{3}$; die Folge selbst ist aber divergent: $a_1 = -3$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 87$, $a_5 = 7653$, $\dots$.

[1]Leonardo Pisano (aus Pisa), genannt Fibonacci (um 1170 – um 1250): „Erster" bedeutender Mathematiker des Abendlandes; gehörte zum Gelehrtenkreis um Kaiser Friedrich II; brachte von ausgedehnten Reisen eine systematische Einführung in das indisch-arabische Zahlensystem nach Europa; in seinem Rechenbuch „Liber abacci" untersuchte er u. a. die nach ihm benannte Folge als einfaches Modell für das Wachstum von Populationen.

Definition 3.2: *(Wiederholung) Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(oder Teilmenge) in* $\mathbb{K}$ *heißt „beschränkt“, wenn mit einer Konstante* $K \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$|a_n| \le K, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für Folgen (oder Teilmengen) in $\mathbb{R}$ *kann man zwischen „Beschränktheit nach oben“ und „Beschränktheit nach unten“ unterscheiden gemäß :*

$$a_n \le K, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{oder} \quad a_n \ge K, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 3.1: *Eine beschränkte Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *(oder unendliche Teilmenge) in* $\mathbb{R}$ *besitzt eine „kleinste“ obere Schranke, die sog. „obere Grenze“ (oder „Supremum“)*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \min\{K \in \mathbb{R}\,|a_n \le K \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\},$$

sowie eine „größte“ untere Schranke, die sog. „untere Grenze“ (oder „Infimum“)

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \max\{K \in \mathbb{R}\,|a_n \ge K \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Mit diesen gilt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \le a_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{R}$ *ist*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := -\infty \quad \textit{oder} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \infty.$$

Beweis: Sei $M := \{K \in \mathbb{R}|\, K \ge a_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der oberen Schranken der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es gemäß der Trennungseigenschaft von $\mathbb{R}$ (äquivalent zur Vollständigkeit) eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $a_n \le s \le K,\ K \in M, n \in \mathbb{N}$, d. h.: s ist obere Grenze von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Existenz einer *unteren* wird analog erschlossen. Q.E.D.

Beispiel 3.2: Wir geben für eine Reihe von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ untere und obere Schranken bzw. Grenzen an:

$$a_n = n: \qquad \underline{s} = 1, \quad \overline{s} = \infty; \qquad a_n = \frac{1}{n}: \qquad \underline{s} = 0, \quad \overline{s} = 1;$$
$$a_n = \frac{1}{2^n}: \qquad \underline{s} = 0, \quad \overline{s} = \tfrac{1}{2}; \qquad a_n = 1 + \frac{1}{2^n}: \qquad \underline{s} = 1, \quad \overline{s} = \tfrac{3}{2};$$

Offensichtlich können die obere und die untere Grenze auch Element der Menge sein, müssen es aber nicht.

Definition 3.3: *Ein* $a \in \mathbb{K}$ *heißt „Häufungswert“ einer Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{K}$*, wenn es zu beliebigem* $\varepsilon > 0$ *unendlich viele Folgenelemente* a_n *gibt mit*

$$|a - a_n| < \varepsilon\,.$$

Ein $a \in \mathbb{K}$ *heißt „Häufungspunkt“ einer Teilmenge* M *von* $\mathbb{K}$*, wenn es zu beliebigem* $\varepsilon > 0$ *stets unendlich viele Elemente* $x \in M$ *gibt mit*

$$|a - x| < \varepsilon\,.$$

Beispiel 3.3: Folgen mit mehreren Häufungswerten lassen sich leicht finden:

1. Die divergente Folge mit den Elementen $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ hat die zwei Häufungswerte $a^{(1)} = 1$ und $a^{(2)} = -1$.
2. Aus zwei konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwerten a bzw. b erhält man durch die Setzung
$$c_{2n-1} := a_n, \quad c_{2n} := b_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
eine neue Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den beiden Häufungswerten a und b.

Bemerkung 3.2: Wir stellen einige offensichtlichen Eigenschaften von Folgen mit Häufungswerten zusammen:

1. Zu jedem Häufungswert a gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert: $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.
2. Die Häufungswerte einer Folge ändern sich nicht, wenn man endlich viele Elemente der Folge verändert.
3. Ist die Folge konvergent, so ist ihr Grenzwert nach Definition auch Häufungswert und zwar der einzige, denn für zwei Häufungswerte $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ und $a' = \lim_{k\to\infty} a_{n'_k}$ gilt nach dem Konvergenzkriterium
$$|a - a'| \le |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_{n'_k}| + |a_{n'_k} - a'| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Von fundamentaler Bedeutung für die Analysis ist der folgende Satz von Bolzano-Weierstraß[2].

Satz 3.2 (Satz von Bolzano-Weierstraß): *a) Jede beschränkte Folge (oder unendliche Teilmenge) in* $\mathbb{K}$ *besitzt einen Häufungswert (bzw. Häufungspunkt).*

b) Jede beschränkte Folge (oder Teilmenge) in $\mathbb{R}$ *besitzt einen größten sowie einen kleinsten Häufungswert (bzw. Häufungspunkt), die mit* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *(oder* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *) bzw.* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *(oder* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *) bezeichnet werden.*

Beweis: Da man aus jeder unendlichen Menge von Zahlen eine unendliche Folge auswählen kann, genügt es, die Behauptung für Folgen zu beweisen.

i) Wir beweisen die Behauptung zunächst für $\mathbb{R}$. Für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt es eine obere Schranke und eine untere Schranke, d. h. Zahlen c_0, b_0 mit der Eigenschaft $c_0 \le a_n \le b_0,\ n \in \mathbb{N}$. Ausgehend von dem Intervall
$$I_0 := [c_0, b_0] := \{x \in \mathbb{R} |\ c_0 \le x \le b_0\}$$
definieren wir rekursiv eine Folge von Intervallen $I_k := [c_k, b_k]$ mit Länge $|I_k| := |b_k - c_k|$ und den Eigenschaften einer Intervallschachtelung:

[2] Karl Theodor Weierstraß (1815–1897): Deutscher Mathematiker; ab 1856 Prof. in Berlin; begründete die moderne „strenge“ Analysis.

1. In I_k liegen unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n \le b_k$.
2. $I_k \subset I_{k-1}$.
3. $|I_k| \le 2^{-k}|I_0|$.

Zur Definition von $I_1 = [c_1, b_1]$ setzen wir mit dem Mittelpunkt $z_0 = \frac{1}{2}(b_0 + a_0)$:

$$[c_1, b_1] := \begin{cases} [c_0, z_0], & \text{falls i) } a_n \in [c_0, z_0] \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}, \\ & \text{und ii) } a_n \le z_0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}; \\ [z_0, b_0], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion enthält $[c_1, b_1] \subset [c_0, b_0]$ unendlich viele Folgenelemente, und es gilt $a_n \le b_1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, sowie nach Konstruktion $|b_1 - c_1| \le \frac{1}{2}|b_0 - c_0|$. Also ist $I_1 = [c_1, b_1]$ ein Intervall mit den geforderten Eigenschaften. Durch sukzessive Anwendung dieser Konstruktion erhalten wir dann eine Folge von Intervallen $I_k = [c_k, b_k],\ k \in \mathbb{N}$, welche alle diese Eigenschaften haben. Die Folge von Intervallen $(I_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ bildet offenbar eine „Intervallschachtelung“ in $\mathbb{R}$, und aufgrund der Intervallschachtelungseigenschaft (äquivalent zur Vollständigkeit) existiert eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da jedes der I_k unendlich viele Folgenelemente enthält und $|I_k| \to 0\ (k \to \infty)$ konvergiert, ist a definitionsgemäß Häufungswert der Folge. Dieser ist auch der größte Häufungswert. Denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt nach Auswahl der Intervalle I_k für fast alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \le b_k \le |b_k - a| + a \le \varepsilon + a .$$

Gäbe es nun einen größeren Häufungswert $a' > a$, so würde mit $\varepsilon' := \frac{1}{2}(a' - a)$

$$a_n \le \varepsilon' + a = \tfrac{1}{2}(a' - a) + a = \tfrac{1}{2}(a' + a) = a' - \tfrac{1}{2}(a' - a) = a' - \varepsilon'$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, im Widerspruch dazu, dass a' Häufungswert sein soll. Die Existenz eines *kleinsten* Häufungswertes wird analog erschlossen.

ii) Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind auch die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der zugehörigen Real- und Imaginärteile in $\mathbb{R}$ beschränkt. Nach dem eben Gezeigten existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Realteile, $x_{n_k} \to x\ (k \to \infty)$, und wegen der Beschränktheit der zugehörigen Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Imaginärteile eine weitere konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ mit Limes $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \to x + iy =: z \ \ (j \to \infty).$$

Damit ist der Beweis vollständig. Q.E.D.

Definition 3.4: *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$, welche alle ihre Häufungspunkte enthält heißt „abgeschlossen“. Eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$, in der jede (unendliche) Folge einen Häufungswert hat, heißt „kompakt“ .*

Bemerkung 3.3: Eine kompakte Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ ist notwendig beschränkt (Sonst gäbe es eine strikt divergente Teilfolge ohne Häufungswert.) und nach Definition abgeschlossen. Umgekehrt besagt der Satz von Bolzano-Weiserstraß also, dass im (bewerteten) Zahlkörper $\mathbb{K}$ jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ kompakt ist. Diese Aussage ist in allgemeinen normierten Vektorräumen nicht richtig ($\rightarrow$ *Funktionalanalysis*).

Bemerkung 3.4: Der oben angegebene Beweis des Satzes von Bolzano-Weiserstraß enthält ein Argument, welches nähere Betrachtung verdient. Es wird postuliert, dass zu der *unendlichen* Folge von Intervallen $[c_k, b_k]$ eine gleichfalls *unendliche* Folge von Punkten $a_{n_k} \in [c_k, b_k]$ „ausgewählt" werden kann. Dieser Prozess ist nicht ganz klar, da er ja eigentlich unendlich viele Schritte erfordert, die natürlich nicht wirklich ausgeführt werden können. Es handelt sich hierbei also um die Anwendung eines logischen „Axioms", des sog. „Zermeloschen[3] Auswahlaxioms". Im Fall von *abzählbar* unendlich viele Mengen entspricht dies gerade dem früher schon verwendeten Induktionsprinzip und ist unproblematisch. Die Verwendbarkeit dieser Schlussweise auch in Verbindung mit überabzählbar vielen Mengen ist allerdings nicht so klar und hat in der Anfangsphase der mengentheoretischen Analysis zu erheblichen Kontroversen unter Mathematikern geführt (siehe auch Bemerkung 2.8). Heute besteht mehrheitlich die Meinung, dass der Verzicht auf dieses Beweishilfsmittel die weitere Entwicklung der mathematischen Forschung stark behindern würde.

Korollar 3.1: *Es gelten die folgenden Aussagen:*

a) Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, die nicht konvergiert, besitzt mindestens zwei verschiedenen Häufungswerte, d. h.: Eine beschränkte Folge mit nur einem Häufungswert ist insgesamt konvergent gegen diesen. Bei einer unbeschränkten Folge kommt als weitere Möglichkeit der „Nichtkonvergenz" noch die Existenz einer streng divergierenden Teilfolge hinzu.

b) Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gibt es für beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ höchstens endlich viele Folgenelemente a_k mit der Eigenschaft

$$a_k \le \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \le a_k \, .$$

Beweis: a) Eine beschränkte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß mindestens einen Häufungswert. Da es wegen der Beschränktheit der Folge keine echt divergierende Teilfolge geben kann, würde die Nichtexistenz eines zweiten Häufungswertes die Konvergenz der Folge implizieren, im Widerspruch zur Annahme.

b) Die Existenz von unendlich vielen Folgenelementen „rechts" von $\limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$ oder „links" von $\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$ widerspricht der Definition von „größtem" und „kleinstem" Häufungswert (Details Übungsaufgabe). Q.E.D.

[3] Ernst Zermelo (1871–1953): Deutscher Mathematiker; Prof. in Zürich und Freiburg; Beiträge zur Variationsrechnung, Mengenlehre und statist. Mechanik.

Bemerkung 3.5: Wir listen einige Eigenschaften des $\limsup$ und $\liminf$ von Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gültig sind, sofern die auftretenden Größen existieren: (Beweis Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_h &\le \liminf_{n\to\infty}\,(a_n+b_n)\\ &\le \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \\ &\le \limsup_{n\to\infty}\,(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,.\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Im Falle $a_n,\, b_n \ge 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n &\le \liminf_{n\to\infty}\,(a_nb_n)\\ &\le \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n \\ &\le \limsup_{n\to\infty}\,(a_nb_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n\,.\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Definition 3.5 (Monotonie): *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt „monoton steigend“ bzw. „monoton fallend“, wenn gilt*

$$a_{n+1} \ge a_n \quad (n\in\mathbb{N}) \qquad \textit{bzw.} \qquad a_{n+1} \le a_n \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Satz 3.3 (Monotone Konvergenz): *Jede beschränkte, monoton steigende oder fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ besitzt einen Grenzwert.*

Beweis: Für die beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind notwendig der größte und der kleinste Häufungswert endlich:

$$-\infty < \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n < \infty.$$

Ist die Folge monoton steigend, so müssen alle Folgenelemente links von $\liminf\ a_n$ liegen, da andernfalls keine gegen $\liminf a_n$ konvergierende Teilfolge existieren könnte. Damit ist $\liminf_{n\to\infty} a_n$ als der kleinste auch der einzige Häufungswert der beschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge und damit ihr Limes. Umgekehrt liegen für eine monoton fallende Folge alle Elemente rechts von $\limsup a_n$. In beiden Fällen ist demnach $\liminf a_n = \limsup a_n$, was zu beweisen war. Q.E.D.

Bemerkung 3.6: Eine nach unten durch Null beschränkte und monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ ist nicht notwendig eine Nullfolge, und eine monoton steigende Folge muss nicht unbedingt streng divergieren, wie die folgenden Beispiele zeigen:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \;\to\; 1 \quad (n\to\infty) \qquad a_n = 1 - \frac{1}{n} \;\to\; 1 \quad (n\to\infty).$$

Beispiel 3.4: Die Folge mit den (positiven) Elementen

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

ist offensichtlich monoton wachsend und wegen

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = 1 + \frac{1 - \big(\frac{1}{2}\big)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3$$

auch beschränkt. Nach Satz 3.3 ist sie folglich konvergent. Ihr Limes ist, wie wir später noch sehen werden, gerade die oben schon erwähnte (transzendente) Zahl e.

Beispiel 3.5: Zur Berechnung der Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl a kann der folgende Algorithmus verwendet werden: Ausgehend von einem Startwert $x_1 \in \mathbb{Q}$ mit $x_1 \le 2, x_1^2 > 2$ definieren wir eine Folge rationaler Zahlen durch die Rekursionsvorschrift:

$$n \in \mathbb{N}: \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big\{x_n + \frac{2}{x_n}\Big\}.$$

Mit $x_1 > 0$ sind auch alle weiteren Folgenelemente positiv. Darüberhinaus folgt aus $x_n^2 > 2$, dass

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big\{x_n + \frac{2}{x_n}\Big\} = \frac{1}{2}x_n\Big\{1 + \frac{2}{x_n^2}\Big\} < \frac{1}{2}x_n\{1+1\} = x_n.$$

Weiter ist nach Konstruktion $2x_{n+1}x_n = x_n^2 + 2$ sowie

$$x_{n+1}^2 - 2 = \underbrace{x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2}_{=(x_{n+1}-x_n)^2>0} + \underbrace{2x_{n+1}x_n - x_n^2 - 2}_{=0} > 0,$$

und folglich $x_{n+1}^2 > 2$. Mit Induktion nach n gelten diese Beziehungen damit für alle Folgenelemente. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also „monoton fallend“ und sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt: $1 < x_n \le 2$. Folglich ist sie konvergent gegen einen Limes $x \in \mathbb{R}$. Für diesen gilt dann wegen der Konvergenz $x_n \to x,\ x_{n+1} \to x$ für $n \to \infty$:

$$x \leftarrow x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big\{x_n + \frac{2}{x_n}\Big\} \to \frac{1}{2}\Big\{x + \frac{2}{x}\Big\}.$$

Dies impliziert

$$x = \frac{1}{2}\Big\{x + \frac{2}{x}\Big\}, \qquad x^2 = 2,$$

d. h.: Der Limes x ist die gesuchte Quadratwurzel von 2. Für den Startwert $x_1 = 2$ liefert das obige „iterative“ Verfahren die Folgenelemente

$$x_2 = \underline{1},5, \quad x_3 = \underline{1,416}\ldots, \quad x_4 = \underline{1,414215}\ldots, \quad x_5 = \underline{1.414213561373}4\ldots,$$

welche den gesuchten Wert $\sqrt{2} = 1,414213561373095\ldots$ offenbar sehr schnell annähern; die Anzahl der korrekten Dezimalstellen verdoppelt sich in jedem Schritt. Dieses Näherungsverfahren wird „quadratisch konvergent“ genannt. Wir werden es später als das „Newton-Verfahren“ wiederfinden.

3.2 Unendliche Summen („Reihen“)

Wir betrachten das Verhalten von Folgen endlicher Summen (sog. „Partialsummen“)

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

von reellen oder komplexen Zahlen a_k für $n \to \infty$. Dabei kann anstatt des Indexbereichs $k = 1, \dots, n,$ auch jeder andere endliche Abschnitt $k = r, r+1, \dots, r+n$ der ganzen Zahlen vorkommen, insbesondere $k = 0, 1, \dots, n$.

Definition 3.6: *Eine unendliche Summe (eine sog. „Reihe“) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt „konvergent“ mit Limes s_∞, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to s_\infty \quad (n \to \infty).$$

Wir werden im folgenden die Notation einer Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ verwenden, auch wenn ihre Existenz, d. h. die Konvergenz der zugehörigen Partialsummen nicht gesichert ist. Die Konvergenz einer Reihe ist nicht selbstverständlich, wie die (pathologischen) Beispiele

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \to \infty \quad (n \to \infty), \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & \text{für } n \text{ ungerade}, \\ \;\;0 & \text{für } n \text{ gerade}, \end{cases}$$

zeigen. Wir bemerken, dass sich auch die Konvergenzuntersuchung für allgemeine Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über die Setzung

$$a_n \;=\; a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots (a_n - a_{n-1}) \;=\; a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

in die von Reihen einordnen lässt.

3.2.1 Konvergenzkriterien

Das Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen besagt, dass eine Reihe genau dann konvergent ist, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > m \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$|s_n - s_m| \;=\; \Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big| < \varepsilon\,. \tag{3.2.5}$$

Lemma 3.2 (Reihenkonvergenz): *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kann nur dann konvergent sein, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind und ihre Glieder eine Nullfolge bilden, d. h.: $a_k \to 0 \ (k \to \infty)$.*

Beweis: Sei

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n .$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s_\infty - s_\infty = 0 ,$$

was zu zeigen war. Die Beschränktheit der Partialsummen folgt notwendig aus der Beschränktheit konvergenter Folgen. Q.E.D.

Lemma 3.3: *Für zwei konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist auch jede Linearkombination $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{3.2.6}$$

Die konvergenten Reihen bilden also wie die konvergenten Folgen einen reellen bzw. komplexen Vektorraum.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der entsprechenden Aussage für konvergente Folgen. Q.E.D.

Die Nichtkonvergenz einer Reihe kann sich auf verschiedene Weise ausdrücken. Sie kann direkt „divergieren", d. h.:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{3.2.7}$$

oder sie kann auch mehr als einen Häufungswert haben wie die obige Reihe mit den Elementen $a_k = (-1)^k$, welche sogar beschränkte Partialsummen hat.

Beispiel 3.6 (Geometrische Reihe): Die sog. „geometrische Reihe" hat die Form

$$s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für festes $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 1$. Ihre Partialsummen sind

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Im Fall $|x| < 1$ konvergiert offensichtlich

$$s_n \to s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (n \to \infty), \tag{3.2.8}$$

während für $|x| > 1$ wegen $x^n \not\to 0$ keine Konvergenz vorliegen kann.

Beispiel 3.7 (Harmonische Reihe): Die Eigenschaft $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$ ist allein noch nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ein beliebter Trugschluß „nicht-strenger" mathematischer Argumentation). Dies zeigt das Beispiel der sog. „harmonischen Reihe"

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,.$$

Hier gilt offensichtlich $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$, aber wegen

$$s_{2m} - s_m \;=\; \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \;=\; \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m} > \underbrace{\frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m}}_{m\text{-mal}} = \frac{1}{2}$$

ist das Cauchysche Konvergenzkriterium nicht erfüllt. Die harmonische Reihe ist also *nicht* konvergent. Tatsächlich ist sie streng divergent:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \quad (n \to \infty). \tag{3.2.9}$$

Lemma 3.4 (Reihen mit nichtnegativen Gliedern): *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ mit Gliedern $a_k \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind.*

Beweis: Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = s_{n+1}.$$

Nach dem Konvergenzsatz 3.3 für monotone Folgen folgt dann aus der Beschränktheit der Partialsummen die Konvergenz der Reihe. Q.E.D.

Lemma 3.5 (Leibniz-Kriterium): *Eine Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ heißt „alternierend", wenn ihre Elemente alternierende Vorzeichen haben, d. h.: $a_{n+1}a_n \leq 0$. Eine solche Reihe ist konvergent, wenn die Absolutbeträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden:*

$$|a_n| \geq |a_{n+1}| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{3.2.10}$$

Für die Reihenreste gilt dabei die Abschätzung

$$\Big|\sum_{k=m}^{\infty} a_k\Big| \leq |a_m|. \tag{3.2.11}$$

Beweis: i) Sei o.B.d.A. $a_1 > 0$. Dann ist

$$a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0, \quad a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0,$$

und folglich

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= a_1 + (a_2{+}a_3) + (a_4{+}a_5) + \cdots + (a_{2n}{+}a_{2n+1}) \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1 \,, \\ s_{2n} &= (a_1{+}a_2) + (a_3{+}a_4) + \cdots + (a_{2n-1}{+}a_{2n}) \geq s_{2n-2} \geq \cdots \geq s_4 \geq s_2 \,. \end{aligned}$$

Ferner gilt $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$ und somit

$$s_2 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_1.$$

Die Folgen der Partialsummen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit geraden Indizes bzw. $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit ungeraden Indizes sind also beschränkt und monoton wachsend bzw. monoton fallend; beide sind daher konvergent mit Limiten $s_* = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ bzw. $s^* = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$, so dass

$$s_{2n} \leq s_* \leq s^* \leq s_{2n+1} \,.$$

Nach Voraussetzung konvergiert nun

$$|s_{2n+1} - s_{2n}| = |a_{2n+1}| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

was $s_* = s^*$ impliziert.
ii) Aus dem in (i) Gezeigten folgt im Fall $m = 2n+1$:

$$0 \leq s_\infty - s_{2n} \;=\; \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k \;=\; \underbrace{s_\infty - s_{2n+1}}_{\leq 0} + a_{2n+1} \leq a_{2n+1},$$

und somit

$$\Big| \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k \Big| \leq |a_{2n+1}|.$$

Im Fall $m = 2n$ wird analog geschlossen. Q.E.D.

Beispiel 3.8: Wir geben zwei Beispiele alternierender Reihen:

1. Die alternierende *harmonische* Reihe

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

   konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium. Ihr Limes ist, wie wir später sehen werden, gerade der Funktionswert $s_\infty = \ln(2) = 0{,}69314718\ldots$ des natürlichen Logarithmus.

2. Die Leibnizsche Reihe

$$s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

   ist ebenfalls konvergent mit dem Limes $s_\infty = \frac{1}{4}\pi$.

3. Die Monotoniebedingung in Lemma 3.5 ist i. Allg. wesentlich für die Konvergenz einer alternierenden Reihe. Die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit den Gliedern
$$a_{2k} := -\frac{1}{2^k}, \quad a_{2k-1} := \frac{1}{k},$$
ist als „Superreihe" der harmonischen Reihe divergent, obwohl ihre Glieder eine Nullfolge sind. Das Konvergenzverhalten einer alternierenden Reihe kann sich bei Umordnung ihrer Glieder, d. h. der Reihenfolge der a_k, drastisch ändern. Die alternierende harmonische Reihe bleibt, wie wir später noch sehen werden, bei der Umordnung
$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \ \to\ \tilde{s}_\infty := (1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6}) + \ldots$$
konvergent, aber mit einem Limes $\tilde{s}_\infty > s_\infty = \frac{1}{4}\pi$. Unter der „totalen" Umordnung
$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \ \to\ \tilde{s}_\infty := -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$$
entsteht sogar eine divergente Reihe. Dies zeigt, dass der Umgang mit unendlichen Summen heikel ist, und dass insbesondere das von endlichen Summen her vertraute Assoziativgesetz hier nicht unbedingt gelten muss.

4. Von Dirichlet[4] stammt die folgende Verallgemeinerung des Leibnizschen Kriteriums:

   Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ habe beschränkte Partialsummen und die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei eine monotone Nullfolge (Insbesondere seien also die Glieder b_k alle positiv oder alle negativ.). Dann konvergiert die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k .$$
   Setzt man im Dirichlet-Kriterium $a_k = (-1)^k$, so ergibt sich gerade das obige Leibniz-Kriterium.

5. Auf Reihen mit monoton fallenden Gliedern bezieht sich auch das folgende Konvergenzkriterium von Abel[5]:

   Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ in $\mathbb{R}$ sei konvergent, und die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ sei beschränkt und monoton fallend. Dann konvergiert auch die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k .$$

[4] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), geb. in Düren (damals bei Frankreich): Wirkte in Berlin und als Prof. in Göttingen (Nachfolger von Gauß); wichtige Beiträge zur Zahlentheorie, Analysis und Differentialgleichungen („Dirichletsches Prinzip").

[5] Niels Henrik Abel (1802–1829): Norwegischer Mathematiker; bereits mit 26 Jahren an Tuberkulose verstorben; Arbeiten über algebraische Gleichungen (speziell der quintischen Gleichung) und Gruppentheorie.

Die Konvergenz alternierender Reihen ist sehr fragil, da sie in der Regel bei Umordnung der Reihenglieder verloren gehen kann. Wir führen daher den folgenden stärkeren Konvergenzbegriff ein.

Definition 3.7: *Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wird als „absolut konvergent“ bezeichnet, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ der Absolutbeträge ihrer Elemente konvergent ist.*

Bemerkung 3.7: Wir stellen einige einfache Aussagen über absolut konvergente Reihen zusammen, die sich unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für konvergente Folgen (von Partialsummen) ergeben:

1. Eine absolut konvergente Reihe ist automatisch auch konvergent. Dies folgt aus
$$\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k|.$$

2. Für eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{C}$ sind auch die Reihen der zugehörigen Real- und Imaginärteile absolut konvergent, und es gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, a_n \, .$$

3. Fasst man jeweils endlich viele Glieder einer absolut konvergenten Reihe durch Klammern zusammen, so ist die entstehende Reihe ebenfalls konvergent und hat dieselbe Summe:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_1}}_{\sigma_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{\sigma_2} + \cdots + \underbrace{a_{k_n} + \cdots + a_{k_{n+1}}}_{\sigma_n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \, .$$
Dies ist klar, da die Partialsummen der zusammengefassten Reihe eine Teilfolge der Partialsummenfolge der Ausgangsreihe bilden und daher konvergent sind. Hierbei ist die absolute Konvergenz der (ungeklammerte) Reihe wesentlich, wie man anhand des folgenden Beispiels sieht:
$$\begin{aligned}(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ \ldots &= 0+0+0+\ \cdots = 0,\\ 1-(1-1)-(1-1)-\ \ldots &= 1-0-0-\ \cdots = 1\,.\end{aligned}$$

Wir wollen nun einige nützliche Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen ableiten. Gegeben seien zwei Reihen mit Gliedern $a_k \in \mathbb{K}$ und $a'_k \in \mathbb{R}_+$:
$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad s'_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \, .$$
Gilt $|a_k| \le a'_k$ $(k \in \mathbb{N})$, so wird s'_∞ „Majorante“ von s_∞ genannt.

Lemma 3.6 (Vergleichskriterien): *Gegeben seien zwei Reihen mit Gliedern* $a_k \in \mathbb{K}$ *und* $a'_k \in \mathbb{R}_+$ *:*

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad s'_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k.$$

a) Gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$ *mit einer Konstante* $\kappa > 0$ *:*

$$|a_k| \le \kappa a'_k, \tag{3.2.12}$$

so ist s'_∞ *eine „Majorante" von* s_∞ *, und aus der absoluten Konvergenz von* s'_∞ *folgt auch die von* s_∞ *, sowie aus der absoluten Divergenz von* s_∞ *auch die von* s'_∞ *.*

b) Gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$ *:*

$$\Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| \le \frac{a'_{k+1}}{a'_k}, \tag{3.2.13}$$

so folgt aus der absoluten Konvergenz von s'_∞ *auch die von* s_∞ *sowie aus der absoluten Divergenz von* s_∞ *auch die von* s'_∞ *.*

Beweis: O.B.d.A. nehmen wir an, dass die vorausgesetzten Abschätzungen jeweils für „alle" $k \in \mathbb{N}$ gelten.

a) Ist s'_∞ konvergent, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \kappa \sum_{k=1}^{n} a'_k \le \kappa \sum_{k=1}^{\infty} a'_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

so dass auch die Partialsummen von s_∞ beschränkt sind. Folglich ist s_∞ absolut konvergent. Umgekehrt folgt aus der absoluten Divergenz von s_∞ , d. h. $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \to \infty$ $(n \to \infty)$, notwendig auch die von s'_∞ .

b) Aufgrund der Voraussetzung haben wir

$$\Big|\frac{a_{k+1}}{a'_{k+1}}\Big| \le \Big|\frac{a_{k+1}}{a_k}\Big|\Big|\frac{a_k}{a'_{k+1}}\Big| \le \Big|\frac{a'_{k+1}}{a'_k}\Big|\Big|\frac{a_k}{a'_{k+1}}\Big| = \Big|\frac{a_k}{a'_k}\Big| \le \cdots \le \Big|\frac{a_1}{a'_1}\Big| =: \kappa\,,$$

und damit $|a_{k+1}| \le \kappa |a_k|$. Die behaupteten Aussagen ergeben sich also aus dem für den Fall (a) Gezeigten. Q.E.D.

Korollar 3.2 (Wurzelkriterium): *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert absolut, wenn es ein* $q \in (0,1)$ *gibt, mit dem für fast alle* $k \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1\,, \tag{3.2.14}$$

bzw. $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ *. Wenn für unendlich viele* $k \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1$ *bzw.* $|a_k| \ge 1$*, so ist die Reihe absolut divergent.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $|a_k| \leq q^k$, d. h.: Die konvergente geometrische Reihe $s_\infty(q)$ mit $q \in (0,1)$ ist Majorante für s_∞ . Die Behauptung ergibt sich also unmittelbar aus dem Vergleichskriterium von Lemma 3.6. Q.E.D.

Korollar 3.3 (Quotientenkriterium): *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ *konvergiert absolut, wenn es ein* $q \in (0,1)$ *gibt, mit dem für fast alle* $k \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1\,, \tag{3.2.15}$$

bzw. $\limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$ *. Wenn für fast alle* $k \in \mathbb{N}$ *gilt* $|a_{k+1}/a_k| \geq 1$ *, so ist die Reihe absolut divergent.*

Beweis: Die geometrische Reihe $s_\infty(q) = \sum_{k=1}^\infty q^k$ konvergiert für $q \in (0,1)$. Setzen wir $a'_k := q^k$, so gilt nach Voraussetzung

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q = \frac{a'_{k+1}}{a'_k},$$

und die Behauptung folgt nach dem Vergleichskriterium aus Lemma 3.6. Q.E.D.

Beispiel 3.9: Wir geben einige Beispiele für die Anwendung der bisher abgeleiteten Konvergenzkriterien an:

1. Die Reihe
$$s_\infty = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^k}$$
ist nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent:
$$\left(\frac{1}{k^k}\right)^{1/k} = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}, \quad k \geq 2.$$

2. Die Reihe
$$s_\infty = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}$$
ist nach dem Quotientenkriterium (absolut) konvergent:
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2} < 1.$$
Sie hat den Wert $s_\infty = e$ (Eulersche Zahl).

3. Betrachte mit einem festen $q \in (0,1)$ die Reihe

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k.$$

Sei $q < 1-\delta$ mit einem gewissen $\delta \in (0,1)$ und $1/k \le \delta$ für $k \ge k_\delta$. Dann gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)q^{k+1}}{kq^k} = \Big(1+\frac{1}{k}\Big)q < (1+\delta)(1-\delta) = 1-\delta^2 < 1.$$

Die Reihe s_∞ ist also nach dem Quotientenkriterium (absolut) konvergent.

4. Betrachte die Reihe

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Für ihre Elemente a_k gilt

$$\begin{aligned} a_k^{1/k} &= \Big(\frac{1}{k^2}\Big)^{1/k} = \Big(\frac{1}{k^{1/k}}\Big)^2 \to 1 \quad (k \to \infty),\\ \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{k^2}{(k+1)^2} = \Big(1-\frac{1}{k+1}\Big)^2 \to 1 \quad (k \to \infty), \end{aligned}$$

so dass weder das Wurzel- noch das Quotientenkriterium anwendbar sind. Wir müssen zum Nachweis der Konvergenz also ein anderes Argument finden. Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

sehen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big\{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big\} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1},$$

und folglich

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Wegen

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k^2(k+1)} \le \frac{2}{k(k+1)}$$

folgt dann die Konvergenz der Reihe wieder mit Hilfe des Vergleichskriteriums aus Lemma 3.6. Ihr Limes ist $s_\infty = \pi^2/6$ und damit transzendent. Wir bemerken, dass die mit der obigen Reihe verwandte Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

ebenfalls konvergent ist (s. das folgende Beispiel); von ihrem Limes ist aber erst seit kurzem bekannt, dass er irrational ist; ob er sogar transzendent ist, bleibt offen.

Das folgende auf Cauchy zurückgehende Konvergenzkriterium ist besonders nützlich zur Untersuchung verallgemeinerter geometrischer Reihen.

Lemma 3.7 (Cauchyscher Verdichtungssatz): *Eine Reihe* $s_\infty = \sum_{k=1}^\infty a_k$ *mit Gliedern* $a_k \in \mathbb{R}_+$ *, die eine monoton fallende Nullfolge bilden, hat dasselbe Konvergenzverhalten wie die „verdichtete“ Reihe*

$$s'_\infty = \sum_{k=0}^\infty 2^k a_{2^k} \;=\; a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots .$$

Beweis: Wir setzen $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ und $s'_n := \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$. Damit ist für $n < 2^{k+1}$:

$$\begin{aligned} s_n &\le\; a_1 + (a_2{+}a_3) + (a_4{+}\ldots{+}\,a_7) + \cdots + (a_{2^k}{+}\ldots{+}a_{2^{k+1}-1}) \\ &\le\; a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} \;=\; s'_k\,. \end{aligned}$$

Ist die verdichtete Reihe also konvergent, d. h.: $\lim_{n\to\infty} s_n \;=\; s_\infty$, so ist auch die Ausgangsreihe konvergent. Ist dagegen die verdichtete Reihe divergent, so folgt aus der für $n \ge 2^{k+1}$ gültigen Beziehung

$$\begin{aligned} s_n &\ge\; a_1 + a_2 + (a_3{+}a_4) + (a_5{+}\ldots{+}\,a_8) + (a_{2^k+1}{+}\cdots{+}a_{2^{k+1}}) \\ &\ge\; a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^k a_{2^{k+1}} \;\ge\; \tfrac{1}{2}s'_{k+1} \end{aligned}$$

auch die Divergenz der Ausgangsreihe. Q.E.D.

Beispiel 3.10: Wir betrachten für ein allgemeines $r \in \mathbb{Q}_+$ die Reihe

$$s_\infty(r) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^r}\,.$$

Anwendung des Verdichtungssatzes führt auf

$$2^k a_{2^k} = 2^k (2^k)^{-r} = q^k, \qquad q := 2^{1-r}.$$

Die verdichtete Reihe ist also eine geometrische Reihe, welche (absolut) konvergent ist für $r > 1$ und divergent für $r \le 1$.

Die geometrische Reihe ist ein Spezialfall der allgemeinen „Potenzreihe“

$$s_\infty = \sum_{k=0}^\infty c_k (x - x_0)^k$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{K}$, Zentrum $x_0 \in \mathbb{K}$ und Argument $x \in \mathbb{K}$. Ein weiteres Beispiel für eine Potenzreihe ist der unendliche Dezimalbruch

$$0, d_1 d_2 d_3 \ldots \;=\; \sum_{k=1}^\infty d_k 10^{-k}, \quad d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Für Potenzreihen haben wir den folgenden Konvergenzsatz.

Satz 3.4 (Potenzreihen): *Eine Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \tag{3.2.16}$$

konvergiert absolut für alle Argumente $x \in \mathbb{K}$ *mit der Eigenschaft*

$$|x-x_0| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}; \tag{3.2.17}$$

für $|x-x_0| > \rho$ *ist sie divergent. Die Konvergenzgrenze* ρ *ist die größt mögliche und wird „Konvergenzradius" der Reihe genannt. Im Fall* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \infty$ *konvergiert die Reihe für kein* $x \neq x_0$ *, und wir setzen* $\rho := 0$ *. Im Fall* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$ *ist die Reihe für alle* $x \in \mathbb{K}$ *absolut konvergent, und wir schreiben formal* $\rho = \infty$ *.*

Beweis: Für $x \neq x_0$ gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k(x-x_0)^k|} = |x-x_0| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$
$$= \frac{|x-x_0|}{\rho} \quad \begin{cases} < 1, & \text{falls } |x-x_0| < \rho \\ > 1, & \text{falls } |x-x_0| > \rho \end{cases} .$$

Die Richtigkeit der Behauptung folgt also mit Hilfe des Wurzelkriteriums. In den Fällen $\rho = \infty$ und $\rho = 0$ konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{K}$ bzw. für keins. Q.E.D.

Bemerkung 3.8: Im Fall $|x-x_0| = \rho$ lässt sich über die Konvergenz der Potenzreihe (3.2.16) keine allgemeine Aussage machen; z. B. sind von den drei Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

mit Konvergenzradius $\rho = 1$ die erste divergent für $|x| = 1$, die zweite divergent für $x = 1$ aber konvergent für $x = -1$, und die dritte konvergent für $|x| = 1$ (Beweis Übungsaufgabe).

3.2.2 Das Rechnen mit Reihen

Definition 3.8 (Umordnung von Reihen): *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe.*

i) Für eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *heißt die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ *eine „Umordnung" der Ausgangsreihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *.*

ii) Sei $\mathbb{N} = \cup_{j\in\mathbb{N}}\{M_j\}$ *eine disjunkte Zerlegung von* $\mathbb{N}$ *in endlich oder abzählbar unendlich viele Teilindexmengen* M_j *. Sind alle Summen oder Reihen* $S_j := \sum_{k\in M_j} a_k$ *konvergent, so ist die Reihe* $\sum_{j\in\mathbb{N}} S_j$ *definiert und heißt „totale Umordnung" der Ausgangsreihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *. (Die Notation* $\sum_{k\in M_j} a_k$ *bedeutet Summation über die ihrer Größe nach geordneten Indizes* $k_1 < k_2 < k_3 \dots$ *aus* M_j *.)*

Jede Umordnung einer Reihe $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kann als *totale* Umordnung mit den 1-elementigen Indexmengen $M_k := \{\varphi(k)\}$ aufgefasst werden. Z. B. ist durch

$$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \dots$$

eine Umordnung und durch

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots)$$

eine *totale* Umordnung der Reihe gegeben.

Satz 3.5 (Umordnungssatz): *Für eine absolut konvergent Reihe* $s_\infty = \sum_{k=1}^\infty a_k$ *konvergiert auch jede Umordnung (totale Umordnung) absolut gegen denselben Limes* s_∞ *.*

Beweis: Wir geben den Beweis nur für die *einfache* Umordnung und verweisen für die *totale* Umordnung auf die Literatur. Seien s_n und s'_n die Partialsummen von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. einer Umordnung $(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir wollen die Konvergenz $\lim_{n\to\infty}(s_n - s'_n) = 0$ zeigen. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} (s'_n - s_n) + \lim_{n\to\infty} s_n = s_\infty.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dazu gibt es wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_k| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Zu jedem $n \geq n_\varepsilon$ gibt es nun sicher ein $n' \in \mathbb{N}$ $(n' \geq n_\varepsilon)$, so dass jeder Summand in der Summe $\sum_{k=1}^n a_k$ auch in der Summe $\sum_{k=1}^{n'} a_{\varphi(k)}$ vertreten ist. Ferner gibt es zu beliebigem $m \in \mathbb{N}$ ein $n'' \in \mathbb{N}$, so dass auch jedes $a_{\varphi(k)}$, $1 \leq k \leq m$, in der Folge der a_k, $1 \leq k \leq n''$, auftritt. Dann gilt für $m \geq n'$:

$$\begin{aligned} |s'_m - s_\infty| &= \Big| \sum_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k - \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} a_k \Big| \\ &\leq \Big| \sum_{k=1,\varphi(k)>n_\varepsilon}^{m} a_{\varphi(k)} \Big| + \Big| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} a_k \Big| \\ &\leq \Big| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n''} a_k \Big| + \Big| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} a_k \Big| \leq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dies impliziert die Konvergenz $s'_m \to s_\infty\,(m\to\infty)$. Wegen

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{n''} |a_k|$$

ist die Konvergenz absolut. Q.E.D.

Bemerkung 3.9: Die Variante des obigen Satzes für allgemeine *totale* Umordnungen wird meist „großer Umordnungssatz“ genannt.

Für nicht absolut konvergente Reihen ist der Umordnungssatz i. Allg. nicht gültig. Die Konvergenz der alternierende harmonische Reihe

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ist durch das Leibniz-Kriterium gesichert; sie ist aber offensichtlich nicht absolut konvergent. Für ihre Summe gilt

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{\geq 0} + \ldots = s_\infty = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}^{\leq 0} - \overbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}^{\leq 0} - \ldots < \frac{5}{6}.$$

Nun betrachten wir die folgende Umordnung der Reihe, wobei jeweils drei Reihenglieder zusammengefaßt werden:

$$s'_\infty := \underbrace{\Big(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\Big)}_{=\frac{5}{6}} + \underbrace{\Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\Big)}_{>0} + \underbrace{\Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\Big)}_{>0} + \ldots$$

Diese Reihe ist wieder konvergent, was man mit Hilfe der folgenden Umformungen und der Regeln der Folgenkonvergenz erschließen:

$$\begin{aligned}
s'_n &= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \Big\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \frac{1}{4k-3} - \underline{\frac{1}{4k-2}} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} + \underline{\frac{1}{4k-2}} - \frac{1}{4k} \Big\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \Big\} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \Big\} \\
&\to\ s_\infty + \frac{1}{2} s_\infty = \frac{3}{2} s_\infty \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Die Umordnung hat also eine Veränderung des Grenzwertes der Ausgangsreihe bewirkt.

Wir betrachten nun sog. „Doppelreihen“, d. h. unendliche Summen über doppelt indizierte Elemente a_{jk}:

$$s_\infty = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}\,.$$

Wenn für alle festen j bzw. k die Partialreihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}$ und $\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$ konvergieren, stellt sich die Frage, ob die Reihenfolge dieser unendlichen Summationen vertauschbar ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \Big). \tag{3.2.18}$$

Dass dies nicht so sein muss, sieht man anhand der Doppelfolge $(a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen

$$a_{jk} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & j \geq k \\ 0, & j < k \end{array} \right\}.$$

Offenbar sind alle Partialfolgen konvergent,

$$\lim_{k\to\infty} a_{jk} = 0, \qquad \lim_{j\to\infty} a_{jk} = 1\,,$$

dennoch gilt

$$1 \;=\; \lim_{k\to\infty} \big\{ \lim_{j\to\infty} a_{jk} \big\} \neq \lim_{j\to\infty} \big\{ \lim_{k\to\infty} a_{jk} \big\} = 0\,.$$

Dies ist ein Beispiel für die Nichtvertauschbarkeit von Grenzprozessen. Als unmittelbare Folgerung aus dem Umordnungssatz 3.5 erhalten wir die folgende Aussage über die Konvergenz von Doppelreihen.

Korollar 3.4 (Cauchyscher Doppelreihensatz): *Ist die Doppelreihe*

$$s_\infty = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}$$

bzgl. irgend einer Reihenfolge der Summation absolut konvergent, so ist jede ihrer Zeilen- und Spaltenreihen

$$s_\infty^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}, \quad s_\infty^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \quad (j,k\in\mathbb{N})$$

absolut konvergent, die Reihen dieser Zeilen- und Spaltenreihen sind absolut konvergent, und es gilt

$$s_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \Big)\,. \tag{3.2.19}$$

Schließlich betrachten wir Produkte von Reihen.

Lemma 3.8 (Cauchy-Produkt): *Für zwei absolut konvergente Reihen $s_\infty^{(1)} = \sum_{k=1}^\infty a_k$ und $s_\infty^{(2)} = \sum_{k=1}^\infty b_k$ ist die Produktreihe mit den Elementen (das sog. „Cauchy-Produkt“ der beiden Reihen)*

$$c_k := a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \cdots + a_k b_1 \quad (k\in\mathbb{N})$$

ebenfalls absolut konvergent und hat den Limes

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Big). \tag{3.2.20}$$

Beweis: Wir setzen

$$s_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad s_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \hat{s}_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad \hat{s}_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} |b_k|.$$

Dann ist

$$s_n^{(1)} \cdot s_n^{(2)} = \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_k, \qquad \hat{s}_n^{(1)} \cdot \hat{s}_n^{(2)} = \sum_{j,k=1}^{n} |a_j||b_k|,$$

sowie

$$\hat{s}_n^{(1)} \le \hat{s}_\infty^{(1)}, \qquad \hat{s}_n^{(2)} \le \hat{s}_\infty^{(2)}, \qquad \hat{s}_n^{(1)} \cdot \hat{s}_n^{(2)} \le \hat{s}_\infty^{(1)} \cdot \hat{s}_\infty^{(2)}.$$

Also ist $\hat{s}_\infty^{(1)} \hat{s}_\infty^{(2)}$ absolut konvergent. Sei weiter

$$\sigma_k := \sum_{l=1}^{k} |a_l||b_{k+1-l}| = |a_1||b_k| + \ldots + |a_k||b_1|.$$

Alle Glieder in σ_k, $k = 1, \ldots, n$, sind auch in dem Produkt $\hat{s}_n^{(1)} \cdot \hat{s}_n^{(2)}$ enthalten, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \le \hat{s}_n^{(1)} \cdot \hat{s}_n^{(2)} \le \hat{s}_\infty^{(1)} \cdot \hat{s}_\infty^{(2)}.$$

Also sind die Partialsummem über die σ_k beschränkt. Folglich konvergieren die Reihen

$$\sigma_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \ge \sum_{k=1}^{n} |c_k|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit konvergiert auch die Reihe über die c_k absolut. Da ferner

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} c_k - s_n^{(1)} \cdot s_n^{(2)} \Big| = \Big| \sum_{j,k=1, j+k>n}^{n} a_j b_k \Big| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

folgt die Richtigkeit der Behauptung. Q.E.D.

Bemerkung 3.10: Die Aussage von Lemma 3.8 ist i. Allg. für nur bedingt konvergente Reihen nicht richtig. Wir notieren noch der Vollständigkeit halber, ohne Beweis, die folgenden Varianten des Cauchyschen Produktsatzes:

Produktsatz von Mertens[6]: *Gegeben seien zwei konvergente Reihen $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$. Ist eine von ihnen absolut konvergent, so konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Big).$$

Produktsatz von Abel: *Gegeben seien zwei konvergente Reihen $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$. Ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=1}^\infty c_k$ konvergent, so gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Big).$$

[6]Franz Mertens (1840–1927): Östereichischer Mathematiker; Prof. in Graz und Wien; Beiträge zur Zahlentheorie, Algebra und Potentialtheorie.

3.2.3 Die Exponentialreihe

Die sog. „Exponentialreihe“

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist eine Potenzreihe. Ihr Konvergenzradius ist

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

d. h.: Sie ist für alle Argumente $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergent.

Satz 3.6: *Der Wert der Exponentialreihe für das Argument $x = 1$ ist gerade die Eulersche Zahl e :*

$$\exp(1) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;=\; \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \;=:\, e. \tag{3.2.21}$$

Diese ist irrational (sogar transzendent).

Beweis: i) Die Partialsummen der Exponentialreihe für $x = 1$ seien mit a_n abgekürzt. Wir haben in Beispiel 3.4 gesehen, dass $a_n < 3$. Nach der binomischen Formel (Satz 1.4) gilt:

$$\begin{aligned} b_n \;&=\; \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \\ &=\; 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\ &=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{n-1}{n}\Big) \;<\; a_n \;<\; 3, \end{aligned}$$

d. h.: Die Folge der b_n ist beschränkt. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} b_{n+1} \;&=\; \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \\ &=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{n-1}{n+1}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{n}{n+1}\Big) > b_n. \end{aligned}$$

Die (beschränkte) Folge der b_n ist also monoton wachsend und folglich konvergent. Ihren Limes nennen wir e. Wegen $b_n < a_n$ ist dann $e = \lim_{n\to\infty} b_n \le \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei nun n fest gehalten. Für alle $m > n$ gilt dann $b_m > b_n$ sowie

$$b_m > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{m}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1 - \frac{1}{m}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{n-1}{m}\Big) \;=:\; c_m\,.$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert dann

$$\lim_{m\to\infty} c_m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n \,.$$

Hieraus folgern wir mit Hilfe von $b_m > c_m$, dass

$$\lim_{m\to\infty} b_m \geq \lim_{m\to\infty} c_m = a_n \,.$$

Da der Index n beliebig gewählt war, folgt

$$e = \lim_{m\to\infty} b_m \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq \lim_{n\to\infty} a_n \geq e \,.$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

ii) Wir zeigen die Irrationalität von e. Seine Transzendenz kann mit den bisher vorhandenen Mitteln aber noch nicht erschlossen werden. Angenommen, e wäre rational, d. h. $e = p/q$ mit gewissen $p, q \in \mathbb{N}$. Zunächst wollen wir eine allgemeine Abschätzung für das „Restglied" in der Reihendarstellung von e ableiten:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} - \left\{1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right\} &= \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-1}}\right\} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+1}{n} \,. \end{aligned}$$

Hierzu wurde die bekannte Abschätzung für die binomische Reihe mit $|q| < 1$ verwendet:

$$1 + q + \cdots + q^{m+1} = \frac{1-q^m}{1-q} \leq \frac{1}{1-q} \,.$$

Die gewonnene Abschätzung gilt für jedes m und folglich:

$$0 < e - \left\{1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\} \leq \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+1}{n} \,.$$

Für $n = q$ gilt dann:

$$0 < \frac{p}{q} - \left\{1 + \cdots + \frac{1}{q!}\right\} \leq \frac{1}{(q+1)!}\,\frac{q+1}{q}$$

bzw. nach Multiplikation mit $q!$:

$$0 < p(q-1)! - \left\{q! + \cdots + 1\right\} \leq \frac{1}{q} \,.$$

Dies bedeutet einen Widerspruch, da keine ganze Zahl zwischen 0 und einem Bruch $1/q$ liegen kann. Q.E.D.

Anwendung 3.2.1: Die Darstellung der Eulerschen Zahl e über die Exponentialsumme kann gut zu ihrer näherungsweisen Berechnung verwendet werden, da die Exponentialreihe sehr schnell konvergiert. Dazu schreiben wir für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\Big| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big| &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \Big\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \Big\} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \Big\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \Big\} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \big\{ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \dots \big\} = \frac{2}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Die approximierende Exponentialsumme

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \approx e$$

kann mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel berechnet werden:

$$s_0 = f_0 := 1, \quad k \geq 1: \quad f_k = \frac{f_{k-1}}{k}, \; s_k = s_{k-1} + f_k.$$

Damit erhält man z. B. für $n = 73$ die Eulersche Zahl auf 100 Dezimalstellen genau (bei Verwendung von Arithmetik mit Rundungsfehlerkontrolle); s. Foster [1] Band 1, § 8:

$$e = 2{,}718\,281\,828 \; \dots \,.$$

Die Exponentialreihe konvergiert offenbar sehr schnell. Für die zunächst zur Definition von e verwendete Folge gilt dagegen asymptotisch nur

$$e - \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \approx \frac{e}{2n}\,.$$

Korollar 3.5 (Funktionalgleichung von $\exp(x)$): *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y). \tag{3.2.22}$$

Beweis: Das Cauchy-Produkt der absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, $\sum_{k=0}^{\infty} y^k/k!$ sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Für die Glieder c_k folgt mit Hilfe der allgemeinen binomischen Formel:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} = \frac{1}{k!}(x+y)^k.$$

Also ist gemäß dem Produktsatz für absolut konvergente Reihen:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y).$$

Q.E.D.

Korollar 3.6: *Aus der Definition von* $\exp(x)$ *und der Regel (3.2.22) ergeben sich die folgenden Aussagen:*

1. Für alle $x \in \mathbb{K}$ *gilt* $\exp(x) \neq 0$ *und* $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ *.*

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) > 0$ *.*

3. Für $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(n) = e^n$ *.*

Beweis: 1) Mit Hilfe der Funktionalgleichung (3.2.22) erhalten wir für $x \in \mathbb{K}$:

$$\exp(-x)\exp(x) = \exp(x - x) = \exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1,$$

d. h.: $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

2) Weiter ist für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$:

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1.$$

Für $x < 0$ ist $-x > 0$ und folglich gemäß dem eben Gezeigten $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

3) Offenbar ist $\exp(0) = 1 = e^0$. Sei $\exp(n) = e^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = \exp(n)e^1 = e^n e = e^{n+1},$$

und die behauptete Beziehung ergibt sich durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$. Ihre Richtigkeit auch für $-n \in \mathbb{N}$ folgt aus $\exp(-n) = 1/\exp(n) = 1/e^n = e^{-n}$. Q.E.D.

Definition 3.9: *Die Beziehung* $\exp(n) = e^n$ *für* $n \in \mathbb{Z}$ *legt die folgende Definition für beliebige* $x \in \mathbb{K}$ *nahe:*

$$e^x := \exp(x).$$

Die sog. „Exponentialfunktion“ $f(x) = e^x$ (oder kurz „e-Funktion“) ist eine der wichtigsten Funktionen der Analysis und wird uns noch an mehreren Stellen in diese Text begegnen.

3.3 Übungen

Übung 3.1 (Aufgabe zu „exotischen“ Zahlenfolgen):
a) Man beweise folgendes Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \to a \quad (n \to \infty),$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

(Hinweis: Man kann verwenden, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für $c \in \mathbb{R}_+$.)

b) Man verwende dieses Konvergenzkriterium zur Untersuchung der Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Gliedern:

$$a_n := \sqrt[n]{n!}\,, \qquad b_n := \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\,, \qquad c_n = \frac{n^n}{n!}\,.$$

(Hinweis: Man kann verwenden, dass $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.)

Übung 3.2 (Aufgabe zu Häufungspunkten):
a) Man rekapituliere die Definition des „Häufungswertes" einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen sowie die eines „Häufungspunkte" einer unendlichen Teilmengen $A \subset \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Kann eine endliche Teilmenge $A \subset \mathbb{K}$ einen Häufungspunkt haben?

b) Man zeige, dass es zu jedem Häufungspunkt a einer Teilmenge $A \subset \mathbb{K}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in A$ mit $a_n \neq a$ gibt, die gegen a konvergiert.

c) Man zeige, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen $a_n \in \mathbb{K}$, welche beschränkt ist und nur einen Häufungswert a hat, insgesamt gegen a konvergiert. Gilt diese Aussage auch für unbeschränkte Folgen?

Übung 3.3 (Aufgabe zu Reihen mit nicht negativen Elementen):
Man zeige, dass für eine konvergente Reihe

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

mit nicht negativen Gliedern $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch die Reihen

$$s_\infty^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$$

konvergent sind.

Übung 3.4 (Aufgabe zu „Limes superior" und „Limes inferior"):
Man zeige die folgenden Eigenschaften des „Limes superior" und des „Limes inferior" von Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei angenommener Existenz der auftretenden Größen (d. h. der Beschränktheit nach unten oder oben der Folgen):

a) Für allgemeine $a_n, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &\le \liminf_{n\to\infty}\,(a_n+b_n) \le \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \\ &\le \limsup_{n\to\infty}\,(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,.\end{aligned}$$

b) Im Falle $a_n,\, b_n \geq 0$:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}\,(a_n b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty}\,(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n\,.$$

(Hinweis: Man wähle geeignete Teilfolgen aus und nutze, dass für eine konvergente Folge jede Teilfolge ebenfalls gegen deren Limes konvergiert.)

Übung 3.5 (Aufgabe zu alternierenden Reihen):
a) Man formuliere das Leibnizsche Kriterium für alternierende Reihen in $\mathbb{R}$.

b) Das Dirichletsche Kriterium lautet wie folgt: *Die Reihe* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ *in* $\mathbb{R}$ *habe beschränkte Partialsummen und die Folge* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *sei eine monotone Nullfolge (Also alle ihre Elemente sind positiv oder alle negativ). Dann konvergiert die Reihe*

$$s_\infty = \sum_{k=1}^\infty a_k b_k\,.$$

Man zeige, dass dieses Kriterium das Leibnizsche Kriterium als Spezialfall beinhaltet.

c) Man beweise das Dirichletsche Kriterium. Dazu zeige man zunächst, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ genau dann konvergent ist, wenn die sog. „Teleskopreihe“

$$s_\infty := \sum_{k=1}^\infty (a_k - a_{k+1})$$

konvergiert. In diesem Fall ist dann $s_\infty = a_1 - \lim_{k\to\infty} a_k$. Ferner zeige man, dass für beliebige reelle Zahlen $a_1,\dots,a_n$ und $b_1,\dots,b_n,b_{n+1}$ die folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \;=\; A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1}), \qquad A_k := \sum_{j=1}^k a_j\,.$$

Mit diesen Hilfsmitteln beweise man dann das Dirichletsche Kriterium. (Hinweis: Im Falle von Mangel an eigenen Ideen konsultiere man den Text.)

Übung 3.6 (Aufgabe zur Konvergenz von Folgen):
Man untersuche, ob die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergent sind (bei der zweiten Folge in Abhängigkeit vom Parameter $x \in \mathbb{R}$), und bestimme gegebenenfalls ihren Limes:

$$a)\;\; a_n = n\Big(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1\Big), \qquad b)\;\; a_n = \Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)^n,\;\; x\in\mathbb{R}.$$

Übung 3.7 (Aufgabe zur Konvergenz von Reihen):
Man untersuche mit Hilfe der bekannten Konvergenzkriterien das Konvergenzverhalten (konvergent, absolut konvergent, divergent, u.s.w.) der folgenden Reihen:

$$a)\quad s_\infty^{(a)} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad b)\quad s_\infty^{(b)} = \sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\Big)^k, \qquad c)\quad s_\infty^{(c)} = \sum_{k=1}^\infty \frac{k^3}{3^k}.$$

Übung 3.8 (Aufgabe zu parameterabhängigen Reihen):
Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, konvergiert die folgende Reihe (mit Begründung)

$$s_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k} \ ?$$

Übung 3.9 (Aufgabe zu Potenzreihen):
a) Was ist eine allgemeine „Potenzreihe“? Was ist deren „Konvergenzradius“ ρ und wie kann dieser aus den Reihengliedern berechnet werden? Wie sind die Grenzfälle „$\rho = 0$“ und „$\rho = \infty$“ zu interpretieren?

b) Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$i)\quad s_\infty^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k x^{2k}, \qquad ii)\quad s_\infty^{(ii)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}, \qquad iii)\quad s_\infty^{(iii)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!},$$

$$iv)\quad s_\infty^{(iv)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2k}, \qquad v)\quad s_\infty^{(v)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \qquad vi)\quad s_\infty^{(vi)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k.$$

Übung 3.10 (Weitere Aufgaben zu Zahlenfolgen):
a) Man zeige, dass für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = 0 \qquad\qquad (*)$$

notwendig jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $\liminf_{n\to\infty} a_n \le a \le \limsup_{n\to\infty} a_n$ Häufungswert ist. Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Folge, welche das Kriterium $(*)$ erfüllt, und trotzdem nicht konvergent ist.

b) Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ seien die Elemente a_n rekursiv definiert durch:

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}),\ n \ge 3.$$

Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ihren Limes.

c) Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit *überabzählbar* unendlich vielen Häufungswerten?

Übung 3.11 (Weitere Aufgaben zu Zahlenreihen):
a) Man streiche in der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ alle Terme $1/k$, in denen die Dezimaldarstellung von k die Ziffer 0 enthält. Ist die verbleibende Reihe divergent oder konvergent?

b) Man zeige, dass die Folge der Zahlen

$$a_n := \frac{1}{n} \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Big)$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Die Bestimmung dieses Grenzwerts ist mit den bisherigen Hilfsmitteln aus dem Text noch nicht möglich ($\rightarrow$ sog. „Eulersche Konstante γ “).

c) Welche von den folgenden Reihen ist konvergent bzw. divergent?

$$a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(2,7)^k k!}, \qquad b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(2,8)^k k!}.$$

Übung 3.12 (Aufgabe zum Riemannschen Umordnungssatz):
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe. Man zeige, dass es dann zu beliebig gewähltem $C \in \mathbb{R}$ eine (einfache) Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\varphi(k)}$ der Reihe mit zugehöriger bijektiver Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{\varphi(k)} = C\,.$$

Ein elementarer Beweis dieser Behauptung stammt von Riemann[7](1826–1866).

Übung 3.13 (Aufgabe zu den „Fibonacci-Zahlen“):
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der „Fibonacci-Zahlen“ ist rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1, \qquad n \in \mathbb{N}: \ \ a_{n+1} := a_n + a_{n-1}.$$

Man zeige für die Quotienten $g_n := a_{n+1}/a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} g_n \ = \ g := \tfrac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big) \qquad (\text{„goldener Schnitt“}).$$

(Hinweis: Man rechnet leicht nach, daß $g_{n+1} = 1 + 1/g_n$ und $g = 1 + 1/g$.)

Übung 3.14 (Aufgabe zu rekursiven Zahlenfolgen):
Man betrachte für $a \in \mathbb{R}_+$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \quad a_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \quad \dots,$$

welche der rekursiven Beziehung $a_{n+1} = \sqrt{a+a_n},\ n \in \mathbb{N},$ genügen.

a) Man zeige, dass diese Folge beschränkt und monoton wachsend ist. Folglich ist sie konvergent. (Hinweis: Vollständige Induktion)

b) Man zeige, dass für den Grenzwert $x = \lim a_n$ die Beziehung $x = \sqrt{a+x}$ gilt, und bestimme diesen.

[7]Bernhard Riemann (1826–1866): Deutscher Mathematiker; Prof. in Göttingen als Nachfolger Dirichlets; Mitbegründer der Funktionentheorie und der modernen Geometrie; einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, von großem Einfluß auch auf die theoretische Physik.

Übung 3.15 (Aufgabe zur Dezimalbruchdarstellung):
Man zeige, dass im Rahmen des üblichen Divisionsprozesses zur Gewinnung der Dezimalbruchdarstellung rationaler Zahlen für periodische Dezimalbrüche mit Periodenlänge $s \in \mathbb{N}$ die folgende Regel gilt:

$$0,\overline{d_1 \dots d_s} = \frac{d_1 \dots d_s}{\underbrace{9 \dots 9}_{s \text{ mal}}}, \qquad d_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ Dezimalstellen.}$$

(Hinweis: Man schreibe den Dezimalbruch als Limes einer Folge von endlichen Summen und erinnere sich an die geometrische Summenformel.)

Übung 3.16 (Aufgabe zum Konvergenzradius):
a) Man zeige, dass für den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_+$ einer Potenzreihe

$$s_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

im Falle $c_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ die folgende Beziehung besteht:

$$A_- := \liminf_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \le \frac{1}{\rho} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} =: A_+.$$

(Hinweis: Man wende das Quotientenkriterium an.)

b) Was gilt für die Grenzfälle $\rho = \infty$ und $\rho = 0$?

Übung 3.17 (Aufgabe zur Exponentialreihe):
Man zeige die folgenden Eigenschaften der durch die Exponentialreihe definierten (reellen) Exponentialfunktion $e^x := \exp(x)$ für beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&a) \quad e^x > 1 + \frac{1}{n!} x^n, \quad x > 0,\\
&b) \quad e^x < \frac{1}{1 + \frac{(-x)^n}{n!}}, \quad x < 0,\\
&c) \quad \frac{e^x}{x^n} \to \infty \ \ (x \to \infty).
\end{aligned}$$