0 Vorwort

Die Differential- und Integralrechnung wurde, aufbauend auf früheren Ideen, fast zeitgleich von Newton[1] und Leibniz[2] „erfunden“. In der Folge entwickelten sich im englischsprachigen Raum der „Calculus“ und im deutschsprachigen Raum die „Analysis“. Hauptgegenstand sind „Grenzprozesse“ für Zahlen und Funktionen. In diesem dreiteiligen Analysiskurs wird die Differential- und Integralrechnung unter Berücksichtigung der beiden untrennbar verbundenen Gesichtspunkte „Berechnung“ und „Analyse“ dargestellt.

Der vorliegende erste Teil behandelt die traditionelle Differential- und Integralrechnung für Funktionen *einer reellen* Variable mit gelegentlichen Ausflügen in den Bereich der *komplexen* Zahlen. Die ersten drei Kapitel dienen dem Vertrautwerden mit den grundlegenden Begriffen und Denkweisen der Analysis. Am Anfang stehen in Kapitel 1 die mathematische „Sprache“ sowie die Zahlsysteme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ der *natürlichen*, der *ganzen* und der *rationalen* Zahlen. Durch einen Grenzprozess werden aus diesen in Kapitel 2 die Systeme $\mathbb{R}$ der *reellen* und $\mathbb{C}$ der *komplexen* Zahlen konstruiert. In diesen werden sich dann alle weiteren Betrachtungen abspielen. Dies beginnt in Kapitel 3 mit der Untersuchung der Konvergenz von *Folgen* und *Reihen* reeller (und komplexer) Zahlen:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad a_n \to a\,? \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,? \quad (n\to\infty).$$

Danach werden in Kapitel 4 *Funktionen*

$$f: D\subset\mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}: \quad x \to y = f(x),$$

reeller Zahlen betrachtet und deren wichtigste Eigenschaften wie *Stetigkeit* und *Monotonie* untersucht. Die natürliche Fortsetzung ist dann die Frage nach der Konvergenz von *Folgen* und *Reihen* solcher Funktionen,

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad f_n(x) \to f(x)\,? \qquad \sum_{k=1}^{n} f_n(x) \to \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)\,? \quad (n\to\infty).$$

Damit sind die Grundlagen für die eigentliche *Differential- und Integralrechnung* gelegt. Diese beginnt in Kapitel 5 mit der Einführung des Begriffes der *Ableitung* $f'(\cdot)$ einer Funktion als Grenzwert von *Differenzenquotienten*:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x) \quad (h\to 0).$$

Der resultierende Kalkül erlaubt es u.a., *Extremalstellen* (d. h. Maxima und Minima) von Funktionen durch Eigenschaften ihrer Ableitungen zu charakterisieren:

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\le 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0)=\max_{x\in D} f(x).$$

[1] Isaac Newton (1643-1727): Englischer Physiker und Mathematiker; wirkte an der Universität Cambridge und entwickelte u.a. die Grundlagen der klassischen Mechanik.

[2] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): Deutscher Philosoph und Mathematiker; wirkte seit 1676 in Hannover und gilt als der letzte „Universalgelehrte“; war neben Newton der Begründer der Infinitesimalrechnung, deren heute gebräuchliche Formelsprache im wesentlichen auf ihn zurückgeht; suchte als Philosoph die Verbindung zwischen Philosophie und Naturwissenschaft.

Dies ist eine der wichtigsten Anwendungen der Analysis. Eine weitere wichtige Folgerung ist die Approximation einer Funktion durch Polynome in Form ihrer *Taylor-Reihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

Kapitel 6 behandelte die *Integration* (oder Inhaltsmessung) von Funktionen. Das *Integral* einer Funktion wird dabei als Grenzwert endlicher Summen eingeführt:

$$\sum_{k=1}^{n} h_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \to \int_a^b f(x)\,dx \quad (n\to\infty).$$

Mit der Differentiation und Integration von Funktionen stehen die Grundkonzepte der klassischen Analysis bereit. Darauf aufbauend wird im abschließenden Kapiteln 7 die Approximation von periodischen Funktionen durch trigonometrische Polynome in Form ihrer *Fourier-Reihe*

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big\{a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)\big\},$$

behandelt.

Dieser erste Teil des Analysiskurses beschränkt sich auf die Betrachtung von Funktionen nur *einer* Variablen. Die Erweiterung dieser Theorie für Funktionen *mehrerer* Variablen, d. h. zur Analysis im $\mathbb{R}^n$, wird Gegenstand des zweiten Teils sein. Im dritten Teil wird dies dann schließlich zur Analysis in *unendlich* dimensionalen Funktionenräumen weiterentwickelt werden.

Wem dieser Stoff zu schwierig und unnütz vorkommt, mag sich mit folgenden Ausführungen von A. Schopenhauer[3] trösten: *Dass die niedrigste aller Geistestätigkeiten die arithmetische sei, wird dadurch belegt, dass sie die einzige ist, welche auch durch eine Maschine ausgeführt werden kann; wie denn jetzt in England dergleichen Rechenmaschinen bequemlichkeitshalber schon in häufigem Gebrauch sind. – Nun läuft aber alle analysis finitorum et infinitorum im Grunde doch auf Rechnerei zurück. Danach bemesse man den „mathematischen Tiefsinn, über welchen schon Lichtenberg (Georg C. Lichtenberg, 1742–1799) sich lustig macht, indem er sagt: „Die sogenannten Mathematiker von Profession haben sich, auf die Unmündigkeit der übrigen Menschen gestützt, einen Kredit von Tiefsinn erworben, der viel Ähnlichkeit mit dem von Heiligkeit hat, den die Theologen für sich haben.“*

Das Schreiben dieses Textes haben einige Mitarbeiter und Studenten durch Erstellen der Abbildungen und Korrekturlesen unterstützt. Besonderer Dank gebührt den Herren Thomas Richter, Winnifried Wollner und Rashed Zamni.

[3] Arthur Schopenhauer (1788-1860): Deutscher Philosoph; wirkte in Berlin und Frankfurt am Main; Das Zitat stammt aus Parerga und Paralipoména (Kleine philosophische Schriften), Band 2, „Vereinzelte, jedoch systematisch geordnete Gedanken über vielerlei Gegenstände“, in der von Julius Fraunstädter herausgegebenen Fassung von 1891, Kapitel III §35. (Dieser Abschnitt sowie das Ende des vorausgehenden §34 fehlen allerdings in der Originalausgabe von Schopenhauer, Verlag A. W. Hahn, Berlin 1851.)