

7 FE-Methoden für kompressible Strömungen

In diesem Kapitel wollen wir numerische Methoden für *kompressible* Strömungen diskutieren. Dabei ist es erforderlich, die unterschiedlichen Quellen der Kompressibilität zu berücksichtigen, da diese wesentlichen Einfluss auf die Struktur der Verfahren haben. Die typischen Fälle sind:

- Hydrostatisch „inkompressible“ oder nur „schwach kompressible“, viskose Strömung ($0 \leq Ma \leq 0,5$) mit Dichteänderungen bedingt durch Temperaturgradienten (z. B. als Folge äußerer Wärmequellen oder Wärmeentwicklung durch chemische Reaktionen; Prototypen: temperaturgetriebene Konvektion, Verbrennungsprozesse). Das zugrunde liegende Modell sind die Navier-Stokes-Gleichungen in primitiven Variablen $\{p, v, \theta\}$, wobei hier der Druck anstelle der Dichte als primale Variable verwendet wird. Im Extremfall $Ma \ll 1$ wird die „low-Mach-number“-Approximation verwendet. Zur Diskretisierung betrachten wir hier einen *konformen* Finite-Elemente-Ansatz, der in Anlehnung an den „inkompressiblen“ Grenzfall aufgebaut ist.
- Schnelle Gasströmungen mit Dichteänderungen bedingt durch „Verdichtungsstöße“ im Bereich $Ma \geq 0,5$ (z. B. als Folge der Abbremsung durch ein Hindernis; Prototypen: Flugkörperumströmung, Detonationswellen). Das zugrunde liegende Modell besteht aus den Navier-Stokes-Gleichungen in konservativen Variablen $\{\rho, \rho v, \rho E\}$, welche sich im Extremfall vernachlässigbarer Viskosität auf die Euler-Gleichungen reduzieren. Zur Diskretisierung betrachten wir hier einen „unstetigen“ Finite-Elemente-Ansatz („dG-Verfahren“), der insbesondere die lokalen Erhaltungseigenschaften bewahrt.

In der Praxis können diese Situationen natürlich auch simultan innerhalb derselben Strömungskonfiguration auftreten (Beispiel: Akkretionsscheibenströmung um junge Sterne). Wegen der in den beiden Strömungstypen wesentlich verschiedenen Mechanismen der Informationsausbreitung (elliptisch versus hyperbolisch) werden auch die zugehörigen numerischen Verfahren sinnvollerweise getrennt behandelt.

7.1 Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahl

7.1.1 Das zugrunde liegende „low-Mach number“-Modell

Es sei zunächst an die früher beschriebene Modifikation der allgemeinen Navier-Stokes-Gleichungen für Strömungen kleiner Mach-Zahlen erinnert. In der Praxis zeigt sich nun, dass im Fall kleiner Mach-Zahl die durch die Auspaltung des Drucks $p = p_{th} + p_{hyd}$ induzierten Änderungen im Modell sehr klein sind und nur geringen Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung haben. Daher können sie auch ebensogut weggelassen und weiter mit den ursprünglichen Gleichungen gearbeitet werden. Wesentlich ist, dass in diesem Fall der Druck p die Dichte ρ als primale Variable ersetzt. Dadurch können auch Konfigurationen behandelt werden, bei denen die Mach-Zahl nicht überall „klein“ ist, d. h. der ganze „subsonische“ Bereich $0 \leq Ma < 1$.

Ausgangspunkt sind die allgemeinen Zustandsgleichungen in nicht-konservativer Form:

$$\nabla \cdot v - \rho^{-1} \{ \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho \} = 0, \quad (7.1.1)$$

$$\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \nabla \cdot \tau + \nabla p = \rho g := f_v, \quad (7.1.2)$$

$$\rho c_p \partial_t \theta + \rho c_p v \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) = \partial_t p_{th} + \rho h =: f_\theta. \quad (7.1.3)$$

mit dem Tensor der Reibungsspannungen

$$\tau := \mu \{ \nabla v + \nabla v^T \} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot v I.$$

Ferner wird wieder das ideale Gasgesetz in der folgenden Form angesetzt:

$$\rho = \frac{p}{R\theta}. \quad (7.1.4)$$

Bei Verwendung des Drucks als primale Variable erhält die Kontinuitätsgleichung unter Ausnutzung des Gasgesetzes die Gestalt

$$\nabla \cdot v - p^{-1} \{ \partial_t p + v \cdot \nabla p \} - \theta^{-1} \{ \partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta \} = 0. \quad (7.1.5)$$

Die zugehörigen stationären Gleichungen lauten wie folgt:

$$\nabla \cdot v - p^{-1} v \cdot \nabla p - \theta^{-1} v \cdot \nabla \theta = 0, \quad (7.1.6)$$

$$\rho v \cdot \nabla v - \nabla \cdot \tau + \nabla p = f_v, \quad (7.1.7)$$

$$\rho c_p v \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) = f_\theta. \quad (7.1.8)$$

7.1.2 Finite-Elemente-Diskretisierung im Ort

Als Diskretisierung betrachten wir in Anlehnung an den „inkompressiblen“ Fall einen konformen $Q_1/Q_1/Q_1$ -Ansatz auf Vierecks- bzw. Hexaedergittern. Da die Diskretisierung auch robust für den Grenzübergang $Ma \rightarrow 0$ sein soll, verwenden wir wieder „least-squares“ Stabilisierung für den Druck sowie „Stromliniendiffusion“ für die Transportterme. Da die Details dieser Diskretisierung gegenüber dem intensiv untersuchten „inkompressiblen“ Fall keine wesentlich neuen Einsichten liefern, werden sie hier nicht weiter ausgearbeitet.

7.1.3 Projektionsverfahren

Zur Behandlung instationärer Probleme bieten sich wieder Operatorsplitting-Verfahren in Anlehnung an die Projektionsverfahren im „inkompressiblen“ Fall an. Wir verallgemeinern im Folgenden das klassische Chorinsche Projektionsverfahren für das Modell kompressibler Strömungen. Zur Vereinfachung der Darstellung werden dabei für die Geschwindigkeit homogene Dirichlet-Randbedingungen,

$$v|_{\partial\Omega} = 0,$$

und für die Temperatur homogene Neumann-Randbedingungen gestellt,

$$\partial_n \theta|_{\partial\Omega} = 0.$$

Alle anderen Größen sind am Rand unbestimmt. Daneben werden Anfangsbedingungen gestellt:

$$\rho|_{t=0} = \rho^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad \theta|_{t=0} = \theta^0.$$

Projektionsverfahren: Ausgehend von den Startwerten $\{\rho^0, p^0, v^0, \theta^0\}$ mit $p^0 := R\rho^0\theta^0$ und einer Hilfsgröße $q^0 := 0$ lautet der Schritt vom Zeitlevel t_{m-1} zum Zeitlevel $t_m = t_{m-1} + k$,

$$\{\rho^{m-1}, p^{m-1}, v^{m-1}, \theta^{m-1}, q^{m-1}\} \rightarrow \{\rho^m, p^m, v^m, \theta^m, q^m\},$$

wie folgt:

1. Prädiktorschritt für Geschwindigkeit:

$$\rho^{m-1} k^{-1} (\tilde{v}^m - v^{m-1}) + \rho^{m-1} \tilde{v}^m \cdot \nabla \tilde{v}^m - \nabla \cdot \tilde{\tau}^m = f_v^{m-1} - \nabla \cdot (q^{m-1} - p^{m-1}),$$

$$\text{wobei } \tilde{\tau}^m := \mu \{ \nabla \tilde{v}^m + (\nabla \tilde{v}^m)^T \} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \tilde{v}^m \text{ und } \tilde{v}^m|_{\partial\Omega} = 0.$$

2. Prädiktorschritt für Temperatur:

$$c_p \rho^{m-1} k^{-1} \{ \theta^m - \theta^{m-1} \} + c_p \rho^{m-1} \tilde{v}^m \cdot \nabla \theta^m - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta^m) = f_\theta^{m-1},$$

$$\text{wobei } \partial_n \theta|_{\partial\Omega} = 0.$$

3. Prädiktorschritt für Druck:

$$p^m := p^{m-1} - \nabla \cdot \tilde{v}^m.$$

4. Druck-Poisson-Gleichung:

$$-\Delta q^m = k^{-1} \nabla \cdot \tilde{v}^m - (p^m)^{-1} \{ d_t p^m + \tilde{v}^m \cdot \nabla p^m \} - (\theta^m)^{-1} \{ d_t \theta^m + \tilde{v}^m \cdot \nabla \theta^m \},$$

$$\text{where } d_t p^m := k^{-1} (p^m - p^{m-1}) \text{ und } d_t \theta^m := k^{-1} (\theta^m - \theta^{m-1}) \text{ sowie } \partial_n q^m|_{\partial\Omega} = 0.$$

5. Korrektorschritt:

$$v^m := \tilde{v}^m + k \nabla q^m, \quad \rho^m := R p^m \theta^m.$$

Der letzte Korrektorschritt erzeugt eine Geschwindigkeitsnäherung v^m mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v^m &= \nabla \cdot \tilde{v}^m + k \Delta q^m \\ &= (p^m)^{-1} \{ d_t p^m + \tilde{v}^m \cdot \nabla p^m \} + (\theta^m)^{-1} \{ d_t \theta^m + \tilde{v}^m \cdot \nabla \theta^m \}, \end{aligned}$$

d.h.: Das vorgeschlagene Projektionsverfahren ist konsistent mit den Grundgleichungen (7.1.1) - (7.1.3). Durch eine Symmetrisierung des Verfahrensschemas kann auf dieser Basis auch ein Projektionsverfahren 2. Ordnung im Zeitinkrement k aufgebaut werden. Die praktische Realisierung und systematische Untersuchung dieses Verfahrens steht aber noch aus und wird Gegenstand zukünftiger Forschung sein.

7.2 Lösung der Euler-Gleichungen

In schnellen Gasströmungen können innere Reibungseffekte und Wärmetransport durch Diffusion näherungsweise vernachlässigt werden. Damit reduzieren sich die in konservativer Form geschriebenen (kompressiblen) Navier-Stokes-Gleichungen auf die Euler-Gleichungen für ein reibungsfreies Gas:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (7.2.9)$$

$$\partial_t (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p = \rho f, \quad (7.2.10)$$

$$c_p \partial_t (\rho E) + c_p \nabla \cdot (\rho E v + p v) = h, \quad (7.2.11)$$

mit der Gasgleichung

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2} \rho v^2). \quad (7.2.12)$$

Im Fall fehlender äußerer Volumenkräfte lässt sich dieses System in Form einer (hyperbolischen) „Erhaltungsgleichung“ für den Vektor der konservativen Variablen Dichte, Impuls und spezifische Gesamtenergie, $u := (\rho, \rho v, \rho E)^T$, schreiben:

$$\partial_t u + \nabla \cdot F(u) = 0, \quad (7.2.13)$$

mit der „Flussfunktion“

$$F(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho(v \otimes v + pI) \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}.$$

Schreibt man $n \cdot F(u) = B(u, n)u$, so sind die Eigenwerte der Matrix $B(u, n)$ gegeben durch

$$\lambda_1 = v \cdot n - c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = v \cdot n, \quad \lambda_4 = v \cdot n + c,$$

wobei $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ für die Schallgeschwindigkeit steht.

Bei der Diskretisierung dieses Systems ist insbesondere darauf zu achten, dass die lokalen Erhaltungseigenschaften auch nach Diskretisierung erhalten bleiben:

$$\int_{\partial K} n \cdot F(u_h) \, d\sigma = 0, \quad K \in \mathbb{T}_h,$$

Dies ist im Rahmen der Finite-Elemente-Methode mit den sog. „unstetigen“ Galerkin-Verfahren („DG-Verfahren“) möglich. Diese werden im Folgenden beginnend mit einfachen skalaren Modellproblemen eingeführt.

Die *unstetigen* Galerkin-Verfahren sind in den letzten Jahren zunehmend populärer geworden (s. Cockburn et al. [81] und Di Pietro/Ern [82]). Die ursprüngliche Idee des DG-Verfahrens erscheint erstmals in einer Arbeit von Reed/Hill¹ (1973) im Zusammenhang mit der Approximation der Neutronentransportgleichung; eine erste mathematische Analyse stammt von Lesaint/Raviart² (1974).

¹W. H. Reed and T. R. Hill: *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973; in Proc. Amer. Nucl. Soc.

²P. Lesaint; P. A. Raviart: *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Publications mathématiques et informatiques de Rennes, Issue: S4, pp. 1–40 (1974).

Die DG-Methoden bilden die natürliche Verallgemeinerung der Finite-Volumen Verfahren, die gerade dem unstetigen Galerkin-Verfahren mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen (DG(0)-Verfahren) entsprechen. Die DG-Methode bietet die Möglichkeit, einfach durch Erhöhung des Polynomgrads systematisch eine höhere Ordnung des Verfahrens zu erreichen, was dagegen bei Finite-Volumen-Verfahren nur mit sog. „recovery“-Techniken möglich ist, die insbesondere auf unstrukturierten und lokal verfeinerten Gittern äußerst kompliziert sind. Die beim unstetigen Galerkin-Verfahren, im Vergleich zu stetigen Finite-Elemente Verfahren, einfach zu realisierende, lokale (d. h. auf einzelnen Zellen) Erhöhung des Polynomgrads kann zur sog. „hp-Verfeinerung“ genutzt werden. Diese hp-Methode erzeugt Verfahren beliebig hoher Ordnung bis hin zu exponentieller Konvergenz.

7.2.1 DG-Verfahren für lineare Transportprobleme

Zur Einführung des „unstetigen“ Galerkin-Verfahrens („discontinuous Galerkin method“ oder kurz „DG method“) betrachten wir zunächst die lineare, stationäre Transportgleichung für $u = u(x)$:

$$b \cdot \nabla u = 0 \quad (7.2.14)$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, mit einem „Transportvektorfeld“ $b = b(x) = (b_1(x), b_2(x))^T$. Die Randbedingungen sind dann gestellt als sog. „Einströmrandbedingungen“

$$u = g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega_- := \{x \in \partial\Omega \mid b \cdot n(x) < 0\}, \quad (7.2.15)$$

mit einer gegebenen Randbelegungsfunktion $g(x)$ und dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor $n = (n_1, n_2)^T$ entlang des Randes $\partial\Omega$ von Ω . Der andere Teil des Randes $\partial\Omega_+ := \partial\Omega \setminus \partial\Omega_-$ wird sinngemäß als „Ausströmrand“ bezeichnet. Durch Umschreibung der Transportgleichung (7.2.14) in „Erhaltungform“ ergibt sich für divergenzfreies Transportfeld, $\nabla \cdot b = 0$, die lineare Erhaltungsgleichung

$$\nabla(bv) = b \cdot \nabla v + \nabla \cdot bv = 0. \quad (7.2.16)$$

Wir werden daher für das Folgende stets $\nabla \cdot b = 0$ annehmen.

Ausgangspunkt der Galerkin-Diskretisierung der Transportgleichung (7.2.14) ist wieder eine variationelle Formulierung. Da die reine Transportgleichung unstetige Lösungen zulässt (bei unstetigen Einströmdaten), wird auch der Diskretisierungsansatz mit Formfunktionen arbeiten, die bzgl. einer (zulässigen) Zerlegung $\mathbb{T}_h = \{K\}$ von $\bar{\Omega}$ „unstetig“ sein dürfen. Die Stetigkeit entlang der Charakteristiken (hier der Transportrichtung) wird nur in einem „schwachen“ (d. h. variationellen) Sinne verlangt. Die Zerlegung \mathbb{T}_h muss nicht unbedingt *struktur-regulär* sein, aber sog. „hängende Knoten“ sind hier der Einfachheit halber nicht erlaubt. Die Gitterfeinheit wird wieder beschrieben durch die Parameter $h_K := \text{diam}(K)$ sowie $h := \max_K h_K$. Für jede Zelle K definieren wir ihren Ein- sowie Ausströmrand durch

$$\partial K_- := \{x \in \partial K \mid b \cdot n(x) < 0\}, \quad \partial K_+ := \partial K \setminus \partial K_-.$$

Bzgl. der Zerlegungen T_h führen wir Finite-Elemente-Ansatzräume bestehend aus stückweise polynomialen Funktionen ein:

$$V_h^{(p)} := \{v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid v_h|_K \in P_p(K), K \in \mathbb{T}_h\}.$$

Man beachte, dass Funktionen in $S_h^{(p)}$ i. Allg. unstetig über Zellkanten hinweg sind. Desweiteren umfasst der Träger einer Basisfunktion dieser unstetigen Ansatzräume nicht wie bei stetigen Ansatzräumen mehrere Zellen sondern nur *eine* Zelle. Zur Motivation der unstetigen Galerkin-Diskretisierung betrachten wir nun zunächst die konservative Form der Transportgleichung. Wie bei Finite-Elementen Verfahren üblich, multiplizieren wir die Gleichung mit einer Testfunktion φ , integrieren über das Gebiet Ω und erhalten nach partieller Integration auf jeder Zelle

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ - \int_K u b \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial K} b \cdot n u \varphi \, ds \right\} = 0.$$

Die Funktionen u und φ werden nun durch diskrete Funktionen $u_h, \varphi_h \in S_h^{(p)}$ ersetzt. Da u_h i. Allg. unstetig über Zellkanten hinweg ist, gibt es an jedem Punkt $x \in \partial K$ einer Zelle K mehrere Möglichkeiten, $u(x)$ durch Werte von u_h zu ersetzen, z. B. durch den Funktionswert von u_h im Inneren der Zelle K , durch den Funktionswert von u_h auf der Nachbarzelle, oder eine Kombination von beiden Werten. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen für den inneren Wert $u_h(x)$ und den äußeren Wert $\hat{u}_h(x)$ einer diskreten Funktion auf dem Randpunkt $x \in \partial K$ einer Zelle K ein:

$$u_h|_{\partial K}(x) := \lim_{y \rightarrow x, y \in K} u_h(y), \quad \hat{u}_h|_{\partial K}(x) := \lim_{y \rightarrow x, y \in \hat{K}(x)} u_h(y), \quad (7.2.17)$$

wobei $\hat{K}(x)$ die im Punkt $x \in \partial K$ an die Zelle K anschließende, d. h. benachbarte, Zelle ist. Es ist nun sinnvoll, u auf dem Ausströmrand einer Zelle durch u_h und auf dem Einströmrand durch \hat{u}_h zu ersetzen, was der Idee des „upwinding“ entspricht. Somit ergibt sich folgende Diskretisierung:

DG(p)-Verfahren: Finde $u_h \in S_h^{(p)}$, so dass für alle $\varphi_h \in S_h^{(p)}$ gilt:

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ - \int_K u_h b \cdot \nabla \varphi_h \, dx + \int_{\partial K_-} b \cdot n \hat{u}_h \varphi_h \, ds + \int_{\partial K_+} b \cdot n u_h \varphi_h \, ds \right\} = 0. \quad (7.2.18)$$

Dies ist die allgemeine Form des DG-Verfahrens zur Diskretisierung von (skalaren) Erhaltungsgleichungen. Für jede Zelle $K \in \mathbb{T}_h$ folgt bei Wahl der Testfunktion $\varphi_h|_K \equiv 1$, $\varphi_h|_{K'} \equiv 0$, $K' \neq K$ die Beziehung

$$\int_{\partial K} n \cdot b u_h \, ds = \int_{\partial K_-} b \cdot n \hat{u}_h \, ds + \int_{\partial K_+} b \cdot n u_h \, ds = 0, \quad (7.2.19)$$

d. h. die lokale Erhaltungseigenschaft des numerischen Schemas. Mit demselben Ansatz lassen sich auch Systeme von Erhaltungsgleichungen

$$\nabla \cdot F(u) = 0, \quad F = (F_i(u))_{i=1}^d, \quad u = (u_j)_{j=1}^d,$$

diskretisieren. Wir werden dies unten anhand der Euler-Gleichungen demonstrieren.

Für die lineare Transportgleichung (7.2.14) ist es aber üblich, die Zellrandterme in u_h^- und u_h^+ darzustellen, wobei

$$v^-(x) := \lim_{s \rightarrow +0} v(x-sb), \quad v^+(x) := \lim_{s \rightarrow +0} v(x+sb), \quad [v] := v^+ - v^-.$$

Dazu wird Gleichung (7.2.18) zunächst wieder partiell (zurück-)integriert

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ \int_K b \cdot \nabla u_h \varphi_h dx + \int_{\partial K_-} b \cdot n \hat{u}_h \varphi_h ds - \int_{\partial K_-} b \cdot n u_h \varphi_h ds \right\} = 0,$$

so dass sich die unstetige Galerkin-Diskretisierung der linearen Transportgleichung schreiben lässt als: *Finde $u_h \in S_h^{(p)}$, so dass*

$$a(u_h, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in S_h^{(p)}, \quad (7.2.20)$$

mit der (affin)-bilinearen Form

$$a(v, w) := \sum_{K \in T_h} \left\{ \int_K b \cdot \nabla v w dx - \int_{\partial K_-} b \cdot n [v] w^+ ds \right\}.$$

Man beachte, dass hier die Einströmrandbedingung so in das Verfahren eingebaut ist, dass implizit $u_h^- = g$ auf $\partial\Omega_-$ realisiert wird. Die exakte Lösung erfüllt offensichtlich ebenfalls die Galerkin-Gleichung (7.2.20), so dass wir für den Fehler $e = u - u_h$ wieder die Orthogonalitätsbeziehung

$$a(e, \varphi_h) = 0, \quad \varphi_h \in S_h^{(p)} \quad (7.2.21)$$

haben. Zunächst untersuchen wir die Stabilität der unstetigen Galerkin-Diskretisierung.

Hilfssatz 7.1 (DG-Stabilität): *Mit der Seminorm*

$$|v|_b := \left(\frac{1}{2} \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K_-} |b \cdot n| |v|^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_+} |b \cdot n| |v^-|^2 ds \right)^{1/2},$$

gilt die Beziehung

$$a(v, v) = |v|_b^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_-} |n \cdot b| |g|^2 ds.$$

Beweis: Aus

$$\int_K b \cdot \nabla v v dx = \int_{\partial K_+} b \cdot n |v^-|^2 ds + \int_{\partial K_-} b \cdot n |v^+|^2 ds - \int_K v b \cdot \nabla v dx,$$

erhalten wir

$$\int_K b \cdot \nabla v v dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial K_+} b \cdot n |v^-|^2 ds - \int_{\partial K_-} |b \cdot n| |v^+|^2 ds \right)$$

und damit

$$2a(v, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\partial K_+} b \cdot n |v^-|^2 ds + \int_{\partial K_-} |b \cdot n| |v^+|^2 ds + 2 \int_{\partial K_-} |b \cdot n| v^- v^+ ds \right\}.$$

Ersetzung von $\cup_K \partial K_+$ durch $\cup_K \partial K_- \cup \partial \Omega_+ \setminus \partial \Omega_-$ ergibt

$$2a(v, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\partial K_-} |b \cdot n| (|v^+|^2 + 2v^+ v^- + |v^-|^2) ds + \int_{\partial \Omega_+} b \cdot n |v^-|^2 ds + \int_{\partial \Omega_-} |b \cdot n| |v^-|^2 ds \right\},$$

und damit die Behauptung.

Q.E.D.

Für konstantes $b(x) \equiv b$ ist $|\cdot|_b$ eine Norm auf dem Raum der stückweise konstanten Ansatzfunktionen $S_h^{(0)}$. Hilfssatz 7.1 zeigt also die Stabilität des DG(0)-Verfahrens bzgl. dieser (für das DG(0)-Verfahren) natürlichen „Energienorm“ $|\cdot|_b$. Auf den Ansatzräumen höherer Ordnung $S_h^{(p)}, p > 0$, ist $|\cdot|_b$ nicht positiv definit und somit keine Norm. Man kann jedoch die lineare Transportgleichung (7.2.14) durch die Variablentransformation $u \rightarrow w = e^{-b \cdot x} u$ in die Gleichung

$$b \cdot \nabla w + |b|^2 w = 0 \tag{7.2.22}$$

überführen. Analog zu Hilfssatz 7.1 gilt für die zu dieser Gleichung gehörenden Bilinearform $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$

$$\tilde{a}(v, v) = |v|_b^2 - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_-} |n \cdot b| |v^-|^2 ds,$$

wobei die natürliche „Energienorm“ des unstetigen Galerkin-Verfahrens für die Gleichung (7.2.22),

$$\|v\|_b := |v|_b + \|v\|,$$

nun auch auf $S_h^{(p)}$ mit $p > 0$ eine Norm ist. Dies zeigt die Stabilität des DG(p)-Verfahrens auch für $p > 0$.

Bemerkung 7.1: Die oben erwähnte Variablentransformation ist analog zu der Transformation

$$u(x) = w(x) + \int_0^x w(s) ds,$$

bzw.

$$w(x) = e^{-x} u(0) + e^{-x} \int_0^x e^s u'(s) ds,$$

welche die Gleichung $u'(x) = 0$ in die Gleichung $w'(x) + w(x) = 0$ überführt.

Die DG(p)-Diskretisierung der linearen Transportgleichung führt bei geeigneter Nummerierung der Freiheitsgrade („downstream“-Nummerierung) auf eine untere (Block-) Dreiecksmatrix, die mit Hilfe eines (Block-)Gauß-Seidel-Schrittes direkt gelöst werden

kann. Die Blockmatrizen sind von der Größe $l \times l$ wobei hier l für die Anzahl der Freiheitsgrade pro Zelle steht. Für das DG(0)-Verfahren ($l = 1$) ist die Systemmatrix eine untere Dreiecksmatrix wobei der Gauß-Seidel-Schritt einem Vorwärtseinsetzen entspricht. Für diesen Spezialfall gilt auf jeder Zelle $b \cdot \nabla v_h \equiv 0$, wodurch sich (7.2.20) für $p = 0$ auf eine Beziehung für die Zellwerte $U_K := u_{h|K}$ reduziert

$$U_K = \left(\int_{\partial K_-} b \cdot n \, ds \right)^{-1} \int_{\partial K_-} b \cdot n u_h^- \, ds, \quad K \in T_h. \quad (7.2.23)$$

Dieses lokal gekoppelte System von Gleichungen kann wieder (wie beim impliziten Differenzenverfahren) ausgehend vom Einströmrand sukzessiv aufgelöst werden, was letztlich dem schon erwähnten Vorwärtseinsetzen entspricht.

Die DG(0)-Diskretisierung stellt eine Verallgemeinerung des einfachen Upwind-Differenzenverfahrens (1. Ordnung) auf kartesischen Tensorproduktgittern für allgemeine, unstrukturierte Triangulierungen dar. Hierfür gilt das folgende Konvergenzresultat:

Satz 7.1 (Konvergenz des DG(0)-Verfahrens): *Ist die Lösung des Transportproblems (7.2.14) in $H^1(\Omega)$, so gilt für die DG-Methode (7.2.20) für $p = 0$ die a priori Fehlerabschätzung*

$$|u - u_h|_b \leq c h^{1/2} \|\nabla u\|. \quad (7.2.24)$$

Beweis: Zu der Lösung u definieren wir eine zellweise Interpolierende $\bar{u}_h \in S_h^{(p)}$ durch die Setzung $\bar{u}_{h|K} := |K|^{-1} \int_K u \, dx$. Für diese gilt die wohl bekannte Fehlerabschätzung (nutze Spursatz und Interpolationsabschätzung)

$$\int_{\partial K_-} |b \cdot n| |(u - \bar{u}_h)^+|^2 \, ds \leq c_i h_K \|\nabla u\|_K^2. \quad (7.2.25)$$

Mit Hilfe der Galerkin-Orthogonalität (7.2.21) und unter Beachtung von $u_h^- = g$ auf $\partial\Omega_-$ erschließen wir für den Fehler $e := u - u_h$:

$$|e|_b^2 = a(e, e) = a(e, u - \bar{u}_h).$$

Da auf jeder Zelle $b \cdot \nabla u_h \equiv 0$, folgt mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichung

$$|e|_b^2 \leq \|b \cdot \nabla u\| \|u - \bar{u}_h\| + A \cdot B,$$

wobei

$$A := \left(\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K_-} |b \cdot n| [e]^2 \, ds \right)^{1/2}, \quad B := \left(\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K_-} |b \cdot n| |(u - \bar{u}_h)^+|^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

Unter Beachtung von $b \cdot \nabla u = 0$, $A \leq |e|_b$ und der Interpolationsabschätzung (7.2.25) ergibt sich hieraus die Behauptung. Q.E.D.

Für das unstetige Galerkin-Verfahren mit beliebigen Polynomgrad $p \geq 0$ zitieren wir folgenden Konvergenzsatz ohne Beweis:

Satz 7.2 (Konvergenz des DG(p)-Verfahrens): *Ist die Lösung des Transportproblems (7.2.14) in $H^k(\Omega)$, so gilt für die DG(p)-Methode (7.2.20) die a priori Fehlerabschätzung*

$$|u - u_h|_b \leq c h^{s-1/2} \|\nabla^s u\|, \quad s = \min(p+1, k). \quad (7.2.26)$$

Für glatte Lösungen verliert man also eine halbe h -Potenz gegenüber der optimalen $\mathcal{O}(h^{p+1})$ Ordnung der Interpolationsabschätzung. Auf unstrukturierten Gittern kann tatsächlich auch nicht mehr gezeigt werden, wohingegen auf strukturierten Gittern numerische Tests eine volle Ordnung $\mathcal{O}(h^{p+1})$ zeigen. Dieses Verhalten stimmt mit dem der Stromliniendiffusionsmethode überein. Auch für Stromliniendiffusion kann z. B. für $p = 1$ nur eine Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ bewiesen werden, wobei numerische Tests auf strukturierten Gittern jedoch die volle Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ zeigen.

7.2.2 Das DG-Verfahren für hyperbolische Systeme

Im Folgenden soll die unstetige Galerkin-Methode für hyperbolische Systeme verallgemeinert werden, d. h. für Systeme der Form

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^d \partial_i F_i(u) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times Q \quad (7.2.27)$$

mit $u(0, x) = u^0(x)$, bzw. in Kurznotation mit $F(u) = (F_1(u), \dots, F_d(u))$:

$$\partial_t u + \nabla \cdot F(u) = 0. \quad (7.2.28)$$

Die Beschreibung der Randbedingungen für diesen Fall erfolgt später.

Beispiel 7.1 (Lineares hyperbolisches System): Für $d = 1$, $F(u) = Bu$, $u \in \mathbf{R}^n$ und $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ erhält man folgendes lineare hyperbolische System

$$\partial_t u + B \partial_x u = 0. \quad (7.2.29)$$

Sei B eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten λ_i und Eigenvektoren r_i , d. h. $B r_i = \lambda_i r_i$, $i = 1, \dots, n$, dann lässt sich dieses System lösen durch Transformation in charakteristische Variablen w , mit

$$u = P w, \quad (7.2.30)$$

wobei $P = [r_1, \dots, r_n]$ für die Matrix der Eigenvektoren steht. Multiplikation von (7.2.29) mit P^{-1} von links, Substitution von u mit (7.2.30) ergibt

$$\partial_t w + \tilde{B} \partial_x w = 0,$$

wobei $B = P^{-1} \tilde{B} P$ und $\tilde{B} = \text{diag}\{\lambda_i\}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte λ_i bezeichnet. Dies ist ein System entkoppelter Gleichungen

$$\partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

in den charakteristischen Variablen w_i , mit den Lösungen

$$w_i(t, x) = w_i(0, x - \lambda_i t).$$

Die Lösungen von (7.2.29) erhält man nun durch Anwendung der Rücktransformation (7.2.30).

Beispiel 7.2 (Vektor-Burgers-Gleichung): Ausgehend von den instationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v_i + v \cdot \nabla v_i + \partial_i p &= f_i, & i = 1, \dots, d \\ \nabla \cdot v &= 0, \end{aligned}$$

und unter Ausnutzung von $\nabla \cdot (vv_i) = (\nabla \cdot v)v_i + (v \cdot \nabla)v_i$ und $\nabla \cdot v = 0$ erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v_i + \nabla \cdot (vv_i) + \partial_i p &= f_i, & i = 1, \dots, d \\ \nabla \cdot v &= 0. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man nun den diffusiven Term und die angekoppelte Inkompressibilitätsbedingung, so erhält man folgende Verallgemeinerung der nicht-viskosen Burgers-Gleichung:

$$\partial_t v_i + \nabla \cdot (vv_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (7.2.31)$$

Dies ist die gewünschte Form (7.2.27) für $d = 2$ mit

$$F(v) = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_2^2 \end{pmatrix}. \quad (7.2.32)$$

Im Folgenden betrachten wir die DG-Diskretisierung im Ort. Wir können uns also auf die Betrachtung der stationären Gleichungen

$$\nabla \cdot F(u) = 0 \quad (7.2.33)$$

zurückziehen. Wie im Fall der linearen Transportgleichung ist der Ausgangspunkt der unstetigen Galerkin-Diskretisierung die mit φ getestete und partiell integrierte Gleichung

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ - \int_K F(u) \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial K} F(u) \cdot n \varphi \, ds \right\} = 0. \quad (7.2.34)$$

Bei der Ersetzung von u und φ durch diskrete Funktionen $u_h, \varphi_h \in S_h^{(p)}$ muss wegen der Unstetigkeit von u_h über Zellkanten auch der Fluss $F(u) \cdot n$ auf ∂K durch einen sog. „numerischen Fluss“ $H(u_h, \hat{u}_h, n)$ ersetzt (approximiert) werden, wobei u_h bzw. \hat{u}_h auf ∂K die Funktionswerte der diskrete Funktion auf der Zelle K bzw. der der Kante gegenüberliegenden Nachbarzelle bezeichnen; siehe auch (7.2.17). Dies führt nun zu folgender Diskretisierung:

DG(p)-Verfahren: Finde $u_h \in S_h^{(p)}$, so dass für alle $\varphi_h \in S_h^{(p)}$ gilt:

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ - \int_K F(u_h) \nabla \varphi_h \, dx + \int_{\partial K} H(u_h, \hat{u}_h, n) \varphi_h \, ds \right\} = 0. \quad (7.2.35)$$

Die Randbedingungen werden wieder durch das Setzen von $u_h^- = g$ auf ∂K in schwacher Form realisiert. Als numerischer Fluss $H(\cdot, \cdot, \cdot)$ kann jede Funktion genommen werden, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $H(\cdot, \cdot, \cdot)$ ist konsistent mit dem Fluss $F(\cdot) \cdot n$, d. h.:

$$H(v, v, n)|_{\partial K} = F(v) \cdot n.$$

2. $H(\cdot, \cdot, \cdot)$ ist konservativ, d. h.:

$$H(v, w, n) = -H(w, v, -n).$$

Beispiel 7.3 (Numerischer Fluss der linearen Transportgleichung):

Als einfachstes Beispiel greifen wir noch einmal auf die Diskretisierung der linearen Transportgleichung (7.2.14) zurück. Hierfür gilt

$$F(u) = bu,$$

und der Fluss $F(u) \cdot n$ wurde für alle $x \in \partial K$ durch den numerischen Fluss

$$H(u_h, \hat{u}_h, n) = \begin{cases} b \cdot n \hat{u}_h, & \text{für } b \cdot n < 0, \text{ d.h. } x \in \partial K_-, \\ b \cdot n u_h, & \text{für } b \cdot n \geq 0, \text{ d.h. } x \in \partial K_+. \end{cases} \quad (7.2.36)$$

ersetzt. Dieser numerische Fluss nimmt den Funktionswert immer von der Seite der Zellkante an, von der die Information herkommt, d. h. von der Nachbarzelle falls $x \in \partial K_-$ oder von der Zelle selbst, falls $x \in \partial K_+$.

Im folgenden werden mehrere numerische Flüsse für Systeme von hyperbolischen Gleichungen beschrieben. Dazu sei wieder $B(u, n)$ so definiert, dass gilt:

$$F(u) \cdot n = B(u, n)u.$$

Die Aufgabe des numerischen Flusses $H(u, \hat{u}, n)$ ist es, $F(u) \cdot n$ zu ersetzen (zu approximieren). Die folgenden zwei gebräuchlichen Flüsse approximieren nun gerade $B(u, n)u$.

Beispiel 7.4 (Vijayasundaram Fluss): Unter Benutzung der Notationen $B = P^{-1} \tilde{B} P$ aus Beispiel 7.1 und der Definitionen

$$\lambda^- := \min\{0, \lambda\}, \quad \lambda^+ := \max\{0, \lambda\},$$

sowie

$$\tilde{B}^\pm := \text{diag}\{\lambda_i^\pm\}, \quad B^+(u, n) := (P^{-1} \tilde{B}^+ P)(u, n), \quad B^-(u, n) := (P^{-1} \tilde{B}^- P)(u, n)$$

lässt sich der Vijayasundaram-Fluss schreiben als (s. LeVeque [46]):

$$H_V(u_h, \hat{u}_h, n) = B^+(\bar{u}_h, n)u_h + B^-(\bar{u}_h, n)\hat{u}_h, \quad (7.2.37)$$

wobei $\bar{u}_h = \frac{1}{2}(u_h + \hat{u}_h)$ für den Mittelwert der Funktionswerte auf beiden Seiten der Zellkante steht. Der Vijayasundaram Fluss transformiert also den Fluss in charakteristische Variablen und sortiert anhand der Eigenwerte λ_i die über den Punkt der betrachteten Kante *hinaus*- und *herein* weisenden charakteristischen Richtungen in die Matrizen \tilde{B}^+ und \tilde{B}^- . Diese werden in konservativen Variablen zurücktransformiert und mit u_h bzw. \hat{u}_h multipliziert. Der Vijayasundaram Fluss sucht sich von den beiden Funktionswerten u_h und \hat{u}_h also gerade die Anteile heraus, die, in charakteristische Variablen transformiert, zum *hinaus*- bzw. zum *hereinströmenden* Anteil gehören. Diese Unterscheidung hängt von den charakteristischen Richtungen ab, die durch die Eigenwerte λ_i gegeben sind; $\lambda_i < 0$ bedeutet Einstrom, $\lambda_i > 0$ Ausstrom der charakteristischen Variablen w_i .

Der Vijayasundaram Fluss wertet die Matrizen $B^+(u, n)$ und $B^-(u, n)$ an der Stelle $\bar{u}_h = \frac{1}{2}(u_h + \hat{u}_h)$ aus. Dies muss aber nicht sein, wie der folgende numerische Fluss nach Steger/Warming [142] (1981) zeigt.

Beispiel 7.5 (Steger-Warming Fluss):

$$H_{ST}(u_h, \hat{u}_h, n) = B^+(u_h, n)u_h + B^-(\hat{u}_h, n)\hat{u}_h. \quad (7.2.38)$$

Ein weiterer, etwas weniger komplizierter, aber auch wesentlich diffusiverer Fluss ist der folgende Lax-Friedrichs-Fluss (s. LeVeque [46]).

Beispiel 7.6 (Lokaler Lax-Friedrichs-Fluss):

$$H_{LF}(u_h, \hat{u}_h, n) = \frac{1}{2}(F(u_h) \cdot n + F(\hat{u}_h) \cdot n + \alpha(u_h - \hat{u}_h)), \quad (7.2.39)$$

mit $\alpha := \max\{\text{größter Eigenwert von } B(u, n), u = u_h, \hat{u}_h\}$.

Es sei angemerkt, dass jeder dieser Flüsse, wenn er auf die lineare Transportgleichung angewendet wird, sich zu dem numerischen Fluß (7.2.36) der linearen Transportgleichung reduziert. Die oben definierte Matrix $B(u, n)$ und insbesondere ihre Eigenwerte λ_i können, wie in Beispiel 7.2.37 schon ansatzweise geschehen, anschaulich interpretiert werden. Auf dies soll nun anhand der beiden abschließenden Beispielen noch einmal ausführlicher eingegangen werden.

Beispiel 7.7 (Burgers-Gleichung): Wir erinnern uns an die Flussfunktion (7.2.32) der Vektor-Burgers-Gleichung

$$F(v) = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_2^2 \end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$B(v, n) = \begin{pmatrix} v_1 n_1 & v_1 n_2 \\ v_2 n_1 & v_2 n_2 \end{pmatrix},$$

was anhand der Bestimmungsgleichung $F(v) \cdot n = B(v, n)v$ von $B(v, n)$ leicht nachzuprüfen ist. Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = v_1 n_1 + v_2 n_2 = v \cdot n.$$

Wie zu erwarten war, greift der Vijayasundaram-Fluss genauso wie der Steger-Warming-Fluss auf \hat{u}_h zu, wenn $v \cdot n < 0$, d. h. wenn x auf dem Einströmrand ∂K_- der Zelle liegt; und er greift auf u_h zu, wenn $v \cdot n \geq 0$, d. h. wenn x auf dem Ausströmrand ∂K_+ der Zelle liegt.

Beispiel 7.8 (2d Euler-Gleichungen): Die Euler-Gleichungen in $d = 2$ Dimensionen lassen sich in konservativer Form (7.2.27) schreiben als

$$\partial_t u + \partial_1 F_1(u) + \partial_2 F_2(u) = 0,$$

mit

$$u = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho v_1 \\ \varrho v_2 \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F_1(u) = \begin{pmatrix} \varrho v_1 \\ \varrho v_1^2 + p \\ \varrho v_1 v_2 \\ v_1(\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad F_2(u) = \begin{pmatrix} \varrho v_2 \\ \varrho v_1 v_2 \\ \varrho v_2^2 + p \\ v_2(\rho E + p) \end{pmatrix},$$

wobei ρ , $v = (v_1, v_2)^T$, E und $p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho v^2)$ wie üblich die Dichte, den Geschwindigkeitsvector, die Gesamtenergie und den Druck bezeichnen. Die Eigenwerte der entsprechenden Matrix $B(u, n)$ sind

$$\lambda_1 = v \cdot n - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = v \cdot n, \quad \lambda_4 = v \cdot n + a,$$

wobei $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ für die Schallgeschwindigkeit steht. Hier sind nun 4 Fälle zu unterscheiden:

1. Supersonische Einströmung: $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, 4$,
2. Subsonische Einströmung: $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, 3$, $\lambda_4 > 0$,
3. Subsonische Ausströmung: $\lambda_i > 0$, $i = 2, \dots, 4$, $\lambda_1 < 0$,
4. Supersonische Ausströmung: $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$.

Für die Realisierung einer (adaptiven) DG-Diskretisierung der Euler-Gleichungen verweisen wir auf Hartmann [114].

Randbedingungen

Wie man am letzten Beispiel sieht, gibt es Fälle, bei denen nicht klar zwischen Ein- und Ausströmrand zu unterscheiden ist. Im Fall der 2-dimensionalen Euler-Gleichung dürfen zum Beispiel auf einem subsonischen Einströmrand nur drei der vier charakteristischen Variablen vorgegeben werden, die vierte ergibt sich dann durch die Rechnung automatisch. Ein *subsonischer Einströmrand* ist damit tatsächlich *Ausströmrand einer* charakteristischen Variablen. Analog hierzu ist ein subsonischer Ausströmrand ein Ausströmrand für drei charakteristische Variablen, aber Einströmrand der vierten. Deswegen darf man einen subsonischen Ausströmrand nicht „frei“ lassen, sondern man muss den Wert mindestens einer Variablen (in diesem Fall ist das meist der Druck p) festlegen, um vollständige Randbedingungen vorzugeben.

Es macht also keinen Sinn, bei hyperbolischen System von $\partial\Omega_-$ und $\partial\Omega_+$ zu reden. Stattdessen muss die Beschreibung des hyperbolischen Problem (7.2.28) mit folgenden *Randbedingungen* vervollständigt werden:

$$B^-(u, n)(u - g) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega,$$

wobei B^- an jedem Punkt des Gebietsrandes $\partial\Omega$ die richtige Anzahl von einströmenden charakteristischen Variablen herausfindet und die entsprechende Kombination und Menge an Information an der Randbelegungsfunktion g „abgreift“. Für die Spezialfälle supersonischer Ein- oder Ausströmrandern reduziert sich diese Randbedingung auf einem supersonischer Einströmrand zu

$$B(u, n)(u - g) = 0;$$

Dagegen verschwindet die Randbedingung auf einem supersonischen Ausströmrand vollständig, da dort alle Eigenwerte von B positiv sind und damit gilt:

$$B^-(u, n) \equiv 0.$$

Bemerkung 7.2: Die reibungsfreie Euler-Gleichung ist die einfachste Grundgleichung der Gasdynamik. Zu ihrer numerischen Lösung kann die beschriebene DG-Methode verwendet werden. Zur Behandlung des vollen gasdynamischen Modells mit Temperaturabhängigkeit und diffusiven Termen muss die DG-Methode erweitert werden. Hierzu gibt es bereits eine Reihe von Ansätzen (ähnlich wie bei der älteren Finite-Volumen-Methode); es besteht aber noch erheblicher Forschungsbedarf).

