

## 4 Incompressible und schwach-kompressible Fluide

### 4.1 Inkompressible Fluide (Navier-Stokes-Gleichungen)

Im Gegensatz zu Gasen lassen sich Flüssigkeiten nur unter Aufwendung von sehr großen Kräften zusammendrücken. Dies bedeutet, dass sich der Inhalt materieller Volumina  $V = V(t)$  mit der Zeit praktisch nicht ändert, d. h.:

$$\frac{d}{dt} \int_V dx = 0.$$

Nach dem Reynolds'schen Transporttheorem ergibt dies mit  $\Phi = 1$ :

$$\int_V \nabla \cdot v \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot v = 0. \quad (4.1.1)$$

Die Kontinuitätsgleichung wird in diesem Fall zu einer Transportgleichung für die (möglicherweise variable) Dichte:

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \quad (4.1.2)$$

Wegen  $\mu = \text{konst.}$  und  $\nabla \cdot v = 0$  reduziert sich die Impulsgleichung zu

$$\rho \partial_t v + \rho v \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p = \rho f. \quad (4.1.3)$$

In *homogenen* inkompressiblen Medien ist die Dichteverteilung im Ort (und damit notwendig auch in der Zeit) konstant:

$$\rho(x, t) \equiv \rho_0 = \text{konst.}$$

In diesem Fall ist dann die Kontinuitätsgleichung (4.1.2) trivialerweise erfüllt und es bleibt die Inkompressibilitätsbedingung (4.1.1). Mit der sog. „kinematische Viskosität“  $\nu := \mu/\rho_0$  erhalten wir schließlich die klassischen (inkompressiblen) „Navier-Stokes-Gleichungen“:

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \rho_0^{-1} \nabla p = f. \quad (4.1.4)$$

Diese repräsentieren zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung (4.1.1) Masse- und Impulserhaltung in einem homogenen inkompressiblen Newtonschen Fluid. Der Faktor  $1/\rho_0$  im Druckterm wird explizit beibehalten, da zunächst die Gleichungen noch dimensionsbehaftet sind und  $p$  die Bedeutung eines „Druckes“ behalten soll. Zu den Gleichungen (4.1.1) und (4.1.4) kommen noch die Randbedingungen hinzu. Die Beobachtung zeigt, dass reibungsbehaftete Flüssigkeiten an festen Wänden  $\Gamma_{\text{fest}}$  „haften“. Man stellt also üblicherweise die (physikalischen) Randbedingungen

$$v|_{\Gamma_{\text{fest}}} = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = V_\infty.$$

Im Fall sehr großer Viskosität (wie gewöhnlich in biologischen Fluiden) können die Beschleunigungsterme  $\partial_t v + (v \cdot \nabla)v$  vernachlässigt werden, und man erhält die sog. „Stokes-Gleichung“ für inkompressible Flüssigkeiten

$$-\nu \Delta v + \rho_0^{-1} \nabla p = f. \quad (4.1.5)$$

In einer sog. „idealen“ Flüssigkeit wird der Einfluss der Reibung vernachlässigt, d. h.: Man setzt  $\mu = 0$  und beschreibt den Spannungstensor allein durch den Druck  $p$ . Die Bewegungsgleichung reduziert sich so auf die sog. „Euler-Gleichungen“ für inkompressible Flüssigkeiten

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \rho_0^{-1} \nabla p = f. \quad (4.1.6)$$

Da Haftung entlang fester Wände wegen fehlender Reibung nicht erwartet werden kann, wird in diesem Modell nur die reduzierte Randbedingung

$$n \cdot v|_{\Gamma_{\text{rest}}} = 0$$

gefordert. Dies besagt, dass keine Flüssigkeitsteilchen den festen Rand durchdringen können. Zur Beschreibung realer Flüssigkeiten ist die „ideale“ Flüssigkeit in der Nähe fester Wände ungeeignet; sie stellt jedoch ein einfaches Modell für sogenannte „Außenströmungen“ dar. Bei Vernachlässigung der Reibung kann auch die Produktion von Wirbeln in der Strömung vernachlässigt werden, d. h.:  $\nabla \times v = 0$ . Mit Hilfe der Identität

$$v \cdot \nabla v = \frac{1}{2} \nabla |v|^2 - v \times (\nabla \times v)$$

folgt damit aus den Euler-Gleichungen im Fall  $f = 0$ :

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |v|^2 + \rho_0^{-1} p \right) \equiv 0. \quad (4.1.7)$$

Dies impliziert, dass im gesamten Strömungsgebiet das sog. „Bernoulli-Gesetz“ gilt:

$$\frac{1}{2} |v|^2 + \rho_0^{-1} p \equiv \text{konst.}, \quad (4.1.8)$$

d. h.: *Eine lokale Erhöhung der Geschwindigkeit geht notwendig mit einer Verminderung des Drucks einher. Dieser fundamentale Zusammenhang besteht auch in allgemeinen, leicht rotationsbehafteten und zähen Strömungen.*

Zur Illustration betrachten wir die „Lenzpumpe“ („Venturi<sup>1</sup>-Düse“) eines Segelboots (s. Abb. 4.1). Die „Lenzpumpe“ ist ein im Bootsboden installierte Vorrichtung zum Auspumpen von Wasser während der Fahrt. Sie besteht aus einem in Fahrtrichtung ausgerichteten Rohr, welches sich zunächst verengt und dann wieder weitet. An der engsten Stelle führt eine Rohrverbindung ins Boot, durch welche bei ausreichend schneller Fahrt das eingedrungene Wasser nach unten abgesaugt wird. Die dies bewirkende Kraft ist die

---

<sup>1</sup>Giovanni Battista Venturi (1746–1822): Italienischer Physiker; Prof. für Geometrie und Philosophie an der Universität von Modena und Reggio Emilia; Entdecker des nach ihm benannten „Venturi-Effekts“ (1797) als Grundlage von hydrodynamischen Berechnungen auf Basis der Bernoulli-Gleichung („Venturi-Pumpe“).

Druckdifferenz zwischen dem von oben wirkenden Luftdruck und dem in der Pumpe bestehenden, verminderten Wasserdruck. Diese Druckverminderung in der Pumpe kommt wie folgt zustande: Zunächst wird wegen der Inkompressibilität das in die Pumpe strömende Wasser durch die Verengung des Rohres ( $|\Gamma_{\text{innen}}| \leq |\Gamma_{\text{in}}|$ ) beschleunigt:

$$|\Gamma_{\text{innen}}| \bar{v} = \int_{\Gamma_{\text{innen}}} v \, ds = \int_{\Gamma_{\text{in}}} v \, ds = |\Gamma_{\text{in}}| \bar{v}_{\text{in}} .$$

Dies bewirkt dann nach obigem Bernoulli-Gesetz (4.1.8) in der Pumpe die Verminderung des Drucks.

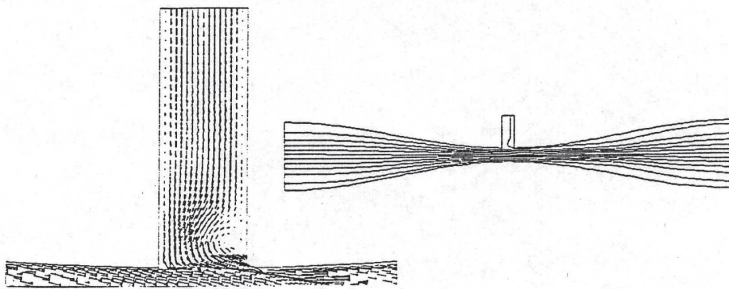


Abbildung 4.1: Schematisches Bild der Strömung durch die Lenzpumpe („Venturi-Düse“) eines Segelboots; s. Turek [145].

Eine ähnliche Situation liegt bei der Umströmung eines Hindernisses vor, z. B. eines Zylinders in einer Kanalströmung (s. Abb. 4.2). Die Verengung des Strömungsbereichs ober- und unterhalb des Zylinders bewirkt dort eine lokale Erhöhung der Geschwindigkeit, welche wiederum mit einer Absenkung des Drucks einhergeht. Dazu kommt als weiterer Effekt der Übergang der parallelen Anströmung in eine vertikal oszillierende Strömungsform (sog. „von Kármánsche Wirbelstraße“). Die *stationäre* Anströmung wird aufgrund des Hindernisses und der dadurch bedingten Beschleunigung „instabil“ und stromwärts *instationär*.

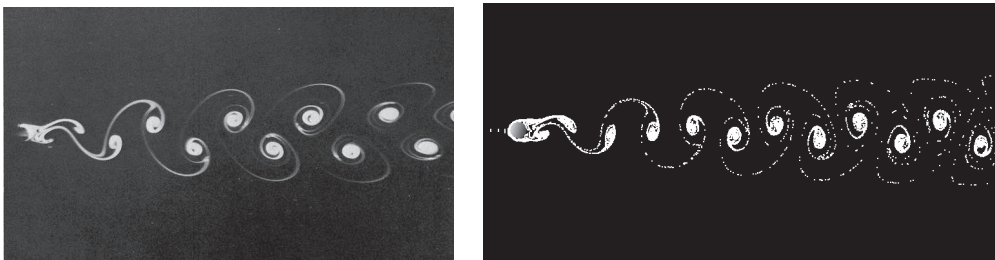


Abbildung 4.2: Umströmung eines Zylinders in einem Kanal („von Kármánsche Wirbelstraße“): 2-d Strömung im Experiment und in der Simulation (Was ist was?); s. Van Dyke [66] für Experimente und Kilian/Turek [120] für Simulationen.

Im Falle der Rotationsfreiheit lässt sich die Zustandsgleichung weiter vereinfachen durch Einführung eines skalaren Potentials  $\Phi$  mit  $v = \nabla\Phi$  (in einem einfach zusammenhängenden Strömungsgebiet). Aufgrund der angenommenen Divergenzfreiheit genügt dieses Potential dann der „Potentialgleichung“

$$\Delta\Phi = 0. \quad (4.1.9)$$

Die zugehörigen Randbedingungen für  $\Phi$  werden aus der Impulsgleichung abgeleitet.

#### 4.1.1 Ähnlichkeitslösungen (Reynolds-Zahl)

Schwierige technische Strömungen werden meist durch Modellversuche im Wasser- oder Windkanal untersucht. Dabei müssen Original- und Modellproblem so dimensioniert sein, dass beide den gleichen physikalischen Sachverhalt wiedergeben. Die zugehörigen Lösungen sollten „ähnlich“ sein, d. h. durch einfache Skalierungen der Koordinaten und Geschwindigkeiten auseinander hervorgehen. Dies ist gleichbedeutend mit einer Normalisierung der Navier-Stokes-Gleichungen durch Einführung dimensionsloser Größen. Die kinematischen Größenverhältnisse des Problems sind bestimmt durch eine „charakteristische Länge“  $L$  (Maßeinheit Meter m) und eine „charakteristische Geschwindigkeit“  $U$  (skalare Größe; Maßeinheit  $\text{m s}^{-1}$ ). Für  $L$  würde man etwa die Länge des zu untersuchenden Gegenstands wählen und für  $U$  den (maximalen) Betrag der Anströmgeschwindigkeit. Für die normalisierten (dimensionslosen) Größen

$$x^* = \frac{1}{L}x, \quad v^* = \frac{1}{U}v, \quad t^* = \frac{U}{L}t, \quad p^* = \frac{1}{U^2} \frac{p}{\rho_0},$$

gilt dann

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} = \frac{L}{U^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \Delta^* v^* = \frac{L^2}{U} \Delta v, \quad (v^* \cdot \nabla^*) v^* = \frac{L}{U^2} (v \cdot \nabla) v, \quad \nabla^* p^* = \frac{L}{U^2 \rho_0} \nabla p.$$

(Man beachte, dass der Druck die Dimension „Kraft/Fläche“  $\sim \text{kg m s}^{-2} \text{m}^{-2} = \text{kg s}^{-2} \text{m}^{-1}$  und die Dichte die Dimension „Masse/Volumen“  $\sim \text{kg m}^{-3}$  haben.) Durch Einsetzen ergeben sich die *normalisierten* Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + (v^* \cdot \nabla^*) v^* = \frac{\nu}{UL} \Delta^* v^* - \nabla^* p^* + \frac{L}{U^2} g, \quad (4.1.10)$$

wobei als Volumenkraft die Schwerkraft mit Beschleunigung  $g$  berücksichtigt wird. In dieser Gleichung stehen links die im Fluid wirkenden Beschleunigungen durch „Trägheitskräfte“ und rechts die durch „Reibungskräfte“ und Schwerkraft. Diese nunmehr dimensionslose (d. h. nicht mit physikalischen Dimensionen behaftete) Gleichung wird durch zwei charakteristische Zahlen bestimmt, der „Reynolds-Zahl“

$$\text{Re} := \frac{LU}{\nu} = \frac{\rho_0 LU}{\mu},$$

die das Verhältnis von Reibungs- zu Trägheitskräften beschreibt, sowie der „Froude<sup>2</sup>-Zahl“

$$\text{Fr} := \frac{U^2}{Lg},$$

die das Verhältnis von Schwerkraft zu Trägheitskraft beschreibt. In den meisten praktischen Anwendungen spielt die Schwerkraft keine entscheidende Rolle, so dass oft die „Reynolds-Zahl“ wichtigster Parameter ist. Die Bedeutung dieser charakteristischen Zahlen soll im Folgenden erklärt werden.

Damit der oben angesprochene Modellversuch die wirklichen Strömungsverhältnisse wiedergibt, sollten die beiden Strömungsgebiete geometrisch ähnlich sein und die realisierten charakteristischen Zahlen  $Re$  und  $Fr$  denen des Originalproblems entsprechen. Dann sind die zugehörigen Lösungen  $\{v^*, p^*\}$  und  $\{v, p\}$  ähnlich (sog. „Ähnlichkeitslösungen“):

$$v(x, t) = Uv^*(L^{-1}x, L^{-1}Ut), \quad p(x, t) = U^2\rho_0p^*(L^{-1}x, L^{-1}Ut).$$

Jede im Modell (oder durch numerische Rechnung) für  $\{v^*, p^*\}$  gefundene Eigenschaft überträgt sich so auf die reale Lösung  $\{v, p\}$ , etwa die an einem in einer Strömung bewegten Körper wirkende Widerstandskraft.

*Beispiel:* Sei z. B.  $S$  die Oberfläche eines querangeströmten Kreiszyinders mit Durchmesser  $D$  in einem Kanal der Breite  $H$  (siehe Abb. 4.3). Die Anströmung sei konstant in  $x_1$ -Richtung von der Größe  $U$ , und die Schwerkraft wirke in  $x_2$ -Richtung. Die zugehörigen Richtungseinheitsvektoren seien  $e^1$  bzw.  $e^2$ . Die Reynolds-Zahl ist gebildet als  $Re = UD/\nu$  mit der Viskosität von Wasser.

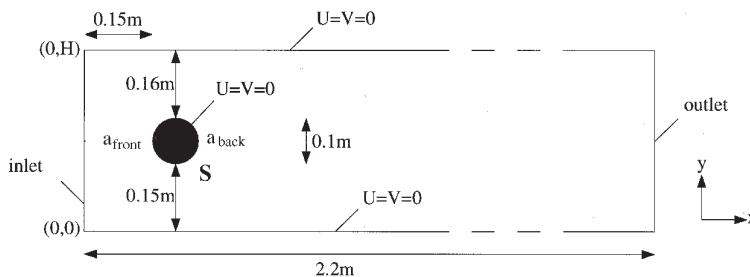


Abbildung 4.3: Konfiguration der Umströmung eines Kreises in einem ebenen Kanal.

Die „Widerstandskraft“ ist gegeben als die totale in  $x_1$ -Richtung auf den Körper wirkende (Oberflächen)-Kraft ( $v_\tau = \tau \cdot v$  die „tangential“ Komponente von  $v$ )

$$K_w(S) = - \int_S n \cdot \sigma \cdot e^1 \, do = - \int_S \{\mu \partial_n v_\tau n_2 - p n_1\} \, do.$$

<sup>2</sup>William Froude (1810–1879): Englischer Schiffbauingenieur und Hydrodynamiker, ab 1870 Mitglied der Royal Society; leitete erstmals eine brauchbare Formel zur Bestimmung des Widerstands eines Schiffes in einer Wasserströmung und seiner Stabilität.

Diese Darstellungen ergeben sich bei Transformation auf das lokale  $(n, \tau)$ -Koordinatensystem aus der Identität

$$\begin{aligned} n \cdot \sigma \cdot e_1 &= (1, 0) \begin{pmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{n\tau} \\ \sigma_{\tau n} & \sigma_{\tau\tau} \end{pmatrix} (n_1, n_2)^T = \sigma_{nn}n_1 + \sigma_{n\tau}n_2 \\ &= 2\mu\partial_n v_n n_1 + \mu\{\partial_n v_\tau + \partial_\tau v_n\}n_2 - pn_1 \end{aligned}$$

unter Beachtung der Inkompressibilitätsrelation  $\partial_n v_n = -\partial_\tau v_\tau$  zusammen mit der Haft- randbedingung  $v|_{\partial\Gamma_{\text{fest}}} = 0$ . Die zugehörigen (dimensionslosen) Beiwert („drag coefficient“) ist gegeben durch (in 2D):

$$K_w(S) = - \int_S \{\mu\partial_n v_\tau n_2 - pn_1\} do, \quad c_w(S) := \frac{2K_w(S)}{\rho_0 U^2 D}.$$

Entsprechend ist der „Auftrieb“ („lift“) die totale in  $x_2$ -Richtung wirkende (Oberflächen)- Kraft gegeben durch

$$K_a(S) = - \int_S \{\mu\partial_n v_\tau n_1 - pn_2\} do, \quad c_a(S) := \frac{2K_a(S)}{\rho_0 U^2 D}.$$

Der „Ähnlichkeitssatz“ der Hydrodynamik besagt dann, dass  $c_w$  und  $c_a$  geometrisch ähnlicher Körper in Strömungen mit gleicher Reynolds-Zahl gleich sind. Diese Aussage gilt allgemein für alle aus den Strömungsgrößen gebildeten dimensionslosen Größen.

Die Realisierung relevanter Reynolds- und Froude-Zahlen im Experiment ist aber oft nicht möglich, wie das folgende Beispiel illustriert:

*Beispiel:* Es sei die Umströmung eines Schiffskörpers im Wasser im Hinblick auf den zu erwartenden Reibungswiderstand zu untersuchen. Im Experiment (gesternte Größen) erfordert dann Gleichheit von Froude- und Reynolds-Zahl,

$$\frac{U^{*2}}{L^*} = \frac{U^2}{L}, \quad \frac{L^*U^*}{\nu^*} = \frac{LU}{\nu},$$

die Verwendung einer Flüssigkeit mit wesentlich kleinerer Viskosität  $\nu^* \ll \nu$ . Sind z. B. die Größenverhältnisse  $L_{\text{Modell}} : L_{\text{Schiff}} = 1 : 25$ , muss notwendig  $U_{\text{Modell}} : U_{\text{Schiff}} = 1 : 5$  sein. Dies wiederum impliziert notwendig  $\nu_{\text{Modell}} : \nu_{\text{Schiff}} = 1 : 125$ . Bei großen Schiffen (Tankern) kann die Reynolds-Zahl in der Größenordnung von  $10^7 - 10^8$  liegen, während im Wasserkanal maximal  $Re \sim 5 \cdot 10^6$  erreichbar ist. Dies zeigt, wie wichtig eine numerische Simulation der Navier-Stokes-Gleichungen gerade für große Reynolds-Zahlen ist.

Wir weisen daraufhin, dass in der quantitativen Festlegung der Reynolds-Zahl für eine reale Strömungskonfiguration eine gewisse Willkür liegt. Häufig lassen sich nicht „die“ charakteristische Geschwindigkeit  $U$  oder „die“ charakteristische Länge  $L$  angeben; z. B. gibt es bei der Umströmung einer Kugel in einem Kanal mehrere Möglichkeiten, die charakteristische Länge zu definieren, etwa als Kanaldurchmesser, Kugeldurchmesser oder auch als der obere bzw. untere Abstand der Kugel von der Wand. Als charakteristische Geschwindigkeit kann man die maximale Einströmung, aber auch die mittlere Einströmung

wählen. Entsprechend können sich sehr unterschiedliche Werte für die Reynolds-Zahl ergeben. Zu deren Bewertung muss man sich in jedem Einzelfall die Bedeutung der zugehörigen „Ähnlichkeitslösungen“ vergegenwärtigen. Beispiele praxis-relevanter Reynolds-Zahlen sind:

- i) *Wasser*:  $\mu \approx 1,238 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$ ,  $\nu \approx 1,238 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (bei  $12^\circ\text{C}$ ),  $\rho \approx 1,00 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ .
- Für ein U-Boot mit  $L = 50 \text{ m}$  und  $U = 10 \text{ m/s}$  ist  $Re \approx 4 \cdot 10^8$ .
  - Für einen Schwimmer mit  $L = 2 \text{ m}$  und  $U = 0,5 \text{ m/s}$  ist  $Re \approx 8 \cdot 10^5$ .

- ii) *Luft*:  $\mu \approx 1,79 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$ ,  $\nu \approx 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho \approx 1,2 \text{ m}^2/\text{s}$ .

- Für einen Gleiter mit  $L = 1 \text{ m}$  und  $U = 1 \text{ m/s}$  ist  $Re \approx 7 \cdot 10^4$ .
- Für ein Auto mit  $L = 4 \text{ m}$  und  $U = 50 \text{ m/s}$  ist  $Re \approx 1,4 \cdot 10^7$ .
- Für ein Flugzeug mit  $L = 30 \text{ m}$  und  $U = 200 \text{ m/s}$  ist  $Re \approx 4,2 \cdot 10^8$ .

(In astrophysikalischen Modellen kommen wegen der enormen räumlichen Dimensionen Reynolds-Zahlen der Größenordnung  $Re \approx 10^{13}$  vor.)

- iii) *Blut*:  $\mu \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$ ,  $\nu \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho \approx 1,06 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ .

- An einer Herzklappe mit  $L \approx 0,02 \text{ m}$  und  $U = 0,1 \text{ m/s}$  ist  $Re \approx 5 \cdot 10^2$ .

- iv) *Honig*:  $\mu \approx 10 \text{ kg/ms}$ ,  $\nu \approx 7,14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ .

- Für eine Honigströmung von einem Löffel mit  $L \approx 0,01 \text{ m}$  und  $U = 0,01 \text{ m/s}$  ist  $Re \approx 1,4 \cdot 10^{-2}$ .

Der besondere Charakter von Strömungsproblemen mit hoher Reynolds-Zahl zeigt sich auch in der Gleichung (4.1.10): Der Koeffizient des „Reibungsterms“  $\Delta v$  ist dann sehr klein. Er ist von höherer Differentiationsordnung als die anderen Terme und darf besonders in der Nähe fester Ränder nicht vernachlässigt werden, da sich nur bei seiner Gegenwart die „Hafttrandbedingung“  $v|_{\Gamma_{\text{fest}}} = 0$  realisieren lässt. Bei großen Reynolds-Zahlen entsteht durch die relativ geringe Reibungskraft ein „Sprung“ zwischen  $v = 0$  an der festen Wand und dem „Hauptstrom“ mit  $|v| \sim U$  in geringer Entfernung zur Wand. Dies bedingt in dieser schmalen sog. „Grenzschicht“ einen großen Geschwindigkeitsgradienten normal zur Wand. Dort wirken einige für die Dynamik der Strömung wesentliche Mechanismen, welche sich durch das Modell der „idealen“ (reibungsfreien) Strömung nicht erfassen lassen.

### 4.1.2 Beispiele: Couette- und Poiseuille-Strömung

Wir betrachten zwei einfache Strömungskonfigurationen, für welche Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen explizit angegeben werden können.

1) *Scherströmung* („*Couette*<sup>3</sup>-Strömung“): Wir betrachten die Strömung im Spalt zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten konstanten Abstands  $L = 1$ , welche sich mit konstanter Geschwindigkeit  $U = 1$ , gegeneinander bewegen. Die Wirkung der Schwerkraft wird vernachlässigt. Wir legen fest, dass die untere Platte in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene in Ruhe ist, und die obere sich in  $x_1$ -Richtung bewegt. Die Richtung normal zur Platte

<sup>3</sup>Maurice Couette (1858–1943): Französischer Physiker; studierte u. a. bei dem Kontinuumsmechaniker Joseph Boussinesq und dem Experimentalphysiker Gabriel Lippmann an der Sorbonne in Paris, Promotion 1890 über Reibung in Flüssigkeiten; später Prof. an der Katholischen Univ. in Angers; arbeitete über Fragen der Rheologie (Fließverhalten von Materie).

ist die  $x_3$ -Richtung. Die Reynolds-Zahl  $Re$  sei durch Wahl von  $\nu$  beliebig gegeben. Das Geschwindigkeitsfeld  $v = (v_1, v_2, v_3)$  mit den Komponenten

$$v_1(x) = x_3, \quad v_2(x) = v_3(x) = 0,$$

ist divergenzfrei,  $\nabla \cdot v = 0$ , und erfüllt die Haftrandbedingung  $v(x_1, x_2, 0) = 0$  und  $v_1(x_1, x_2, 1) = 1$ . Zusammen mit der trivialen Druckfunktion  $p = 0$  genügt  $v$  automatisch für jede Reynolds-Zahl  $Re$  den stationären Navier-Stokes-Gleichungen:

$$-Re^{-1}\Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0.$$

Diese spezielle Lösung wird „Couette-Strömung“ genannt.

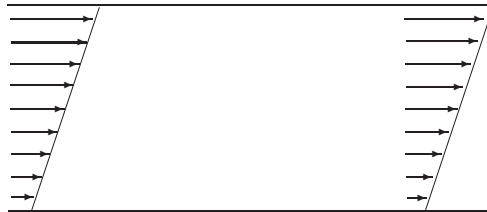


Abbildung 4.4: Geschwindigkeitsvektoren der ebenen Scherströmung („Couette-Strömung“)

## 2) Kanalströmung („Poiseuille<sup>4</sup>-Strömung“):

Wir betrachten die Strömung durch einen (unendlich langen) Kanal  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit kreisförmigen Querschnitt  $Q$  mit Radius  $L = 1$ . Die Wirkung der Schwerkraft wird wieder vernachlässigt. Das Koordinatensystem sei so gelegt, dass die  $x_1$ -Achse mit der Kanalmittelachse zusammenfällt. Die Reynolds-Zahl  $Re$  sei wieder beliebig gegeben. Das Geschwindigkeitsfeld  $v = (v_1, v_2, v_3)$  mit den Komponenten

$$v_1(x) = 1 - (x_2^2 + x_3^2), \quad v_2 = v_3 = 0,$$

erfüllt die Haftrandbedingung  $v|_{\Gamma_{\text{fest}}} = 0$ , und es ist

$$v \cdot \nabla v \equiv 0, \quad \Delta v_1 = -4.$$

Folglich gilt mit der „Druckfunktion“  $p(x) := -4Re^{-1}x_1$ :

$$-Re^{-1}\Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0,$$

d. h.: Das Paar  $\{v, p\}$  ist eine Lösung der (stationären) Navier-Stokes-Gleichungen zur gegebenen Reynolds-Zahl  $Re$ . Diese spezielle Lösung wird (dreidimensionale) „Poiseuille-Strömung“ genannt.

<sup>4</sup>Jean Léonard Marie Poiseuille (1797–1869): Französischer Physiker und Physiologe; Studium der Physik und Mathematik an der École Polytechnique in Paris, Promovierte 1828 mit einer Arbeit über die Physiologie des Blutkreislaufs, weitere Arbeiten zu diesem Thema und u. a. zu Rohrströmungen; beruflicher Werdegang unbekannt.



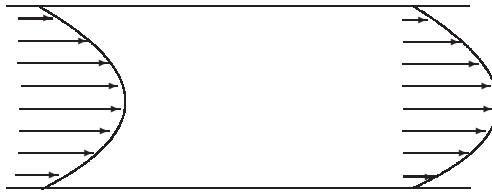


Abbildung 4.5: Ebene Kanalströmung („Poiseuille-Strömung“)

Diese beiden Beispiele gehören zu den ganz wenigen, für welche Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen in geschlossener Form (ohne Zuhilfenahme von Reihenentwicklungen) angegeben werden können. Sie zeigen, dass es unter Umständen zu jeder beliebig großen Reynolds-Zahl stationäre Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen geben kann. Wir werden später sehen, dass diese theoretisch wichtige Aussage auch in allgemeinen Situationen gilt. Allerdings sind oberhalb einer problemabhängigen „kritischen“ Reynolds-Zahl diese „mathematischen“ Lösungen instabil und in der Natur nicht realisiert. Wir werden auf diesen kritischen Aspekt der Lösungstheorie für die Navier-Stokes-Gleichungen später noch zurückkommen.

### 4.1.3 Laminare Grenzschichten

In viskosen Strömungen findet der Übergang von der inneren Hauptströmung  $v$  zur Hafttrandbedingung  $v|_{\Gamma_{\text{fest}}} = 0$  innerhalb einer schmalen Schicht, der sog. „Grenzschicht“ statt. Die relative Breite  $\delta = \delta_{\text{Grenz}}$  dieser Grenzschicht hängt von der Viskosität der Flüssigkeit, genauer von der Reynolds-Zahl  $Re = UL/\nu$  ab. Zur Bestimmung dieser Abhängigkeit diskutieren wir die „Phänomenologie“ der Strömungsgrenzschicht.

Wir betrachten die Umströmung eines schlanken Körpers (siehe Abb. 4.6) der Länge  $L$  mit (konstanter) Anströmgeschwindigkeit  $U$ . Die Reynolds-Zahl  $Re = UL/\nu$  sei groß. Wir verwenden eine zweidimensionale Näherung in der  $(x, y)$ -Ebene, wobei die  $x$ -Richtung die Anströmrichtung ist. Der Geschwindigkeitsvektor hat die Komponenten  $(u, v)$ . In Konturnähe besteht ein großer Geschwindigkeitsgradient normal zur Kontur (d. h. in  $y$ -Richtung):

$$\partial_y u \sim \frac{U}{\delta} \gg 1.$$

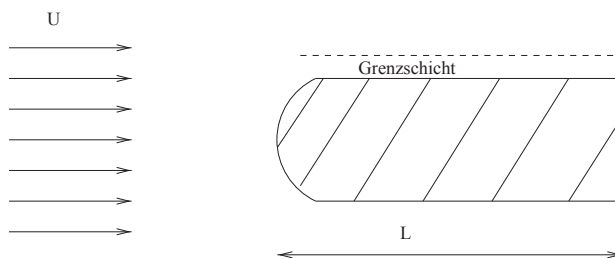


Abbildung 4.6: Schema der Umströmung eines Körpers

Das Auftreten der Grenzschicht kann anhand eines einfachen Beispiels illustriert werden. Das eindimensionale *lineare* Randwertproblem

$$-\nu w'' + w' = 0 \quad \text{in } (-\infty, 0), \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} w(y) = 1, \quad w(0) = 0,$$

besitzt die exakte Lösung

$$w(y) = 1 - e^{y/\nu}.$$

Deren Grenzschicht, innerhalb welcher die Lösung vom Randwert  $w(0) = 0$  auf die Hälfte des Maximalwertes  $w = 1$  anwächst, ist  $\{y \mid \nu \ln(\frac{1}{2}) \leq y < 0\}$ . Also ist

$$\delta \sim \nu, \quad |w'(y)| \leq 1/\nu, \quad -\delta \leq y < 0.$$

Geeigneter als Modell für das Grenzschichtverhalten einer viskosen Strömung wäre aber die *nichtlineare* Randwertaufgabe (stationäre „Burgers<sup>5</sup>-Gleichung“)

$$-\nu w'' + ww' = 0 \quad \text{in } (-\infty, 0), \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} w(y) = 1, \quad w(0) = 0.$$

Deren Lösung lässt sich ebenfalls explizit angeben (siehe Abbildung 4.7):

$$w(y) = \frac{e^{-y/2\nu} - e^{y/2\nu}}{e^{-y/2\nu} + e^{y/2\nu}}.$$

Die zugehörige Grenzschicht ist also charakterisiert durch

$$\delta \sim \sqrt{\nu}, \quad |w'(y)| \leq 1/\sqrt{\nu}, \quad -\delta \leq y < 0.$$

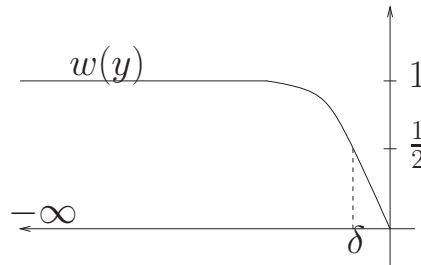


Abbildung 4.7: Schema einer diffusiven Grenzschicht

Überträgt man dieses Resultat auf die reale Strömungssituation, so wäre in einer numerischen Berechnung zur Erfassung der für den Widerstand entscheidenden Grenzschicht etwa bei  $Re \sim 10^8$  eine Gitterweite von  $h \sim 10^{-4}$  normal zum Rand erforderlich. Dies bedingt auf jeden Fall die Verwendung von stark „anisotropen“ Rechengittern.

<sup>5</sup>Johannes Martinus Burgers (1895–1981): Niederländischer Physiker; Studium der Physik in Leiden, bereits 1918 Prof. an der TU Delft, 1955 Emigration in die USA zur Univ. of Maryland; Arbeiten zur Strömungs- und Festkörpermechanik und zur Materialtheorie (Versetzungen in Kristallgittern).

*Beispiel:* Die Strömung in derselben geometrischen Konfiguration kann zu verschiedenen Reynolds-Zahlen sehr unterschiedlich aussehen. In Abb. 4.8 ist die Strömung in einer quadratischen Nische (sog. “lid-driven cavity“-Strömung) für  $Re = 1$ ,  $Re = 1000$  und  $Re = 9000$  gezeigt. Ab  $Re = 10000$  wird die Strömung instationär. Zur Berechnung dieser Strömung werden in der Regel anisotrope Gitter verwendet, deren maximaler Streckungsgrad (sog. „aspect ratio“) mit wachsender Reynolds-Zahl zunimmt (s. Abb. 4.9); s. Turek [145] für weitere Details.

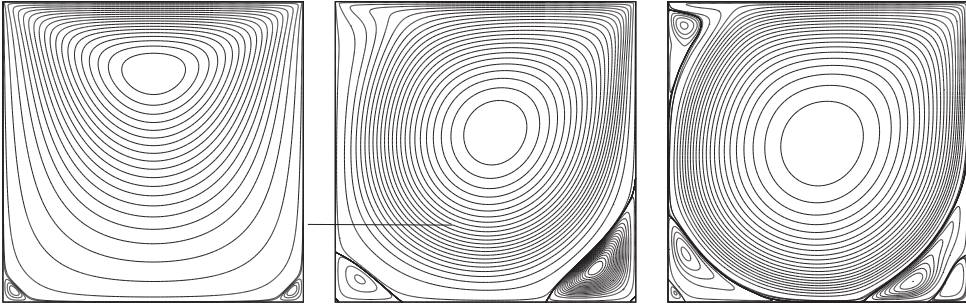


Abbildung 4.8: Stationäre Nischenströmung für  $Re = 1, 1000, 9000$  (von links nach rechts); s. Turek [145].

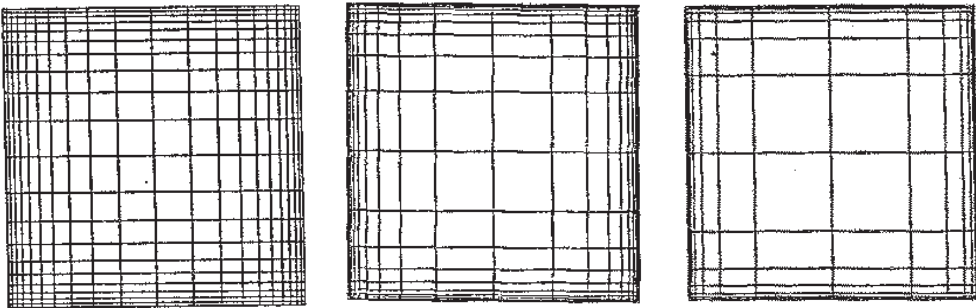


Abbildung 4.9: Rechengitter für stationäre Nischenströmung für  $Re = 1, 1000, 9000$  (von links nach rechts); s. Turek [145].

Häufig sind ausreichend feine Rechengitter aber nicht erreichbar. In diesem Fall behilft man sich mit zwei getrennten Rechnungen, eine auf gröberen Gittern für die Hauptströmung außerhalb der Grenzschicht und eine spezielle „Grenzschichtrechnung“. Dazu muss man die ungefähre Lage und das Verhalten der Grenzschicht kennen; gefragt ist also eine Phänomenologie der Grenzschicht.

Die parallele Anströmung  $U$  erreicht vor dem Kopf des Körpers den sog. „Staupunkt“, in dem die Stromlinien sich zerteilen. Längs der Vorderseite wird die Flüssigkeit beschleunigt.

nigt, was mit einem Druckabfall einhergeht. In der Grenzschicht längs der Körperoberfläche gilt

$$\partial_y u \gg \partial_x v.$$

Im Gegensatz zur nahezu rotationsfreien Außenströmung gilt in der Grenzschicht naturgemäß  $\nabla \times (\vec{v}) = \partial_x v - \partial_y u \neq 0$ . Ab der höchsten Stelle der Körperkontur entsteht mit der Abbremsung der Strömung ein Druck gegen die Strömungsrichtung, so dass sich die Grenzschicht am hinteren Ende des Körpers verdickt und schließlich ablöst. Der Wirbelfluss der Grenzschicht gelangt damit in die bisher als rotationsfrei angenommene Außenströmung. Die Trennfläche zwischen Grenzschicht und Außenströmung rollt sich hinter dem Körper mehr oder weniger regelmäßig zu Einzelwirbeln zusammen, welche sich ablösen und aufgrund des Energieverlustes durch Reibung langsam abklingen (sog. „von Kármánsche Wirbelstraße“). Hinter dem Körper entsteht nach Ablösung der Grenzschicht ein Bereich nahezu ruhender Flüssigkeit mit negativem Druck, das sog. „Totwasser“. Der negative Druck im Totwasser bewirkt einen Sog nach hinten, welcher die eigentliche Ursache für den Körperwiderstand in der zähen Flüssigkeit ist. Diese Vorgänge können in zweidimensionaler Approximation für einfache Geometrien relativ kleine Reynolds-Zahlen ( $Re \leq 10^3$ ) auch numerisch nachvollzogen werden. Für größere Reynolds-Zahlen ( $Re \geq 10^3$ ) übersteigt die direkte numerische Berechnung echt dreidimensionaler Grenzschichtströmungen meist noch die Kapazität der verfügbaren Rechenanlagen.

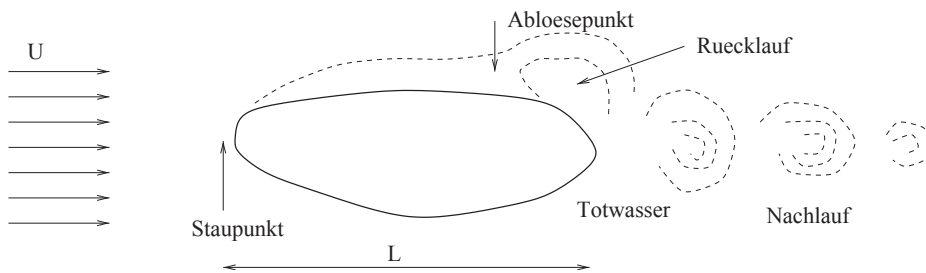


Abbildung 4.10: Schema der Grenzschicht einer viskosen Körperumströmung

Als Ausweg aus diesem Dilemma wird traditionell eine analytische Näherungsmethode, verwendet, die „Grenzschichttheorie“ nach L. Prandtl (1904). Innerhalb der Grenzschicht der Breite  $\delta$  werden dimensionslose Koordinaten eingeführt durch

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

und die Navier-Stokes-Gleichungen entsprechend normalisiert:

$$\partial_x u = \frac{1}{L} \partial_\xi u \sim \frac{U}{L}, \quad \partial_y u = \frac{1}{\delta} \partial_\eta u \sim \frac{U}{\delta}.$$

Die Kontinuitätsgleichung  $\partial_x u + \partial_y v = 0$  ergibt dann

$$\partial_x v \sim \frac{U}{L^2} \delta \quad \partial_y v \sim \frac{U}{L},$$

denn für  $0 \leq y \leq \delta$  gilt ja

$$v = - \int_0^y \partial_x u \, dy \sim \frac{U}{L} \delta.$$

In den Navier-Stokes-Gleichungen sind damit die einzelnen Summanden von den folgenden Größenordnungen

$$\underbrace{u \partial_x u}_{\frac{U^2}{L}} + \underbrace{v \partial_y u}_{\frac{U^2}{L}} - \underbrace{\nu (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u)}_{\frac{U}{L^2}} + \underbrace{\rho_0^{-1} \partial_x p}_{\frac{U}{\delta^2}} = 0,$$

und

$$\underbrace{u \partial_x v}_{\frac{U^2}{L}} + \underbrace{v \partial_y v}_{\frac{U^2}{L}} - \underbrace{\nu (\partial_x^2 v + \partial_y^2 v)}_{\frac{U}{L^2}} + \underbrace{\rho_0^{-1} \partial_y p}_{\frac{U}{\delta^2}} = 0.$$

Da wir den „kleinen“ Term  $\partial_x^2 u$  vernachlässigen können und wegen des Kräftegleichgewichts der Reibungsterm  $\nu \partial_y^2 u$  und der Beschleunigungsterm  $u \partial_x u + v \partial_y u$  von gleicher Größenordnung sein müssen, folgt

$$\nu \frac{U}{\delta^2} \sim \frac{U^2}{L}$$

und damit die „Grenzschichtformel“

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}. \quad (4.1.11)$$

Für den Druck ergibt sich

$$\partial_y p \sim \nu \rho_0 \frac{U}{L \delta} \sim \frac{U^2}{L \sqrt{Re}} \ll 1.$$

Wir können daher  $p$  als konstant in  $y$ -Richtung betrachten und erhalten die folgende sog. „Grenzschichtgleichung“:

$$u \partial_x u + v \partial_y u - \nu \partial_y^2 u + \rho_0^{-1} \partial_x p = 0. \quad (4.1.12)$$

Diese Gleichung ist vom parabolischen Typ in der  $(x, y)$ -Ebene; kann das Geschwindigkeitsprofil als nahezu konstant in  $x$ -Richtung angenommen werden, reduziert sie sich auf eine leicht lösbare gewöhnliche Differentialgleichung.

## 4.2 Thermisch getriebene Stömungen

Ein wichtiger Sonderfall *kompresibler* Strömungen sind die sog. „temperaturgetriebenen“ Strömungen, bei denen Dichteänderungen durch örtliche Temperaturänderungen hervorgerufen wird, und die Strömungsgeschwindigkeit klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit ist. In diesem Fall kann die Wärmeerzeugung durch mechanische Effekte vernachlässigt

werden. Ferner ist eine korrekte Beschreibung der diffusiven Effekte wesentlich, so dass sich die Verwendung *primitiver* Variablen anbietet. In viskos-bestimmten Strömungen können keine Unstetigkeiten in der Lösung entstehen (nur Grenzschichten am Rand und bei steilen Temperaturgradienten), und die Viskosität  $\mu$  hängt von den „primitiven“ Variablen  $\rho, T, v$  ab. Ebenso sind für diese die Randbedingungen formuliert. Daher bietet sich die Verwendung der Formulierung in primitiven Variablen an. In den meisten praktischen Anwendungen ist der Volumenkräftterm  $\rho f$  gegeben durch die Gravitation gemäß  $\rho f = \rho g$ . Das System der Zustandsgleichungen viskoser Fluide („kompressible“ Navier-Stokes-Gleichungen) in nicht-konservativer Form:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (4.2.13)$$

$$\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \nabla \cdot (\mu \{ \nabla v + \nabla v^T \} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot v I) + \nabla p = \rho f, \quad (4.2.14)$$

$$\rho c_p \partial_t \theta + \rho c_p v \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) - \partial_t p - v \cdot \nabla p - \sigma : \nabla v = \rho h. \quad (4.2.15)$$

Ferner wird ein „ideales“ Gas angenommen, so dass

$$\rho = \frac{p}{R\theta}, \quad (4.2.16)$$

mit der Gaskonstante  $R > 0$ . Mit Hilfe der Gasgleichung kann man die Kontinuitätsgleichung umschreiben zu

$$\nabla \cdot v + p^{-1}(\partial_t p + v \cdot \nabla p) - \theta^{-1}(\partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta) = 0. \quad (4.2.17)$$

Für großen Druck  $|p| \gg 1$  und Temperatur  $\theta \gg 1$  erscheint dies wie eine kleine Störung der Inkompressibilitätsbedingung in einer inkompressiblen Strömung. Wir wollen diesem Gedanken weiter nachgehen. Für mehr Details sei auf Braack/Rannacher [101] verwiesen.

#### 4.2.1 Der Grenzprozess $\text{Ma} \rightarrow 0$

Wir betrachten das vereinfachte Modell der isothermen Strömung eines nicht-viskosen, barotropen Gases ohne äußere Einflüsse:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (4.2.18)$$

$$\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, \quad (4.2.19)$$

$$p = \alpha \rho^\gamma, \quad (4.2.20)$$

mit Anfangsdaten  $\rho|_{t=0} = \rho^0$  und  $v|_{t=0} = v^0$ . Mit der Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \alpha \gamma \rho^{\gamma-1} \approx \alpha \gamma (\rho^0)^{\gamma-1}, \quad (4.2.21)$$

wird die Mach-Zahl als klein angenommen:

$$\text{Ma} := \frac{|v|}{c} \approx \frac{|v^0|}{c} \ll 1,$$

Zum Beispiel ist die die Mach-Zahl in Luft bei Raumtemperatur bei einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit von  $5\text{m/s}$  etwa  $\text{Ma} \approx 0.015$ .

Mit Hilfe des Gasgesetzes und der Kontinuitätsgleichung erschließen wir, dass

$$\partial_t p = \alpha \gamma \rho^{\gamma-1} \partial_t \rho = -\alpha \gamma \rho^{\gamma-1} \nabla \cdot (\rho v) \quad (4.2.22)$$

$$= -\alpha \gamma \rho^{\gamma-1} \{v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v\} \quad (4.2.23)$$

$$= -\rho c^2 \nabla \cdot v - v \cdot \nabla p, \quad (4.2.24)$$

bzw.

$$\rho^{-1} c^{-2} \{\partial_t p + v \cdot \nabla p\} + \nabla \cdot v = 0. \quad (4.2.25)$$

Für  $c \gg 1$  reduziert sich also die Kontinuitätsgleichung formal zu einer kleinen Störung der Inkompressibilitätsbedingung  $\nabla \cdot v = 0$ . Wir wollen diesen Gedanken weiter verfolgen. Dazu schreiben wir das ganze System der Euler-Gleichungen für das Tripel  $\{\rho, v, p\}$  in der Form

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla v = 0, \quad (4.2.26)$$

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \rho^{-1} \nabla p = 0, \quad (4.2.27)$$

$$\partial_t p + c^2 \rho \nabla \cdot v + v \cdot \nabla p = 0. \quad (4.2.28)$$

In einer Raumdimension schreibt sich dies für  $u := \{\rho, v, p\}$  in der Form:

$$\partial_t u + A(u) \partial_x u = 0,$$

mit der Matrix

$$A(u) = \begin{pmatrix} v & \rho 0 \\ 0 & v \rho^{-1} \\ 0 & c^2 \rho & v \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von  $A(u)$  sind  $\lambda_1 = v$  und  $\lambda_{2,3} = v \pm c$ . Sie entsprechen Konvektions- bzw. Schallwellen. Für kleine Mach-Zahl wird  $A(u)$  schlecht konditioniert aufgrund des großen Unterschieds zwischen der Schallgeschwindigkeit und der charakteristischen Strömungsgeschwindigkeit. Im singulären Limes  $c \rightarrow \infty$  pflanzen sich die Schallwellen unendlich schnell fort, und das Gas wird „hydrodynamisch“ inkompressibel. In diesem Fall führen nur thermodynamische Effekte (etwa Wärmequellen) zu Kompressibilität.

Als nächstes führen wir unter Verwendung der Referenzgeschwindigkeit  $v^0$ , der Referenzdichte  $\rho^0$  und der charakteristischen Länge  $L$  dimensionslose Variablen ein durch:

$$\tilde{v} := \frac{v}{\|v^0\|_\infty}, \quad \tilde{\rho} := \frac{\rho}{\|\rho^0\|_\infty}, \quad \tilde{t} := \frac{\|v^0\|_\infty}{L} t, \quad \tilde{x} := L^{-1} x.$$

Dies resultiert in der folgenden dimensionslosen Form der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{v}) = 0,$$

und der Impulsgleichung

$$\tilde{\rho} \partial_{\tilde{t}} \tilde{v} + \tilde{\rho} \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} + \|\rho^0\|_\infty^{\gamma-1} \|v^0\|_\infty^{-2} \tilde{\nabla} p(\tilde{\rho}) = 0,$$

wobei

$$p(\tilde{\rho}) = \alpha \tilde{\rho}^\gamma. \quad (4.2.29)$$

Unter Beachtung der Beziehung (4.2.21) kann die Impulsgleichung in der Form

$$\tilde{\rho} \partial_t \tilde{v} + \tilde{\rho} \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} + \lambda^{-2} \tilde{\nabla} p(\tilde{\rho}) = 0, \quad (4.2.30)$$

geschrieben werden mit der dimensionslosen Größe

$$\lambda^2 = \frac{\|v^0\|^2}{\|\rho^0\|^{\gamma-1}} = \frac{\alpha \gamma \|v^0\|^2}{\alpha \gamma \|\rho^0\|^{\gamma-1}} = \frac{\alpha \gamma \|v^0\|^2}{c^2} = \alpha \gamma \text{Ma}^2.$$

Im Limes  $\text{Ma} \rightarrow 0$  wird der Faktor vor dem Druckgradienten in der Impulsgleichung (4.2.30) immer größer. Daher ist es bei der numerischen Approximation nicht sinnvoll, den Druck aus der algebraischen Gasgleichung (4.2.29) zu bestimmen.

Wir lassen jetzt die „ $\sim$ “ weg und betrachten (formale) asymptotische Entwicklungen nach Potenzen von  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \lambda p_1 + \lambda^2 p_2 + O(\lambda^3), \\ v &= v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + O(\lambda^3), \end{aligned}$$

mit gewissen Koeffizientenfunktionen  $p_j$  and  $v_j$ . Einsetzen dieser Entwicklung in die Impulsgleichung (4.2.30) und Sortieren nach Potenzen von  $\lambda$  ergibt dann

$$\lambda^{-2}(\nabla p_0 + \lambda \nabla p_1) + \rho \partial_t v_0 + \rho v_0 \cdot \nabla v_0 + \nabla p_2 = O(\lambda).$$

Unter der (heuristischen) Annahme, dass die obigen Entwicklungen in einem geeigneten Sinne konvergieren, erhalten wir hieraus mit Hilfe des Grenzübergangs  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$\nabla p_0 = \nabla p_1 = 0, \quad (4.2.31)$$

$$\rho \partial_t v_0 + \rho v_0 \cdot \nabla v_0 + \nabla p_2 = 0, \quad (4.2.32)$$

d. h.: Die Druckbestandteile  $p_0, p_1$  sind konstant im Ort, und das Tripel  $\{\rho, v_0, p_2\}$  ist verknüpft durch die Impulsgleichung. Durch Weiterführung des Koeffizientenvergleichs anhand der Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichung ließen sich auch Gleichungen für die Entwicklungsterme höherer Ordnung gewinnen:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v_0) = 0, \quad (4.2.33)$$

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho v_1 + \rho_1 v_0) = 0, \quad (4.2.34)$$

sowie

$$\rho \partial_t v_1 + \rho v_0 \cdot \nabla v_1 + \rho v_1 \cdot \nabla v_0 + \nabla p_3 = 0. \quad (4.2.35)$$

Wir fassen die ersten beiden (ortsunabhängigen) Druckkomponenten zum sog. „thermodynamischen“ Druck zusammen:

$$p_{\text{th}}(t) := p_0(t) + \lambda^{-1} p_1(t).$$



Die sog. „low-Mach-number“-Approximation besteht nun in der Vernachlässigung der weiteren Druckentwicklungsterme  $p_2, p_3, \dots$  im Gasgesetz, d. h.: Die Dichte wird als Funktion allein des thermodynamischen Drucks angesetzt gemäß:

$$\rho = (\alpha^{-1} p_{\text{th}})^{1/\gamma}.$$

Es kann gezeigt werden (Majda [47]), dass unter gewissen Kleinheitsannahmen an die Anfangsdaten für  $\text{Ma} \rightarrow 0$  die Lösung  $\{v, p\}$  der (isothermen) *kompessiblen* Euler-Gleichungen gegen die Lösung  $\{v_0, p_2\}$  der *inkompessiblen* Euler-Gleichungen konvergiert:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v_0 &= 0, \\ \rho \partial_t v_0 + \rho v_0 \cdot \nabla v_0 + \nabla p_2 &= 0, \\ \rho &= (\alpha^{-1} p_{\text{th}})^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist in gewissen „schwachen“ Normen auf einem festen Zeitintervall  $[0, T_0]$ . Den thermodynamischen Druck  $p_{\text{th}}$  bestimmt man aus den Anfangsdaten  $\{\rho^0, v^0\}$ . Dies werden wir im nächsten Abschnitt genauer diskutieren.

#### 4.2.2 Die „low-Mach-number“-Approximation

Wir betrachten jetzt wieder die allgemeinen Zustandsgleichungen in nicht-konservativer Form. Unter der Annahme einer Strömung kleiner Mach-Zahl,

$$\text{Ma} = \frac{|v|}{c} \ll 1, \quad c^2 := \frac{\partial p}{\partial \rho},$$

lässt sich der Druck aufspalten gemäß

$$p(x, t) = p_{\text{th}}(t) + p_{\text{hyd}}(x, t)$$

in einen im Ort konstanten „thermodynamischen“ Anteil  $p_{\text{th}}(t)$ , und einen „hydrodynamischen“ Anteil  $|p_{\text{hyd}}(x, t)| \ll p_{\text{th}}$ . Das Gasgesetz wird entsprechend vereinfacht zu

$$\rho = \frac{p_{\text{th}}}{R\theta}. \quad (4.2.36)$$

Das System der Navier-Stokes-Gleichungen schreibt sich dann in Anlehnung an (4.2.17) in der sog. „low-mach-number“-Approximation wie folgt:

$$\nabla \cdot v - \theta^{-1} \partial_t \theta - \theta^{-1} v \cdot \nabla \theta = -p_{\text{th}}^{-1} \partial_t p_{\text{th}}, \quad (4.2.37)$$

$$\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \nabla \cdot (\mu \{\nabla v + \nabla v^T\} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot v I) + \nabla p_{\text{hyd}} = \rho g, \quad (4.2.38)$$

$$\rho c_p \partial_t \theta + \rho c_p v \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) - \partial_t p_{\text{th}} - \partial_t p_{\text{hyd}} - v \cdot \nabla p_{\text{hyd}} - \sigma : \nabla v = \rho h, \quad (4.2.39)$$

Wir nehmen wieder an, dass keine Wärmeentwicklung durch mechanische Effekte erfolgt. Die Temperaturgleichung reduziert sich so auf

$$\rho c_p \partial_t \theta + \rho c_p v \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) = \partial_t p_{\text{th}} + \rho h. \quad (4.2.40)$$

Die zeitliche Ableitung des thermodynamischen Drucks  $\partial_t p_{\text{th}}$  kann man über eine algebraische Beziehung auf die Anfangsdaten zurückführen.

### Bestimmung des thermischen Drucks:

Da der thermische Druck  $p_{\text{th}}$  örtlich konstant ist, erhalten wir durch Mittelwertbildung von (4.2.37) über  $\Omega$  und Verwendung der Energiegleichung:

$$\begin{aligned}\partial_t p_{\text{th}} &= -p_{\text{th}}|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \{ \nabla \cdot v - \theta^{-1}(\partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta) \} dx \\ &= -p_{\text{th}}|\Omega|^{-1} \left\{ \int_{\partial\Omega} v \cdot n ds - c_p^{-1} \int_{\Omega} \theta^{-1} \rho^{-1} \{ \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \rho h \} dx \right\}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gasgesetzes  $p_{\text{th}} \theta^{-1} = R \rho$  folgt weiter

$$\partial_t p_{\text{th}} = -p_{\text{th}}|\Omega|^{-1} \int_{\partial\Omega} v \cdot n ds - c_p^{-1} R |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \{ \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \partial_t p_{\text{th}} + \rho h \} dx$$

bzw.,

$$\partial_t p_{\text{th}} = -\frac{p_{\text{th}}}{(1+c_p^{-1}R)|\Omega|} \int_{\partial\Omega} v \cdot n ds - \frac{R}{(c_p+R)|\Omega|} \int_{\Omega} \{ \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \rho h \} dx$$

Wir unterscheiden nun zwei Spezialfälle:

*Fall 1:* Die Strömung befindet sich in einem geschlossenen Behälter, so dass wegen der Randbedingung  $v|_{\partial\Omega} = 0$ :

$$\partial_t p_{\text{th}} = -\frac{R}{(c_p+R)|\Omega|} \int_{\Omega} \{ \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \rho h \} dx.$$

Im Fall thermisch isolierter Wände,  $\partial_n \theta|_{\partial\Omega} = 0$ , folgt weiter durch partielle Integration:

$$\partial_t p_{\text{th}} = -\frac{R}{(c_p+R)|\Omega|} \int_{\Omega} \rho h dx.$$

Im Fall von geheizten Wänden, d. h.  $\theta|_{\Gamma_D} = \theta_D$  und  $\partial_n \theta|_{\Gamma_N} = 0$ , verbleibt ein Kopp-  
lungsterm auf der rechten Seite der Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t p_{\text{th}} = -\frac{R}{(c_p+R)|\Omega|} \int_{\Gamma_D} \kappa \partial_n \theta ds - \frac{R}{(c_p+R)|\Omega|} \int_{\Omega} \rho h dx.$$

*Fall 2:* Wenn das Strömungsgebiet  $\Omega$  „offen“ ist (z. B. bei einer Kanalströmung), muss der thermische Druck entlang des „Ausströmrandes“ vorgegeben werden, so dass er insgesamt als bekannt angenommen werden kann:

$$p_{\text{th}}(t) \equiv p_{\text{th}}|_{\Gamma_{\text{aus}}}(t).$$

### 4.2.3 Thermische „Konvektionsströmung“ (Boussinesq-Approximation)

Wenn die Temperatur  $\theta$  nur wenig um eine konstante Referenztemperatur  $\theta_0$  variiert, kann auch von nur geringen Dichteveränderungen ausgegangen werden,

$$|\theta - \theta_0| \ll 1, \quad |\rho - \rho_0| \ll 1.$$

In diesem Fall kann die Viskosität  $\mu \sim \mu(\theta_0)$  als Konstante angenommen werden, so dass der Diffusionsterm die Form erhält

$$\nabla \cdot \tau = \nabla \cdot (\mu \{ \nabla v + \nabla v^T \} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot v I) = \mu \Delta v + \frac{1}{3} \nabla \cdot v.$$

Wenn keine externen Wärmequellen vorliegen, kann der thermische Druck  $p_{\text{th}}$  als zeitlich konstant angenommen werden. Die Wärmekapazität  $c_p$  sowie die Diffusionskonstante  $\kappa$  sind sehr viel größer als eins. Unter diesen Annahmen reduziert die sog. „Boussinesq<sup>6</sup>-Approximation“ das „low-Mach-number“-Modell zunächst auf die Form

$$\nabla v = 0, \quad (4.2.41)$$

$$\rho_0 \partial_t v + \rho_0 v \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p_{\text{hyd}} = \rho g, \quad (4.2.42)$$

$$c_p \rho_0 \partial_t \theta + c_p \rho_0 v \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) = 0, \quad (4.2.43)$$

wobei im Kraftterm der Impulsgleichung noch die variable Dichte  $\rho$  beibehalten wird. Im reduzierten Gasgesetz wird nun die Temperatur um den Grundzustand  $\theta_0$  entwickelt:

$$\rho = \frac{p_{\text{th}}}{R\theta} = \frac{p_{\text{th}}}{R\theta_0} - \frac{p_{\text{th}}}{R\theta_0^2}(\theta - \theta_0) + \mathcal{O}(|\theta - \theta_0|^2).$$

Dies ergibt bei Vernachlässigung des quadratischen Terms unter Verwendung des Gravitationspotentials  $\Phi$ :

$$\rho g \sim \frac{p_{\text{th}}}{R\theta_0} \nabla \Phi - \frac{p_{\text{th}}}{R\theta_0^2} (\theta - \theta_0) g$$

Mit der neuen „Druckfunktion“  $p := p_{\text{hyd}} - \frac{p_{\text{th}}}{R\theta_0} \Phi$  erhalten wir so die Gleichungen der „Boussinesq-Approximation“:

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (4.2.44)$$

$$\rho_0 \partial_t v + \rho_0 v \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p = - \frac{p_{\text{th}}}{R\theta_0^2} (\theta - \theta_0) g, \quad (4.2.45)$$

$$c_p \rho_0 \partial_t \theta + c_p \rho_0 v \cdot \nabla \theta - \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) = 0, \quad (4.2.46)$$

Dieses Modell wird verwendet für (langsame) temperatur-getriebene Strömungen, wenn der Temperaturgradient und damit die Dichteänderungen relativ klein sind.

---

<sup>6</sup>Joseph Valentin Boussinesq (1842–1929): Französischer Mathematiker und Physiker, Promotion 1867, 1872–1886 Prof. für Differential- und Integralrechnung in Lille und ab 1886 Prof. für Physik und Mechanik an der Pariser Sorbonne; fundamentale Beiträge zum Verständnis der Turbulenz und der hydrodynamischen Grenzschicht sowie zu anderen Problemen der Mechanik („Boussinesq-Gleichungen“ für Flachwasserwellen).

#### 4.2.4 Ähnlichkeit kompressibler Strömungen

Wir betrachten wieder die Strömung eines „perfekten“, viskosen Gases. Es werden die folgenden grundlegenden Referenzgrößen eingeführt:

Länge  $L$ , Geschwindigkeit  $U$ , Dichte  $\rho^*$ , Temperatur  $\theta^*$ ,

sowie Referenzwerte  $\mu^*$ ,  $\kappa^*$  für die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit. Alle anderen Referenzgrößen können von diesen abgeleitet werden gemäß:

$$\bar{t} := \frac{L}{U}, \quad p^* := \rho^* U^2, \quad e^* := U^2, \quad q^* := \frac{U^3}{L}.$$

Mit diesen Bezeichnungen sind die Reynolds-Zahl und Froude-Zahl definiert durch

$$\text{Re} := \frac{\rho^* L U}{\mu^*}, \quad \text{Fr} := \frac{U^2}{L}.$$

Wir definieren weiter die sog. „Prandtl-Zahl“

$$\text{Pr} := \frac{c_p \mu^*}{\kappa^*}$$

und die „charakteristische Mach-Zahl“

$$\text{Ma}^* := \frac{U^*}{\sqrt{\kappa R \theta^*}}.$$

Die „Rayleigh<sup>7</sup>-Zahl“ ist definiert durch

$$\text{Ra} := c_p \frac{\rho^* L U}{\kappa^*} = \frac{\rho^* L U}{\mu^*} \frac{c_p \mu^*}{\kappa^*} = \text{Re Pr}.$$

Definition der „Péclet<sup>8</sup>-Zahl“:

$$\text{Pe} := \frac{U L}{\kappa} = \text{Re Pr}.$$

Das Boussinesq-Modell lautet in dimensionsloser Form:

$$\nabla \cdot v = 0, \tag{4.2.47}$$

$$\rho_0 \partial_t v + v \cdot \nabla v - \text{Re}^{-1} \Delta v + \nabla p = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}^2 \text{Pr}} (\theta - \theta_0) g, \tag{4.2.48}$$

$$\partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta - \text{Ra}^{-1/2} \Delta \theta = 0, \tag{4.2.49}$$

Wenn die Strömung allein durch den Temperaturgradienten getrieben ist, gibt es a priori keine „charakteristische“ Geschwindigkeit, so dass die Reynolds-Zahl durch die anderen, temperaturabhängigen Zahlen ausgedrückt wird:  $\text{Re} = \text{Ra}^{1/2} / \text{Pr}$ .

<sup>7</sup>John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842–1919): Englischer Physiker, Studium der Mathematik in Cambridge, ab 1879 Prof. für Experimentalphysik in Cambridge; zunächst theoretische Arbeiten zur Optik und der Schwingungslehre, später zu praktisch allen damaligen Gebieten der Physik: Elektrizität, Thermodynamik, Wellentheorie und Statistische Physik; bekannt u. a. durch das „Rayleighsche Streugesetz“, 1904 Nobelpreis für Physik

<sup>8</sup>Jean Claude Eugène Péclet (1793–1857): Französischer Physiker, 1816 Prof. am College de Marseille, ab 1827/1829 Prof. für Physik an der neu gegründeten heutigen École Centrale Paris; Beiträge u. a. zur theoretischen Strömungsmechanik.

### 4.2.5 Beispiel „heat-driven cavity“

Zur Illustration der Diskussion in den letzten Abschnitten betrachten wir als konkretes Beispiel die wärmegetriebenen Strömung in einer quadratischen Box mit Seitenlänge  $L=1$  (sog. „heat-driven cavity“) in zweidimensionaler Näherung. Die Strömung wird durch eine Temperaturdifferenz  $\Delta\theta = \theta_{\text{hot}} - \theta_{\text{cold}}$  zwischen „heißem“ Rand  $\Gamma_{\text{hot}}$  und „kaltem“ Rand  $\Gamma_{\text{cold}}$  und der Gravitation  $g$  in negativer  $y$ -Richtung getrieben. Für Details und die numerischen Ergebnisse verweisen wir auf den Artikel Becker/Braack [97].

Die Randbedingungen sind für die Geschwindigkeit die übliche „Haftbedingung“ entlang des gesamten Randes,  $v_{\parallel\partial\Omega} = 0$ , und für die Temperatur eine Neumann-Bedingung (perfekte Wärmeisolation) entlang des oberen und unteren Randes,  $\partial_n\theta|_{\Gamma_N} = 0$ , sowie eine Dirichlet-Bedingung entlang des geheizten bzw. gekühlten Randes  $\theta|_{\Gamma_D} = \hat{T}$ .

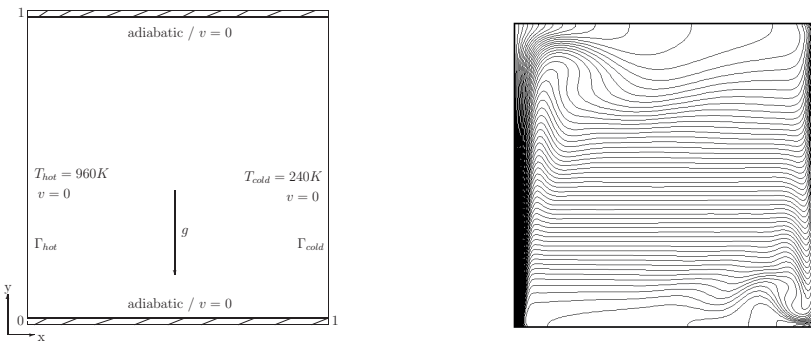


Abbildung 4.11: Konfiguration der „heat-driven cavity“ und Temperatur-Isolinien.

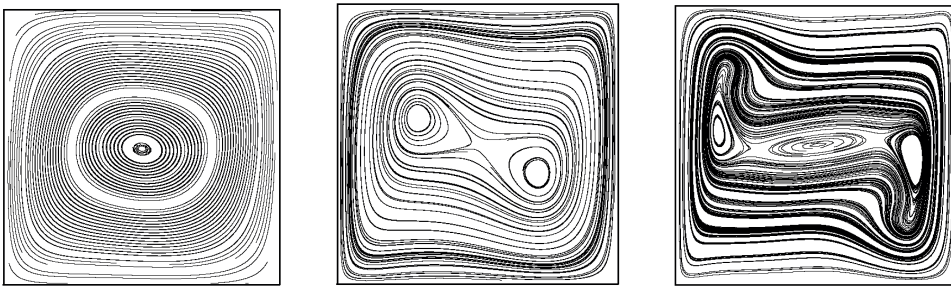


Abbildung 4.12: Sequenz von Stromlinien in der „heat-driven cavity“ für wachsende Temperaturdifferenz  $\Delta\theta = \theta_{\text{hot}} - \theta_{\text{cold}}$  bzw. Rayleigh-Zahl  $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ .

Für die Viskosität  $\mu$  wird hier das sog. „Sutherland<sup>9</sup>-Gesetz“,

$$\mu(\theta) = \mu^* \left( \frac{\theta}{\theta^*} \right)^{1/3} \frac{\theta^* + S}{\theta + S},$$

verwendet, wobei  $\text{Pr} = 0,71$  die Prandtl-Zahl,  $S := 110,5 \text{ K}$  und  $\theta^* = 273 \text{ K}$  sowie  $\mu^* = 1.68 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$  gewisse Referenzwerte sind. Die Wärmeleitfähigkeit ist bestimmt durch  $\kappa(T) = \mu(T)/\text{Pr}$ . Im stationären Fall ist der hydrodynamische Druck gegeben durch

$$p_{\text{th}} = P_0 \left( \int_{\Omega} \theta_0^{-1} dx \right) \left( \int_{\Omega} \theta^{-1} dx \right)^{-1},$$

wobei  $\theta_0 = 600 \text{ K}$  eine Referenztemperatur ist und  $P_0 = 101,325 \text{ Pa}$ . Entsprechend ist die Rayleigh-Zahl bestimmt als

$$\text{Ra} = \text{Pr} g \left( \frac{\rho_0 L}{\mu_0} \right)^2 \frac{\theta_h - \theta_c}{\theta_0} \approx 10^6, \quad \varepsilon = \frac{\theta_h - \theta_c}{\theta_h + \theta_c} = 0.6,$$

wobei  $\mu_0 := \mu(\theta_0)$ ,  $\rho_0 := P_0/R\theta_0$ , und  $R = 287 \text{ J/kgK}$ .

In diesem Testproblem ist eine der zu berechnenden Größen der mittlere Wärmefluss durch den kalten Rand, welcher über die sog. „Nusselt<sup>10</sup>-Zahl“ definiert ist durch

$$\text{Na} := c \int_{\Gamma_{\text{kalt}}} \kappa \partial_n \theta ds, \quad c := \frac{\text{Pr}}{2\mu_0 T_0 \varepsilon}.$$

Tabelle 4.1: Berechnung der Nusselt-Zahl auf adaptierten Gittern: „glattheits-orientierte“ Verfeinerung (links), „sensitivitäts-basierte“ Verfeinerung (rechts),  $J(e)$  Approximationsfehler in der Nusselt-Zahl.

N	$\langle Nu \rangle_c$	$J(e)$	N	$\langle Nu \rangle_c$	$J(e)$
945	-8.67201	1.5e-2	945	-8.71941	3.3e-2
1708	-8.49286	1.9e-1	1717	-8.66898	1.8e-2
3108	-8.58359	1.0e-1	5530	-8.67477	1.2e-2
5656	-8.59982	8.7e-2	9728	-8.68364	3.0e-3
18204	-8.64775	3.9e-2	17319	-8.68744	8.5e-4
32676	-8.66867	1.8e-2	31466	-8.68653	6.9e-5

<sup>9</sup>William Sutherland (1859–1911): Australischer Physiko-Chemiker; Studium der Naturwissenschaften in Melbourne, 1899 Prof. für Physik an der Univ. von Sydney; Arbeiten zur kinetischen Gastheorie (sog. „Sutherland-Modell“)

<sup>10</sup>Ernst Kraft Wilhelm Nusselt (1882–1957): Deutscher Physiker, Studium der Maschinenlehre in Berlin und München, 1907 Promotion mit einem Thema über Wärmeleitfähigkeit von Isoliermaterialien, wichtige Arbeit „Das Grundgesetz des Wärmeübergangs“ (1915), 1920 Prof. an der TH Karlsruhe, ab 1925 Prof. für Thermodynamik an der TH München.

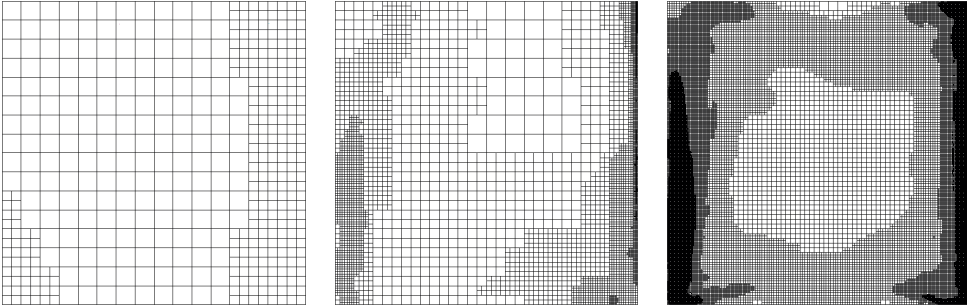


Abbildung 4.13: Sequenz von verfeinerten Gittern für die „heat-driven cavity“ mit  $N = 523, 5530, 56077$  Zellen.

#### 4.2.6 Chemisch reagierende Strömungen

Als nächstes erweitern wir das „low-Mach-number“-Strömungsmodell (4.2.37) – (4.2.39) zu einem „Mehrkomponentenmodell“ zur Beschreibung von chemisch-regierenden Strömungen. Dazu werden die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie ergänzt um Gleichungen für die Erhaltung der Speziesmassen:

$$\nabla \cdot v - T^{-1}v \cdot \nabla T - M^{-1}v \cdot \nabla M = 0, \quad (4.2.50)$$

$$(\rho v \cdot \nabla)v + \nabla \cdot \tau + \nabla p = \rho f_e, \quad (4.2.51)$$

$$\rho v \cdot \nabla T - c_p^{-1} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = c_p^{-1} f_t(T, w), \quad (4.2.52)$$

$$\rho v \cdot \nabla w_i - \nabla \cdot (\rho D_i \nabla w_i) = f_i(T, w), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2.53)$$

In diesem Fall erhält das Gasgesetz die Form

$$\rho = \frac{p_{\text{th}} M}{RT}, \quad (4.2.54)$$

mit der „mittleren Molmasse“  $M := (\sum_{i=1}^n w_i / M_i)^{-1}$  und den Spezies-Molmassen  $M_i$ . Wegen ihrer exponentiellen Abhängigkeit von der Temperatur („Arrhenius<sup>11</sup>-Gesetz“) und polynomialen Abhängigkeit von  $w$  sind die Quellterme  $f_i(T, w)$  hochgradig nichtlinear. Im allgemeinen führen diese „Reaktionsterme“ zu einer Kopplung zwischen allen Spezies-Molanteilen  $w_i$ .

<sup>11</sup>Svante Arrhenius (1859–1927): Schwedischer Physiker und Chemiker; Studium der Mathematik und Naturwissenschaften in Uppsala und Stockholm, lange wissenschaftliche Wanderjahre durch Europa, ab 1891 „Laborator für Physik“ und später Prof. an der Univ. Stockholm, 1905 Prof. am Nobelinstitut für Physikalische Chemie, fundamentale Beiträge zur elektrolytischen Dissoziation und zur chemischen Reaktionskinetik, 1903 Nobelpreis für Chemie.

#### 4.2.7 Beispiel “chemischer Strömungsreaktor“

Als ein praxis-relevantes Beispiel betrachten wir einen chemischen Strömungsreaktor (s. Abb. 4.14), in dem durch Vergleich von Experiment und Simulation die kritischen Parameter (z. B. Reaktionsgeschwindigkeiten) in den chemischen Reaktionsgleichungen bestimmt werden sollen. Ein einfaches Beispiel ist der Austausch von Schwingungsenergie zwischen Wasserstoff und Deuterium (für Details s. Waguët [146] und Carraro et al. [104]):

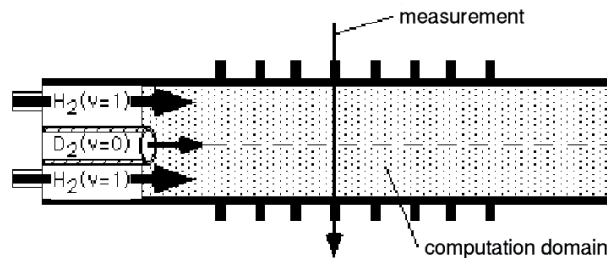
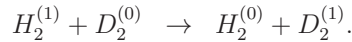


Abbildung 4.14: Konfiguration des chemischen Strömungsreaktors.

Das Experiment liefert sog. „CARS-Signale“ (Coherent **A**nti-Stokes **R**aman **S**pectroscopy) der Form

$$J(c) = \kappa \int_{-R}^R \sigma(s) c(r-s)^2 ds,$$

wobei  $c(r)$  etwa die Konzentration von  $D_2^{(1)}$  entlang der Messstrecke ist. Tab. 4.2 zeigt Resultate der Berechnung des Massenanteils von  $D_2^{(1)}$  und  $D_2^{(0)}$  auf Folgen von gleichmäßig verfeinerten Tensorproduktgittern sowie lokal lösungsangepasster Gitter. Auf den lösungsangepassten Gittern beobachten wir neben einer höheren Genauigkeit auch eine monotone Konvergenz der interessierenden Größe.

Tabelle 4.2: Resultate der Simulation im Strömungsreaktor.

Heuristische Verfeinerung				Adaptive Verfeinerung			
$L$	$N$	$D_2^{(\nu=0)}$	$D_2^{(\nu=1)}$	$L$	$N$	$D_2^{(\nu=0)}$	$D_2^{(\nu=1)}$
2	481	0.742228	0.002541	2	244	0.738019	0.004020
3	1793	0.780133	0.002531	3	446	0.745037	0.002600
4	1923	0.782913	0.002729	4	860	0.756651	0.002010
5	2378	0.785116	0.001713	5	1723	0.780573	0.001390
6	3380	0.791734	0.001162	6	3427	0.785881	0.001130
7	5374	0.791627	0.001436	7	7053	0.799748	0.001090



### 4.3 Mathematische Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen

Von den Gleichungen der Strömungsmechanik gibt es für die (inkompressiblen) Navier-Stokes-Gleichungen die vollständigste mathematische Theorie. Dies betrifft die Grundfragen nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie nach ihrer Regularität und Stabilität. Für die allgemeinen (kompressiblen) Zustandsgleichungen bzw. die Gasdynamische Gleichung gibt es deutlich weniger starke theoretische Resultate und meist auch nur für spezielle Konfigurationen. Da diese Resultate nur geringere praktische Bedeutung haben, wird in diesem Rahmen nicht darauf eingegangen.

#### 4.3.1 Die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

Wir beginnen mit den *stationären* Navier-Stokes-Gleichungen und der zugehörigen Inkompressibilitätsbedingung

$$-\nu\Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0. \quad (4.3.55)$$

Die Dichte  $\rho_0$  ist hier zu Eins normiert. Das Strömungsgebiet  $\Omega$  sei ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  oder  $3$ ). Für den Rand  $\partial\Omega$  nehmen wir an, dass er stückweise „glatt“ ist; in der Umgebung von irregulären Stellen (z. B. Knicken oder Ecken) des Randes sei  $\Omega$  (lokal) konvex. Der Rand  $\partial\Omega$  besteht aus einem „festen“ Randstück  $\Gamma_{\text{fest}}$ , einem „Einströmrand“  $\Gamma_{\text{ein}}$  und einem „Ausströmrand“  $\Gamma_{\text{aus}}$  (s. Abb. 4.15):

$$\partial\Omega = \Gamma_{\text{fest}} \cup \Gamma_{\text{ein}} \cup \Gamma_{\text{aus}}.$$

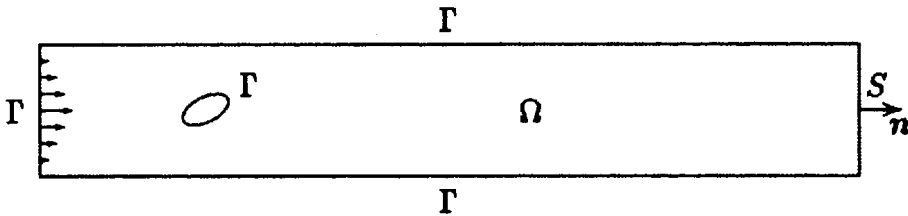


Abbildung 4.15: Konfiguration der ebenen Umströmung eines Hindernisses im Kanal

Entlang der Randkomponente  $\Gamma_D = \Gamma_{\text{fest}} \cup \Gamma_{\text{ein}}$  werden Dirichletsche Randbedingungen gestellt:

$$v|_{\Gamma_{\text{fest}}} = 0, \quad v|_{\Gamma_{\text{ein}}} = v^{\text{ein}}.$$

Dabei sei  $v^{\text{ein}}$  auf  $\Gamma_{\text{ein}}$  als „Spur“ einer global auf ganz  $\Omega$  definierten Funktion  $v^{\text{ein}} \in H^1(\Omega)^d$  gegeben. Die „richtige“ Randbedingung entlang  $\Gamma_{\text{aus}}$  muss noch bestimmt werden. Zur Vereinfachung der Analyse setzen wir im Folgenden aber häufig  $\partial\Omega = \Gamma_{\text{fest}}$ , d. h.: Die Strömung ist in einem festen Kasten eingeschlossen und wird allein durch die Volumenkraft  $f$  getrieben.

Zur Aufstellung einer variationellen Formulierung von (4.3.55) führen wir die folgenden Funktionenräume ein:

$$H_0^1(\Omega; \Gamma_D)^d := \{v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}, \quad L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) \mid (q, 1)_\Omega = 0\}.$$

Mit  $H := H_0^1(\Omega; \Gamma_D)^d$  und  $L := L^2(\Omega)$  lautet die variationelle Formulierung des obigen Problems wie folgt: Finde  $v \in v^{ein} + H$  und  $p \in L$ , so dass

$$\nu(\nabla v, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla v, \varphi) - (p, \nabla \cdot v) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H, \quad (4.3.56)$$

$$(\nabla \cdot v, \chi) = 0 \quad \forall \chi \in L. \quad (4.3.57)$$

Nehmen wir zunächst einmal an, dass dieses Problem eine Lösung besitzt, welche hinreichend regulär ist, um auch „klassische“ Lösung zu sein. Durch partielle Integration in (4.3.56) und Ausnutzung der Randbedingung  $\varphi|_{\Gamma_D} = 0$  erhält man dann

$$\int_{\Omega} \{-\nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p - f\} \varphi \, dx + \int_{\Gamma_{aus}} \{\nu \partial_n v - pn\} \varphi \, do = 0, \quad \varphi \in H.$$

Folglich genügt jede (klassische) Lösung des variationellen Problems auch der Momentengleichung; ihre Divergenzfreiheit ist evident. Weiter sehen wir, dass zusätzlich eine „natürliche“ Randbedingung entlang  $\Gamma_{aus}$  erfüllt ist:

$$\nu \partial_n v - pn|_{\Gamma_{aus}} = 0. \quad (4.3.58)$$

Diese Randbedingung vom Neumann<sup>12</sup>-Typ ergibt sich zwangsläufig aus der gewählten variationellen Formulierung des Problems, in der entlang  $\Gamma_{aus}$  keine expliziten Vorgaben für die Lösung und die Testfunktionen gemacht werden; daher die suggestive Bezeichnung „do nothing“- oder auch „freie“ Ausströmrandbedingung. Dies erscheint als die natürlichste Vorgehensweise, solange keine weiteren Informationen über das Verhalten der Strömung „hinter“  $\Gamma_{aus}$  vorliegen. Für eine detaillierte Diskussion und numerische Tests siehe Heywood et al. [39].

Insbesondere wird (4.3.58) im geraden Kanal von der Poiseuille-Strömung erfüllt, wenn  $p$  auf  $\Gamma_{aus}$  auf Null gesetzt wird. In diesem Fall (gerader Kanal) folgt aus (4.3.58) entlang des geraden Randstückes  $\Gamma_{aus}$  wegen der Divergenzfreiheit  $\nabla \cdot v = \partial_n v_n + \partial_\tau v_\tau = 0$  ( $v_n, v_\tau$  Komponenten von  $v$  in Normalen- und Tangentenrichtung und  $\partial_n, \partial_\tau$  die zugehörigen Richtungsableitungen) und der Haftrandbedingung  $v|_{\Gamma_D} = 0$  notwendig, dass

$$\int_{\Gamma_{aus}} pn \, do = \nu \int_{\Gamma_{aus}} \partial_n v \, do = \nu \int_{\Gamma_{aus}} \partial_n v_n \, do = -\nu \int_{\Gamma_{aus}} \partial_\tau v_\tau \, do = 0.$$

Also enthält die variationelle Formulierung (4.3.56) offensichtlich noch die zusätzliche „natürliche“ Randbedingung

$$\int_{\Gamma_{aus}} p \, do = 0. \quad (4.3.59)$$

---

<sup>12</sup>Carl Gottfried Neumann (1832–1925): Deutscher Mathematiker; seit 1858 Privatdozent und seit 1863 apl. Prof. in Halle. Nach Professuren in Basel und Tübingen ab 1868 in Leipzig; lieferte Beiträge zur Theorie der (partiellen) Differential- und Integralgleichungen, insbesondere zum Dirichlet-Problem. Die „Neumann-Randbedingungen“ sowie die „Neumann-Reihe“ sind nach ihm benannt; gründete zusammen mit Alfred Clebsch die Zeitschrift *Mathematische Annalen*.

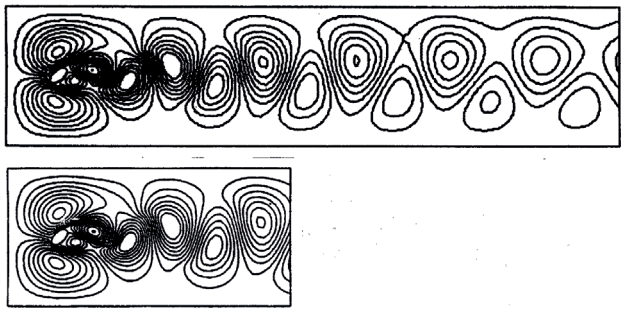


Abbildung 4.16: Der Effekt der „do nothing“-Ausströmbedingung anhand der Druckisobaren einer instationären Strömung um eine schräg stehende Ellipse bei  $Re=500$ : Vergleich der Lösung auf einem langen mit der auf einem kurzen Kanal.

Bei der Verwendung dieses Ansatzes zur Realisierung von Ausströmrandbedingungen ist also zu prüfen, ob (4.3.59) für die vorliegende physikalische Problemstellung sinnvoll ist. Probleme können sich z. B. bei der Betrachtung von Strömungskonfigurationen mit mehreren „Ausgängen“ ergeben, da hier die Festlegung der Druckmittelwerte über alle Komponenten des Ausströmrandes auf Null nicht sinnvoll sein könnte. In diesem Fall muss die Randbedingung (4.3.59) als inhomogene Bedingung für jede Ausströmkomponente  $\Gamma_{\text{aus}}^{(i)}$  getrennt formuliert werden:

$$\int_{\Gamma_{\text{aus}}^{(i)}} p \, do = P_i \quad (i = 1, \dots, s).$$

Wie in Abb. 4.17 zu sehen ist, kann die unkritische Verwendung der „do nothing“-Randbedingung bei Rohrverzweigungen zur Wiedergabe eines verflüchteten Strömungsverhaltens führen.

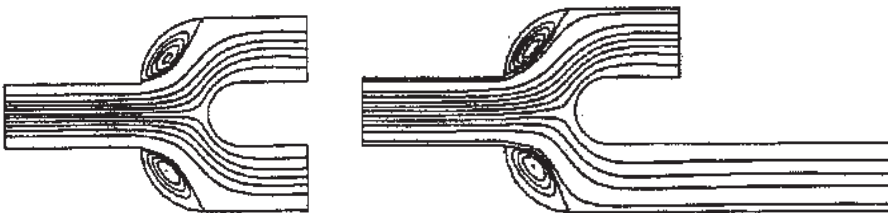


Abbildung 4.17: Test für den Effekt der „do nothing“-Randbedingung: Rohrverzweigung bei  $Re = 20$ .

In der Navier-Stokes-Gleichung erscheint der Druck  $p$  nur unter dem Gradienten, so dass eine zusätzliche (skalare) Bedingung notwendig ist, um ihn eindeutig festzulegen. Für Probleme mit „freiem“ Ausströmrand  $\Gamma_{\text{aus}} \neq \emptyset$  wird dies gerade durch die Zusatzbedingung (4.3.59) erreicht. Im Fall  $\Gamma_{\text{aus}} = \emptyset$  wird stattdessen explizit verlangt, dass  $p$  den

globalen Mittelwert Null hat, d. h.:  $p \in L_0^2(\Omega)$ . Wir wollen als nächstes zeigen, dass die variationelle Form der Navier-Stokes-Gleichungen wenigstens im Fall  $\partial\Omega = \Gamma_D$  stets eine Lösung besitzt.

## Der Stokes-Operator

Wir betrachten zunächst das lineare Stokes-Problem mit normalisierter Reynolds-Zahl bzw.  $\nu = 1$  und homogenen Dirichlet-Randbedingungen ( $v|_{\partial\Omega} = 0$ ). Entsprechend setzen wir  $H := H_0^1(\Omega)^d$  und  $L := L_0^2(\Omega)$ . Das Problem lautet dann:

Finde  $\{v, p\} \in H \times L$ , so dass

$$(\nabla v, \nabla \varphi) - (p, \nabla \cdot \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H, \quad (4.3.60)$$

$$(\nabla \cdot v, \chi) = 0 \quad \forall \chi \in L. \quad (4.3.61)$$

Wir führen nun die folgenden Räume ein:

$$J_1(\Omega) := \{v \in H_0^1(\Omega)^d \mid \nabla \cdot v = 0\},$$

$$J_0(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega)^d \mid \nabla \cdot v = 0, n \cdot v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ im „schwachen“ Sinne}\}.$$

Der Raum  $J_1(\Omega)$  ist versehen mit dem Skalarprodukt  $(\nabla \cdot, \nabla \cdot)$  ein Hilbert-Raum, also insbesondere vollständig. Ebenso ist der Teilraum  $J_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)^d$  abgeschlossen bzgl. des üblichen  $L^2$ -Skalarprodukts. Die orthogonale Projektion in  $L^2(\Omega)^d$  auf  $J_0(\Omega)$  sei mit  $P$  bezeichnet. Der Teilraum  $\Phi := \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^d \mid \nabla \cdot \varphi = 0\}$  ist dicht in  $J_0(\Omega)$  enthalten. Mit Hilfe dieser Notation lässt sich Problem (4.3.60) in der folgenden kompakten Form schreiben: Finde  $v \in J_1(\Omega)$ , so dass

$$(\nabla v, \nabla \varphi) = (Pf, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega). \quad (4.3.62)$$

Für  $f \in L^2(\Omega)^d$  stellt die rechte Seite in (4.3.62) ein beschränktes lineares Funktional auf  $J_1(\Omega)$  dar. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert also eine eindeutige Lösung  $v \in J_1(\Omega)$  von (4.3.62). Die Beziehung (4.3.62) definiert einen Operator

$$S : D(S) \subset J_1(\Omega) \subset J_0(\Omega) \rightarrow J_0(\Omega),$$

den sog. „Stokes-Operator“. Als Operator in  $J_0(\Omega)$  hat er die Darstellung  $S = -P\Delta$  und ist offensichtlich symmetrisch und positiv-definit. Weiter ist er surjektiv und folglich „selbst-adjungiert“. Wegen der Kompaktheit der Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  bzw.  $J_1(\Omega) \hookrightarrow J_0(\Omega)$  ist die Inverse  $S^{-1} : J_0(\Omega) \rightarrow J_0(\Omega)$  kompakt. Die allgemeine Spektraltheorie selbstadjungierter (positiv-definiten) Operatoren mit kompakter Inverser besagt, dass ihr Spektrum nur aus reellen (positiven) Eigenwerten besteht, welche endliche Vielfachheiten haben und sich im Endlichen nicht häufen können:

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Ferner existiert ein zugehöriges System von  $L^2$ -orthonormierten Eigenvektoren  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , welches vollständig ist sowohl in  $J_0(\Omega)$  als auch in  $J_1(\Omega)$ , d. h.: Jedes  $v \in J_0(\Omega)$  lässt sich entwickeln gemäß:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k, \quad \alpha_k = (v, w_k).$$

Wir werden diese Eigenschaft noch weiter unten verwenden.

### Allgemeiner Existenzsatz für das Navier-Stokes-Problem

Wir betrachten wieder den Fall reiner Dirichlet-Daten:  $H := H_0^1(\Omega)^d$ ,  $L := L_0^2(\Omega)$ . Es wird angenommen, dass die Einströmrandbedingung durch die Spur einer Funktion  $v^{\text{ein}} \in H^1(\Omega)^d$  mit  $\nabla \cdot v = 0$  gegeben ist. Unter Verwendung des Raumes  $J_1(\Omega)$  lässt sich das stationäre Navier-Stokes-Problem (4.3.56) in einer kompakten Form schreiben, in welcher der Druck eliminiert ist. Es wird ein  $v \in v^{\text{ein}} + J_1(\Omega)$  gesucht, so dass

$$\nu(\nabla v, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla v, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega). \quad (4.3.63)$$

Dies wird Ausgangspunkt zum Nachweis der Existenz von Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen sein.

Die spezielle Struktur der Nichtlinearität in den Navier-Stokes-Gleichungen ist entscheidend für deren Analyse. Für Funktionen  $u, v, w \in J_1(\Omega)$  gilt

$$(u \cdot \nabla v, w) = (v, \nabla(vw)) - (u \cdot \nabla w, v) = -(\nabla \cdot u, vw) - (u \cdot \nabla w, v) = -(u \cdot \nabla w, v).$$

Setzt man hier  $v = w$ , ergibt sich die wichtige Identität

$$(u \cdot \nabla v, v) = 0. \quad (4.3.64)$$

Zur präzisen Beschreibung der Regularität der rechten Seite führen wir die sog. „negative“ Sobolev-Norm

$$\|f\|_{-1} := \sup_{\varphi \in H} \frac{\langle f, \varphi \rangle}{\|\nabla \varphi\|}$$

ein als natürliche Norm des Dualraums  $H^{-1}(\Omega)$  von  $H$  (Raum der stetigen, linearen Funktionale auf  $H$ ). Offenbar gilt für Funktionen  $f \in L^2(\Omega)^d$

$$\|f\|_{-1} \leq \kappa \|f\|,$$

mit der Konstante  $\kappa > 0$  in der Poincaréschen Ungleichung

$$\|\varphi\| \leq \kappa \|\nabla \varphi\|, \quad \varphi \in H.$$

**Satz 4.1 (Existenzsatz):** *Das stationäre Navier-Stokes-Problem (4.3.56) besitzt im Fall  $\partial\Omega = \Gamma_{\text{fest}}$  für beliebige Reynolds-Zahl  $Re = 1/\nu$  eine Lösung  $\{v, p\} \in H \times L$ . Für hinreichend kleine Daten  $c_*^2 \nu^{-2} \|f\|_{-1} < 1$  ist diese Lösung eindeutig.*

**Beweis:** *i) Existenz:* Wir verwenden die Technik der „Galerkin<sup>13</sup>-Approximation“. Mit den Eigenfunktionen  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  des Stokes-Operators definieren wir die endlich dimensionalen Teilräume  $H_m := \text{span}\langle w_1, \dots, w_m \rangle \subset H$ . Problem (4.3.56) wird nun approximiert durch die folgenden endlich dimensional Probleme: Finde  $v_m \in H_m$ , so dass

$$\nu(\nabla v_m, \nabla \varphi) + (v_m \cdot \nabla v_m, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_m. \quad (4.3.65)$$

---

<sup>13</sup>Boris Grigorievich Galerkin (1871–1945): Russischer Bauingenieur und Mathematiker; Prof. in St. Petersburg; Beiträge zur Struktur-Mechanik, insbesondere zur Plattentheorie.

Wir wollen zeigen, dass diese endlich dimensionalen (nichtlinearen) Probleme Lösungen besitzen, welche gleichmäßig beschränkt in  $H$  sind. Mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments wird dann auch die Existenz einer Lösung des (unendlich dimensionalen) Problems folgen. Jedem  $v \in H_m$  wird ein Element  $Q_m(v) \in H_m$  zugeordnet als Lösung der *linearen* Aufgabe

$$\nu(\nabla Q_m(v), \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla Q_m(v), \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_m.$$

Da  $H_m$  endlich dimensional ist, folgt nach einem Resultat der Linearen Algebra die Existenz einer solchen Lösung aus der Eindeutigkeit möglicher Lösungen des homogenen Problems

$$\nu(\nabla w, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla w, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_m.$$

Sei  $w \in H_m$  eine solche Lösung. Wahl von  $\varphi_m := w$  ergibt dann

$$0 = \|\nabla w\|^2 + (v \cdot \nabla w, w) = \|\nabla w\|^2,$$

und folglich  $w = 0$ . Also existiert zu jedem  $v \in H_m$  ein  $Q_m(v) \in H_m$ , wodurch eine Abbildung  $Q_m : H_m \rightarrow H_m$  definiert ist. Für diese erhalten wir durch Setzen von  $\varphi := Q_m(v)$  in der Definitionsgleichung:

$$\nu \|\nabla Q_m(v)\|^2 = (f, Q_m(v)) \leq \|f\|_{-1} \|\nabla Q_m(v)\|$$

und folglich

$$\|\nabla Q_m(v)\| \leq \frac{\|f\|_{-1}}{\nu} := R.$$

Die Abbildung  $Q_m$  bildet also die Kugel  $H_m \cap B_R := \{v \in H_m \mid \|\nabla v\| \leq R\}$  in sich ab. Sie ist außerdem stetig (sogar Lipschitz-stetig), denn für beliebige zwei  $v, w \in H_m \cap B_R$  ist

$$\begin{aligned} 0 &= \nu(\nabla[Q_m(v) - Q_m(w)], \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla Q_m(v) - w \cdot \nabla Q_m(w), \varphi) \\ &= \nu(\nabla[Q_m(v) - Q_m(w)], \nabla \varphi) + ((v - w) \cdot \nabla Q_m(v), \varphi) \\ &\quad + (w \cdot \nabla[Q_m(v) - Q_m(w)], \varphi) \quad \forall \varphi \in H_m. \end{aligned}$$

Wir erinnern an die in  $d = 2$  sowie  $d = 3$  Dimensionen gültigen Ungleichungen

$$\|w\|_{L^3} \leq c_* \|\nabla w\|, \quad \|\varphi\|_{L^6} \leq c_* \|\nabla \varphi\|, \quad w, \varphi \in H.$$

Wahl von  $\varphi := Q_m(v) - Q_m(w)$  ergibt dann

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla[Q_m(v) - Q_m(w)]\|^2 &= -((v - w) \cdot \nabla Q_m(v), Q_m(v) - Q_m(w)) \\ &\leq \|v - w\|_{L^3} \|\nabla Q_m(v)\| \|Q_m(v) - Q_m(w)\|_{L^6} \\ &\leq c_*^2 \|\nabla(v - w)\| \|\nabla Q_m(v)\| \|\nabla(Q_m(v) - Q_m(w))\| \end{aligned}$$

und weiter

$$\|\nabla[Q_m(v) - Q_m(w)]\| \leq c_*^2 R \|\nabla(v - w)\|.$$

Nach dem Brouwerschen<sup>14</sup> Fixpunktsatz besitzt  $Q_m$  als stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Kugel  $H_m \cap B_R$  des endlich dimensionalen Raumes  $H_m$  einen Fixpunkt  $v_m$ . Dieser erfüllt dann die Gleichung

$$\nu(\nabla v_m, \nabla \varphi) + (v_m \cdot \nabla v_m, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_m,$$

und ist daher Lösung des Problems (4.3.65). Für diese gilt konstruktionsgemäß die gleichmäßige Schranke  $\|\nabla v_m\| \leq R$ . Da der Funktionenraum  $J_1(\Omega)$  ein Hilbert-Raum und kompakt in  $J_0(\Omega)$  eingebettet ist, folgt für die beschränkte Folge  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset J_1(\Omega)$  die Existenz einer Teilfolge  $(v_{m'})_{m' \in \mathbb{N}}$ , welche in  $J_1(\Omega)$  „schwach“ und in  $J_0(\Omega)$  „stark“ gegen einen Limes  $v \in J_1(\Omega)$  konvergiert, d. h.:

$$(\nabla(v_{m'} - v), \nabla \varphi) \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega), \quad \|v_{m'} - v\| \rightarrow 0 \quad (m' \rightarrow \infty).$$

Diese Limesfunktion  $v \in J_1(\Omega)$  ist dann auch Lösung der Grenzgleichung (4.3.56). Um dies zu sehen, wählen wir ein beliebiges  $\varphi \in J_1(\Omega)$  und eine Folge von  $\varphi_{m'} \in H_{m'}$ , so dass  $\|\nabla(\varphi - \varphi_{m'})\| \rightarrow 0$  ( $m' \rightarrow \infty$ ). Dann konvergiert für  $m' \rightarrow \infty$  (Übungsaufgabe):

$$(\nabla v_{m'}, \nabla \varphi_{m'}) \rightarrow (\nabla v, \nabla \varphi), \quad (v_{m'} \cdot \nabla v_{m'}, \varphi_{m'}) \rightarrow (v \cdot \nabla v, \varphi) \quad (m' \rightarrow \infty).$$

Folglich gilt im Limes:

$$\nu(\nabla v, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla v, \varphi) = (f, \varphi),$$

was zu beweisen war. Die Existenz eines zugehörigen (eindeutig bestimmten) Drucks  $p \in L$  ist durch Hilfssatz 4.1 (siehe unten) gesichert.

ii) *Eindeutigkeit*: Zur Untersuchung der Eindeutigkeit der gefundenen Lösung von (4.3.56) nehmen wir an, dass  $v_1$  und  $v_2$  zwei Lösungen sind. Wegen (4.3.64) gilt zunächst

$$\nu \|\nabla v_1\|^2 = (f, v_1) \leq \|f\|_{-1} \|\nabla v_1\| \tag{4.3.66}$$

und folglich  $\|\nabla v_1\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1}$ . Für die Differenz  $w := v_1 - v_2$  gilt dann

$$\begin{aligned} \nu(\nabla w, \nabla \varphi) &= (v_2 \cdot \nabla v_2 - v_1 \cdot \nabla v_1, \varphi) \\ &= ((v_2 - v_1) \cdot \nabla v_2, \varphi) - ((v_2 - v_1) \cdot \nabla(v_2 - v_1), \varphi) + (v_1 \nabla(v_2 - v_1), \varphi) \\ &= (w \cdot \nabla v_1, \varphi) - (w \cdot \nabla w, \varphi) + (v_1 \cdot \nabla w, \varphi), \end{aligned}$$

für beliebiges  $\varphi \in J_1(\Omega)$ . Wir setzen nun  $\varphi = w$  und finden mit Hilfe der Identität (4.3.64), dass

$$\nu \|\nabla w\|^2 = (w \cdot \nabla v_1, w) \leq \|w\|_{L^3} \|\nabla v_1\| \|w\|_{L^6} \leq c_*^2 \|\nabla w\|^2 \nu^{-1} \|f\|_{-1}.$$

Für  $c_*^2 \nu^{-2} \|f\|_{-1} < 1$  impliziert dies notwendig, dass  $w = 0$ . Die Eindeutigkeit der zugehörigen Druckfunktion folgt aus deren Konstruktion gemäß Hilfssatz 4.1. Q.E.D.

---

<sup>14</sup>Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966): Niederländischer Mathematiker und Philosoph; Begründer des Konzepts des „Mathematischen Intuitionismus“, der Mathematik als Formulierung geistiger Gedanken basierend auf evidenten Gesetzen auffasst (im Gegensatz zum axiomaten-basierten System von Hilbert und Russel); wichtige Beiträge zu den Grundlagen der Mengenlehre und Topologie.

Wenn eine Lösung  $v \in J_1(\Omega)$  von (4.3.63) bestimmt ist, bleibt die Frage nach der Existenz einer zugehörigen Druckfunktion  $p \in L$  mit der Eigenschaft

$$(p, \nabla \cdot \varphi) = (f, \varphi) + \nu(\nabla v, \nabla \varphi) - (v \cdot \nabla v, \varphi) \quad \forall \varphi \in H. \quad (4.3.67)$$

Die rechte Seite von (4.3.67) stellt offenbar ein lineares Funktional  $l(\cdot)$  auf  $H$  dar mit der Eigenschaft  $l(\varphi) = 0$ ,  $\varphi \in J_1(\Omega)$ . Die Existenz eines zugehörigen Druckes und dessen Stabilität wird nun durch den folgenden Hilfssatz sichergestellt.

**Hilfssatz 4.1 („inf-sup“-Bedingung):** *i) Zu jedem linearen Funktional  $l(\cdot)$  auf  $H$  mit der Eigenschaft  $l(\varphi) = 0$ ,  $\varphi \in J_1(\Omega)$  gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion  $p \in L$ , so dass*

$$(p, \nabla \cdot \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H. \quad (4.3.68)$$

*ii) Zu jeder Funktion  $p \in L$  existiert ein  $v \in H$  mit der Eigenschaft*

$$p = \nabla \cdot v, \quad \|\nabla v\| \leq \gamma \|p\|, \quad (4.3.69)$$

*mit einer von  $p$  unabhängigen Konstante  $\gamma > 0$ . Ferner gilt die Stabilitätsungleichung („inf-sup-Bedingung“):*

$$\inf_{q \in L} \sup_{\varphi \in H} \frac{(q, \nabla \cdot \varphi)}{\|q\| \|\nabla \varphi\|} \geq \gamma > 0. \quad (4.3.70)$$

**Beweis:** Wir verwenden eine funktionalanalytische Argumentation nach Girault & Raviart [110]; ein alternativer potentialtheoretischer Beweis wird in Galdi [32] gegeben.

i) Wir betten die vorliegende Situation in einen abstrakten Rahmen ein. Ausgangspunkt sind die Hilbert-Räume  $L^2(\Omega)$  und  $H = H_0^1(\Omega)^d$  mit den zugehörigen Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\nabla \cdot\|$  sowie deren Dualräume  $L^2(\Omega)^* \cong L^2(\Omega)$  und  $H^* = H^{-1}(\Omega)^d$  (bestehend aus linearen stetigen Funktionalen). Durch

$$\langle -\text{grad}(p), \varphi \rangle := (p, \text{div}(\varphi)), \quad \varphi \in H,$$

wird der Gradient (im Distributionssinne) als linearer Operator  $-\text{grad} : L^2(\Omega) \rightarrow H^*$  erklärt. Der zugehörige adjungierte Operator ist dann gerade der Divergenzoperator  $\text{div} : H \rightarrow L^2(\Omega)^* \cong L^2(\Omega)$ . Für die Bildräume und Nullräume dieser Operatoren gilt aufgrund allgemeiner Prinzipien

$$\overline{B(\text{grad})} = N(\text{div})^0 = J_1(\Omega)^0, \quad \overline{B(\text{div})} = N(\text{grad})^0 = J_0(\Omega).$$

Dabei ist  $N(\text{div})^0 := \{\chi \in H^* : \langle \chi, \varphi \rangle = 0, \varphi \in N(\text{div})\}$ . Ein tief liegendes Resultat der Distributionentheorie (Satz von De Rham) besagt nun: *Der Bildbereich  $B(\text{grad}) \subset H^*$  ist abgeschlossen.* Also ist  $B(\text{grad}) = J_1(\Omega)^0$ . Dies impliziert die erste Behauptung (i).

ii) Weiter ist  $N(\text{grad}) = \text{span}\{1\}$ , so dass der eingeschränkte Operator

$$\widetilde{\text{grad}} : L = L_0^2(\Omega) \rightarrow J_1(\Omega)^0$$



bijektiv ist. Da  $L$  und  $J_1(\Omega)^0$  (vollständige) Hilbert-Räume sind, besagt ein weiteres allgemeines Resultat, dass der Operator  $\widetilde{\text{grad}}$  dann auch ein Isomorphismus ist, d.h.: Der inverse Operator  $\widetilde{\text{grad}}^{-1} : J_1(\Omega)^0 \rightarrow L$  existiert und ist beschränkt:

$$\|\widetilde{\text{grad}}^{-1}(v)\| \leq \gamma \sup_{\varphi \in H} \frac{\langle v, \varphi \rangle}{\|\nabla \varphi\|}.$$

Hieraus ersieht man unmittelbar, dass für beliebiges  $p \in L$  gilt:

$$\|p\| \leq \gamma \sup_{\varphi \in H} \frac{\langle \widetilde{\text{grad}}(p), \varphi \rangle}{\|\nabla \varphi\|} \sup_{\varphi \in H} \frac{(p, \nabla \cdot \varphi)}{\|\nabla \varphi\|}.$$

Mit  $\widetilde{\text{grad}}$  ist auch der adjungierte Operator

$$\widetilde{\text{div}} : (J_1(\Omega)^0)^* \rightarrow L^*$$

ein Isomorphismus. Der Raum  $J_1(\Omega)^0 \subset H^*$  kann auf die übliche Weise mit dem orthogonalen Komplement von  $J_1(\Omega)$  in  $H$  identifiziert werden:

$$J_1(\Omega)^0 \cong J_1(\Omega)^\perp := \{v \in H : (\nabla v, \nabla \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega)\}.$$

Folglich existiert zu jedem  $p \in L$  ein  $v \in J_1(\Omega)^\perp$  mit

$$p = \nabla \cdot v, \quad \|\nabla v\| \leq \gamma \|p\|.$$

Dies vervollständigt den Beweis.

Q.E.D.

**Bemerkung 4.1:** Zur Illustration der wichtigen Surjektivität des Divergenzoperators, wollen wir noch ein heuristisches Argument geben. Sei  $p \in L$  gegeben. Die Neumannsche Randwertaufgabe

$$\Delta z = p \text{ in } \Omega, \quad \partial_n v|_{\partial\Omega} = 0,$$

hat eine eindeutige Lösung  $z \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , für welche (unter den obigen Voraussetzungen an das Gebiet  $\Omega$ ) die folgende a priori Abschätzung gilt:

$$\|\nabla^2 z\| \leq \gamma \|p\|.$$

Die Funktion  $v := \nabla z$  hat dann offenbar die folgenden Eigenschaften:

$$\nabla \cdot v = p, \quad n \cdot v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \|\nabla v\| \leq \gamma \|p\|.$$

Die Behauptung wäre also bereits bewiesen, wenn zusätzlich noch  $t \cdot v|_{\partial\Omega} = 0$  gelten würde mit einem beliebigen Tangentenvektor  $t$  an  $\partial\Omega$ .

Die durch Satz 4.1 gelieferte sog. „schwache“ Lösung  $\{v, p\} \in H \times L$  des Navier-Stokes-Problems hat in Abhängigkeit von den Problemdata weitere Regularitätseigenschaften. Unter den oben formulierten Voraussetzungen an den Gebietsrand  $\partial\Omega$  ist  $v \in H^2(\Omega)^d$  und  $p \in H^1(\Omega)$ , und es gilt die a priori Abschätzung

$$\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\| \leq c_s \{\|f\| + \|\nabla^2 v^{ein}\|\}. \quad (4.3.71)$$

Die Konstante  $c_s$  hängt dabei linear von der Reynolds-Zahl ab:  $c_s \sim \text{Re} = 1/\nu$ . Für die (nicht-trivialen) Beweise dieser und weitergehender Regularitätsaussagen sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

## Taylor-Problem

Es ist erstaunlich, dass die Navier-Stokes-Gleichungen trotz ihrer Nichtlinearität für beliebig große Reynolds-Zahl stets lösbar sind. Die Lösungen müssen aber anscheinend im allgemeinen nicht eindeutig sein. Tatsächlich gibt es viele Strömungskonfigurationen, bei denen für gleiche (stationäre) Daten durchaus mehr als eine stationäre Lösung existiert. Ein Beispiel ist die Strömung im Spalt zwischen zwei konzentrischen Kugelschalen („Taylor<sup>15</sup>-Problem“); s. Abb. 4.18.

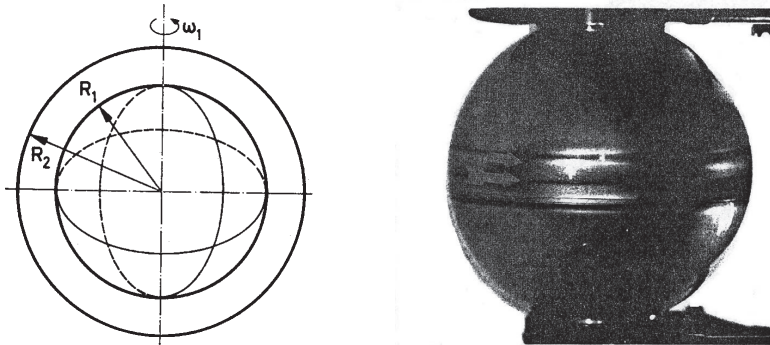


Abbildung 4.18: Konfiguration des „Taylor-Problems“ (Strömung im Zylinder- oder Kugelspalt) und eine Aufnahme vom Experiment

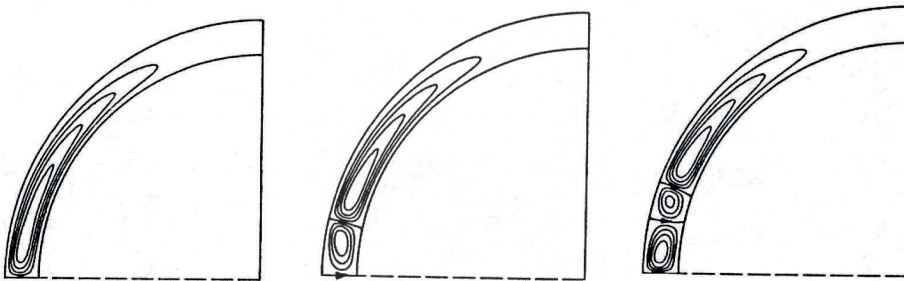


Abbildung 4.19: Verschiedene stationäre Strömungszustände im Kugelspalt zu denselben stationären Daten bei der überkritischen Reynolds-Zahl  $Re = R_1^2 \omega_1 / \nu = 2600$

Bei drehender innerer und festgehaltener äußerer Schale treten hier unterschiedliche Strömungsformen auf (s. Fig. 4.19). Für kleine Drehgeschwindigkeit liegt eine einfache (eindeutige) Grundströmung vor. Bei Erhöhung der Drehgeschwindigkeit entstehen

<sup>15</sup>Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975): Englischer angewandter Mathematiker und Physiker, Studium der Mathematik und Physik in Cambridge, arbeitete theoretisch und experimentell; ab 1923 Royal Society Research Professor; Arbeitsgebiet Hydrodynamik mit Anwendungen von der Ozeanographie bis zum Überschallflug, nach ihm benannt sind u. a. die „Taylor-Zahl“, „Taylor-Couette-Instabilität“, „Taylor-Wirbel“, „Rayleigh-Taylor-Instabilität“ und „Taylor-Dispersion“.

Strömungszustände mit unterschiedlicher Anzahl von „Taylor-Rollen“ in Abhängigkeit von der Art der Beschleunigung. Diese „Lösungen“ existieren gleichzeitig zu identischen stationären Daten. Bei weiterer Erhöhung der Drehgeschwindigkeit brechen die stationären Zustände zusammen, und es entsteht ein instationärer Strömungszustand (wellenartige Oszillation der Taylor-Rollen) zu nachwievor stationären Daten. Wir werden später nochmal auf diese Phänomene zurückkommen.

### Ausströmrandbedingungen

Wir betrachten nun wieder den Fall allgemeiner Randbedingungen mit  $\Gamma_{\text{aus}} \neq \emptyset$  und fragen nach der Existenz von Lösungen der zugehörigen variationellen Formulierung (4.3.56) im Funktionenraum  $H = H_0^1(\Omega, \Gamma_D)$ . Der Beweis von Hilfsatz 4.1 verwendete an entscheidender Stelle die Identität (4.3.64). Diese gilt nun aber nur noch in der Form

$$(u \cdot \nabla v, v) = \frac{1}{2}(n \cdot u, |v|^2)_{\Gamma_{\text{aus}}}.$$

Das Randintegral rechts muss nun nicht notwendig positiv sein, z. B. bei dominierender Einströmung durch die Randkomponente  $\Gamma_{\text{aus}}$ . Auf der Basis dieser Beziehung lässt sich nun mit der Argumentation des Hilfssatzes die Existenz von Lösungen nur noch unter der Annahme hinreichend kleiner Daten in einer kleinen Kugelumgebung der Null in  $J_1(\Omega; \Gamma_{\text{ein}} \cup \Gamma_{\text{fest}})$  zeigen. Ferner erhält man die Eindeutigkeit dieser Lösung auch nur in dieser Kugelumgebung und nicht mehr, wie im Fall reiner Dirichlet-Randbedingungen, im ganzen Raum  $J_1(\Omega; \Gamma_{\text{ein}} \cup \Gamma_{\text{fest}})$ . Insbesondere ist nicht bekannt, ob die triviale Lösung  $v \equiv 0$  und  $p \equiv 0$  die einzige Lösung des homogenen Problems

$$\nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

mit den Randbedingungen

$$v|_{\Gamma_{\text{ein}} \cup \Gamma_{\text{fest}}} = 0, \quad \nu \partial_n v - pn|_{\Gamma_{\text{aus}}} = 0,$$

ist. Im Fall reiner Dirichlet-Randbedingungen ist dies, wie man leicht zeigt, natürlich der Fall. Da die „do-nothing“-Randbedingung rein technischer Natur, ohne natürlichen physikalischen Gehalt ist, und insbesondere ein der Poiseuille-Strömung entsprechendes Verhalten modellieren soll, würde die Existenz nicht-trivialer, sekundärer Lösungen die risikolose Verwendung dieser Randbedingung zur Beschreibung von Kanalströmungen in Frage stellen. Es ist offen, ob dies ein modell-immanentes Problem ist, oder nur eine Schwäche des Beweises darstellt. Ein scheinbarer Ausweg aus diesem Dilemma ist, den Transportterm in der Formulierung (4.3.56) wie folgt zu „symmetrisieren“:

$$(v \cdot \nabla v, \varphi) \rightarrow \tilde{n}(v, v, \varphi) := \frac{1}{2}(v \cdot \nabla v, \varphi) - \frac{1}{2}(v \cdot \nabla \varphi, v).$$

Für die neue nichtlineare Form gilt dann wieder

$$\tilde{n}(u, v, v) = 0,$$

und die Aussage von Hilfssatzes 4.1 lässt sich mit analogen Argumenten beweisen. Diese Modifikation erscheint verträglich, da im Fall  $\Gamma_{\text{aus}} = \emptyset$  gilt:

$$\tilde{n}(u, v, w) = (u \cdot \nabla v, w).$$

Trotzdem ist diese Manipulation fragwürdig, da durch sie der physikalische Gehalt des mathematischen Modells wesentlich verändert wird. Ausgehend von der variationellen Gleichung

$$\nu(\nabla v, \nabla \varphi) + \tilde{n}(v, v, \varphi) - (p, \nabla \cdot v) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H,$$

erhält man für eine hinreichend glatte Lösung  $\{v, p\} \in H \times L$  wieder durch partielle Integration die Beziehung

$$\int_{\Omega} \{-\nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v - \nabla p\} \varphi \, dx + \int_{\Gamma_{\text{aus}}} \{\nu \partial_n v - \frac{1}{2}(n \cdot v)v - pn\} \cdot \varphi \, do = 0, \quad \varphi \in H.$$

Hieraus ergibt sich für die modifizierte variationelle Formulierung die „natürliche“ Ausströmrandbedingung

$$\nu \partial_n v - \frac{1}{2}(n \cdot v)v - pn|_{\Gamma_{\text{aus}}} = 0. \quad (4.3.72)$$

Diese Bedingung ist offenbar bereits für die einfache Poiseuille-Strömung nicht erfüllt, so dass sie als ungeeignet zur Modellierung von Kanalströmungen erscheint. Die numerische Berechnung einer Kanalströmung basierend auf dieser Formulierung ergibt tatsächlich ein „unphysikalisches“ Verhalten der Ausströmung; s. Abb. 4.20 (nach innen gebogene Stromlinien).

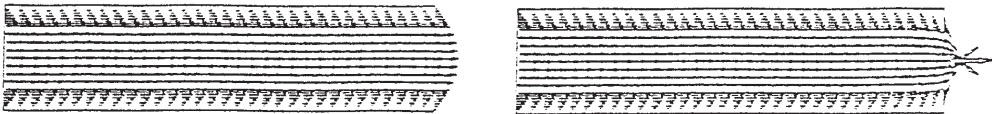


Abbildung 4.20: Poiseuille-Strömung bei richtiger (links) und bei symmetrisierter (rechts) Darstellung des Transportterms

### 4.3.2 Die instationären Navier-Stokes-Gleichungen

Wir betrachten nun die *instationären* Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t v - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad (4.3.73)$$

auf einem Orts-Zeit-Bereich  $\Omega \times [0, T]$ , mit den Randbedingungen

$$v|_{\Gamma_{\text{fest}}} = 0, \quad v|_{\Gamma_{\text{ein}}} = v^{\text{ein}}, \quad \nu \partial_n v - pn|_{\Gamma_{\text{aus}}} = 0,$$

und der Anfangsbedingung

$$v|_{t=0} = v^0.$$

Die Existenz von Lösungen für dieses variationelle Problem kann analog wie im stationären Fall mit Hilfe der Galerkin-Technik bewiesen werden unter Verwendung des vollständigen Eigensystems  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  des Stokes-Operators in  $J_0(\Omega)$ . Im Fall  $\Gamma_{\text{aus}} = \emptyset$  existiert für beliebige Reynolds-Zahl  $\text{Re} = 1/\nu$  mindestens eine Lösung. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen erfordert wieder einschneidende „Kleinheitsbedingungen“ an die Problemdata. Der Beweis basiert wieder auf einer charakteristischen Ungleichung für die Nichtlinearität des Problems. Zu (4.3.73) korrespondiert die variationelle Formulierung

$$(\partial_t v_m, \varphi_m) + \nu(\nabla v_m, \nabla \varphi_m) + (v_m \cdot \nabla v_m, \varphi_m) = (f, \varphi_m) \quad \forall \varphi_m \in H_m, t \geq 0, \quad (4.3.74)$$

für die Galerkin-Approximationen  $v_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) w_i$  zu den Anfangsbedingungen

$$v_m(0) = \sum_{i=1}^m (v^0, w_i) w_i.$$

Die Existenz lokaler (eindeutiger) Lösungen zu diesen Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Koeffizientenfunktionen  $\alpha_i(t)$  ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf. Zum Nachweis ihrer Fortsetzbarkeit auf ganz  $[0, \infty)$  benötigen wir eine gleichmäßige a priori Schranke für die  $v_m(t)$ . Dazu wählen wir auf dem Existenzintervall  $[0, T]$  von  $v_m$  als Testfunktion  $\varphi = v_m(t)$  in (4.3.74) und erhalten wieder bei Beachtung der Identität  $(v_m(t) \cdot \nabla v_m(t), v_m(t)) = 0$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|^2 + \nu \|\nabla v_m(t)\|^2 = (f(t), v_m(t)).$$

Durch Integration über  $[0, t] \subset [0, T]$  folgt:

$$\frac{1}{2} \|v_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla v_m\|^2 ds \leq \frac{1}{2} \|v_m^0\|^2 + \frac{1}{2} \nu \int_0^t \|\nabla v_m\|^2 ds + \frac{1}{2} \nu^{-1} \int_0^t \|f\|_{-1}^2 ds,$$

und damit die sog. „Energie-Ungleichung“

$$\|v_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla v_m\|^2 dt \leq \|v^0\|^2 + \nu^{-1} \int_0^t \|f\|_{-1}^2 dt. \quad (4.3.75)$$

Diese Ungleichung liefert Kontrolle über die Galerkin-Approximierenden und erlaubt die Konstruktion einer Grenzfunktion  $v = v(t) \in J_1(\Omega)$ , welche „schwache“ Lösung von (4.3.73) in folgendem Sinne ist:

$$\begin{aligned} (v(T), \varphi(T)) - \int_0^T \left\{ (-v, \partial_t \varphi) + \nu(\nabla v, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla v, \varphi) \right\} dt \\ = \int_0^T (f, \varphi) dt + (v^0, \varphi(0)) \end{aligned} \quad (4.3.76)$$

für alle hinreichend glatten Testfunktionen  $\varphi = \varphi(t)$ . Für hinreichend kleine Problemdata ist diese schwache Lösung wieder eindeutig. Die Frage nach der Regularität der schwachen Lösung ist im instationären Fall im allgemeinen noch offen. Bekannt sind folgende Resultate:

- i) In zwei Raumdimensionen ist die schwache Lösung eindeutig und für hinreichend glatte Daten gleichzeitig auch „klassische“ Lösung für alle Zeiten  $t \geq 0$ .
- ii) In drei Raumdimensionen ist die Regularität der schwachen Lösung für alle Zeiten  $t \geq 0$  ein offenes Problem. Bekannt ist die Existenz von glatten Lösungen auf kleinen Zeitintervallen  $0 \leq t \leq T = T(\nu, \|f\|, \Omega)$  und auf ganz  $[0, \infty)$  für „kleine“ Problemdaten.
- iii) Der „schwache“ Existenzsatz liefert zeitlich „globale“ Lösungen mit der Eigenschaft

$$\int_0^T \|v\|_{L^4}^{8/3} dt < \infty.$$

Eindeutigkeit (und höhere Regularität) konnte bisher aber nur für Lösungen mit der Regularität

$$\int_0^T \|v\|_{L^4}^8 dt < \infty$$

gezeigt werden. Die offensichtliche Lücke zu schließen, ist eines der herausragenden ungelösten Probleme der angewandten Analysis.

### 4.3.3 Stabilität von Lösungen

Wir wollen zum Schluss dieses Abschnittes noch einmal die Frage nach der physikalischen Relevanz der durch Satz 4.1 gelieferten „mathematischen“ Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen für große Reynolds-Zahlen aufgreifen. Für Spalt- und Kanalströmungen sind z. B. durch die Couette- und die Poiseuille-Strömung solche Lösungen explizit gegeben.

Durch Vergleich mit dem Experiment sieht man, dass für größere Reynolds-Zahlen diese „mathematischen“ stationären Lösungen nicht realisierbar sind, vielmehr tritt ein Umschlag in instationäres bis hin zu chaotischem Verhalten („Turbulenz“) auf. Wir wollen uns hier aber nicht mit der Frage nach dem Wesen und der mathematischen Beschreibung von Turbulenz beschäftigen. Vielmehr ist zunächst zu untersuchen, wie der Umschlag von einer zunächst stationären Strömung in eine instationäre zustande kommt und ob dies durch das vorliegende mathematische Modell beschrieben wird.

Dazu betrachten wir zunächst wieder den Idealfall  $\partial\Omega = \Gamma_D$ . Sei  $v \in J_1(\Omega)$  eine stationäre Lösung des variationellen Navier-Stokes-Problems

$$\nu(\nabla v, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla v, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega). \quad (4.3.77)$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Lösung unter kleinen Störungen verhält. Dazu betrachten wir für eine Störung  $\delta v^0 \in J_1(\Omega)$  das instationäre Problem

$$(\partial_t \tilde{v}, \varphi) + \nu(\nabla \tilde{v}, \nabla \varphi) + (\tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v}, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega), \quad t \geq 0, \quad (4.3.78)$$

mit der Anfangsbedingung  $\tilde{v}|_{t=0} = v + \delta v^0$ . Wir nehmen an, dass dieses gestörte Problem eine (eindeutige) Lösung mit  $\tilde{v}(t) \in J_1(\Omega)$  besitzt. Die Differenz  $w(t) := v - \tilde{v}(t)$  erfüllt dann die „Störungsgleichung“

$$(\partial_t w, \varphi) + \nu(\nabla w, \nabla \varphi) + (w \cdot \nabla v, \varphi) + (v \cdot \nabla w, \varphi) = (w \cdot \nabla w, \varphi), \quad (4.3.79)$$

für  $\varphi \in J_1(\Omega)$ ,  $t \geq 0$ , und  $w|_{t=0} = \delta v^0$ . Die Frage nach der „Stabilität“ der stationären Lösung  $v$  ist nun gleichbedeutend mit der Frage nach dem Verhalten der Störung  $w(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ . Wir unterscheiden (für kleine Störungen  $\delta v^0 \in J_0(\Omega)$ ) „exponentielle Stabilität“,

$$\|w(t)\| \sim Ae^{-\alpha t} \|\delta v^0\|, \quad t > 0,$$

und „exponentielle Instabilität“,

$$\|w(t)\| \sim Ae^{+\alpha t} \|\delta v^0\|, \quad t > 0.$$

Dieses Konzept ist orientiert am Modellfall der (verallgemeinerten) Stokes-Gleichung

$$(\partial_t w, \varphi) + \nu(\nabla w, \nabla \varphi) + (aw, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega),$$

bei der Wachsen oder Fallen charakterisiert ist durch den kleinsten Eigenwert  $\lambda_1 > 0$  des Stokes-Operators  $S$  gemäß

$$\|w(t)\| \sim e^{-(a+\lambda_1)t} \|\delta v^0\|, \quad t > 0.$$

Exponentiell instabile Lösungen lassen sich naturgemäß experimentell nicht realisieren, daher die unvermeidbaren kleinen Störungen (Randrauigkeit, Einströmprofil, etc.) sofort exponentiell verstärkt werden und die „ideale“ Lösung verdecken.

Wir beweisen dazu als erstes den folgenden Satz:

**Satz 4.2 (Hydrodynamische Stabilität):** *Eine Lösung  $v \in J_1(\Omega)$  der Navier-Stokes-Gleichungen mit  $\partial\Omega = \Gamma_D$  ist (unbedingt) exponentiell stabil unter der Bedingung*

$$c_*^2 \nu^{-1} \|\nabla v\| < 1 \quad \text{bzw.} \quad c_*^2 \nu^{-2} \|f\|_{-1} < 1. \quad (4.3.80)$$

**Beweis:** Ausgehend von der Störungsgleichung (4.3.79) erhalten wir mit  $\varphi = w$  für  $t \geq 0$  die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \nu \|\nabla w\|^2 = -(w \cdot \nabla v, w) \leq c_*^2 \|\nabla w\|^2 \|\nabla v\|,$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + 2(\nu - c_*^2 \|\nabla v\|) \|\nabla w\|^2 \leq 0.$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung mit  $e^{\alpha t}$ ,

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} \|w\|^2) + 2(\nu - c_*^2 \|\nabla v\|) e^{\alpha t} \|\nabla w\|^2 \leq \alpha e^{\alpha t} \|w\|^2 \leq \alpha \gamma e^{\alpha t} \|\nabla w\|^2,$$

und erhalten nach Integration über die Zeit

$$\|w(t)\|^2 + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} (2(\nu - c_*^2 \|\nabla v\|) - \alpha \gamma) ds \leq e^{-\alpha t} \|\delta v^0\|^2.$$

Dies impliziert, dass die stationäre Lösung  $v$  exponentiell stabil ist unter der Kleinheitsbedingung  $c_*^2 \|\nabla v\| < \nu$ . Im Hinblick auf die Abschätzung (4.3.66) ist diese Bedingung erfüllt, wenn gilt:  $c_*^2 \|f\|_{-1} < \nu^2$ . Q.E.D.

Wir sehen, dass dieselbe Kleinheitsbedingung, welche die Eindeutigkeit der stationären Lösungen sichert, auch deren exponentielle Stabilität garantiert. Schärfere Aussagen zur Stabilität von stationären Lösungen liefert die sog. „lineare Stabilitätstheorie“ der Hydrodynamik. Diese sucht Kriterien für Stabilität oder Instabilität durch Untersuchung des unsymmetrischen Eigenwertproblems zur (linearisierten) Störungsgleichung (4.3.79) zu gewinnen:

$$\nu(\nabla w, \nabla \varphi) + (w \cdot \nabla v, \varphi) + (v \cdot \nabla w, \varphi) = \lambda(w, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega). \quad (4.3.81)$$

Wenn alle Eigenwerte positiven Realteil haben,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , wird in Analogie zum linearen Modellproblem Stabilität erwartet, andernfalls Instabilität. Das Eigenwertproblem muss im Fall einer konkreten Lösung  $v$  numerisch gelöst werden. Nur in Ausnahmefällen führt eine analytische Untersuchung zu brauchbaren Resultaten. Auf diesem Wege können aber nur Aussagen über „bedingte“ Stabilität, d. h. Stabilität für hinreichend kleine Störungen, gemacht werden.

**Satz 4.3 (Lineare Stabilität):** *Wenn alle Eigenwerte der Aufgabe (4.3.81) positive Realteile  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  haben, so ist jede stationäre Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit  $\partial\Omega = \Gamma_D$  bedingt, d. h. gegenüber kleinen Störungen, exponentiell stabil. Andernfalls ist sie instabil.*

**Beweis:** Wir verweisen im wesentlichen auf die Literatur. Das Eigenwertproblem (4.3.81) ist das des Operators (für festes  $v \in J_1(\Omega)$ )

$$L(v)w := Sw + (v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)v,$$

in  $J_0(\Omega)$ , wobei  $S : D(S) \subset J_0(\Omega) \rightarrow J_0(\Omega)$  wieder der oben eingeführte Stokes-Operator ist. Der Operator  $L(v)$  ist auch auf  $D(S) \subset J_0(\Omega)$  definiert und stellt eine „relativ-kompakte“ Störung des Stokes-Operators dar. Die Spektraltheorie invers-kompakter Operatoren im Hilbertraum liefert daher die folgenden Aussagen:

- i) Das Spektrum des Operators  $L(v)$  besteht nur aus abzählbar vielen Eigenwerten  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ , welche endliche Vielfachheiten haben und sich im Endlichen nicht häufen können. Ferner gibt es eine untere Schranke für ihre Realteile.
- ii) Es existiert ein in  $J_0(\Omega)$  und  $J_1(\Omega)$  vollständiges System von Hauptvektoren  $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ , so dass jedes  $w \in J_0(\Omega)$  eine Entwicklung der folgenden Form besitzt:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k,$$

mit gewissen Koeffizienten  $a_k = a_k(w)$ .

Die Eigenwerte  $\lambda_k$  seien nach der Größe ihrer Realteile geordnet:

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_k \leq \dots$$



Die Anfangsstörung habe die Entwicklung

$$\delta v^0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^0 w_k.$$

Dann erhält man durch den Ansatz

$$w(t) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^0 p_k(t) e^{-\lambda_k t} w_k, \quad t \geq 0,$$

die (eindeutige) Lösung der linearisierten Störungsgleichung

$$\partial_t w + Sw + (v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)v = 0, \quad t \geq 0, \quad w(0) = \delta v^0.$$

Dabei sind  $p_k(t)$  geeignete Polynome mit  $p_k(0) = 1$ , welche von der Nichtnormalität des Problems herrühren. Im Falle  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  erschließt man hieraus (nicht-trivial!), dass

$$\|w(t)\| \leq A(1+t)^m e^{-\operatorname{Re} \lambda_1 t} \|\delta v^0\|, \quad t \geq 0.$$

mit gewissen von  $\delta v^0$  unabhängigen Konstanten  $A > 0$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Wir bemerken, dass diese Aussage im Fall symmetrischer Probleme mit  $A = 1$  und  $m = 0$  gilt. Dies beweist die Aussage des Satzes für den Fall einer *linearen* Störungsgleichung. Für die Übertragung dieser Aussage auf die ursprüngliche *nichtlineare* Störungsgleichung muss auf die Literatur verwiesen werden. Q.E.D.

Die Aussagekraft von Satz 4.3 für reale Strömungen ist eine delikate Frage. Wir wollen dies durch zwei Beispiele illustrieren.

*Beispiel 1: Couette-Strömung*

Die Couette-Strömung  $v = (v_1, v_2, v_3)$  mit den Komponenten

$$v_1(x) = x_3, \quad v_2(x) = v_3(x) = 0,$$

erfüllt die Haftrandbedingung  $v(x_1, x_2, 0) = 0$  und außerdem die („künstliche“) Randbedingung  $v_1(x_1, x_2, 1) = 1$ . Zusammen mit der trivialen Druckfunktion  $p = 0$  genügt sie den Navier-Stokes-Gleichungen. In diesem Fall erhält die Eigenwertgleichung (4.3.81) die Form

$$\nu(\nabla w, \nabla \varphi) + (w_3, \varphi_1) + (x_3 \partial_1 w, \varphi) = \lambda(w, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega).$$

Es lässt sich zeigen, dass alle Eigenwerte positive Realteile haben. Dies führt zu dem Schluss, dass die Couette-Strömung für alle Reynolds-Zahlen stabil ist. Dies widerspricht aber der experimentellen Beobachtung, dass diese stationäre Strömungsform im Bereich  $\operatorname{Re} \sim 300 - 1500$  (je nach experimenteller Sorgfalt) instabil wird.

*Beispiel 2: Poiseuille-Strömung*

Die Poiseuille-Strömung  $v = (v_1, v_2, v_3)$  mit den Komponenten

$$v_1(x) = 1 - (x_2^2 + x_3^2), \quad v_2 = v_3 = 0,$$

ist zusammen mit der Druckfunktion  $p(x) := -4\text{Re}^{-1}x_1$  eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. In diesem Fall erhält die Eigenwertgleichung (4.3.81) die Form

$$\nu(\nabla w, \nabla \varphi) + (-2x_2w_2 - 2x_3w_3, \varphi_1) + ((1 - x_2^2 - x_3^2)\partial_1 w, \varphi) = \lambda(w, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega).$$

Es lässt sich zeigen, dass bis zu einer „kritischen“ Reynolds-Zahl  $\text{Re}_{krit} \sim 5772$  alle Eigenwerte positive Realteile haben. Für kleinere Reynolds-Zahlen ist die Poiseuille-Strömung also gemäß der Theorie stabil. Dies widerspricht aber wieder der experimentellen Beobachtung, dass diese stationäre Strömungsform irgendwo im Bereich  $1000 \leq \text{Re} \leq 10000$  (je nach experimenteller Sorgfalt) instabil wird.

Eine Erklärung für dieses Versagen der Theorie besteht in der Unsymmetrie des Eigenwertproblems (4.3.81). In diesem Fall genügt es zur Bestimmung der Stabilität nicht, nur die Eigenwerte zu betrachten; stattdessen muss auch der Wachstumsfaktor  $A(1+t)^m$  in Betracht gezogen werden. Selbst bei Eigenwerten mit positivem Realteil kann dieser so groß sein, dass auch kleine Störungen zunächst so verstärkt werden, dass der Gültigkeitsbereich der Linearisierung verlassen wird und nichtlineare Mechanismen die Lösung zum „explodieren“ bringt. Der im Rahmen der linearen Approximation später einsetzende exponentielle Abfall kommt dann gar nicht mehr zur Wirkung. Bei der Poiseuille-Strömung ist der Verstärkungsfaktor für  $\text{Re} \geq 549$  bereits größer als 1000.

Wir wollen den erwähnten Mechanismus anhand zweier einfacher Beispiele illustrieren.

a) *Ein ODE-Modell:*

Als erstes betrachten wir das einfache System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{w}_1 + \nu w_1 + w_2 = 0, \tag{4.3.82}$$

$$\dot{w}_2 + \nu w_2 = 0. \tag{4.3.83}$$

Hier stehen  $\nu v_i$  für die Diffusionsterme und  $w_2$  in der ersten Gleichung für die Kopplung im Transportterm der linearisierten Störungsgleichung der Navier-Stokes-Gleichungen. Die zugehörige Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

ist unsymmetrisch; der einzige Eigenwert  $\lambda = \nu$  hat die algebraische Vielfachheit 2. Es liegt hier also gerade die oben beschriebene Situation vor. Für dieses lineare System lässt sich die Lösung zum Anfangswert  $w(0) = w^0$  explizit angeben:

$$w_1(t) = e^{-\nu t} w_1^0 - t e^{-\nu t} w_2^0, \quad w_2(t) = e^{-\nu t} w_2^0.$$

Wir erkennen den exponentiellen Abfall der zweiten Komponente und das zunächst lineare zeitliche Wachstum der ersten Komponente über ein Anfangsintervall  $[0, \nu^{-1}]$  auf Größe  $w_1(\nu^{-1}) = \nu^{-1} e^{-1} w_2^0$ , bis der exponentielle Abfall eintritt. Die Komponente  $w_2$  wirkt also in der ersten Gleichung wie ein Katalysator, der obwohl selbst exponentiell abnehmend doch  $w_1$  zunächst einmal zum anwachsen bringt. Dieser spätere exponentielle Abfall ist dann irrelevant, wenn durch das Wachstum auf Größe  $\nu^{-1} w_1^0$  bereits der Gültigkeitsbereich für die linearisierte Betrachtung verlassen wird.

b) *Ein Strömungsmodell:*

Als nächstes betrachten wir eine sehr einfache Strömungskonfiguration: die Strömung in einem unendlich langem geraden Rohr  $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$  mit der  $x_1$ -Achse als Mittelachse und ebenem Querschnitt  $\omega$  in der  $(x_2, x_3)$ -Ebene. Getrieben wird die Strömung durch eine Volumenkraft (z.B. Schwerkraft)  $f = (f_1(x_2, x_3, t), 0, 0)^T$  in  $x_1$ -Richtung. Die Lösung habe eine Form wie die Poiseuille-Strömung ( $x_1$ -unabhängig):

$$v = (v_1(x_2, x_3, t), 0, 0)^T, \quad p = p(x, t).$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen lauten hierfür:

$$\partial_t v_1 - \nu \Delta v_1 + \partial_1 p = f_1 \text{ in } \omega, \quad v_1|_{\partial\omega} = 0.$$

Die zugehörige linearisierte Störungsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} \partial_t w_1 - \nu \Delta w_1 + v_1 \partial_1 w_1 + \partial_2 v_1 w_2 + \partial_3 v_1 w_3 + \partial_1 q &= 0, \\ \partial_t w_2 - \nu \Delta w_2 + v_1 \partial_1 w_2 &+ \partial_2 q = 0, \\ \partial_t w_3 - \nu \Delta w_3 + v_1 \partial_1 w_3 &+ \partial_3 q = 0, \end{aligned}$$

mit der Inkompressibilitätsbedingung  $\partial_2 w_2 + \partial_3 w_3 = 0$  und den Rand- sowie Anfangsbedingungen  $w|_{\partial\omega} = 0$  und  $w|_{t=0} = w^0$ . Selbst dieses einfache Problem ist noch zu kompliziert, um es analytisch zu lösen. Wir nehmen daher zur weiteren Vereinfachung an, dass die gestörte Lösung  $\{w, q\}$  unabhängig von  $x_1$  sind. Dies korrespondiert etwa zur Annahme einer Flüssigkeit in einem langen vertikalen Rohr unter Einwirkung der Gravitation oder in einem langen rotierenden Rohr mit variabler Rotationsgeschwindigkeit. Unter dieser zusätzlichen Annahme vereinfacht sich die Störungsgleichung zu

$$\begin{aligned} \partial_t w_1 - \nu \Delta w_1 + \partial_2 v_1 w_2 + \partial_3 v_1 w_3 &= 0, \\ \partial_t w_2 - \nu \Delta w_2 &+ \partial_2 q = 0, \\ \partial_t w_3 - \nu \Delta w_3 &+ \partial_3 q = 0. \end{aligned}$$

In diesem System bilden die Gleichungen für die Komponente  $\bar{w} := \{w_2, w_3\}$  zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung  $\partial_2 w_2 + \partial_3 w_3 = 0$  ein zweidimensionales Stokes-Problem. Wir sind also in einer ähnlichen Situation wie im obigen ODE-Beispiel. Für das definite Stokes-System erhält man unabhängig von der ersten Gleichung eine a priori Abschätzung der Form (Übungsaufgabe)

$$\|\bar{w}(t)\| \leq e^{-\kappa t} \|\bar{w}^0\|, \quad t \geq 0,$$

mit  $\kappa = \text{diam}(\omega)$ . In der ersten Gleichung tritt der Druck nicht mehr auf. Unter Ausnutzung des Resultats für  $\bar{w}$  gewinnt man daher für die erste Komponente  $w_1$  wieder eine Abschätzung der Form

$$\|w_1(t)\| \leq ce^{-\kappa t} \{t\|w_1^0\| + \|\bar{w}^0\|\}, \quad t \geq 0.$$

**Bemerkung 4.2:** Eine alternative Erklärung für das Versagen der auf Eigenwertabschätzungen basierten Stabilitätstheorie verwendet das Konzept der „Pseudo-Spektren“ nicht-normaler Operatoren (s. die Monographie von Trefethen & Embree [63] und den numerisch orientierten Artikel von Gerecht et al. [109] sowie die dort erwähnte Literatur).

## Nichtlineare Stabilität

Wir haben gesehen, dass die *lineare* Stabilitätsanalyse bei stationären Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen kein sicheres, hinreichendes (wohl aber ein notwendiges) Kriterium für Stabilität liefert. Eine weitere Schwäche besteht in der Beschränkung dieses Ansatzes auf *stationäre* Lösungen. Im allgemeinen Fall kann man eine sog. „nicht-lineare“ Stabilitätsanalyse durchführen, die ein hinreichendes (aber i. Allg. sehr pessimistische) Stabilitätskriterium ergibt. Sei  $v$  eine (nicht notwendig stationäre) Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen und  $w$  wieder eine Störung, welche die Störungsgleichung (4.3.79) erfüllt. Durch Wahl der Testfunktion  $\varphi = w$  und Ausnutzung der Eigenschaft  $(v \cdot \nabla w, w) = (w \cdot \nabla w, w) = 0$  erhalten wir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \nu \|\nabla w\|^2 + (w \cdot \nabla v, w) = 0.$$

Durch Integration über  $[0, t]$  und Verwendung der Schreibweise  $(w \cdot \nabla v, w) = (\nabla v w, w)$  folgt

$$\|w(t)\|^2 + 2 \int_0^t \{ \nu \|\nabla w\|^2 + (\nabla v w, w) \} ds = \|w(0)\|^2.$$

Strikte Stabilität

$$\sup_{t \geq 0} \|w(t)\| \leq \|w(0)\|,$$

liegt also vor, wenn  $\nu \|\nabla w\|^2 + (\nabla v w, w) \geq 0$  ist. Letzteres ist äquivalent dazu, dass die *symmetrische* Eigenwertaufgabe

$$\nu(\nabla w, \nabla \varphi) + \frac{1}{2}(\{\nabla v + \nabla v^T\} w, \varphi) = \lambda(w, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega), \quad (4.3.84)$$

nur nicht-negative Eigenwerte hat. Dies lässt sich bei bekannter Grundlösung  $v$  wieder numerisch durch Berechnung der kleinsten Eigenwerte überprüfen. Wir betonen, dass dieses Kriterium für Stabilität zwar hinreichend aber i. Allg. nicht notwendig ist. In der Tat sind die so gewonnenen Stabilitätsgrenzen für praktische Zwecke meist zu pessimistisch.

### 4.3.4 2D-Approximation und Stromfunktionsformulierung

Häufig kann die reale Strömungskonfiguration durch ein zweidimensionales Modell ausreichend genau angenähert werden. Beispiele sind die Kanalströmung in rotationssymmetrischer Näherung (Zylinderkoordinaten) oder die Strömung über eine sehr breite Stufe (kartesische Koordinaten); s. Abb. 4.21. In diesen Fällen können die Navier-Stokes-Gleichungen durch Einführung einer sog. „Stromfunktion“ in einfacherer Form geschrieben werden; insbesondere kann man sich von der Nebenbedingung  $\nabla \cdot v = 0$  befreien.

Ein Beispiel für ein wesentlich zweidimensionales Problem ist die Strömung durch einen sehr breiten Kanal, wobei der Strömungszustand bzgl. der so ausgezeichneten  $z$ -Richtung als konstant angenommen wird. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den stationären Fall, d. h.:  $\partial_t v = 0$ . Erweiterungen für die instationären Navier-Stokes-Gleichungen sind leicht möglich. Weiter seien zunächst entlang des ganzen Randes

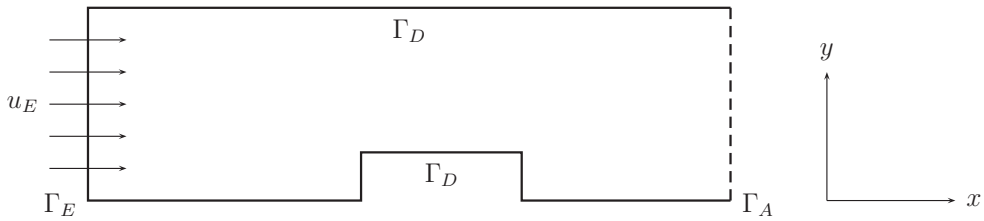


Abbildung 4.21: Konfiguration einer wesentlich zweidimensionalen Stufenströmung

Dirichlet-Bedingungen gestellt,  $\partial\Omega = \Gamma_D$ . Der Einfachheit halber habe  $\partial\Omega$  nur eine Randkomponente. Wir führen als neue Strömungsgrößen eine sog. „Stromfunktion“  $\Psi$  und eine „Wirbelstärke“  $\omega$  ein durch

$$v = \text{rot}(\Psi) = (\partial_2\Psi, -\partial_1\Psi)^T, \quad \omega = \text{rot}(v) = \partial_1v_2 - \partial_2v_1 = -\Delta\Psi.$$

Dabei ist die „skalare“ Rotation  $\text{rot}(\Psi)$  gerade  $L^2$ -adjungiert zur üblichen „vektoriellen“ Rotation  $\text{rot}(v)$ :

$$(\text{rot}(v), \Phi) = (v, \text{rot}(\Phi)), \quad v \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \Phi \in H_0^1(\Omega).$$

Die Setzung  $v = \text{rot}(\Psi)$  ist zunächst heuristisch. Wegen  $\text{div}(\text{rot}(\Psi)) = 0$  entsteht aber kein Widerspruch zur Divergenzfreiheit von  $v$ . Wir setzen diese Beziehungen in die Navier-Stokes-Gleichungen ein und wenden den Rotations-Operator an,

$$-\nu\text{rot}(\Delta v) + \text{rot}(v \cdot \nabla v) + \text{rot}(\nabla p) = \text{rot}(f).$$

Dies ergibt unter Ausnutzung der Identität  $\text{rot}(v \cdot \nabla v) = \text{rot}(v)\text{div}(v) + (v \cdot \nabla)\text{rot}(v)$  die sog. „Wirbeltransport-Gleichung“:

$$-\nu\Delta\omega + (\text{rot}(\Psi) \cdot \nabla)\omega = \text{rot}(f). \tag{4.3.85}$$

Durch Anwendung des Divergenz-Operators auf die Navier-Stokes-Gleichungen erhalten wir eine Gleichung für den Druck:

$$\Delta p = \nabla \cdot f - 2\{(\partial_1\partial_2\Psi)^2 - \partial_1^2\Psi\partial_2^2\Psi\}. \tag{4.3.86}$$

Für die Stromfunktion  $\Psi$  ergibt sich weiterhin wegen  $\omega = -\Delta\Psi$  die Gleichung

$$\nu\Delta^2\Psi - (\text{rot}(\Psi) \cdot \nabla)\Delta\Psi = \nu\Delta^2\Psi + \partial_2(\partial_1\Psi\Delta\Psi) - \partial_1(\partial_2\Psi\Delta\Psi) = \text{rot}(f). \tag{4.3.87}$$

Dies ist eine skalare (nichtlineare) Differentialgleichung 4-ter Ordnung. Sie ist vom elliptischen Typ. Die Existenz von Lösungen werden wir im Anschluss untersuchen. Zu jeder Lösung  $\Psi$  erhält man durch  $v := \text{rot}(\Psi)$  eine (divergenzfreie) Lösung der (stationären) Navier-Stokes-Gleichungen. Damit ist die Lösung dieses Systems von Gleichungen mit

der Zusatzbedingung  $\nabla \cdot v = 0$  reduziert auf die Lösung einer skalaren Gleichung ohne Zusatzbedingung; diese ist allerdings eine Gleichung 4-ter Ordnung. Die Lösung von (4.3.87) erfordert die Angabe von konsistenten Randbedingungen. Sei ein Punkt  $a \in \partial\Omega$  fixiert und  $s$  der Bogenlängenparameter mit Ursprung in  $a$ . Dann setzen wir mit der Randvorgabe  $v^\partial = v|_{\partial\Omega}$ :

$$\Psi(s) := \int_0^s n(s) \cdot v^\partial(s) ds, \quad \partial_n \Psi(s) = \tau \cdot v^\partial(s) \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (4.3.88)$$

Für das durch  $v := \text{rot}(\Psi)$  definierte Vektorfeld gilt dann unter Beachtung von

$$\begin{pmatrix} \partial_2 \Psi \\ -\partial_1 \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 \partial_n \Psi + \tau_2 \partial_\tau \Psi \\ -n_1 \partial_n \Psi - \tau_1 \partial_\tau \Psi \end{pmatrix} = \partial_n \Psi \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} + \partial_\tau \Psi \begin{pmatrix} \tau_2 \\ -\tau_1 \end{pmatrix}.$$

automatisch auf  $\partial\Omega$ :

$$v = (n \cdot \text{rot} \Psi)n + (\tau \cdot \text{rot} \Psi)\tau = \partial_\tau \Psi n + \partial_n \Psi \tau = n \cdot v^\partial n + \tau \cdot v^\partial \tau = v^\partial.$$

Eine Stromfunktion mit diesen Eigenschaften gehört damit zu einer Lösung des gestellten Navier-Stokes-Problems. Nachdem  $\Psi$  und  $v$  bestimmt sind, erhält man einen zugehörigen Druck etwa aus der Poisson-Gleichung (4.3.86) mit den Randbedingungen

$$p(s) := \int_0^s \tau \cdot (f + \nu(\Delta v) - (v \cdot \nabla)v) ds \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Die Existenz einer Stromfunktion wird wieder mit Hilfe der Variationsmethode bewiesen. Wir verwenden die Sobolew-Räume

$$\begin{aligned} H^2(\Omega) &:= \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \nabla \varphi \in L^2(\Omega)^2, \nabla^2 \varphi \in L^2(\Omega)^{2 \times 2}\}, \\ H_0^2(\Omega) &:= \{\varphi \in H^2(\Omega) \mid \varphi|_{\partial\Omega} = \partial_n \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

Auf  $H^2(\Omega)$  wird die folgende semi-lineare Form definiert:

$$a(\Psi; \Phi) := \nu(\Delta \Psi, \Delta \Phi) - (\partial_1 \Psi \Delta \Psi, \partial_2 \Phi) + (\partial_2 \Psi \Delta \Psi, \partial_1 \Phi)$$

Die variationelle Formulierung der Gleichung (4.3.87) für die Stromfunktion sucht nun ein  $\Psi \in H^2(\Omega)$ , welches die Randbedingungen (4.3.88) erfüllt und

$$a(\Psi; \Phi) = (\text{rot}(f), \Phi) \quad \forall \Phi \in H_0^2(\Omega). \quad (4.3.89)$$

**Satz 4.4 (Stromfunktion):** *i) Die variationelle Formulierung der Randwertaufgabe (4.3.89) und (4.3.88) besitzt für jeden Wert von  $\nu$  eine Lösung  $\Psi \in H^2(\Omega)$ . Für hinreichend kleine Daten ist diese Lösung wieder eindeutig bestimmt.*

*ii) Durch  $v := \text{rot}(\Psi)$  erhält man dann eine (schwache) Lösung  $v \in J_1(\Omega) + v^\partial$  der Navier-Stokes-Gleichungen*

$$\nu(\nabla v, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla v, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in J_1(\Omega),$$

zu der Dirichlet-Randbedingung  $v|_{\partial\Omega} = v^\partial$ .

**Beweis:** i) Wir skizzieren den Beweis für den Spezialfall  $v^{\partial} = 0$ . Die Bilinearform

$$(\Delta\Psi, \Delta\Phi)$$

ist ein Skalarprodukt auf  $H_0^2(\Omega)$ . Dies folgt aus Regularitätsresultaten für den Laplace-Operator; insbesondere ist  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  ein Isomorphismus,

$$\|\nabla^2\Phi\| \leq c\|\Delta\Phi\|, \quad \Phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Ferner definiert die rechte Seite  $(\operatorname{rot}(f), \varphi)$  ein stetiges lineares Funktional auf  $H_0^2(\Omega)$ . Der Darstellungssatz von Riesz liefert damit die (eindeutige) Lösbarkeit der linearen Gleichung

$$\nu(\Delta\psi, \Delta\Phi) = (\operatorname{rot}(f), \varphi) \quad \forall \Phi \in H_0^2(\Omega),$$

zu den Randbedingungen (4.3.88). Das entsprechende Resultat für das *nichtlineare* Problem ergibt sich wieder mit Hilfe der Galerkin-Technik. Diese basiert in diesem Fall auf der Identität

$$(\partial_1\Psi\Delta\Psi, \partial_2\Psi) - (\partial_2\Psi\Delta\Psi, \partial_1\Psi) = 0.$$

Als Nebenprodukt folgt noch die Eindeutigkeit der Lösung für kleine Daten. Die Vollständigkeit dieses Argument sei dem Leser als Übung überlassen.

ii) Für  $v := \operatorname{rot}(\Psi)$  und  $\varphi := \operatorname{rot}(\Phi)$  gilt dann wegen  $\Delta\Psi = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\Psi))$  weiter

$$\nu(\operatorname{rot}(v), \operatorname{rot}(\varphi)) + (v \cdot \nabla v, \varphi) = \nu(\nabla v, \nabla \varphi) + (v \cdot \nabla v, \varphi) = (f, \varphi).$$

Jedes  $\varphi \in J_1(\Omega)$  lässt sich nun als Rotation eines  $\Phi \in H_0^2(\Omega)$  darstellen, was wir im Anschluss noch beweisen werden. Damit ergibt sich dann, dass  $v \in J_1(\Omega)$  Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen in schwacher Form ist. Die Existenz eines zugehörigen Drucks  $p \in L_0^2(\Omega)$  folgt dann wie in Satz 4.1.

iii) Wir wollen nun noch die Beziehung  $\operatorname{rot}(H_0^2(\Omega)) = J_1(\Omega)$  beweisen. Die Inklusion  $\operatorname{rot}(H_0^2(\Omega)) \subset J_1(\Omega)$  ist offensichtlich. Zum Nachweis von  $J_1(\Omega) \subset \operatorname{rot}(H_0^2(\Omega))$  sei zunächst  $\varphi \in J_1 \cap C_0^\infty(\Omega)^2$ , d. h. als beliebig oft differenzierbar und mit kompaktem Träger in  $\Omega$ , angenommen. Mit einem beliebigen aber fest gewählten Punkt  $a \in \partial\Omega$  definieren dann für  $x \in \bar{\Omega}$

$$\Phi(x) := \int_{C_x} \varphi \cdot n \, ds, \tag{4.3.90}$$

wobei  $C_x$  eine beliebige, stückweise glatte Kurve in  $\bar{\Omega}$  von  $a$  nach  $x$  ist. Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl vom Aufpunkt  $a$  und der Kurve  $C_x$ , da wegen  $\nabla \cdot \varphi \equiv 0$  für jede geschlossene Kurve  $C$  gilt:

$$\int_C \varphi \cdot n \, ds = \int_{\Omega_C} \nabla \cdot \varphi \, dx = 0,$$

wobei  $\Omega_C$  das von  $C$  umschlossene Gebiet bezeichnet. Aus der Identität

$$\begin{aligned} \int_{C_x} \operatorname{rot}(\Phi) \cdot n \, ds &= \int_{C_x} \{n_1 \partial_2 \Phi - n_2 \partial_1 \Phi\} \, ds = \int_{C_x} \partial_\tau \Phi \, ds \\ &= \Phi(x) - \Phi(a) = \int_{C_x} \varphi \cdot n \, ds \end{aligned}$$

ergibt sich wegen der Beliebigkeit der Kurve  $C_x$ , dass  $\varphi = \text{rot}(\Phi)$ . Die so konstruierte Funktion  $\Phi$  ist in  $H_0^2(\Omega)$ . Dies sieht man durch Ausnutzung der folgenden Identität für  $x \in \partial\Omega$ :

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x \varphi \cdot n \, ds = 0.$$

Dieses Argument ist nun für Punkte  $x$  in einem ganzen Randstreifen anwendbar, woraus auch  $\nabla\Phi|_{\partial\Omega} = 0$  folgt. Um uns von der Glattheitsvoraussetzung zu befreien, verwenden wir ein Approximationsargument. Sei  $\varphi \in J_1(\Omega)$  beliebig und  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Phi(\Omega)$  eine approximierende Folge:  $\|\nabla(\varphi_k - \varphi)\| \rightarrow 0$ . Für die zugehörigen, gemäß (4.3.90) konstruierten Funktionen  $\Phi_k \in H_0^2(\Omega)$  ist dann  $(\nabla\text{rot}(\Phi_k))_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^2(\Omega)$  mit Limes  $\nabla\varphi$ . Da  $\|\nabla\text{rot}(\cdot)\|$  äquivalent zur Norm von  $H_0^2(\Omega)$  ist, wird  $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auch eine Cauchy-Folge in  $H_0^2(\Omega)$  mit Limes  $\Phi$ . Offenbar ist  $\text{rot}(\Phi) = \varphi$ , was den Beweis vervollständigt. Q.E.D.

Die Übertragung der obigen Diskussion für a) den Fall einer freien Ausströmrandbedingung und b) für die *instationären* Navier-Stokes-Gleichungen ist mit einigem technischen Mehraufwand möglich und wird dem Leser als Übungsaufgabe gestellt.

**Bemerkung 4.3:** Auf mehrfach zusammenhängenden Gebieten (wie z. B. bei der Umströmung eines Hindernisses im Kanal) liegen die Dinge etwas komplizierter. Wir bezeichnen den äußeren Rand des Gebiets mit  $\Gamma_0$  und die Ränder im Inneren mit  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Auf  $\Gamma_0$  werden an die Stromfunktion  $\Psi$  wie vorher die Randbedingungen (4.3.88) gestellt. Im Innern werden dagegen ausgehend von der Haftbedingung  $v|_{\Gamma_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , die Bedingungen

$$\Psi = c_i, \quad \partial_n \Psi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_i \quad (i = 1, \dots, N),$$

gestellt, wobei  $c_i$  freie Konstanten sind. Diese Konstanten müssen zusammen mit  $\Psi$  durch Lösung des Randwertproblems bestimmt werden.

### 4.3.5 Konfigurationen mit Rotationssymmetrien

Im Gegensatz zu den *ebenen* Stömungen, welche mehr Modellcharakter haben, besitzen die rotationssymmetrischen Strömungen auch eine gewisse praktische Bedeutung. Zu diesen gehören z. B. Umströmungen rotationssymmetrischer Körper und Strömungen im Spalt zwischen rotierenden konzentrischen Zylindern oder Kugeln bei kleinen bzw. moderaten Reynolds-Zahlen. Zur Ausnutzung der Rotationssymmetrie müssen die Zustandsgleichungen in ein Koordinatensystem transformiert werden, welches die Winkelkoordinate, bzgl. derer Invarianz vorliegt, explizit enthält. Bei der Umströmung rotationssymmetrischer Körper und beim Zylinderspaltproblem leisten dies das Zylinderkoordinatensystem und für das Kugelspaltproblem das Kugelkoordinatensystem.



### Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  sind gegeben durch die folgenden Beziehungen zu den kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$ :

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z,$$

mit der lokalen Basis

$$e_r = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0), \quad e_\varphi = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0), \quad e_z = (0, 0, 1).$$

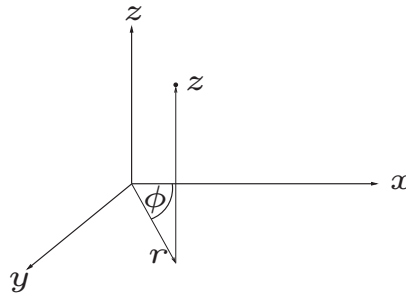


Abbildung 4.22: Konfigurationsskizze zu Zylinderkoordinaten

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = (u, v, w)$  hat dann die Darstellung

$$\vec{v} = ue_r + ve_\varphi + we_z,$$

wobei man beachten muss, dass  $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(r, \varphi, z)$  die Momentangeschwindigkeit in „Richtung“  $\varphi$ , aber nicht die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Für einen Skalar  $\Phi(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, z)$  ergibt sich

$$\nabla\Phi = \partial_r\Phi e_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi\Phi e_\varphi + \partial_z\Phi e_z$$

und für  $\vec{v}$ :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r}\partial_r(ru) + \frac{1}{r}\partial_\varphi v + \partial_z w,$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{1}{r}\partial_\varphi w - \partial_z v\right)e_r + (\partial_z u - \partial_r w)e_\varphi + \left(\frac{1}{r}\partial_r(rv) - \frac{1}{r}\partial_\varphi u\right)e_z.$$

Mit der Bezeichnung

$$\Delta := \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \partial_z^2$$

für den transformierten Laplace-Operator gehen die Navier-Stokes-Gleichungen (im Fall  $f \equiv 0$ ) über in

$$\begin{aligned}\partial_t u - \nu \left( \Delta u - \frac{1}{r^2} u - 2 \frac{1}{r^2} \partial_\varphi v \right) + u \partial_r u + \frac{1}{r} v \partial_\varphi u + w \partial_z u - \frac{1}{r} v^2 + \partial_r p &= 0, \\ \partial_t v - \nu \left( \Delta v - \frac{1}{r^2} v - 2 \frac{1}{r^2} \partial_\varphi u \right) + u \partial_r v + \frac{1}{r} v \partial_\varphi v + w \partial_z v - \frac{1}{r} uv + \partial_\varphi p &= 0, \\ \partial_t w - \nu \Delta w + u \partial_r w + \frac{1}{r} v \partial_\varphi w + w \partial_z w + \partial_z p &= 0.\end{aligned}\quad (4.3.91)$$

Bei rotationssymmetrischen Strömungen sind alle Geschwindigkeitskomponenten sowie der Druck unabhängig von der Winkelvariablen  $\varphi$ , d. h.: Insbesondere gilt  $\partial_\varphi u = \partial_\varphi v = \partial_\varphi w = \partial_\varphi p = 0$ . Die Navier-Stokes-Gleichungen vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned}\partial_t u - \nu \left( \Delta u - \frac{1}{r^2} u \right) + u \partial_r u + w \partial_z u - \frac{1}{r} v^2 + \partial_r p &= 0, \\ \partial_t v - \nu \left( \Delta v - \frac{1}{r^2} v \right) + u \partial_r v + w \partial_z v - \frac{1}{r} uv &= 0, \\ \partial_t w - \nu \Delta w + u \partial_r w + w \partial_z w + \partial_z p &= 0,\end{aligned}\quad (4.3.92)$$

mit  $\Delta := r^{-1} \partial_r (r \partial_r) + \partial_z^2$ . Die Divergenzbedingung

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \partial_r (ru) + \partial_z w = 0 \quad (4.3.93)$$

kann wieder durch Einführung einer „Stromfunktion“  $\Psi$  erfüllt werden:

$$u = \frac{1}{r} \partial_z \Psi, \quad w = -\frac{1}{r} \partial_r \Psi.$$

Die neuen Zustandsvariablen sind dann:

- Stromfunktion  $\Psi$ ,
- Umfangskomponente  $v$ ,
- Umfangswirbelkomponente  $\xi := \partial_z u - \partial_r w$ ,
- Moment der Umfangskomponente  $\Phi := rv$ ,
- Druckfunktion  $p$ .

Zur Herleitung von Differentialgleichung zur Bestimmung dieser Zustandsvariablen führen wir den folgenden Differentialoperator ein:

$$D := r \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r \right) + \partial_z^2.$$

Die Stromfunktion  $\Psi$  ist mit der Wirbelkomponente verknüpft durch die Beziehung

$$D\Psi = r\xi. \quad (4.3.94)$$

Für das Moment der Umfangskomponente haben wir

$$\partial_t \Phi - \nu D\Phi + u \partial_r \Phi + w \partial_z \Phi = 0.$$

und durch Einsetzen der Stromfunktion

$$\partial_t \Phi - \nu D\Phi + \frac{1}{r} \partial_z (\partial_z \Psi \partial_r \Phi - \partial_r \Psi \partial_z \Phi) = 0. \quad (4.3.95)$$

Für die Wirbelkomponente erhalten wir aus den Navier-Stokes-Gleichungen die zugehörige Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \xi - \nu A + \partial_r u \xi + u \partial_r \xi + \partial_z w \xi + w \partial_z \xi - \frac{2}{r} v \partial_z v = 0, \quad (4.3.96)$$

mit dem Term

$$A := \partial_z (Du) - \frac{1}{r^2} \partial_z u - \partial_r (Dw).$$

Die Divergenzbedingung (4.3.93) ergibt  $\partial_r u = -r^{-1}u - \partial_z w$  und somit weiter

$$\partial_t \xi - \nu A - \frac{1}{r} u \xi + u \partial_r \xi + w \partial_z \xi - \frac{2}{r} v \partial_z v = 0. \quad (4.3.97)$$

Der Term  $A$  lässt sich noch weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{r} \partial_z \partial_r u + \partial_z \partial_r^2 u - \frac{1}{r^2} \partial_z u - \partial_r^3 w - \frac{1}{r} \partial_r^2 w + \frac{1}{r^2} \partial_r w + \partial_z^3 u - \partial_z^2 \partial_r w \\ &= \partial_r^2 \xi + \frac{1}{r} \partial_r \xi - \frac{1}{r^2} \xi + \partial_z^2 \xi \\ &= \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r\xi) \right) + \partial_z^2 \xi = \frac{1}{r} D(r\xi). \end{aligned}$$

Mit der neuen Variable  $\eta := r\xi$  geht daher (4.3.97) über in

$$\partial_t \eta - \nu D\eta + u \partial_r \eta + 2 \frac{1}{r} u \eta + w \partial_z \eta - 2v \partial_z v = 0.$$

Kombination dieser Beziehung mit  $D\Psi = \eta$  liefert dann eine Differentialgleichung vierter Ordnung für die Stromfunktion:

$$D\partial_t \Psi - \nu D^2 \Psi + \frac{1}{r} \partial_z \Psi \partial_r (D\Psi) - 2 \frac{1}{r^2} \partial_z \Psi D\Psi - \frac{1}{r} \partial_r \Psi \partial_z (D\Psi) - 2v \partial_z v = 0,$$

bzw.

$$D\partial_t \Psi - \nu D^2 \Psi + \frac{1}{r} (\partial_r (\partial_z \Psi D\Psi) - \partial_z (\partial_r \Psi D\Psi)) - \frac{2}{r^2} \partial_z \Psi D\Psi - 2v \partial_z v = 0. \quad (4.3.98)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.3.95), (4.3.98) und der Navier-Stokes-Gleichung (4.3.92) können nun die Größen  $\Phi$ ,  $\Psi$  und  $v$  berechnet werden. Da diese Zustandsgleichungen nicht den Druck  $p$  enthalten und keine Nebenbedingung wie die Divergenzfreiheit zu berücksichtigen ist, gestaltet sich die Lösung dieses parabolischen Systems einfacher als die der ursprünglichen Gleichungen (4.3.92). Nach Bestimmung der Größen  $\Phi$ ,  $\Psi$  und  $v$  können die weiteren Größen  $u$ ,  $w$  und  $p$  aus (4.3.92) ermittelt werden. Geeignete Randbedingungen ergeben sich aus den Randbedingungen für die Geschwindigkeit  $\vec{v}$ .

## Kugelkoordinaten

Die Kugelkoordinaten  $(r, \varphi, \theta)$  sind gegeben durch die folgenden Beziehungen zu den kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$ :

$$x = r \cos(\varphi) \sin(\theta), \quad y = r \sin(\varphi) \sin(\theta), \quad z = r \cos(\theta),$$

mit der lokalen Basis

$$\begin{aligned} e_r &= (\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta)), \\ e_\varphi &= (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0), \\ e_\theta &= (\cos(\varphi) \cos(\theta), \sin(\varphi) \cos(\theta), -\sin(\theta)). \end{aligned}$$

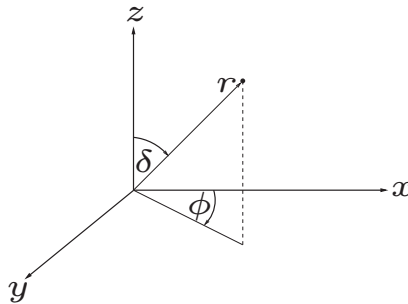


Abbildung 4.23: Konfigurationsskizze zu Kugelkoordinaten

Die Geschwindigkeitskomponenten in  $r, \varphi, \theta$ -Richtung bezeichnen wir mit  $u, v, w$ . Für einen Skalar  $\Phi(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, \theta)$  gilt dann

$$\nabla \Phi = \partial_r \Phi e_r + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \partial_\varphi \Phi e_\varphi + \frac{1}{r} \partial_\theta \Phi e_\theta,$$

und für den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = ue_r + ve_\varphi + we_\theta$ :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 u) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi v + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta(\sin(\theta) w),$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{r \sin(\theta)} (\partial_\theta(\sin(\theta) v) - \partial_\varphi w) e_r + \frac{1}{r} (r \partial_r w - \partial_\theta u) e_\varphi + \left( \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi u - \frac{1}{r} \partial_r(rv) \right) e_\theta.$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen gehen dann für  $f \equiv 0$  über in

$$\begin{aligned} \partial_t u - \nu \left( \Delta u - \frac{2}{r^2} u - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\varphi v - \frac{2}{r^2} \partial_\theta w - \frac{2 \cot(\theta)}{r^2} w \right) \\ + u \partial_r u + \frac{v}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi u + \frac{w}{r} \partial_\theta u - \frac{1}{r} (v^2 + w^2) + \partial_r p = 0, \\ \partial_t v - \nu \left( \Delta v + \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\varphi u + \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)} \partial_\varphi w - \frac{v}{r^2 \sin^2(\theta)} \right) \\ + u \partial_r v + \frac{v}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi v + \frac{w}{r} \partial_\theta v + \frac{u}{r} v + \frac{\cot(\theta)}{r} v w + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi p = 0, \\ \partial_t w - \nu \left( \Delta w - \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)} \partial_\varphi v + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u - \frac{w}{r^2 \sin^2(\theta)} \right) \\ + u \partial_r w + \frac{v}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi w + \frac{w}{r} \partial_\theta w + \frac{u w}{r} - \frac{\cot(\theta)}{r} v^2 + \frac{1}{r} \partial_\theta p = 0, \end{aligned}$$

mit dem transformierten Laplace-Operator

$$\Delta := \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \partial_\varphi^2 + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta).$$

Im Falle der Rotationssymmetrie sind der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  sowie der Druck  $p$  wieder unabhängig von  $\varphi$  und die obigen Gleichungen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} \partial_t u - \nu \left( \Delta u - \frac{2}{r^2} u - \frac{2}{r^2} \partial_\theta w - \frac{2 \cot(\theta)}{r^2} w \right) \\ + u \partial_r u + \frac{w}{r} \partial_\theta u - \frac{1}{r} (v^2 + w^2) + \partial_r p = 0, \\ \partial_t v - \nu \left( \Delta v - \frac{v}{r^2 \sin^2(\theta)} \right) + u \partial_r v + \frac{w}{r} \partial_\theta v + \frac{u}{r} v + \frac{\cot(\theta)}{r} v w = 0, \\ \partial_t w - \nu \left( \Delta w + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u - \frac{w}{r^2 \sin^2(\theta)} \right) \\ + u \partial_r w + \frac{w}{r} \partial_\theta w + \frac{u w}{r} - \frac{\cot(\theta)}{r} v^2 + \frac{1}{r} \partial_\theta p = 0, \end{aligned} \tag{4.3.99}$$

wobei in diesem Fall

$$\Delta := \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta).$$

Die Divergenzbedingung

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) w) = 0 \tag{4.3.100}$$

kann wieder mit Hilfe einer Stromfunktion  $\Psi$  erfüllt werden:

$$u = -\frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta \Psi, \quad w = \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_r \Psi.$$

Als Zustandsvariablen haben wir nun

- Stromfunktion  $\Psi$ ,
- Umfangskomponente  $v$ ,
- Umfangswirbelkomponente  $\xi := \left(\frac{1}{r}\partial_r(rw) - \frac{1}{r}\partial_\theta u\right)r \sin(\theta)$ ,
- Druckfunktion  $p$ .

Aus technischen Gründen empfiehlt sich die Einführung des Momentes der Umfangskomponente  $\Phi := r \sin(\theta)v$  als neue Variable. Für diese schreibt sich die Navier-Stokes-Gleichung in der vereinfachten Form

$$\partial_t \Phi - \nu D \Phi + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} (\partial_r \Psi \partial_\theta \Phi - \partial_\theta \Psi \partial_r \Phi) = 0 \quad (4.3.101)$$

mit dem „Pseudo-Laplace-Operator“

$$D := \partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 - \frac{\cot(\theta)}{r^2} \partial_\theta.$$

Die Stromfunktion  $\Psi$  und die Wirbelkomponente  $\xi$  sind verknüpft durch die Beziehung

$$D \Psi = \xi.$$

Ferner folgt aus der Navier-Stokes-Gleichung die sphärische Wirbeltransportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \xi - \nu D \xi + u \partial_r \xi + \frac{w}{r} \partial_\theta \xi - \frac{2}{r} (u + \cos(\theta)w) \xi \\ + \frac{2}{r^3 \sin(\theta)} \Phi (\sin(\theta) \partial_\theta \Phi - r \cos(\theta) \partial_r \Phi) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.102)$$

Für den Druck bekommen wir

$$\begin{aligned} \Delta p = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_r(rw\xi) - \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta(u\xi) + \frac{1}{r^3 \sin^2(\theta)} \partial_r \Phi^2 + \frac{\cot(\theta)}{r^4 \sin^2(\theta)} \partial_\theta \Phi^2 \\ - \frac{2}{r^4 \sin^2(\theta)} \Phi^2 - \frac{1}{2} \Delta(u^2 + w^2). \end{aligned} \quad (4.3.103)$$

Aus den obigen Gleichungen lassen sich nun die vier Zustandsgrößen  $\Phi, \Psi, \xi$  und  $p$  bestimmen. Geeignete Randbedingungen ergeben sich wieder aus den Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$ .