

1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

1.1 Grundlagen aus Linearer Algebra und Analysis

In diesem Abschnitt sind die später benötigten Hilfsmittel aus der Tensoralgebra und Vektoranalysis zusammengestellt.

1.1.1 Hilfsmittel aus der Tensoralgebra

Die Punkte des d -dimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) werden mit $x = (x_i)_{i=1}^d$ bezeichnet, bezogen auf ein festes kartesisches Koordinatensystem mit Richtungseinheitsvektoren $e^{(i)}$ ($i = 1, \dots, d$). Mit (\cdot, \cdot) und $\|\cdot\|$ werden das übliche euklidische Skalarprodukt sowie die zugehörige Vektornorm bezeichnet. Bei der Darstellung von Summen über indizierte Größen (z. B. Elemente von Vektoren oder Matrizen) wird im folgenden häufig die sog. „Einsteinsche Summationskonvention“ verwendet, bei der über doppelt auftretende Indizes oder Exponenten summiert wird; z. B. gibt es für das euklidische Skalarprodukt zweier (Zeilen)-Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^d$ die folgenden Schreibweisen:

$$(a, b) = a \cdot b = \sum_{i=1}^d a_i b_i = a_i b_i.$$

Soll einmal nicht summiert werden, wird dies in der Regel durch explizite Angabe der betreffenden Indizes angedeutet; z. B.: $a_i b_i$ ($i = 1, \dots, d$).

Seien $\tilde{e}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, d$) die Richtungseinheitsvektoren eines zweiten kartesischen Koordinatensystems im \mathbb{R}^d , welches durch eine orthogonale Transformation (Drehung) mit der Transformationsmatrix

$$D = (d_{ij})_{i,j=1}^d = (\cos(\tilde{e}^{(i)}, e^{(j)}))_{i,j=1}^d,$$

aus dem x -System hervorgeht. Hat ein Punkt x bzgl. der beiden Systeme die Koordinaten $x = (x_i)_{i=1}^d$ bzw. $(\tilde{x}_i)_{i=1}^d$, so ist

$$\tilde{x} = Dx \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x}_i = d_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, d).$$

Die Drehmatrix D hat die Eigenschaften $DD^T = I$ („unitäre“ Matrix) und $\det(D) = 1$ für rechtshändige Systeme.

Wir führen nun den Begriff „(kartesischer) Tensor“ ein. Für unsere Zwecke ist die folgende induktive Definition am bequemsten.

Definition 1.1 (Tensoren): *Tensoren „0-ter Stufe“ sind die (physikalischen) Skalare. Für $m \in \mathbb{N}$ sind Tensoren „ m -ter Stufe“ definiert als lineare Abbildungen des Vektorraumes der Tensoren r -ter Stufe in den Raum der Tensoren s -ter Stufe, $r, s \in \mathbb{N}_0$, mit $m = r + s$.*

Bzgl. eines kartesischen Koordinatensysteme $\{e^{(i)}\}_{i=1,\dots,d}$ kann ein Tensor $T^{(m)}$ m-ter Stufe durch m-dimensionale Zahlenschemata dargestellt werden, mit dem er dann bei (festem) Bezugssystem meist auch identifiziert wird:

$$T^{(m)} = (T_{i_1 \dots i_m}^{(m)})_{i_k=1,\dots,d}.$$

Es werden häufig die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$T^{(m)} = (T_{i_1 \dots i_m}^{(m)})_{i_k=1,\dots,d} =: (T_{i_1 \dots i_m}^{(m)}).$$

Durch Anwendung von $T^{(m)}$ auf einen Tensor $T^{(r)}$ r-ter Stufe erhält man definitionsgemäß einen Tensor $T^{(s)}$ s-ter Stufe:

$$T^{(m)} T^{(r)} = T^{(s)} \Leftrightarrow T_{i_1 \dots i_s}^{(s)} = T_{i_1 \dots i_m}^{(m)} T_{i_{s+1} \dots i_m}^{(r)}.$$

Speziell für zwei Tensoren m-ter Stufe wird die folgende „skalare“ Multiplikation vereinbart:

$$S : T := S_{i_1 \dots i_m} T_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{R}.$$

Für die Komponenten eines Tensors bzgl. der zwei durch die Drehmatrix D verknüpften Koordinatensysteme $\{e^{(i)}\}_{i=1,\dots,d}$, $\{\tilde{e}^{(i)}\}_{i=1,\dots,d}$ gelten die charakteristischen Transformationsformeln

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_m}^{(m)} = d_{i_1 p_1} \cdots d_{i_m p_m} T_{p_1 \dots p_m}^{(m)} \quad (i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, d\}),$$

welche auch als Definition der Tensoreigenschaft von Zahlenschemata $(T_{i_1 \dots i_m}^{(m)})$ herangezogen werden können.

Viele physikalische Größen lassen sich als Tensoren beschreiben. Dabei handelt es sich in der Regel um Tensoren der Stufe $m \leq 4$, aufgefasst als lineare Abbildungen der Tensoren (m-1)-ter Stufe in die Tensoren 1-ter Stufe.

Beispiele:

- $m = 0$ (Skalare): Punktmasse, kinetische Energie, Abstand zweier Punkte.
- $m = 1$ (Vektoren): Die Geschwindigkeits- und Kraftvektoren ordnen jedem Richtungsvektor einen Skalar zu, z. B.: $v \in \mathbb{R}^3 : w \rightarrow (v, w)$.
- $m = 2$ (Dyaden): Der Trägheitstensor eines Starrkörpers ordnet jedem Drehachsenvektor einen Drehimpulsvektor zu, $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n} : a \rightarrow j(a) = \Theta a$. Der Kronecker-Tensor $\delta = (\delta_{ij})_{i,j=1}^2$ mit den Elementen

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

dient u. a. zur Darstellung der Vektornorm durch $\|a\|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \delta_{ij} a_i a_j = \sum_{i=1}^2 a_i^2$.

- $m = 3$: Der ε -Tensor $\varepsilon = (\varepsilon_{ijk})_{i,j,k=1}^3$ mit den Elementen

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{gerade Permutation von } \{1, 2, 3\} \\ -1, & \{i, j, k\} \text{ ungerade Permutation von } \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{keine Permutation von } \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

dient u. a. zur abgekürzten Schreibweise der Determinante und des Vektorprodukts:

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = (\varepsilon_{ijk} x_j y_k)_{i=1,2,3}.$$

- $m = 4$: Der „Elastizitätstensor“ $C = (C_{ijkl})_{i,j,k,l=1,2,3}$ (in der linearen Elastizitätstheorie) bildet „Verzerrungstensoren“ (Dyaden) $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ in „Spannungstensoren“ (Dyaden) $\sigma = (\sigma_{ij})$ ab vermöge

$$\sigma = C\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Für Dyaden $T = (T_{ij})$ verwendet man die Begriffe

- „symmetrisch“, wenn $T_{ij} = T_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$), bzw. $T = T^T$.
- „schiefsymmetrisch“, wenn $T_{ij} = -T_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$), bzw. $T = -T^T$.
- „Einheitstensor“ $I = (\delta_{ij})$, $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (Kronecker-Symbol).

Man verifiziert leicht durch Einsetzen, dass die Symmetrie einer Dyade (T_{ij}) mit Hilfe des ε -tensors wie folgt charakterisiert werden kann:

$$T = T^T \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1.1)$$

Von Bedeutung sind ferner die sog. „Tensorinvarianten“

$$\begin{aligned} J_1 &:= \text{spur}(T) = T_{ii}, \\ J_2 &:= \frac{1}{2} \{T_{ij} T_{ji} - T_{ii} T_{jj}\}, \\ J_3 &:= \det(T) = \varepsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3}, \end{aligned}$$

welche, wie man leicht nachprüft, invariant gegenüber orthogonalen Koordinatentransformationen, d. h. unabhängig von der jeweiligen Koordinatendarstellung des Tensors, sind. Schließlich spricht man im Fall, dass die Komponenten eines Tensors Funktionen des Ortes sind, von einem „Tensorfeld“.

Lemma 1.1: Die Ableitungen der Determinante $\Delta = \det(A)$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ nach ihren Elementen sind gegeben durch

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = \Delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1.2)$$

mit den sog. „Adjunkten“ $\Delta_{ik} := (-1)^{i+k} \text{co}(a_{ik})$ von Δ , d. h. den nach Streichung der i -ten Zeile und k -ten Spalte entstehenden Unterdeterminanten, skaliert mit $(-1)^{i+k}$.

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial a_{jk}} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

sowie

$$\Delta_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \Delta \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (1.1.3)$$

mit dem Kronecker-Symbol $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kj} = 0$, $k \neq j$. Im Fall $i = k$ ist dies der übliche Entwicklungssatz (nach Zeilen) der Determinate Δ ; im Fall $i \neq k$ ist die linke Seite dann gerade die Determinante der durch Ersetzen der i -ten durch die k -te Zeile entstehenden singulären Matrix und folglich gleich Null. Mittels Entwicklung von Δ nach der i -ten Zeile erhalten wir daher

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} (\Delta_{ik} a_{ik}) = \frac{\partial \Delta_{ik}}{\partial a_{ij}} a_{ik} + \Delta_{ik} \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{ij}} = \delta_{kj} \Delta_{ik},$$

und somit

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = \Delta_{ij},$$

was zu beweisen war.

Q.E.D.

1.1.2 Hilfsmittel aus der Vektoranalysis

Wir verwenden die folgenden abkürzenden Bezeichnungen für totale und partielle Ableitungen nach der Zeitvariablen t bzw. der Ortsvariablen x :

$$d_t := \frac{d}{dt}, \quad \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, 3), \quad \partial_n := \frac{\partial}{\partial n},$$

wobei n den Normaleneinheitsvektor zu einer Fläche bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen sind die üblichen Differentialoperatoren für skalare sowie vektor- und tensorwertige Funktionen $p, u = (u_j)_{j=1}^d$ und $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^d$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{grad } p &:= \nabla p = (\partial_i p)_{i=1}^d \quad (\text{Gradient}), & \nabla u &= (\partial_j u_i)_{i,j=1}^d \quad (\text{Funktionalmatrix}), \\ \text{div } u &:= \nabla \cdot u = \partial_i u_i \quad (\text{Divergenz}), & \text{div grad } p &= \partial_i^2 p = \Delta p \quad (\text{Laplace-Operator}), \\ v \cdot \sigma &:= (v_j \sigma_{ij})_{i=1}^d, & \text{div } \sigma &:= \nabla \cdot \sigma = (\partial_j \sigma_{ij})_{i=1}^d, & \sigma \cdot v &:= (\sigma_{ij} v_j)_{i=1}^d. \end{aligned}$$

Speziell für vektorwertige Funktionen $u = (u_j)_{j=1}^3$ ist die Rotation gegeben durch

$$\text{rot } u := \nabla \times u = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2, 3$) ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$, so dass bis auf endlich viele Randpunkte oder Randkurven der äußere Normaleneinheitsvektor n wohl definiert ist. Mit $C^k(\bar{\Omega})$ wird der Raum der auf Ω k -mal stetig differenzierbaren

Funktionen mit stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzbaren Ableitungen bezeichnet. Für Funktionen $u \in C(\bar{\Omega})$ sind die Volumen- und Flächenintegrale

$$\int_{\Omega} u(x) dx, \quad \int_{\partial\Omega} u(x) do,$$

im üblichen Riemannsches Sinne zu verstehen. Für weniger reguläre Funktionen werden hierunter aber gelegentlich auch uneigentliche Riemannsche oder Lebesguesche Integrale verstanden. Volumen- und Flächeninhalte sind mit $|\Omega| := \int_{\Omega} dx$ und $|\Gamma| := \int_{\Gamma} do$, $\Gamma \subset \partial\Omega$, bezeichnet.

Ein wesentliches Hilfsmittel bei den folgenden Betrachtungen wird der „Gaußsche Integralsatz“ für Funktionen $u \in C^1(\bar{\Omega})$ sein:

$$\int_{\Omega} \partial_i u dx = \int_{\partial\Omega} n_i u do \quad (i=1, \dots, d). \quad (1.1.4)$$

Einfache Folgerungen hieraus sind die sog. „Greenschen Formeln“ für skalare Funktionen $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u' \in C^2(\bar{\Omega})$ und Vektorfunktionen $v \in C^1(\bar{\Omega})^d$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \nabla \cdot v dx &= \int_{\partial\Omega} u n \cdot v do - \int_{\Omega} \nabla u \cdot v dx, \\ \int_{\Omega} u \Delta u' dx &= \int_{\partial\Omega} u \partial_n u' do - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u' dx. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen gelten sinngemäß auch für Funktionen aus den entsprechenden Sobolew-Räumen $H^1(\Omega)$ und $H^2(\Omega)$ von verallgemeinert differenzierbaren Funktionen.

Sei $\Omega_{\xi} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ oder $d = 3$) eine offene Menge, welche durch eine umkehrbar eindeutige und stetig differenzierbare Abbildung (ein „Diffeomorphismus“)

$$\xi \rightarrow x(\xi)$$

auf eine offene Menge $\Omega_x \subset \mathbb{R}^d$ abgebildet wird. Die Abbildung wird als Lipschitz-stetig fortgesetzt auf ganz $\bar{\Omega}_{\xi}$ angenommen, und ihr Rand $\partial\Omega_{\xi}$ sei glatt, möglicherweise bis auf endlich viele Ausnahmepunkte oder -kurven. Damit wird die Gültigkeit des Transformationsatzes für Volumen und Oberflächenintegrale sowie des Satzes von Gauß sichergestellt.

Die zugehörige Fundamentalmatrizen und Funktionaldeterminanten sind

$$x'(\xi) = (\partial_j x_i)_{i,j=1}^d, \quad \xi'(x) = (\partial_j \xi_i)_{i,j=1}^d, \quad \Delta_x(\xi) = \det(x'(\xi)), \quad \Delta_{\xi}(x) = \det(\xi'(x)),$$

und für $x = x(\xi)$ gilt:

$$x'(\xi) = \xi'(x)^{-1}, \quad \Delta_x(\xi) \Delta_{\xi}(x) = 1. \quad (1.1.5)$$

Im Fall $\Delta_x(\xi) > 0$ ist die Abbildung orientierungserhaltend, d. h.: Bei der Abbildung eines (kompakten) Volumens $V_{\xi} \subset \Omega_{\xi}$ auf ein (gleichfalls kompaktes) Volumen V_x wird der Rand $\partial V_{\xi} \subset \Omega_{\xi}$ auf den Rand $\partial V_x \subset \Omega_x$ abgebildet, und äußere Normalenvektoren auf ∂V_{ξ} gehen in nach außen zeigende Vektoren auf ∂V_x über.

In einem Punkt $\xi \in \Omega_\xi$ sei ein Richtungsvektor r^ξ angeheftet. Dieser geht dann unter der Koordinatentransformation über in den Vektor $r^x := x'(\xi)r^\xi$, welcher im Bildpunkt $x(\xi)$ angeheftet ist. Dies sieht man wie folgt:

$$r^x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x(\xi + sr^\xi) - x(\xi)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x'(\xi)sr^\xi + \mathcal{O}(s^2)}{s} = x'(\xi)r^\xi.$$

Die sog. „Adjunkten“ der Funktionalmatrix $x'(\xi)$ sind definiert durch

$$\text{adj}(\partial_j x_i(\xi)) := (-1)^{i+j} \det(\partial_l x_k(\xi), k \neq i, l \neq j).$$

Mit Hilfe von (1.1.5) folgt unter Verwendung der Cramerschen Regel $x = x(\xi)$:

$$\partial_j \xi_i(x) = x'(\xi)_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj}(\partial_j x_i(\xi))}{\Delta_x(\xi)}, \quad \partial_j x_i(x) = \xi'(x)_{ij}^{-1} = \frac{\text{adj}(\partial_j \xi_i(x))}{\Delta_\xi(x)}, \quad (1.1.6)$$

sowie

$$\text{adj}(\partial_i x_k(\xi)) \text{adj}(\partial_k \xi_j(x)) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 3). \quad (1.1.7)$$

Lemma 1.2: Sei $V_\xi \subset \Omega_\xi$ ein (kompaktes) Volumen mit glattem Rand ∂V_ξ , welches auf ein (gleichfalls kompaktes) Volumen $V_x \subset \Omega_x$ mit (gleichfalls glattem) Rand ∂V_x abgebildet wird. Für stetige Funktionen u und g_j ($j = 1, 2, 3$) gelten die folgenden Transformationsformeln für Volumen- und Flächenintegrale:

$$\int_{V_x} u(x) dx = \int_{V_\xi} u(x(\xi)) \Delta_x(\xi) d\xi, \quad (1.1.8)$$

$$\int_{\partial V_x} g_j(x) n_j(x) do_x = \int_{\partial V_\xi} g_j(x(\xi)) \text{adj}(\partial_j x_k(\xi)) n_k(\xi) do_\xi. \quad (1.1.9)$$

Beweis: Wir beweisen nur die Formel (1.1.9); die Formel (1.1.8) ist wohlbekannt aus der standard Analysisliteratur und wird als bewiesen vorausgesetzt. Für stetig differenzierbare Vektorfunktionen $g = (g_j)_{j=1}^3 \in C^1(\bar{\Omega}_x)^3$ erhält man durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und der Formel (1.1.8):

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_x} g_j(x) n_j(x) do_x &= \int_{V_x} \frac{\partial}{\partial x_j} g_j(x) dx = \int_{V_\xi} \frac{\partial}{\partial x_j} g_j(x(\xi)) \Delta_x(\xi) d\xi \\ &= \int_{V_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_k} g_j(x(\xi)) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \Delta_x(\xi) d\xi = \int_{V_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_k} g_j(x(\xi)) \xi'(x(\xi))_{kj} \Delta_x(\xi) d\xi \\ &= \int_{V_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_k} g_j(x(\xi)) x'(\xi)_{kj}^{-1} \Delta_x(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Die Cramerschen Regel impliziert

$$x'(\xi)_{kj}^{-1} = \frac{\text{adj}(\partial_j x_k(\xi))}{\Delta_x(\xi)}.$$

Damit folgt weiter, wieder unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_x} g_j(x) n_j(x) d\omega_\xi &= \int_{V_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_k} g_j(x(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) d\xi \\ &= \int_{\partial V_\xi} g_j(x(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) n_k(\xi) d\omega_\xi \\ &\quad - \int_{V_\xi} g_j(x(\xi)) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Wir denken uns nun die Funktionen g_j mit der Lipschitz-stetigen „Abschneidefunktion“

$$\omega_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} 1 - \varepsilon^{-1} \operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega_\varepsilon), & \operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon, \\ 0, & \operatorname{dist}(\xi, \partial\Omega_\varepsilon) > \varepsilon, \end{cases}$$

multipliziert. Die obige Identität gilt dann auch für die Funktionen $g_j^\varepsilon := g_j \omega_\varepsilon$, wobei die beiden Randintegrale unverändert sind, während sich das Gebietsintegral nur über einen Randstreifen der Dicke ε erstreckt. Beim Grenzprozess $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert das Gebietsintegral wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen g_j^ε gegen Null und es ergibt sich dann die behauptete Identität (1.1.9). Der Beweis wurde zunächst für stetig differenzierbare Funktionen geführt. Mit Hilfe eines Stetigkeitsarguments folgt nun die Behauptung auch für nur *stetige* Vektorfunktionen. Q.E.D.

Bemerkung 1.1: Die Voraussetzungen über das Grundgebiet Ω_ε und die Abbildung $\xi \rightarrow x(\xi)$ sind so gehalten, dass möglichst alle in praktischen Anwendungen vorkommende Gebietstypen erfasst werden. Dies sind neben den vollständig glatt berandeten Gebieten vor allem Polygon- (im \mathbb{R}^2) oder Polyeder-Gebiete (im \mathbb{R}^3 bzw. Mischungen davon. Dabei können natürlich auch „einspringende“ Ecken und Kanten auftreten. Im Fall von sog. „Schlitzgebieten“ müssen allerdings geeignete Modifikationen etwa bei der Definition der Funktionenräume $C^k(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ vorgenommen werden.

1.2 Massekontinua

Die Kontinuumsmechanik befasst sich mit physikalischen Massekontinua, also „Körpern“ im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 , die als zusammenhängende Menge ihrer „Massepunkte“ aufgefasst werden. Diese „materiellen Punkte“ werden als identifizierbar angenommen und mit „Namen“ ξ belegt. In der Regel ist man aber nicht am Schicksal des einzelnen Teilchens ξ interessiert, sondern am „Fluss“ der Menge der Teilchen an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit. Diese „makroskopische“ Betrachtungsweise eines strömenden Mediums steht im Gegensatz zur sog. „mikroskopischen“ (oder „kinetischen“), welche das Medium als Ansammlung seiner Einzelteilchen auffasst, welche nach den Gesetzen der Punktmechanik miteinander wechselwirken. Letzterer, naturgemäß sehr aufwendige Ansatz hat seine Berechtigung z. B. im Fall sehr „dünnere“ Gase. Wir konzentrieren uns im folgenden auf die „Kontinuumsformulierung“.

1.2.1 Lagrange und Eulersche Koordinaten

Zur Beschreibung der Bewegung der Masseteilchen in Ort und Zeit wird neben der Zeitachse $-\infty < t < \infty$ ein *raumfestes* kartesisches Koordinatensystem mit Richtungseinheitsvektoren $\{e^i, i = 1, 2, 3\}$ festgelegt, bzgl. dessen sich die Raumpunkte beschreiben lassen als $x = (x_i)_{i=1}^3$. Die Bewegung des Massepunktes ξ mit der Zeit wird dann durch eine Funktion $x(\xi, t)$ beschrieben, d. h.: Zum Zeitpunkt t ist das Teilchen ξ am geometrischen Ort $x(\xi, t)$. Wir identifizieren den Namen ξ eines Teilchens mit dem Ort, an dem es sich zu einem ausgezeichneten Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet:

$$\xi := x(\xi, 0).$$

Da zwei unterschiedliche Teilchen nicht zur selben Zeit am selben Ort sein können, wird die Abbildung $\xi \rightarrow x(\xi, t)$ für alle Zeiten t als umkehrbar eindeutig angenommen. Ferner soll während der Bewegung das Massekontinuum nicht auseinanderreißen, d. h.: Die Funktion $x(\xi, t)$ muss zumindest stetig und darüberhinaus noch hinreichend differenzierbar sein. Die genauen Glattheitsanforderungen werden nicht explizit formuliert, da sie sich von Fall zu Fall aus dem Zusammenhang ergeben und bei der Ableitung mathematischer Modelle für physikalische Vorgänge zunächst von zweitrangiger Bedeutung sind. Aus den bisher gemachten Annahmen folgt, dass die Funktionaldeterminante $\Delta(\xi, t)$ der Abbildung $\xi \rightarrow x(\xi, t)$ wegen $\Delta(\xi, 0) = 1$ für alle Zeiten positiv ist:

$$\Delta(\xi, t) > 0, \quad t \geq 0. \quad (1.2.10)$$

Man nennt $\xi = (\xi_i)_{i=1}^3$ „materielle“ oder auch „Lagrangesche“ Koordinaten und $x = (x_i)_{i=1}^3$ „Eulersche“ Koordinaten zur Beschreibung der Konfiguration eines Massekontinuums. Lagrangesche Koordinaten werden vor allem bei der Beschreibung der Form- und Lageveränderung deformierbarer Körper unter äußeren Belastungen verwendet. Hier ist in der Regel nach der Verschiebung des Körpers aus einer „Ruhelage“ in einen neuen Gleichgewichtszustand gefragt, z. B. der Auslenkung einer Brücke unter der Belastung durch einen darüber fahrenden Lkw. Bei Strömungsvorgängen interessiert aber nicht die Auslenkung einzelner Partikel aus der Ruhelage sondern die momentane Geschwindigkeit, mit der sich die Partikel bewegen. Dabei ist dann die Eulersche Betrachtungsweise vorzuziehen, wenn der betrachtete Vorgang bzgl. des raumfesten Koordinatensystems stationär, also zeitlich konstant, verläuft. So erlebt z. B. der Insasse eines Bootes auf einem Fluss (Lagrangesche Koordinaten) einen instationären Vorgang, wenn die Uferlandschaft an ihm vorüberzieht, während ein am Ufer sitzender Betrachter im raumfesten Eulerschen System die Strömung als stationär ansieht, wenn nicht einzelne Wasserpartikel markiert sind. Wir fassen zusammen:

- In der „Strukturmechanik“ ist man bei der Untersuchung der Verformung von Strukturen an der Verschiebung $u = u(\xi, t)$ der Massepunkte eines Körpers aus einer vorgegebenen Referenzlage (z. B. der „Ruhelage“) interessiert:

$$\xi \rightarrow \xi + u(\xi, t),$$

Dies kann der (plötzliche) Übergang von einer unbelasteten Gleichgewichtslage in eine neue nach Belastung oder auch ein dynamischer Prozess (z. B. Schwingung einer Struktur) sein. Zur formelmäßigen Beschreibung werden meist Lagrangesche Koordinaten ξ des Referenzsystems (Ruheystems) verwendet.

- In der „Strömungsmechanik“ ist man bei der Untersuchung des Strömungsverhaltens von Fluiden (Flüssigkeiten oder Gase) an der momentanen Verschiebungsgeschwindigkeit interessiert, welche in Eulerschen Koordinaten x des raumfesten Systems ausgedrückt wird. Ein materieller Punkt ξ hat im Raumpunkt $x(\xi, t)$ zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$v(\xi, t) := \partial_t x(\xi, t).$$

Durch die Setzung

$$v(x, t) := v(\xi(x, t), t)$$

gelangt man zur Eulerschen Darstellung der Geschwindigkeit, der sog. „Feldbeschreibung“ des Strömungsvorgangs: Zur Zeit t hat das sich am Raumpunkt x befindliche materielle Teilchen $\xi(x, t)$ die Geschwindigkeit $v(x, t)$. Im Falle

$$\partial_t v(x, t) = 0 \tag{1.2.11}$$

heißt die Strömung „stationär“, sonst „instationär“.

- Bei der Beschreibung von sog. „Fluid-Struktur-Wechselwirkungen“ (wie z. B. der Deformation eines elastischen Körpers in einer Strömung) treten natürlicherweise beide Koordinaten, Eulersche und Lagrangesche, simultan auf. Dies macht die theoretische Analyse und die Numerik solcher Vorgänge besonders schwierig. In diesem einführenden Text kann auf diese für die Praxis zunehmend wichtigen Fragestellungen nicht eingegangen werden. Wir verweisen hierzu nur auf die Monographie Richter [139] sowie die Übersichtsartikel Bönisch et al. [100], Dunne et al. [107] und die dort angegebene Literatur.

Die folgenden Begriffe sind zur Beschreibung von Strömungsvorgängen nützlich.

Definition 1.2 (Bahn- und Stromlinie): *In einem strömenden Medium wird als eine „Bahnlinie“ die Menge der Raumpunkte $x(\xi_0, t)$ bezeichnet, welche von einem Teilchen ξ_0 zu verschiedenen Zeiten t eingenommen werden. Die „Stromlinie“ ist die Kurve, deren Tangente jeweils in Richtung des jeweiligen Geschwindigkeitsvektors zeigt, $d_s x = v(x, t)$, wobei s der Kurvenparameter ist. In stationären Strömungen fallen Bahn- und Stromlinie zusammen.*

Im Folgenden wird als Grundlage der mathematischen Theorie stets vorausgesetzt, dass alle betrachteten Volumina bzw. Körper im ξ -System (und damit auch die zugehörigen transformierten Volumina im x -System) solcher Art sind, dass für sie der Transformationssatz und der Gaußsche Integralsatz gelten. Ansonsten können sowohl beschränkte als auch unbeschränkte Volumina auftreten. Wir werden hier aber meist nur den der Numerik zugänglichen Fall *beschränkter* Gebiete betrachten.

1.2.2 Kinematische Eigenschaften (Verzerrungstensor)

Äußere Belastungen bewirken Verschiebungen von Massepunkten und damit geometrische Deformationen bzw. Verzerrungen eines Massevolumens. Diese Strukturänderungen erzeugen innere „Gegenkräfte“, welche den äußeren Kräften entgegen wirken und ihnen in einem neuen Ruhezustand das Gleichgewicht halten. Zur mathematischen Formulierung dieser Zusammenhänge wollen wir zunächst den Begriff „Verzerrung“ definieren.

a) Strukturmechanischer Verzerrungstensor

Wir betrachten zunächst die „strukturmechanische“ Situation. Bei der Deformation $\xi \rightarrow x = \xi + u(\xi)$ erleidet der Körper eine Geometrieänderung, genannt „Verzerrung“. Wir wollen diese lokal in einem festen Punkt ξ beschreiben. Dazu betrachten wir einen beliebigen Richtungseinheitsvektor, $e \in \mathbb{R}^3$, $\|e\| = 1$, und ein materielles Linienelement mit den Endpunkten ξ und $\xi_s = \xi + se$. Unter der Deformation gehen die beiden Endpunkte ξ, ξ_s über in

$$x = \xi + u(\xi), \quad x_s := \xi_s + u(\xi_s).$$

Der Grenzwert

$$d_e(\xi) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|x - x_s\| - \|\xi - \xi_s\|}{\|\xi - \xi_s\|}$$

beschreibt dann die relative „Längenänderung“ des Massekontinuums im Bildpunkt $x(\xi, t)$ in Richtung e . Mit der Jacobi-Matrix $\nabla u(\xi)$ gilt

$$\begin{aligned} d_e(\xi) &= \lim_{s \rightarrow 0} \{s^{-1} \|se + u(\xi_s) - u(\xi)\|\} - 1 \\ &= \|e + \nabla u(\xi)e\| - 1 \\ &= (1 + (\{\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u\}e, e))^{1/2} - 1. \end{aligned}$$

Die Matrix

$$\epsilon(\xi) := \frac{1}{2} \{\nabla u(\xi) + \nabla u^T(\xi) + \nabla u^T(\xi) \nabla u(\xi)\}$$

mit den Elementen

$$\epsilon_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \{\partial_j u_i(\xi) + \partial_i u_j(\xi) + \partial_i u_k \partial_j u_k(\xi)\}$$

wird „Verzerrungstensor“ (bezogen auf das ξ -Koordinatensystem der Ruhekongfiguration) genannt. Dieser ordnet jeder Richtung e im Punkt ξ einen Vektor $\epsilon(\xi)e$ zu, mit dem sich die jeweilige Verzerrung berechnet zu

$$d_e(\xi) = (1 + 2(\epsilon(\xi)e, e))^{1/2} - 1.$$

Speziell für $e = e^{(i)}$ erhält man die sog. „Hauptdehnungen“

$$d^{(i)}(\xi) = (1 + 2\epsilon_{ii}(\xi))^{1/2} - 1, \quad \epsilon_{ii} := (\epsilon(\xi)e^{(i)}, e^{(i)}) \quad (i=1, 2, 3).$$

Zur Interpretation der Nebendiagonalelemente $\epsilon_{ij}(\xi)$ ($i \neq j$) betrachten wir in der $(e^{(i)}, e^{(j)})$ -Ebene zwei Punkte $P = \xi + se^{(i)}$, $Q = \xi + se^{(j)}$, die mit dem Aufpunkt ξ einen rechten

Winkel bilden. Der Winkel $\omega_{ij}(s)$ zwischen den beiden Bildstrecken $x(P) - x(\xi)$ und $x(Q) - x(\xi)$ ist dann bestimmt durch

$$\cos(\omega_{ij}(s)) = \frac{(x(P) - x(\xi), x(Q) - x(\xi))}{\|x(P) - x(\xi)\| \|x(Q) - x(\xi)\|}.$$

Ferner ist, wie bereits gezeigt,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{x(P) - x(\xi)\} &= (I + \nabla u(\xi))e^i, & \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \|x(P) - x(\xi)\| &= 1 + d^{(i)}, \\ \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{x(Q) - x(\xi)\} &= (I + \nabla u(\xi))e^j, & \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \|x(Q) - x(\xi)\| &= 1 + d^{(j)}. \end{aligned}$$

Folglich erhält man für die sog. „Scherung“ (lokale Winkeländerung) in der (e^i, e^j) -Ebene im Punkt $x(\xi)$:

$$\cos(\omega_{ij}) = \lim_{s \rightarrow 0} \cos(\omega_{ij}(s)) = \frac{2\epsilon_{ij}}{(1 + d^{(i)})(1 + d^{(j)})}.$$

Deutlicher erkennt man die Bedeutung der Elemente des Verzerrungstensors, wenn man sich auf sehr kleine Verzerrungen, d. h. $\|\nabla u\| \ll 1$ beschränkt. In diesem Fall kann in erster Approximation gesetzt werden:

$$d^{(i)} \approx \epsilon_{ii} \quad (i = 1, 2, 3)$$

und

$$\omega_{ij} - \frac{1}{2}\pi \approx \cos(\omega_{ij}) = 2\epsilon_{ij} \quad (i \neq j).$$

Wir betrachten nun die durch die Verzerrung bedingte lokale Volumenänderung. Sei V_ξ ein am Punkt ξ_0 angeheftetes Volumen. Für dieses erhalten wir wie oben unter Beachtung von $\Delta_x(\xi) = \det(x'(\xi)) = \det(I + \nabla u(\xi))$:

$$\begin{aligned} \lim_{|V_\xi| \rightarrow 0} \frac{|V_x| - |V_\xi|}{|V_\xi|} &= \lim_{|V_\xi| \rightarrow 0} \left(\int_{V_\xi} d\xi \right)^{-1} \left(\int_{V_x} dx - \int_{V_\xi} d\xi \right) \\ &= \lim_{|V_\xi| \rightarrow 0} \left(\int_{V_\xi} d\xi \right)^{-1} \left(\int_{V_\xi} \Delta_x(\xi) d\xi - \int_{V_\xi} d\xi \right) \\ &= \det(I + \nabla u(\xi_0)) - 1. \end{aligned}$$

Im Fall kleiner Verzerrungen $\|\nabla u(\xi)\| \ll 1$ ergibt sich durch Taylor-Entwicklung:

$$\det(I + \nabla u(\xi)) - 1 = \det(I) + \det'(I)\nabla u(\xi) + \mathcal{O}(\|\nabla u(\xi)\|^2) - 1.$$

In Lemma 1.1 wurde gezeigt, dass die partiellen Ableitungen der Determinante einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ nach den Elementen a_{ij} durch die Adjunkten von A gegeben sind:

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(A) = \text{adj}(a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(I + \nabla u(\xi)) - 1 &= \text{adj}(\delta_{ij}) \partial_j u_i(\xi) + \mathcal{O}(\|\nabla u(\xi)\|^2) \\ &= \delta_{ij} \partial_j u_i(\xi) + \mathcal{O}(\|\nabla u(\xi)\|^2) \\ &= \partial_i u_i(\xi) + \mathcal{O}(\|\nabla u(\xi)\|^2) = \text{div } u(\xi) + \mathcal{O}(\|\nabla u(\xi)\|^2). \end{aligned}$$

Da die Spur eines Tensors invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems ist, wird also auch (wie zu erwarten) die relative Volumenänderung eine Drehinvariante.

b) Strömungsmechanischer Verzerrungstensor

Jetzt wenden wir uns der „strömungsmechanischen“ Situation zu. Für Strömungsvorgänge ist es typisch, dass bereits kleine einwirkende Kräfte beliebig große Verschiebungen der Materieteilchen, das Fließen, bewirken. Im Gegensatz zur strukturmechanischen Theorie ist hier also nicht die Deformation an sich von Bedeutung, sondern die Geschwindigkeit, mit der diese vor sich geht. Zur Präzisierung des Begriffes „Verzerrungsgeschwindigkeit“ betrachten wir zum Zeitpunkt t wieder einen beliebigen Richtungseinheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$, $\|e\| = 1$, sowie ein materielles Linienelement mit den Endpunkten x und $x_s = x + se$. Nach einer Zeitspanne $k = \Delta t$ sind die Endpunkte an den Orten

$$y = x + v(x, t)k + \delta(x, k), \quad y_s = x_s + v(x_s, t)k + \delta(x_s, k),$$

wobei die Restglieder von der Ordnung $\mathcal{O}(k^2)$ sind. Die relative Längenänderung in Richtung e zum Zeitpunkt $t+k$ ist dann

$$d_e(x, t+k) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|y - y_s\| - \|x - x_s\|}{\|x - x_s\|},$$

und die relative Längenänderungsgeschwindigkeit zur Zeit t wird

$$\dot{d}_e(x, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d_e(x, t+k)}{k}.$$

Offenbar ist

$$\frac{\|y - y_s\| - \|x - x_s\|}{\|x - x_s\|} = \frac{\|se - \{v(x, t) - v(x_s, t)\}k + \delta(x_s, k) - \delta(x, k)\|}{s} - 1.$$

Nutzen wir aus, dass

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\delta(x, k) - \delta(x_s, k)\|}{s} = \mathcal{O}(k^2),$$

so ergibt sich mit $\nabla v = (\partial_j v_i)_{i,j=1}^3$

$$\begin{aligned} d_e(x, t+k) &= \|e + \{\nabla v(x, t)k + \mathcal{O}(k^2)\}e\| - 1 \\ &= \{1 + (k\{\nabla v + \nabla v^T\}e + \mathcal{O}(k^2)e, e)\}^{1/2} - 1. \end{aligned}$$

Mittels $(1+z)^{1/2} = 1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2)$ erhält man

$$\dot{d}_e(x, t) = \frac{1}{2}(\{\nabla v + \nabla v^T\}e, e).$$

Man nennt

$$\dot{\epsilon}(x, t) := \frac{1}{2}\{\nabla v(x, t) + \nabla v(x, t)^T\}$$

den „Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit“ (bezogen auf das raumfeste x -Koordinatensystem). Die Längenänderungsgeschwindigkeit bzgl. Richtung e wird damit ausgedrückt durch

$$\dot{d}_e(x, t) = (\dot{\epsilon}(x, t)e, e). \quad (1.2.12)$$

Insbesondere erhalten wir die relative Längenänderungsgeschwindigkeit in x_i -Richtung

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \partial_i v_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

die relative Winkeländerungsgeschwindigkeit in der (x_i, x_j) -Ebene

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \{ \partial_j v_i + \partial_i v_j \},$$

und schließlich die relative Volumenänderungsgeschwindigkeit

$$\text{spur}(\dot{\epsilon}) = \partial_i v_i = \text{div } v.$$

1.2.3 Statische Eigenschaften (Spannungstensor)

In einem deformierten Massevolumen wirken im wesentlichen Trägheits- und Reibungskräfte. Zu deren Beschreibung wird der Begriff des „materiellen Volumens“ eingeführt als mengenwertige Funktion $t \rightarrow V(t) \subset \mathbb{R}^3$. Dabei ist $V(t)$ der geometrische Ort $x(\xi, t)$ aller materieller Punkte ξ , die sich zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ im Volumen $V_0 = V(0)$ befinden. Jedes materielle Volumen $V = V(t)$ hat eine „Masse“, die mit Hilfe einer stetig verteilten, positiven „Massedichte“ $\rho(x, t) > 0$ in folgender Form gegeben ist:

$$m(V) := \int_V \rho(x, t) dx.$$

i) „Massekräfte“, wie z. B. die Schwerkraft oder Fliehkräfte werden durch volumenhaft verteilte Kraftdichten $f(x, t)$ beschrieben gemäß

$$K(V) = \int_V \rho(x, t) f(x, t) dx.$$

ii) „Oberflächenkräfte“, wie z. B. der Gasdruck oder die Belastung beim Zusammenprall zweier Körper, werden mit Hilfe von flächenhaft verteilten Kraftdichten $\sigma^{(n)}(x, t)$ bezogen auf (orientierte) Flächenelemente $F = F(t)$ mit Normaleneinheitsvektor n beschrieben gemäß

$$K(F) = \int_F \sigma^{(n)}(x, t) do.$$

Diese Flächenkräfte, auch „Spannungen“ genannt, sind das mathematische Modell für Molekularkräfte mit sehr geringer Reichweite und wurden bereits von Cauchy (1822) in die Kontinuumsmechanik eingeführt. Volumen und Oberflächenkraftdichten werden hier als stetig angenommen. Die „inneren“ Spannungen wirken den äußeren Belastungen des Körpers, welche die Deformation verursachen, entgegen und halten diesen in einem neuen Gleichgewichtszustand sogar die Waage.

Die Oberflächenkraftdichten $\sigma^{(e)}$ sind auf Raumrich e (Einheitsvektoren) bezogen. Unter Annahme der Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes von „actio = reactio“ lässt sich die Vielzahl der Größen $\sigma^{(e)}$ einheitlich mit Hilfe eines sog. „Spannungstensors“ schreiben. Für einen beliebigen Richtungsvektor e (nicht notwendig identisch mit einem der

kartesischen Einheitsvektoren e^i) betrachten wir ein im Punkt x angeheftetes Elementarsimplex im \mathbb{R}^3 mit Normale e zur Fläche F :

Die Spannungsvektoren zu den kartesischen Koordinatenrichtungen $e^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, bezeichnen wir mit $\sigma^{(i)} = (\sigma_j^{(i)})_{j=1}^3$. Der Vektor e hat die Koordinaten $e_i = \cos(e, e^{(i)})$, und die Inhalte der Seitenflächen F^i mit Normalenvektoren $e^{(i)}$ berechnen sich zu

$$|F^i| = |F| \cos(e, e^i), \quad i = 1, 2, 3.$$

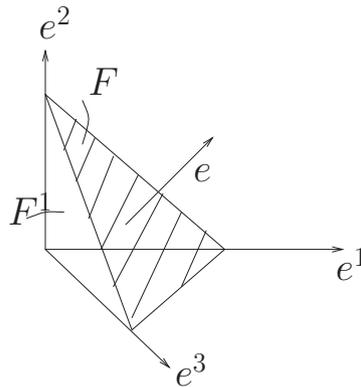


Abbildung 1.1: Geometrieskizze zum Spannungstensor

Nach dem Newtonschen Gesetz befinden sich die auf das Volumen V wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, d. h.:

$$-\int_F \sigma^{(e)} do_x + \sum_{i=1}^3 \int_{F^i} \sigma^{(i)} do_x = \int_V \rho f dx.$$

Skalierung mit $|F|^{-1}$ ergibt

$$\frac{1}{|F|} \int_F \sigma^{(e)} do_x - \sum_{i=1}^3 \frac{e_i}{|F^i|} \int_{F^i} \sigma^{(i)} do_x + \frac{|V|}{|F|} \frac{1}{|V|} \int_V \rho f dx = 0.$$

Wegen $\lim_{|V| \rightarrow 0} |V|/|F| = 0$ ergibt sich im Limes $|V| \rightarrow 0$ wegen der angenommenen Stetigkeit der Kraftdichten die Beziehung

$$\sigma^{(e)}(x, t) = e_i \sigma^{(i)} = (e_i \sigma_{ji})_{j=1}^3 = e \cdot \sigma. \quad (1.2.13)$$

Dabei ist $\sigma = (\sigma_{ji})_{j,i=1}^3$ der sog. „(Cauchy'sche) Spannungstensor“ mit den Komponenten $\sigma_{ji} := \sigma_j^{(i)}$. Der tensorielle Charakter von σ wird gerade durch die Beziehung (1.2.13) ausgedrückt. Der Name „Tensor“ rührt historisch sogar von seiner Realisierung als „Spannungstensor“ (englisch: tension = Spannung) her. Dieser Cauchy'sche Spannungstensor ist

auf das Eulersche x -Koordinatensystem bezogen. Damit lassen sich die an einem (deformierten) Flächenelement F mit Normalenvektor e angreifenden Oberflächenkräfte in der folgenden Form schreiben:

$$K(F) = \int_F e \cdot \sigma(x, t) do_x. \quad (1.2.14)$$

Gewöhnlich verwendet man die Bezeichnungen „Normalspannung“ für die Hauptdiagonalelemente σ_{ii} ($i=1, 2, 3$) sowie „Scher-“ oder „Tangentialspannungen“ für σ_{ij} ($i \neq j$).

Wir betrachten nun die Situation, dass der Ausgangskörper Ω_0 unter Einwirkung der äußeren Kräfte in einen neuen Gleichgewichtszustand im Volumen Ω übergegangen ist. Mit dem Spannungstensor lässt sich das dann herrschende Kräftegleichgewicht in jedem Teilvolumen $V \subset \Omega$ des deformierten Körpers wie folgt schreiben:

$$\int_V \rho f dx + \int_{\partial V} n \cdot \sigma do_x = 0.$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes folgt weiter

$$\int_V \{\rho f + \nabla \cdot \sigma\} dx = 0.$$

Da dies für jedes Teilvolumen in Ω gelten soll und alle auftretenden Funktionen als stetig angenommen sind, ergibt sich die Gleichung des punktweisen Kräftegleichgewichts:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho f = 0. \quad (1.2.15)$$

Satz 1.1 (Symmetrie des Spannungstensors): *In einem Gleichgewichtszustand des deformierten Körpers folgt aus dem Gleichgewicht der Drehmomente bzgl. des Ursprungs $x = 0$,*

$$\int_V x \times \rho f dx + \int_{\partial V} x \times (n \cdot \sigma) do_x = 0, \quad (1.2.16)$$

die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors:

$$\sigma = \sigma^T. \quad (1.2.17)$$

Beweis: Für ein beliebiges materielles Volumen V ergibt die Anwendung des Gaußschen Satzes:

$$\int_{\partial V} n_j \sigma_{ij} do = \int_V \partial_j \sigma_{ij} dx \quad (i=1, 2, 3),$$

und weiter unter Berücksichtigung von $(x \times \rho f)_i = \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k$ und $\partial_l x_j = \delta_{lj}$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} (x \times n \cdot \sigma)_i do &= \int_{\partial V} \varepsilon_{ijk} x_j n_l \sigma_{kl} do \\ &= \int_V \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) dx = \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dx + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{kl} dx. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \{x_j \rho f_k + \sigma_{kj} + x_j \partial_l \sigma_{kl}\} dx = 0.$$

Da dies für beliebige Volumina V gilt, folgt aufgrund der angenommenen Stetigkeit aller betrachteten Funktionen die punktweise Gleichgewichtsbedingung

$$\varepsilon_{ijk} (x_j (\rho f_k + \partial_l \sigma_{kl}) + \sigma_{kj}) = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Im Hinblick auf die Kräftegleichgewichtsbeziehung $\rho f_k + \partial_l \sigma_{kl} = 0$ folgt also

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \quad (k=1, 2, 3),$$

und damit $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i, j=1, 2, 3$).

Q.E.D.

Im Fall eines dynamisch deformierten Körpers werden wir später unter der Annahme der zeitlichen Erhaltung des Drehimpulses zeigen, dass auch in diesem Fall der Spannungstensor symmetrisch sein muss.

Zur vollständigen statischen und kinematischen Bestimmung des deformierten Körpers werden Spannungen und Verzerrungen durch ein sog. „Materialgesetz“ in Beziehung gesetzt. Dazu ist es jedoch erforderlich, alle betrachteten Größen auf dasselbe Koordinatensystem zu beziehen. Wir werden hier bei strukturmechanischen Modellen das „materielle“ ξ -System (Lagrange-Koordinaten) zugrunde legen. Grundsätzlich wäre auch eine Formulierung in den „ortsfesten“ x -Koordinaten (Eulersche Koordinaten) möglich. Dies ist hier jedoch weniger zweckmäßig, da die Variable $x = \xi + u(\xi)$ die gleichfalls gesuchte Verschiebung u enthielte. Bei strömungsmechanischen Modellen werden dagegen in der Regel Eulersche Koordinaten verwendet, da man hier ja die „momentane“ Verzerrungsgeschwindigkeit betrachtet, welche sinnvollerweise auch mit der „momentanen“ Spannungsgeschwindigkeit verknüpft wird.

Sei wieder ξ ein fester Raumpunkt und $\{e^{(i)}, i=1, 2, 3\}$ ein in ξ angeheftetes System kartesischer Richtungsvektoren. Unter der Transformation $\xi \rightarrow x(\xi)$ geht dieses über in das Vektorsystem

$$\tilde{e}^{(i)}(\xi) = x'(\xi) e^{(i)} \quad (i=1, 2, 3),$$

angeheftet im Bildpunkt $x = x(\xi)$. Umgekehrt ist

$$e^{(i)} = x'(\xi)^{-1} \tilde{e}^{(i)} = \xi'(x) \tilde{e}^{(i)} \quad (i=1, 2, 3).$$

Wir wollen nun einen symmetrischen Tensor konstruieren, der jeder im Punkt ξ angehefteten Richtung e einen Spannungsvektor zuordnet, bezogen auf das ξ -Koordinatensystem, der in Flächenelementen im Bildpunkt $x(\xi)$ normal zur Bildrichtung $x'(\xi)$ übertragen wird. Dieser neue Spannungstensor, „Kirchhoffscher¹ Spannungstensor“ genannt, kann dann sinnvollerweise mit dem gleichfalls auf das ξ -System bezogenen Verzerrungstensor $\epsilon(\xi)$ in Beziehung gesetzt werden.

¹Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887): Deutscher Physiker; Studium der Mathematik und Physik in Königsberg, 1855–1875 Prof. in Heidelberg, danach Prof. für Theor. Physik in Berlin; grundlegende Beiträge zur Elektrodynamik (Kirchhoffsche Regeln), Spektralanalyse, Wärmestrahlung und Plattenstatik (Kirchhoffscher Spannungstensor, Kirchhoff-Platte).

Die Flächenkraft, die in der Oberfläche ∂V_x des Teilvolumens V_x übertragen wird, ist vermöge des Cauchyschen Spannungstensors gegeben durch

$$F_i(\partial V_x) = \int_{\partial V_x} n_j(x) \sigma_{ij}(x) \, do_x = \int_{\partial V_x} \sigma_{ij}(x) n_j(x) \, do_x \quad (i=1, 2, 3).$$

Mit Hilfe der Transformationsformel für Flächenintegrale (1.1.9) finden wir dann

$$F_i(\partial V_x) = \int_{\partial V_\xi} \sigma_{ij}(x(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) n_k(\xi) \, do_\xi. \quad (1.2.18)$$

Der durch

$$l_{ik}(\xi) := \sigma_{ij}(x(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) \quad (i, k=1, 2, 3)$$

definierte (i. Allg. nicht *symmetrische*) Tensor $l(\xi) = (l_{ik}(\xi))_{i,k=1}^3$ wird „Lagrangescher Spannungstensor“ genannt. Dieser erzeugt also einen Spannungsvektor, welcher auf das kartesische x -Koordinatensystem im Punkt $x(\xi)$ bzw. auf das i. Allg. nicht kartesische System $\tilde{e}^i = \xi'(x)e^i$ ($i=1, 2, 3$) im Punkt ξ bezogen ist. Seine Komponenten bzgl. des kartesischen ξ -Koordinatensystems im Punkt ξ bzw. bzgl. des Systems $\tilde{e}^i = x'(\xi)e^i$ ($i=1, 2, 3$) im Bildpunkt $x(\xi)$ erhält man durch die Beziehung (für beliebigen Richtungsvektor $e = (e_k)_{k=1}^3$):

$$\partial_l \xi_i(x) l_{lk}(\xi) e_k = \frac{\operatorname{adj}(\partial_l x_i(\xi))}{\Delta_x(\xi)} l_{lk}(\xi) e_k \quad (i=1, 2, 3).$$

Der durch

$$k_{ij}(\xi) := \frac{\operatorname{adj}(\partial_l x_i(\xi))}{\Delta_x(\xi)} l_{lj}(\xi) = \frac{\operatorname{adj}(\partial_l x_i(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_k x_j(\xi))}{\Delta_x(\xi)} \sigma_{lk}(x(\xi))$$

definierte Tensor $k(\xi) = (k_{ij}(\xi))_{i,j=1}^3$, sog. „Kirchhoffsche Spannungstensor“, ist nun wegen der Symmetrie von σ ebenfalls *symmetrisch*.

Wir wollen ausrechnen, wie sich mit Hilfe des Kirchhoffsche Spannungstensors die auf die Oberfläche eines (deformierten) Volumenelements V_x wirkende Oberflächenkraft ausdrücken lässt. Wir rekapitulieren die Formel

$$F_i(\partial V_x) = \int_{\partial V_\xi} \sigma_{ij}(x(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) n_k(\xi) \, do_\xi \quad (i=1, 2, 3).$$

Mit Hilfe der Identitäten (1.1.6) und (1.1.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) \sigma_{ij}(x(\xi)) &= \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) \delta_{pi} \sigma_{pj}(x(\xi)) \\ &= \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_l \xi_i(x)) \operatorname{adj}(\partial_p x_l(\xi)) \sigma_{pj}(x(\xi)) \\ &= \frac{\operatorname{adj}(\partial_l \xi_i(x))}{\Delta_\xi(x)} \frac{\operatorname{adj}(\partial_p x_l(\xi)) \operatorname{adj}(\partial_j x_k(\xi))}{\Delta_x(\xi)} \sigma_{pj}(x(\xi)) \\ &= \partial_l x_i(\xi) k_{lk}(\xi). \end{aligned}$$

Wir erhalten so die Darstellung

$$F_i(\partial V_x) = \int_{\partial V_\xi} \partial_l x_i(\xi) k_{lk}(\xi) n_k(\xi) \, do_\xi,$$

und weiter mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$F_i(\partial V_x) = \int_{V_\xi} \partial_k (\partial_l x_i(\xi) k_{lk}(\xi)) d\xi \quad (i=1, 2, 3).$$

Bei Berücksichtigung von $\partial_l x_i(\xi) = \delta_{li} + \partial_l u_i(\xi)$ folgt schließlich

$$F_i(\partial V_x) = \int_{V_\xi} \partial_k ((\delta_{il} + \partial_l u_i(\xi)) k_{lk}(\xi)) d\xi \quad (i=1, 2, 3), \quad (1.2.19)$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$F(\partial V_x) = \int_{V_\xi} \nabla \cdot ((I + \nabla u(\xi)) k(\xi)) d\xi. \quad (1.2.20)$$

Weiter unten werden wir das Bestehen von funktionalen Beziehungen der Form

$$k = C(\epsilon) \quad (1.2.21)$$

postulieren, welche durch die spezifischen Eigenschaften des jeweils betrachteten Materials bestimmt sind. Diese sog. „Materialgesetze“ sind generisch nichtlinear, können aber in vielen Anwendungssituationen mit ausreichender Genauigkeit als *linear* angenommen werden:

$$k_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.2.22)$$

mit einem „Elastizitätstensor“ $C = (C_{ijkl})_{i,j,k,l=1}^3$.