

# 0 Einleitung

Eine hinreichend gute Kenntnis des physikalischen Ursprungs der typischen Zustandsgleichungen der Kontinuumsmechanik ist für einen erfolgreichen Ansatz numerischer Lösungsverfahren unerlässlich. Daher liegt der Schwerpunkt dieser Vorlesung zunächst auf der Diskussion der mathematischen Modelle der Kontinuumsmechanik, insbesondere deren Ableitung aus physikalischen Grundpostulaten unter besonderer Berücksichtigung der dabei verwendeten Annahmen. Dabei wird weniger Wert auf eine axiomatische Strenge, aber oft sterilen Deduktion der „mathematischen“ Kontinuumsmechanik gelegt. Vielmehr sollen bei der Ableitung der Modellgleichungen intuitive Anschauung gestützt auf Beispiele aus der Versuchsphänomenologie helfen. Dennoch sollte klar werden, dass alle verwendeten Schlüsse eine strenge mathematische Rechtfertigung erlauben.

Die zwei großen Teilgebiete der Kontinuumsmechanik sind die Theorie der elastischen Strukturen (kurz „Strukturmechanik“ oder „Elastizitätstheorie“) und die der fließenden Medien (kurz „Strömungsmechanik“). Wesentlich ist in beiden Fällen die Vorstellung einer kontinuierlich verteilten Menge von Massepunkten, deren Verhalten durch Dichtefunktionen (z. B. Massedichte) beschrieben werden, im Gegensatz zur Punktmechanik einzelner Masseteilchen. Diese Gemeinsamkeit führt auch zu einer weitgehend parallelen Ableitung und Form der zugehörigen Grundgleichungen für diese Dichtefunktionen sowie deren numerischen Lösung. Trotzdem bestehen wesentliche Unterschiede in den numerischen Verfahren für die einzelnen Typen von Grundgleichungen, weswegen im Folgenden die Diskussion auch nach Methoden in der Strukturmechanik und in der Strömungsmechanik unterteilt ist.

Auf einen „Massekörper“, der in einem ausgezeichneten Grundzustand einen Ortsbereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  einnimmt, wirken zwei Sorten von äußeren Kräften:

- volumenhaft verteilte „Massekräfte“ (z. B. Schwerkraft),
- flächenhaft verteilte „Oberflächenkräfte“ (z. B. hydrostatischer Druck).

Die Flächenkräfte haben ihre Ursache in den Wechselwirkungen der Moleküle, aus denen das Material aufgebaut ist. Da diese Wechselwirkungen nur eine geringe Reichweite haben, können sie mit hinreichender Genauigkeit als Flächenkräfte interpretiert werden. Ferner mögen gewisse Teile des Randes  $\partial\Omega$  des Körpers vorgeschriebene Verschiebungen erleiden. Bei Einwirkung äußerer Belastungen wird der Körper dann eine Verformung erfahren, welche durch ein Vektorfeld  $u(x)$  beschrieben sei. Dabei kann es zu „fließender“ Verformung kommen, oder es wird ein neuer Gleichgewichtszustand erreicht. Tritt im letzteren Fall wieder Entlastung ein, so können plastische Verformungen zurückbleiben. Verschwinden jedoch alle Verformungen restlos, so spricht man von „ideal elastischem“ Verhalten. Die „Elastizitätstheorie“ beschäftigt sich speziell mit den kinematischen („auf die Bewegung bezogenen“) und statischen („auf das Gleichgewicht bezogenen“) Eigenschaften solcher „elastischer“ Körper. Die Betrachtungsweise dabei ist rein phänomenologisch: Aufgrund von experimentell gestützten Hypothesen werden physikalische Gesetze formuliert, aus denen Vorhersagen über das Verhalten der Materialien abgeleitet werden. Dazu zählen etwa die grundlegenden Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie

bzw. das Newtonsche Gesetz vom Kräftegleichgewicht sowie die bloße Annahme über die Art der wirkenden Kräfte. Ferner liefert der praktische Versuch an Modellkonfigurationen Werte für eine Reihe von Materialkonstanten, die etwa als Proportionalitätsfaktoren in die Bestimmungsgleichungen eingehen. Es ist dann Aufgabe der mikroskopischen Theorie (Festkörperphysik), diese Größen und die Beziehungen zwischen ihnen aus der atomaren Struktur der Materie heraus zu begründen.

Auf den betrachteten Körper wirken eine äußere Volumenkraft mit Dichte  $K$  und eine Oberflächenkraft mit Dichte  $p^0$  auf einem Randteil  $\partial\Omega_\sigma \subset \partial\Omega$ . Dadurch werden bei Berücksichtigung einer Zwangsbedingung

$$u = u^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_u := \partial\Omega \setminus \partial\Omega_\sigma,$$

eine Verschiebung der Massepunkte

$$\xi \rightarrow x(\xi) = \xi + u(\xi), \quad \xi \in \Omega,$$

in eine neue Gleichgewichtslage hervorgerufen. Die damit einhergehende (lokale) Verformung des Körpers wird durch den „Verzerrungstensor“

$$\epsilon(\xi) = \frac{1}{2}(\nabla u(\xi) + \nabla u(\xi)^T + \nabla u(\xi) \cdot \nabla u(\xi)^T)$$

beschrieben. Der Körper  $\Omega$  nimmt nach der Deformation ein neues Volumen  $\tilde{\Omega}$  ein. Aufgrund des Newtonschen Gesetzes vom Kräftegleichgewicht wirken dann im deformierten Körper „Gegenkräfte“, welche den äußeren Belastungen das Gleichgewicht halten und durch den „Spannungstensor“  $\sigma(x)$  beschrieben werden. Die Bedingung des statischen Gleichgewichts lautet

$$\operatorname{div}\sigma(x) + K(x) = 0 \quad \text{in } \tilde{\Omega},$$

ergänzt durch die statische Bedingung

$$\sigma \cdot n = \sigma^\partial \cdot n \quad \text{auf } \partial\tilde{\Omega}_\sigma.$$

Das „Elastizitätsgesetz“ liefert einen materialbedingten Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen. Im Fall „kleiner“ Verzerrungen, d. h.  $\|\epsilon\| \ll 1$  („linearisierte“ Theorie), werden die Spannungen ebenfalls auf das undeformierte Ausgangssystem bezogen, so dass dieser Zusammenhang in der Form

$$\sigma(\xi) = C[\epsilon(\xi)]$$

geschrieben werden kann, mit dem symmetrischen und positiv definiten „Elastizitätstensor“  $C$ . Aus den obigen Bedingungen sollten sich dann zu gegebenen Größen  $K, p^0, u^0$  die zugehörigen Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen bestimmen lassen. An letzteren ist man in praktischen Anwendungen vor allem interessiert, da sie die Belastung des Materials bei der Deformation beschreiben. Für kleine Verzerrungen wird nun näherungsweise gesetzt

$$\epsilon(\xi) = \frac{1}{2}(\nabla u(\xi) + \nabla u(\xi)^T),$$

was bei Verwendung des linearen Materialgesetzes zu einer elliptischen linearer Randwert-aufgabe zweiter Ordnung für die Verschiebungen  $u$  führt:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} C[\nabla u] &= K \quad \text{in } \Omega, \\ C[\nabla u] \cdot n &= \sigma^\partial \cdot n \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma, \\ u &= u^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_u. \end{aligned}$$

Dieses allgemeine „Lamé-Navier-System“ ist dann der Hilbert-Raum-Theorie zugänglich, wodurch man allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen erhält. Bei Konkretisierung für spezielle Konfigurationen ergeben sich aus der allgemeinen Grundaufgabe unter Hinzuziehung weiterer vereinfachender Annahmen etwa die bekannten Randwertaufgaben der mathematischen Physik:

– Laplace<sup>1</sup>-Gleichung:

$$-\Delta u = f, \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega;$$

– Bi-Laplace-Gleichung:

$$\Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0, \quad \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur mathematischen Beschreibung elastischer Körper sind die sog. Variationsprinzipien, etwa das „Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie“. Dieses besagt, dass die zu den Vorgaben  $K, \sigma^\partial, u^\partial$  gehörende Verschiebung  $u$  das „Energielfunktional“

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(x) : \epsilon(x) dx - \int_{\Omega} K(x)u(x) dx - \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot u(x) do_x$$

minimiert bzgl. aller „zulässigen“ Vergleichsfunktionen mit  $u = u^\partial$  auf  $\partial\Omega_u$ . Dieses kann einerseits zur Ableitung der „richtigen“ Differentialgleichungen und der zugehörigen „natürlichen“ Randbedingungen dienen, und bildet andererseits den Ausgangspunkt für die variationellen numerischen Näherungsverfahren wie z. B. das Projektionsverfahren von Ritz bzw. dessen spezielle Variante der „Methode der Finiten Elemente“ (oder „Finite-Elemente-Methode (FEM)“).

Bei der Beschreibung der „Strömung“ von Fluiden ist man im Gegensatz zur Verformung elastischer Körper nicht am momentanen Deformationszustand sondern an der momentanen Deformationsgeschwindigkeit interessiert. Dies bedingt, dass strömungsmechanische Vorgänge in der Regel in Eulerschen Koordinaten, d. h. in den Koordinaten des momentanen, bewegten Bezugssystems,

$$\xi \rightarrow x(\xi, t)$$

---

<sup>1</sup>Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827): Französischer Mathematiker und Astronom; Prof. in Paris; begründete u. a. die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

beschrieben werden. Die zugehörigen Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\dot{\epsilon}$  sind dann lineare Funktionen der Geschwindigkeitvektoren  $v(x) := \partial_t x(\xi, t)$ :

$$\dot{\epsilon}(x) = \frac{1}{2}(\nabla v(x) + \nabla v(x)^T).$$

Die aus der experimentellen Erfahrung abgeleiteten Forderung nach Erhaltung von Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie impliziert dann das die zugehörigen Dichtegrößen Massedichte  $\rho$ , Impulsdichte  $\rho v$  und Energiedichte  $E$  gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen müssen. Diese sog. „Erhaltungsgleichungen“ ergeben sich dabei nicht aus globalen Variationsprinzipien wie die der Elastizitätstheorie sondern aus lokalen Erhaltungsbedingungen. Diese Gleichungen sind generisch nichtlinear und unsymmetrisch. Der Bekannteste Vertreter dieser Gleichungen sind die sog. „Navier-Stokes-Gleichungen“

$$\partial_t v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = f$$

zur Beschreibung inkompressibler, Newtonscher Fluide, wobei die Inkompressibilität durch die lineare Nebenbedingung  $\nabla \cdot v = 0$  ausgedrückt wird. Die Lösungen dieses Systems lassen sich nicht durch Variationsprinzipien charakterisieren. Daher basiert ihre numerische Approximation nicht auf dem Ritzschen sondern auf dem Galerkinschen Verfahrensansatz für unsymmetrische Variationsprobleme der Form

$$\int_{\Omega} \partial_t v \cdot \varphi \, dx + \int_{\Omega} \nu \nabla v : \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} v \cdot \nabla v \cdot \varphi \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx,$$

für alle zulässigen Testfunktionen  $\varphi$ . Ergänzt durch geeignete Anfangs- und Randbedingungen ist diese Variationsaufgabe im Hadamarschen Sinne wohl gestellt und damit einer numerischen Lösung durch Galerkin-Verfahren zugänglich. Dies rechtfertigt die Anwendung der „Finite-Elemente-Methode“ auch auf solche strömungsmechanischen Modelle.