

# 1 Theorie partieller Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen gegeben, soweit sie für deren numerische Behandlung relevant ist. Wir betrachten zunächst lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_{j=1}^d a_j \partial_j u + au = f, \quad (1.0.1)$$

mit gegebenen Koeffizientenfunktionen  $a_{ij}$ ,  $a_j$ ,  $a$  und rechter Seite  $f$ . Wenn diese Funktionen nicht zusätzlich von der unbekanntenen Lösung  $u$  abhängen, nennt man die Gleichung „linear“. Wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen kann o.B.d.A.  $a_{ij} = a_{ji}$  angenommen werden. Für allgemeine nichtlineare Gleichungen

$$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad (1.0.2)$$

gibt es keine einheitliche Lösungstheorie. Wir beschränken uns im Folgenden daher im Wesentlichen auf lineare Probleme.

Differentialgleichungen werden in der Regel auf (beschränkten oder halbbeschränkten) Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  betrachtet. Dazu kommen dann noch Bedingungen entlang des Randes  $\partial\Omega$ . Die geeignete Wahl dieser „Randbedingungen“ ist eine sehr delikate Sache und erfordert eingehende Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften des Differentialoperators. Diesen wird der nächste Abschnitt gewidmet sein.

Damit eine Differentialgleichung mit den zugehörigen Randbedingungen ein sinnvolles Modell eines realen physikalischen Vorgangs ist, sind eine Reihe von Forderungen zu stellen:

- i) *Existenz* von Lösungen in einem möglicherweise verallgemeinerten Sinne; unter einer „klassischen“ Lösung versteht man eine solche, für die alle auftretenden Ableitungen im Gebietsinnern im strengen Sinne definiert sind und die bis an den Rand stetig ist, d. h.:  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .
- ii) *Eindeutigkeit* der Lösungen möglicherweise unter Hinzunahme von weiteren physikalisch motivierten Bedingungen.
- iii) *Stetige Abhängigkeit* von den Daten wegen der meist inexakten Verfügbarkeit von Koeffizienten und Randdaten in den physikalischen Modellen; Lösungen sollten sich unter kleinen Datenstörungen auch nur wenig ändern.

Eine Aufgabe, welche diesen Minimalforderungen genügt, nennt man „wohl-gestellt“ (im Sinne von Hadamard<sup>1</sup>).

Bei Anfangs- oder Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen war die

---

<sup>1</sup>Jacque Salomon Hadamard (1865–1963): Französischer Mathematiker; Prof. in Bordeaux und Paris; viele wichtige Beiträge zur komplexen Analysis und speziellen Funktionen, zur analytischen Zahlentheorie, zur Variationsrechnung und zu den Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

Regularität der Lösung kein besonderes Thema, da sich die Regularität der Daten direkt auf die entsprechende der Lösung überträgt. Bei partiellen Differentialgleichungen ist dies nicht immer der Fall und bedarf für verschiedene Typen von Differentialgleichungen gesonderter Untersuchung.

## 1.1 Typeneinteilung

Partielle Differentialgleichungen lassen sich in drei Haupttypen einteilen: die „elliptischen“, die „parabolischen“ und die „hyperbolischen“ Gleichungen. Wir werden das dieser Unterteilung zugrunde liegende Prinzip anhand einer leicht überschaubaren Situation erläutern. Dies sind die linearen, skalaren Gleichungen 2. Ordnung in zwei Variablen:

$$Lu = a_{11}\partial_x^2 u + 2a_{12}\partial_x\partial_y u + a_{22}\partial_y^2 u + a_1\partial_x u + a_2\partial_y u + au = f$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_{ij}$ . Dabei sollen nicht alle drei Koeffizienten  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  der Ableitungen zweiter Ordnung gleichzeitig Null sein. Diese Gleichung wird auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  betrachtet.

Ausgangspunkt ist ein direkter Lösungsansatz, wie er auch bei gewöhnlichen Differentialgleichungen angewendet werden kann. Für die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u^0,$$

erhält man aus der Vorgabe  $u(0) = u^0$  durch sukzessives Differenzieren von  $f(t, x)$  Formeln für alle Ableitungen von  $u$ :

$$u^{(i)}(0) = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(0, u^0) =: f^{(i-1)}(0, u^0), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Wenn die Ableitungen  $f^{(i-1)}$  nicht zu schnell wachsen (für  $f(t, x) = \sin(x)$  sind sie z. B. gleichmäßig beschränkt), konvergiert die Taylor<sup>2</sup>-Reihe

$$u(t) = u^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} f^{(i-1)}(0, u^0)$$

für alle  $t \geq 0$  absolut und stellt die (eindeutige) Lösung der Anfangswertaufgabe dar.

Wir versuchen, diese Konstruktion auf partielle Differentialgleichungen zu übertragen. Dazu sei  $\Gamma$  ein Jordan<sup>3</sup>-Kurvenstück in  $\Omega$  mit beliebig oft differenzierbarer Parametrisierung  $\Gamma = \{(x(\tau), y(\tau)), \tau \in [0, 1]\}$ . Entlang  $\Gamma$  seien für die Lösung  $u(x, y)$  der Differentialgleichung die Funktionswerte  $u$  sowie ihre Ableitungen  $\partial_n u$  in Normalenrichtung  $n$

<sup>2</sup>Brook Taylor (1685–1731): Englischer Mathematiker und Schüler Newtons; die nach ihm benannte Reihenentwicklung war im Kern bereits Gregory, Newton, Leibniz und Johann Bernoulli bekannt.

<sup>3</sup>Marie Ennemond Camille Jordan (1838–): Französischer Mathematiker; Prof. in Paris; Beiträge zur Algebra, Gruppentheorie, Analysis und Topologie.

zu  $\Gamma$  vorgegeben. Dies entspricht der Tatsache, dass wir es mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung zu tun haben. Mit  $u$  und  $\partial_n u$  ist der ganze Gradient  $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)^T$  entlang  $\Gamma$  bekannt. Wir wollen versuchen, aus diesen Vorgaben alle weiteren Ableitungen von  $u$  entlang  $\Gamma$  zu bestimmen, um damit wieder einen Taylor-Reihenansatz für  $u$  in einer Umgebung von  $\Gamma$  zu machen. Zu diesem Zweck führen wir die Abkürzungen ein:

$$p := \partial_x u, \quad q := \partial_y u, \quad r := \partial_x^2 u, \quad s := \partial_x \partial_y u, \quad t := \partial_y^2 u.$$

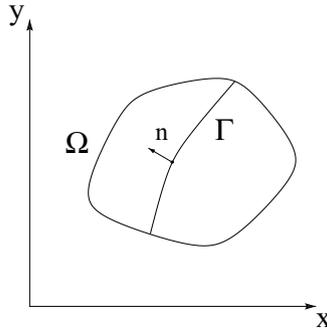


Abbildung 1.1: Konfiguration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung

Differentiation von  $p$  und  $q$  entlang  $\Gamma$ , d. h. bzgl. des Parameters  $\tau$ , ergibt

$$\begin{aligned} \partial_\tau p &= \partial_x p \partial_\tau x + \partial_y p \partial_\tau y = r \partial_\tau x + s \partial_\tau y, \\ \partial_\tau q &= \partial_x q \partial_\tau x + \partial_y q \partial_\tau y = s \partial_\tau x + t \partial_\tau y. \end{aligned}$$

mit den bekannten tangentialen Ableitungen  $\partial_\tau x$  und  $\partial_\tau y$  entlang  $\Gamma$ . Zusammen mit der Differentialgleichung  $Lu = f$  ergibt dies ein  $3 \times 3$ -Gleichungssystem für die drei gesuchten Ableitungen  $r, s, t$ :

$$\begin{aligned} a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t &= f - a_1p - a_2q - au \\ \partial_\tau x r + \partial_\tau y s &= \partial_\tau p \\ \partial_\tau x s + \partial_\tau y t &= \partial_\tau q \end{aligned}$$

mit entlang  $\Gamma$  bekannter rechter Seite. Die Determinante der Koeffizientenmatrix  $B$  erhält man durch Entwicklung nach der ersten Zeile zu

$$\det B = a_{11} \partial_\tau y^2 - 2a_{12} \partial_\tau x \partial_\tau y + a_{22} \partial_\tau x^2.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

i) **Fall**  $\det B \neq 0$  **entlang ganz**  $\Gamma$ :

In diesem Fall sind alle zweiten Ableitungen  $r, s, t$  von  $u$  durch Vorgabe von  $u, \partial_n u$  entlang  $\Gamma$  (eindeutig) bestimmbar. Durch weitere Differentiation des Gleichungssystems nach  $x$  und  $y$  erhält man wieder ein System für die dritten Ableitungen  $\partial_x r, \partial_x s, \partial_x t$

sowie  $\partial_y r, \partial_y s, \partial_y t$  jeweils mit derselben Koeffizientenmatrix. Durch weiteres Differenzieren lassen sich so alle höheren Ableitungen von  $u$  entlang  $\Gamma$  bestimmen. Durch den Reihenansatz

$$u(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{(i+j)!} \partial_x^i \partial_y^j u(x_0, y_0)$$

bzgl. eines Punktes  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  erhält man dann in einer Umgebung der Kurve  $\Gamma$  eine Lösung der Differentialgleichung, die auf  $\Gamma$  die vorgegebenen Werte annimmt. Diese nennt man Lösung der „Cauchyschen<sup>4</sup> Anfangswertaufgabe“ der Differentialgleichung bzgl. der „Anfangskurve“  $\Gamma$ .

ii) **Fall**  $\det B = 0$  **in einem Punkt**  $(x_0, y_0) \in \Gamma$ :

Die quadratische Gleichung

$$a_{11} \partial_\tau y^2 - 2a_{12} \partial_\tau x \partial_\tau y + a_{22} \partial_\tau x^2 = 0$$

bestimmt gewisse Richtungen  $\partial_\tau y / \partial_\tau x = dy/dx$  bzw.  $\partial_\tau x / \partial_\tau y = dx/dy$  von Kurven (mit Graph  $y = y(x)$  oder  $x = x(y)$ ) durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ . Zu deren Bestimmung sei etwa angenommen, dass  $a_{11} \neq 0$  und  $\partial_\tau x \neq 0$ . Dann besitzt die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2a_{12}}{a_{11}} \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a_{22}}{a_{11}} = 0$$

die Lösungen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{+/-} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \pm \frac{1}{a_{11}} \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}.$$

Diese entsprechen Steigungen von Kurven durch den Punkt  $(x_0, y_0) \in \Gamma$ , entlang welcher die höheren Ableitungen von  $u$  sich nicht aus den Vorgaben entlang  $\Gamma$  bestimmen lassen. Entlang dieser kritischen, auch „charakteristisch“ genannten Kurven (sog. „Charakteristiken“ des Differentialoperators  $L$ ) lässt sich also die Lösung der Differentialgleichung nicht aus den obigen Vorgaben konstruieren. Entlang solcher Kurven können Unstetigkeiten in der Lösung oder ihres Gradienten auftreten. Es ist also sehr wichtig, die Existenz von Charakteristiken und deren Gestalt für den zu betrachtenden Differentialoperator vor Ansatz eines numerischen Verfahrens genau zu bestimmen. Offensichtlich hängt die Existenz von Charakteristiken allein von den Koeffizienten der höchsten Ableitungen des Operators  $L$ , d. h. seinem sog. „Hauptteil“  $a_{11} \partial_x^2 u + 2a_{12} \partial_x \partial_y u + a_{22} \partial_y^2 u$ , ab. Diesem wird die quadratische Form

$$q(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

zugeordnet. Die Gleichung  $q(x, y) = 0$  beschreibt Kegelschnitte in der  $(x, y)$ -Ebene:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} < 0 : & \textit{Ellipse}, \\ = 0 : & \textit{Parabel}, \\ > 0 : & \textit{Hyperbel}. \end{cases}$$

<sup>4</sup>Augustin Louis Cauchy (1789–1857): Ingenieur, Physiker und bedeutendster französischer Mathematiker seiner Zeit; wirkte an der École Polytechnique und der Sorbonne in Paris; gilt als Begründer der modernen Analysis und der Funktionentheorie.

Von dieser rein formalen Charakterisierung stammen die obigen Bezeichnungen für die drei Typen von partiellen Differentialgleichungen. Die Klassifikation eines Differentialoperators als „elliptisch“, „parabolisch“ oder „hyperbolisch“ wird für jeden einzelnen Punkt  $(x_0, y_0)$  separat vorgenommen. Im Falle variabler Koeffizienten  $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$  oder im nichtlinearen Fall  $a_{ij}(u(x, y))$  kann der Typ einer Gleichung also im Lösungsgebiet wechseln. Wir werden im Folgenden nur Gleichungen eines einheitlichen Typs betrachten; in vielen Anwendungen spielt aber gerade der Typwechsel eine wichtige Rolle.

Als Nächstes wollen wir die prototypischen Vertreter von (linearen) elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differentialgleichungen ableiten. Dies wird uns erneut auf die obige Typeneinteilung führen. Dazu schreiben wir den Hauptteil  $L_0$  des Differentialoperators in Matrix-Vektor-Form:

$$L_0 = a_{11}\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \nabla^T A \nabla$$

Die symmetrische Matrix  $A$  besitzt zwei reelle Eigenwerte  $\lambda, \mu$  und ein zugehöriges Orthonormalsystem von Eigenvektoren  $\{\xi, \eta\}$ . Mit der Spaltenmatrix  $Q := [\xi, \eta]$  gilt

$$QQ^T = I, \quad Q^T A Q = D = \text{diag}(\lambda, \mu).$$

Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} L_0 &= \nabla^T Q D Q^T \nabla = (Q^T \nabla)^T D (Q^T \nabla) \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1 \partial_x + \xi_2 \partial_y \\ \eta_1 \partial_x + \eta_2 \partial_y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \partial_x + \xi_2 \partial_y \\ \eta_1 \partial_x + \eta_2 \partial_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$L_0 = \lambda(\xi_1 \partial_x + \xi_2 \partial_y)^2 + \mu(\eta_1 \partial_x + \eta_2 \partial_y)^2,$$

oder mit den Richtungsableitungen  $\partial_\xi = \xi \cdot \nabla$  und  $\partial_\eta = \eta \cdot \nabla$ :

$$L_0 = \lambda \partial_\xi^2 + \mu \partial_\eta^2.$$

Die Eigenwerte erhält man als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \det(A - zI) &= (a_{11} - z)(a_{22} - z) - a_{12}^2 = z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ &= (z - \lambda)(z - \mu) = z^2 - (\lambda + \mu)z + \lambda\mu. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man („Vietascher<sup>5</sup> Wurzelsatz“).

$$\lambda + \mu = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda\mu = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

---

<sup>5</sup>Francois Viète, lat. Franciscus Vieta (1540–1603): Französischer Mathematiker; Arbeiten über algebraische Gleichungen und sphärische Trigonometrie; gab trigonometrische Tafeln heraus und führte die systematische Buchstabenrechnung ein.

**a) „Elliptischer“ Fall**  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  :

Beide Eigenwerte  $\lambda, \mu$  sind ungleich Null und haben dasselbe Vorzeichen. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind nicht reell, d. h.: Es existieren keine charakteristischen Kurven durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ . In diesem Fall ist der Konstruktionsprozess für die höheren Ableitungen von  $u$  durchführbar. Die Normalform eines elliptischen Operators  $L$  ist im Fall  $\lambda = \mu = 1$  :

$$Lu = \partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u + \psi(\xi, \eta, u, \partial_\xi u, \partial_\eta u)$$

Der „Hauptteil“ dieses Operators ist also gerade der „Laplace-Operator“  $\Delta$ , der sich somit als prototypischer Vertreter elliptischer Differentialoperatoren 2. Ordnung erweist. Wir werden uns daher im Folgenden hauptsächlich mit der zugehörigen Poisson-Gleichung beschäftigen:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = f. \quad (1.1.3)$$

**b) „Parabolischer“ Fall:**  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

Einer der Eigenwerte ist Null; der zweite ist dann notwendig ungleich Null. Es existiert genau eine charakteristische Richtung im Punkt  $(x_0, y_0)$  mit der Steigung  $dy/dx = a_{12}/a_{11}$ . Die Normalform eines parabolischen Operators  $L$  ist im Fall  $\lambda = 1, \mu = 0$  :

$$Lu = \partial_\xi^2 u + \psi(\xi, \eta, u, \partial_\xi u, \partial_\eta u).$$

Der Hauptteil dieses Operators ist im linearen Fall gerade der sog. „Wärmeleitungsoperator“, der prototypische Vertreter parabolischer Differentialoperatoren 2. Ordnung. Wir werden uns daher im Folgenden mit der zugehörigen Wärmeleitungsgleichung beschäftigen:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = f. \quad (1.1.4)$$

**c) „Hyperbolischer“ Fall:**  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$

Beide Eigenwerte sind ungleich Null, haben aber verschiedene Vorzeichen. Es existieren zwei charakteristische Richtungen im Punkt  $(x_0, y_0)$  mit den Steigungen  $(dy/dx)_\pm = a_{12}/a_{11} \pm a_{11}^{-1} \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$ . Die Normalform eines hyperbolischen Differentialoperators  $L$  ist im Fall  $\lambda = 1, \mu = -1$  :

$$Lu = \partial_\xi^2 u - \partial_\eta^2 u + \psi(\xi, \eta, u, \partial_\xi u, \partial_\eta u).$$

Der Hauptteil dieses Operators ist der sog. „Wellenoperator“, der prototypische Vertreter hyperbolischer Differentialoperatoren 2. Ordnung. Wir werden uns daher im Folgenden mit der zugehörigen Wellengleichung beschäftigen:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f. \quad (1.1.5)$$

Wir haben gesehen, dass die „Cauchysche Anfangswertaufgabe“ durch Reihenansatz lösbar ist, wenn die „Anfangskurve“  $\Gamma$  nirgends mit einer Charakteristik des Differential-

operators zusammenfällt. Andernfalls kann die Situation eintreten, dass zu beiden Seiten der Kurve  $\Gamma$  eine Lösung existiert, diese aber nicht auf  $\Gamma$  stetig-differenzierbar fortsetzbar ist. Im Folgenden werden wir die für die drei Gleichungstypen geeigneten Randbedingungen diskutieren und dabei ganz unterschiedliche Ergebnisse erhalten.

## 1.2 Elliptische Probleme

Wir haben gesehen, dass für (im ganzen Lösungsgebiet  $\Omega$ ) elliptische Differentialoperatoren die „Cauchysche Anfangswertaufgabe“ für jede (analytische) „Anfangskurve“  $\Gamma \subset \Omega$  lösbar ist. Die Verallgemeinerung dieser Aussage für nichtlineare Differentialoperatoren der Art

$$L(u) = \partial_x^2 u - F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u, \partial_y^2 u) \quad (1.2.6)$$

ist der berühmte Satz von Cauchy-Kovalevskaya<sup>6</sup>. Dieser sehr allgemeine Existenzsatz für elliptische Differentialgleichungen ist aber für die Praxis nur von geringer Bedeutung. Die über einen lokalen Reihenansatz konstruierte Lösung  $u$  hängt nämlich i. Allg. nicht stetig von den vorgegebenen Anfangswerten entlang  $\Gamma$  ab. Dies ist aber eine unverzichtbare Bedingung an ein physikalisch sinnvolles Modell.

**Beispiel 1.1:** In der Halbebene  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  seien entlang der Randkurve  $\Gamma = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$  die Randwerte  $u(0, y) = u_0^0(y) = 0$ ,  $\partial_x u(0, y) = u_0^1(y) = 0$  gegeben. Die zugehörige Lösung der Poisson-Gleichung  $\Delta u = 0$  ist  $u \equiv 0$ . Mit  $\varepsilon > 0$  seien die Randdaten nun gestört zu  $u_\varepsilon^0(y) = 0$ ,  $u_\varepsilon^1(y) = \varepsilon \sin(y/\varepsilon)$ , wobei  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon^1(y) = 0$ . Die zugehörige gestörte Lösung der Poisson-Gleichung (nachrechnen!)

$$u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sin(y/\varepsilon) \sinh(x/\varepsilon), \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

konvergiert aber für  $\varepsilon \rightarrow 0$  nicht gegen Null. Es zeigt sich, dass in diesem Fall entlang der Anfangskurve  $\Gamma$  nicht gleichzeitig Werte für  $u$  und  $\partial_n u$  vorgegeben werden dürfen, wenn man an physikalisch sinnvollen Lösungen interessiert ist.

Wir haben gesehen, dass man bei der Wahl von Randbedingungen für elliptische Operatoren vorsichtig sein muss, wenn das resultierende Randwertproblem wohl-gestellt sein soll. Sei also  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand  $\partial\Omega$ . Wir wollen dabei Ränder mit einer glatten Parametrisierung (mindestens zweimal stetig differenzierbar) oder ein Polygonebiet (mit endlich vielen Ecken) zulassen. Als prototypischen Modellfall betrachten wir die „Poisson-Gleichung“

---

<sup>6</sup>Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (1850–1891): Russische Mathematikerin, eine der ersten Frauen mit Universitätskarriere; 1869 Studium in Heidelberg als „Gasthörerin“, da hier für Frauen ein offizielles Universitätsstudium noch nicht möglich war; ab 1871 Studium in Berlin bei Weierstrass und danach in Göttingen; eine ihrer ersten Veröffentlichungen enthält den nach ihr benannten „Existenzsatz“; ab 1884 Stelle als Privatdozentin in Stockholm; leistete Beiträge zur Analysis und zur Theorie von Differentialgleichungen der Physik.

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega. \quad (1.2.7)$$

Es gibt drei Typen von Randbedingungen und zugehörige Randwertaufgaben („RWAn“):

- a) *Dirichletsche*<sup>7</sup> *Randbedingungen* („1. RWA“):  $u = g$  auf  $\partial\Omega$ .
- b) *Neumannsche*<sup>8</sup> *Randbedingungen* („2. RWA“):  $\partial_n u = g$  auf  $\partial\Omega$ .
- c) *Robinsche*<sup>9</sup> *Randbedingungen* („3. RWA“):  $\partial_n u + \alpha u = g$  auf  $\partial\Omega$ .

Die Randfunktionen  $g$  werden i. Allg. als glatt und  $\alpha \geq 0$  angenommen. Alle diese RWAn sind, wie wir zum Teil zeigen werden, unter geeigneten Zusatzbedingungen an die Daten wohl gestellt.

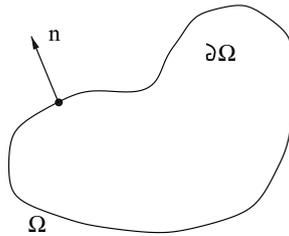


Abbildung 1.2: Konfiguration der elliptischen Randwertaufgabe

### 1.2.1 Existenz von Lösungen

Die Frage nach der Existenz von Lösungen der 1. RWA ist wesentlich schwieriger als bei den RWAn gewöhnlicher Differentialgleichungen. Als Vorbereitung für analoge Argumente im Zusammenhang mit den Diskretisierungsverfahren wollen wir zwei völlig unterschiedliche Zugänge zu dieser Frage diskutieren, den „klassischen“, potentialtheoretischen und den „modernen“, funktionalanalytischen. Der Einfachheit halber wird nur der Fall „homogener“ Dirichlet-Randbedingungen  $u|_{\partial\Omega} = 0$  betrachtet.

#### i) *Potentialtheoretische Methode:*

Zunächst ist der Begriff einer „klassischen“ Lösung für die Dirichletschen Randbedingung zu präzisieren. Wir verstehen darunter eine Funktion  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , welche im Innern von  $\Omega$  der Differentialgleichung und entlang des Randes  $\partial\Omega$  der Randbedingung genügt.

---

<sup>7</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859): Geb. in Düren (damals bei Frankreich; wirkte in Berlin und Göttingen (Nachfolger von Gauss)); wichtige Beiträge zur Zahlentheorie, Analysis und Differentialgleichungen („Dirichletsches Prinzip“).

<sup>8</sup>Carl Gottfried Neumann (1832–1925): Deutscher Mathematiker; seit 1858 Privatdozent und seit 1863 apl. Prof. in Halle; nach Professuren in Basel und Tübingen ab 1868 in Leipzig; lieferte Beiträge zur Theorie der (partiellen) Differential- und Integralgleichungen, insbesondere zum Dirichlet-Problem. Die „Neumann-Randbedingungen“ sowie die „Neumann-Reihe“ sind nach ihm benannt; gründete zusammen mit Alfred Clebsch die Zeitschrift *Mathematische Annalen*.

<sup>9</sup>Victor Gustave Robin (1855–1897): Französischer Mathematiker; lehrte an der Sorbonne in Paris; Beiträge zur Potentialtheorie und Thermodynamik; hat die nach ihm benannte 3. Randbedingung anscheinend selbst gar nicht benutzt.

Ferner soll (aus physikalischen Gründen) ihr Gradient (möglicherweise im uneigentlichen Riemannschen<sup>10</sup> Sinne) quadratintegabel sein:  $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$ . Zur Konstruktion solcher klassischer Lösungen postulieren wir zunächst die Existenz einer Funktion  $G(x, y)$  auf  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ ,

$$G \in C^2(\{\Omega \times \Omega\} \setminus \{x = y\}) \cap C(\{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\} \setminus \{x = y\}),$$

mit den Eigenschaften

$$-\Delta_x G(\cdot, y) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \{y\}, \quad G(\cdot, y) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \{y\}, \quad (1.2.8)$$

für beliebiges festes  $y \in \overline{\Omega}$ . Für  $x = y$  habe  $G(x, y)$  eine dimensionsabhängige Singularität, die so beschaffen ist, dass sich  $-\Delta_x G(\cdot, y)$  wie die Distribution  $\delta(\cdot, y)$  verhält, d. h.: Für  $v \in C(\overline{\Omega})$  gilt mit den Kugelumgebungen  $B_\varepsilon = B_\varepsilon(x) := \{y \in \Omega : |y - x| \leq \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ :

$$x \in \Omega : \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} -\Delta_x G(x, y) v(y) dy = v(x), \quad (1.2.9)$$

$$x \in \partial\Omega : \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \setminus B_\varepsilon} \partial_n G(x, y) v(y) dy = v(x). \quad (1.2.10)$$

Eine solches  $G(x, y)$  wird „Greensche Funktion (1. Art)“ genannt. Wir machen damit den Lösungsansatz

$$u(x) := \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \partial_n G(x, y) g(y) do_y.$$

Die formulierten Eigenschaften der Greenschen Funktion erlauben es, zu zeigen, dass dieser Ansatz tatsächlich eine klassische Lösung der 1. RWA liefert. Diese Rechnung ist aufwendig und kann z. B. im Buch von Hellwig [5] nachgelesen werden.

Die Konstruktion einer Greenschen Funktion für allgemeine Gebiete im  $\mathbb{R}^d$  ist schwer. Im Fall  $d = 1$  ist aber eine explizite Konstruktion möglich und für  $d = 2$  folgt ihre Existenz mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes aus der Theorie komplexer Funktionen (siehe Hellwig [5]). Auch für sehr spezielle Konfigurationen, wie z. B. Halbebenen oder Kreise, lässt sich hier die Greensche Funktion explizit angeben.

**Beispiele:** (i) Fall  $\mathbb{R}^1$ : In einer Dimension lautet die 1. RWA des Laplace-Operators auf dem Gebiet  $\Omega = (0, 1)$  mit homogenen Randdaten

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Wir suchen eine Lösung  $G(x, y)$  der RWA

$$-G''_x(x, y) = \delta(x - y), \quad x \in (0, 1), \quad G(0, y) = G(1, y) = 0, \quad y \in (0, 1) \setminus \{x\}.$$

---

<sup>10</sup>Bernhard Riemann (1826–1866): Deutscher Mathematiker; Prof. in Göttingen als Nachfolger Dirichlets; Mitbegründer der Funktionentheorie und der modernen Geometrie; einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, von großem Einfluss auch auf die theoretische Physik.

Deren erste Ableitung muss für  $x = y$  einen Sprung der Höhe 1 aufweisen. Zweimalige Integration ergibt

$$G'_x(x, y) = \begin{cases} c_1, & 0 \leq x \leq y, \\ c_1 - 1, & y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

und

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1x + c_2, & 0 \leq x \leq y, \\ (c_1 - 1)x + c_3, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Die Stetigkeit von  $G(x, y)$  bei  $x = y$  bedingt  $c_1y + c_2 = (c_1 - 1)y + c_3$  bzw.  $c_3 = c_2 + y$  und folglich

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1x + c_2, & 0 \leq x \leq y, \\ (c_1 - 1)x + c_2 + y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Die Randbedingungen  $G(0, y) = G(1, y) = 0$  erfordern  $c_2 = 0$  und  $c_1 - 1 + c_2 + y = 0$  und folglich  $c_2 = 0$  sowie  $c_1 = 1 - y$ . Die Greensche Funktion lautet also

$$G(x, y) = \begin{cases} (1 - y)x, & 0 \leq x \leq y, \\ y(1 - x), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nach Konstruktion hat die Greensche Funktion die Symmetrieeigenschaft  $G(x, y) = G(y, x)$  und für  $x \neq y$  gilt  $G'_x(x, y) = G'_y(y, x)$  sowie  $G''_x(x, y) = G''_y(y, x) = 0$ . Für eine Funktion  $v \in C_0^\infty(0, 1)$  (Raum der „Testfunktionen“) gilt dann im Distributions-sinn:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 G''_x(x, y)v(y) dy &= - \int_0^1 G''_y(y, x)v(y) dy \\ &:= - \int_0^1 G(y, x)v''(y) dy \\ &= - \int_0^1 G(x, y)v''(y) dy \\ &= \int_0^1 G'_y(x, y)v'(y) dy - G(0, y)v'(0) + G(1, y)v'(1) \\ &= c_1 \int_0^y v'(x) dx + (c_1 - 1) \int_y^1 v'(x) dx \\ &= c_1(v(y) - v(0)) + (c_1 - 1)(v(1) - v(y)) \\ &= v(y), \end{aligned}$$

d. h.: Die Funktion  $G(x, y)$  hat die Eigenschaften einer Greenschen Funktion.

(ii) Fall  $\mathbb{R}^2$ : Auf dem Kreis  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$  ist durch

$$\begin{aligned} G(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \log(|x - y|) + \log\left(\frac{R}{|x|}\right) - \log\left(\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|\right) \right\}, \quad x \neq 0, \\ G(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \log(|y|) - \log(R) \right\}, \quad x = 0, \end{aligned}$$

eine Greensche Funktion gegeben.

Die Existenz Greenscher Funktionen lässt sich für sehr allgemeine Gebiete  $\Omega$  nachweisen, auch für die anderen RWA. Das Konzept der „klassischen“ Lösung ist in vielen Anwendungsfällen zu restriktiv, z. B. wenn die rechte Seite  $f$  nicht regulär genug ist, um eine  $C^2$ -Lösung zuzulassen. Die Greensche Funktion selbst ist ein Extremfall in dieser Hinsicht. Als nächstes werden wir eine Abschwächung dieser Anforderungen kennenlernen, welche mehr Flexibilität bietet und für die man vergleichsweise leicht die Existenz von Lösungen garantieren kann.

ii) *Funktionalanalytische Methode:*

Wir haben bereits in der Einleitung diskutiert, dass eine enge Beziehung zwischen der Poisson-Gleichung und der Minimierung des zugehörigen Energiefunctionals besteht. Dies kann man zum Nachweis der Existenz von Lösungen ausnutzen. Wir betrachten das Funktional

$$E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$$

auf dem Vektorraum  $\tilde{V}_0$  der „zulässigen“ Funktionen:

$$\tilde{V}_0 := \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0, |\nabla v| \in L^2(\Omega)\}.$$

Dieser Raum wird mit der natürlichen sog. „Energie-Norm“

$$\|v\|_E := \|\nabla v\|_{\Omega}, \quad v \in \tilde{V}_0,$$

versehen. Dass dies wirklich eine Norm ist, folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der  $L^2$ -Norm  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\Omega}$ . Aus der Poincaréschen Ungleichung

$$\|v\|_{\Omega} \leq d_{\Omega} \|\nabla v\|_{\Omega}, \quad v \in \tilde{V}_0,$$

mit  $d_{\Omega} := \text{diam}(\Omega)$  folgt weiter, dass diese Norm stärker ist als die  $L^2$ -Norm. In kompakter Schreibweise ist  $E(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{\Omega}^2 - (f, v)$ . Wir verwenden jetzt eine Argumentation aus der Variationsrechnung, die dort als die „direkte Methode“ bekannt ist.

i) Wir zeigen zunächst, dass  $E(\cdot)$  nach unten beschränkt ist. Für  $v \in \tilde{V}_0$  folgt mit Hilfe der Hölderschen und der Poincaréschen Ungleichung

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{\Omega}^2 - \|f\| \|v\| \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{\Omega}^2 - d_{\Omega} \|f\| \|\nabla v\|_{\Omega}.$$

Anwendung der Ungleichung  $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$  liefert weiter

$$d_{\Omega} \|f\| \|\nabla v\|_{\Omega} \leq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} d_{\Omega}^2 \|f\|_{\Omega}^2,$$

und folglich

$$E(v) \geq -\frac{1}{2} d_{\Omega}^2 \|f\|_{\Omega}^2 > -\infty, \quad v \in \tilde{V}_0.$$

ii) Sei nun  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \tilde{V}_0$  eine „Minimalfolge“ des Funktionals  $E(\cdot)$ , d. h.:

$$E(u_k) \rightarrow \inf_{v \in \tilde{V}} E(v) =: d > -\infty.$$

Wir wollen zeigen, dass  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge bzgl. der Energie-Norm ist. Wichtiges Hilfsmittel dazu ist die sog. „Parallelogrammidentität“

$$\|v - w\|_E^2 + \|v + w\|_E^2 = 2\|v\|_E^2 + 2\|w\|_E^2,$$

die man durch direktes Nachrechnen verifiziert. Für beliebige Indizes  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt folglich

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_E^2 &= 2\|u_n\|_E^2 + 2\|u_m\|_E^2 - 4\|\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)\|_E^2 \\ &= 4E(u_n) + 4(f, u_n) + 4E(u_m) + 4(f, u_m) - 8E(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)) \\ &\quad - 8(f, \tfrac{1}{2}(u_n + u_m)) \\ &= 4E(u_n) + 4E(u_m) - 8E(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)). \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \{E(u_n) + E(u_m)\} = 2d, \quad E(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)) \geq d,$$

folgt damit

$$\limsup_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E^2 \leq 0,$$

d. h.:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist wie behauptet eine Cauchy-Folge.

Die Cauchy-Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt i. Allg. keinen Limes im normierten (unvollständigen) Raum  $\tilde{V}_0$ . Durch Vervollständigung von  $\tilde{V}_0$  erhält man den sog. „Sobolew<sup>11</sup>-Raum“  $V_0 = H_0^1(\Omega)$ . Die Elemente von  $H_0^1(\Omega)$  sind zunächst als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen (analog wie bei der Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen) definiert; sie lassen sich aber wieder als Funktionen interpretieren. Sie sind  $L^2$ -Funktionen, deren erste Ableitungen (im Distributionssinne) wieder in  $L^2$  liegen und die in einem abgeschwächten Sinn auf  $\partial\Omega$  verschwinden (siehe die angegebene Literatur zur Theorie partieller Differentialgleichungen). Wir werden unten in Abschnitt 1.3 die Eigenschaften dieser „Sobolew-Räume“ genauer diskutieren. Der Limes  $u \in H_0^1(\Omega)$  der Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird als die „schwache“ oder auch „variationelle“ Lösung der 1. RWA des Laplace-Operators bezeichnet. Als Minimalpunkt des Funktional  $E(\cdot)$  genügt sie, wie wir schon früher gesehen haben, notwendig der Beziehung

$$(\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2.11)$$

Umgekehrt gilt für eine Funktion  $u \in H_0^1(\Omega)$ , welcher dieser Variationsgleichung genügt, mit jeder anderen Funktion  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} E(v) - E(u) &= \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - (f, v) - \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + (f, u) \\ &= \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - (\nabla u, \nabla v) - \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + (\nabla u, \nabla u) \\ &= \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - (\nabla u, \nabla v) + \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|^2 = \tfrac{1}{2}\|\nabla(v - u)\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

---

<sup>11</sup>Sergei Lvovich Sobolew (1908–1989): Russischer Mathematiker; wirkte zunächst in Leningrad (St. Petersburg) und dann am berühmten Steklov-Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften in Moskau; fundamentale Beiträge zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Konzept der verallgemeinerten (distributionellen) Lösung, Sobolew-Räume; beschäftigte sich auch mit numerischen Methoden, numerische Quadratur.

Folglich ist  $u$  automatisch auch Minimum des Energiefunktional und somit schwache Lösung.

Wenn die schwache Lösung  $u$  regulärer ist, etwa sogar die Regularität einer klassischen Lösung besitzt, so kann partiell integriert werden, und wir finden

$$(-\Delta u, \varphi) + (\partial_n u, \varphi)_{\partial\Omega} = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

bzw. wegen der Randbedingung  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$

$$(-\Delta u - f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Hieraus folgt mit den üblichen Argumenten, dass  $-\Delta u = f$ , d. h.:  $u$  ist sogar klassische Lösung der RWA. Umgekehrt erfüllt natürlich jede klassische Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$ , die Variationsgleichung

$$(\nabla u, \nabla \varphi) - (f, \varphi) = (-\Delta u - f, \varphi) + (\partial_n u, \varphi)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Damit ist der „schwache“ Lösungsbegriff verträglich mit dem ursprünglichen „klassischen“. Der Nachweis höherer Regularität der schwachen Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  ist allerdings schwierig und kann im Rahmen dieser Vorlesung nur andiskutiert werden (siehe wieder die empfohlene Literatur).

Wir wollen noch kurz diskutieren, wie das obige Argument verwendet werden kann, um die Existenz von schwachen Lösungen der 1. RWA auch im Fall inhomogener Randdaten  $u|_{\partial\Omega} = g$  zu sichern. Dazu nehmen wir an, dass die Randfunktion  $g$  als „Spur“ einer auf ganz  $\Omega$  definierten Funktion  $\hat{g} \in H^1(\Omega)$  gegeben ist, :  $g = \hat{g}|_{\partial\Omega}$ . Dann wäre die Funktion  $v := u - \hat{g}$  formale Lösung der RWA

$$-\Delta v = f - \Delta \hat{g} \quad \text{in } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Hierfür garantiert nun die variationelle Methode die Existenz einer (eindeutigen) schwachen Lösung  $v \in H_0^1(\Omega)$  mit der Eigenschaft

$$(\nabla v, \nabla \varphi) = (f, \varphi) + (\nabla \hat{g}, \nabla \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Die schwache Lösung der ursprünglichen RWA ergibt sich dann als  $u := v + \hat{g}$ .

### 1.2.2 Eindeutigkeit von Lösungen

Die Eindeutigkeitsforderung an Lösungen dieser RWAn ist leicht zu gewährleisten. Wir diskutieren hier wieder nur die 1. RWA. Die entsprechenden Argumente für die 2. und die 3. RWA seien als Übung gestellt.

(i) Besonders einfach ist der Beweis für die schwachen Lösungen. Seien also  $u^{(1)}, u^{(2)} \in H_0^1(\Omega)$  zwei schwache Lösungen der 1. RWA, d. h.:

$$(\nabla u^{(i)}, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Dann gilt für die Differenz  $w := u^{(1)} - u^{(2)}$

$$(\nabla w, \nabla \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mit  $\varphi := w$  folgt  $\|\nabla w\| = 0$  und folglich  $w \equiv \text{konst.}$  bzw.  $w \equiv 0$  wegen der Randbedingung.

(ii) Die Eindeutigkeit von klassischen Lösungen folgt unmittelbar aus der gerade bewiesenen Eindeutigkeit von schwachen Lösungen, da jede klassische Lösung ja auch schwache Lösung ist. Eine direktere Argumentation ergibt sich mit Hilfe des „Maximumprinzips“.

**Hilfssatz 1.1 (Maximumprinzip):** Für den elliptischen Operator

$$Lu := -\Delta u + au$$

mit  $a \geq 0$  auf einem Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  gilt das sog. „Maximumprinzip“, d. h.: Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  mit der Eigenschaft  $Lu \leq 0$  hat in  $\Omega$  kein positives Maximum. Dies bedeutet, dass entweder  $u \leq 0$  auf ganz  $\Omega$  ist, oder

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u. \quad (1.2.12)$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass  $a > 0$  auf  $\Omega$ . Der allgemeine Fall  $a \geq 0$  erfordert eine aufwendigere Argumentation (siehe z. B. das Buch von Hellwig [5]). Ferner sei  $d = 2$ . Angenommen, die Funktion  $u$  habe im Fall  $u \not\leq 0$  in einem Punkt  $z \in \Omega$  ein positives Maximum,  $u(z) > 0$ . Dann ist notwendig

$$\nabla u(z) = 0, \quad \partial_x^2 u(z) \leq 0, \quad \partial_y^2 u(z) \leq 0.$$

Damit folgt  $0 \geq Lu(z) = -\Delta u(z) + au(z) \geq au(z)$ , was wegen  $a > 0$  den Widerspruch  $u(z) \leq 0$  erzwingt. Q.E.D.

Das Maximumprinzip für elliptische Operatoren 2. Ordnung ist die natürliche Verallgemeinerung der Tatsache, dass in einer Raumdimension aus  $u''(x) \geq 0$  die Konvexität von  $u$  folgt.

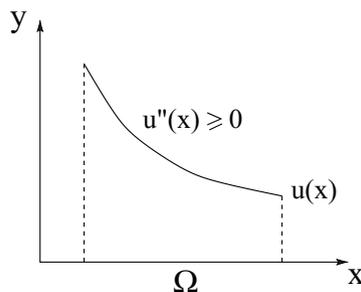


Abbildung 1.3: Maximumprinzip in einer Dimension

Aussagen vom Typ des obigen Maximumprinzips lassen sich für sehr allgemeine (auch nichtlineare) elliptische Operatoren 2. Ordnung herleiten. Wir betonen, dass das Maximumprinzip i. Allg. für elliptische Operatoren höherer Ordnung (z. B. den „biharmonischen Operator“  $\Delta^2 u$ ) und für elliptische Systeme (z. B. die Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie) nicht mehr gilt.

Als erste, einfache Anwendung des Maximumprinzips erhalten wir einen alternativen Beweis für die Eindeutigkeit (klassischer) Lösungen der 1. RWA des Laplace-Operators. Sind  $u^{(1)}, u^{(2)}$  zwei Lösungen, so gilt für die Differenz  $w := u^{(1)} - u^{(2)}$  wieder

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Anwendung des Maximumprinzips auf  $w$  sowie  $-w$  impliziert dann, dass notwendig  $w \leq 0$  sowie  $-w \leq 0$ , d. h.:  $w \equiv 0$ .

### 1.2.3 Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten

(i) Die Frage nach der stetigen Abhängigkeit der Lösungen der 1. RWA von den Daten wollen wir wieder sowohl mit Hilfe des klassischen Ansatzes als auch mit der variationellen Methode angehen. Seien zunächst  $u^{(1)}, u^{(2)}$  zwei Lösungen (klassisch oder variationell) der 1. RWA des Laplace-Operators zu unterschiedlichen rechten Seiten  $f^{(1)}, f^{(2)}$ . Für die Differenz  $w = u^{(1)} - u^{(2)}$  folgt dann

$$\|\nabla w\|^2 = (f^{(1)} - f^{(2)}, w) \leq \|f^{(1)} - f^{(2)}\|_{\Omega} \|w\|.$$

Unter Ausnutzung der Poincaréschen Ungleichung folgt daraus

$$\|\nabla w\| \leq d_{\Omega} \|f^{(1)} - f^{(2)}\|,$$

d. h. die Stetigkeit der Lösung (in der Energie-Norm) gegenüber Störungen der rechten Seite.

(ii) Als nächstes betrachten wir Störungen der Randdaten. Dazu verwenden wir wieder das Maximumprinzip. Seien dazu  $u^{(1)}, u^{(2)}$  zwei Lösungen zu den Randdaten  $g^{(1)}, g^{(2)}$ . Für die Differenz  $w := u^{(1)} - u^{(2)}$  gilt dann

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w = g := g^{(1)} - g^{(2)} \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Mit dem Maximumprinzip erschließen wir hieraus, dass  $w \equiv 0$  (was natürlich i. Allg. nicht eintritt) oder

$$\max_{\overline{\Omega}} w \leq \max_{\partial\Omega} g, \quad \max_{\overline{\Omega}} -w \leq \max_{\partial\Omega} -g.$$

Dies impliziert  $\max_{\overline{\Omega}} |w| \leq \max_{\partial\Omega} |g|$ .

Schließlich ergibt sich mit Hilfe des Maximumprinzips noch, dass eine Lösung der 1. RWA des Laplace-Operators zu nichtnegativer rechter Seite und ebensolchen Randdaten,

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

notwendig überall nicht-negativ ist:  $u \geq 0$ . Dies gilt dann z. B. auch für die zugehörige Greensche Funktion:  $g(\cdot, \cdot) \geq 0$ . Durch schärfere Argumente kann man darüber hinaus zeigen, dass die Greensche Funktion im Innern des Definitionsgebiets  $\Omega$  *positiv* ist. Dies bedeutet u. a., dass bei einem elliptischen Problem lokale Störungen in den Daten die Lösung im gesamten Lösungsgebiet verändern. Es liegt also gewissermaßen eine „unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“ von Information vor. Dies ist charakteristisch für elliptische Randwertaufgaben.

### 1.2.4 Regularität von Lösungen

Auf glatt berandeten Gebieten  $\Omega$  besteht, ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, für (lineare) partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typ die Regel, dass sich die Regularität der Daten (rechte Seite und Randwerte) auf natürliche Weise auf die Lösung überträgt. Der Rand  $\partial\Omega$  sei aus der Klasse  $C^2$  (2-mal stetig differenzierbar parametrisierbar). Dann besitzt die schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  im Falle  $f \in L^2(\Omega)$  zweite Ableitungen mit der Regularität  $|\nabla^2 u| \in L^2(\Omega)$ , und es gilt die *a priori* Abschätzung

$$\left( \sum_{k=0}^2 \|\nabla^k u\|^2 \right)^{1/2} \leq c \|f\|. \quad (1.2.13)$$

Diese Aussage bleibt gültig, wenn  $\Omega$  ein konvexes Polygonebiet im  $\mathbb{R}^2$  oder ein konvexer Polyeder im  $\mathbb{R}^3$  ist. Ist darüber hinaus  $f$  Hölder-stetig, so ist die schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  sogar klassische Lösung. Höhere Regularitätseigenschaften von  $\partial\Omega$  und  $f$  übertragen sich entsprechend auf  $u$ .

Im Fall von Gebieten mit Ecken, insbesondere „einspringenden“ Ecken (Innenwinkel  $\omega > \pi$ ) treten allerdings dort Irregularitäten in der Lösung auf; z. B. ist die in ebenen Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  ausgedrückte Funktion  $u(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta)$  auf der gelochten Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  harmonisch, d. h.  $\Delta u \equiv 0$ . Auf dem „Tortestück“

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{3}{2}\pi\}$$

mit einer rechtwinkligen einspringenden Ecke ist  $\nabla u \in L^2(\Omega)^2$ , und  $u$  ist daher (klassische) Lösung der Poisson-Gleichung  $\Delta u = 0$  zu den Randbedingungen

$$u(r, \theta) = 0 \quad \text{für } \theta \in \{0, \frac{3}{2}\pi\}, \quad u(r, \theta) = \sin(\frac{2}{3}\pi) \quad \text{für } r = 1.$$

Wir sehen an diesem Beispiel, dass „klassische“ Lösungen elliptischer Gleichungen nicht unbedingt regulär bis zum Rand  $\partial\Omega$  zu sein brauchen. Für allgemeinen Innenwinkel  $\omega \in (0, 2\pi]$  (Der Fall  $\omega = 2\pi$  entpricht einem sog. „Schlitzgebiet“.) erhält man analoge klassische Lösungen in der Form  $u(r, \theta) = r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\frac{\pi}{\omega}\theta)$ . Für  $\omega > \pi$ , d. h. für eine „einspringende“ Ecke hat die Lösung bei  $r = 0$  singuläre erste Ableitungen. Diese sog. „Eckensingularitäten“ sind gut analysiert und abschätzbar. Sie haben einen signifikanten, negativen Einfluss auf die Approximationsgüte von Diskretisierungen und erfordern besondere Vorkehrungen.

### 1.3 Hilfsmittel aus der Theorie von Funktionenräumen

In diesem Abschnitt stellen wir einige Aussagen über Räume verallgemeinert differenzierbarer Funktionen, sog. „Sobolew-Räume“, zusammen, soweit sie später bei der Analyse von Diskretisierungsverfahren benötigt werden.

#### 1.3.1 Sobolew-Räume

Sei  $\Omega$  ein Gebiet im  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) mit Rand  $\partial\Omega$ . Der Rand wird als „ausreichend“ glatt angenommen, was von der betrachteten Situation abhängt; diesbezügliche Einschränkungen werden von Fall zu Fall angegeben. Wir nehmen generell an, dass  $\partial\Omega$  eine Lipschitz-stetige Parametrisierung besitzt und überall bis auf endlich viele Punkte oder Kanten eine wohl-definierte äußere Normale  $n$  besitzt.

Auf einem solchen Gebiet  $\Omega$  definieren wir zunächst für Funktionen aus  $C(\overline{\Omega})$  (Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Abschluss  $\overline{\Omega}$ ) das sog.  $L^2$ -Skalarprodukt und die zugehörige Norm

$$(u, v)_\Omega := \int_\Omega u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_{0;\Omega} := \left( \int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird auch die kürzere Notation  $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_\Omega$  sowie  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{0;\Omega}$  verwendet. Die Vervollständigung von  $C(\overline{\Omega})$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{0;\Omega}$  liefert den „Lebesgueschen<sup>12</sup> Hilbert-Raum“  $L^2(\Omega)$  der auf  $\Omega$  im Lebesgueschen Sinne messbaren und quadratintegrablen Funktionen. Eine „Funktion“  $v \in L^2(\Omega)$  ist dann dadurch charakterisiert, dass es eine Folge glatter Funktionen  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega})$  gibt, welche bzgl. der  $L^2$ -Norm Cauchy-Folge ist und „fast überall“ (im Lebesgueschen Sinne) gegen  $v$  konvergiert. Mit einem einfachen Approximationsargument lässt sich zeigen, dass sich  $L^2(\Omega)$  auch als Vervollständigung des Raumes der „Testfunktionen“ (Begriff aus der Distributionen-Theorie)

$$C_0^\infty(\Omega) := \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{Trg}(v) := \overline{\{x \in \Omega, v(x) \neq 0\}} \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

gewinnen lässt. Auf analoge Weise gewinnt man für  $1 \leq p < \infty$  die sog. „ $L^p$ -Räume“  $L^p(\Omega)$  als Vervollständigung von  $C(\overline{\Omega})$  bzgl. der Norm

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Der Fall  $p = \infty$  bedarf einer gesonderten Betrachtung. Der Lebesgue-Raum  $L^\infty(\Omega)$  besteht aus allen auf  $\Omega$  definierten, im Lebesgueschen Sinne messbaren und „wesentlich

---

<sup>12</sup>Henri Léon Lebesgue (1875–1941): Französischer Mathematiker, Prof. am Collège de France in Paris, lieferte grundlegende Beiträge zur modernen Integrationstheorie („Lebesgue-Integral“)

beschränkten“ Funktionen; seine Norm ist

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

Man beachte, dass sich  $L^\infty(\Omega)$  *nicht* als Vervollständigung von  $C(\overline{\Omega})$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{\infty;\Omega}$  gewinnen lässt, denn dies ergibt wieder  $C(\overline{\Omega})$ . Wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, werden die  $L^p$ -Normen auch kurz mit  $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  bezeichnet.

Die funktionalanalytische Methode zum Nachweis der Existenz von „schwachen“ Lösungen der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.3.14)$$

bedient sich als natürlichen „Lösungsraum“ des Sobolew-Raums  $H_0^1(\Omega)$ . Dieser ist Teilraum des Sobolew-Raums  $H^1(\Omega)$ , welchen man erhält z. B. durch Vervollständigung des Vektorraums  $C^1(\overline{\Omega})$  bzgl. der sog.  $H^1$ -Norm

$$\|v\|_1 := (\|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2)^{1/2}.$$

Entsprechend ist  $H_0^1(\Omega)$  definiert als der Abschluss von  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$ .

Die Definition des Sobolew-Raums  $H^1(\Omega)$  als Vervollständigung von  $C^1(\overline{\Omega})$  besagt zunächst, dass seine Elemente als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$  bzgl. der  $H^1$ -Norm definiert sind. Dies ist ein sehr unhandliches Konzept, mit dem man schlecht arbeiten kann. Daher werden diesen Äquivalenzklassen Funktionen auf  $\Omega$  zugeordnet durch folgende Konstruktion:

$$\{(v_k)_{k \in \mathbb{N}}\} \mapsto v \in H^1(\Omega) : \quad v := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k, \quad \nabla v := \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla v_k,$$

wobei die Konvergenz jeweils im  $L^2$ -Sinne zu verstehen ist. Umgekehrt existiert dann für jede solche Funktion  $v \in H^1(\Omega)$  eine approximierende Folge „glatter“ Funktionen  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft  $\|v - v_k\|_1 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Auf diesem Wege, d. h. durch Konstruktion einer solchen approximierenden Folge wird auch für eine gegebene Funktion  $v \in L^2(\Omega)$  gegebenenfalls  $v \in H^1(\Omega)$  gezeigt. Die Limiten  $\partial_i v := \lim_{k \rightarrow \infty} \partial_i v_k$  werden „verallgemeinerte“ (oder auch „schwache“) Ableitungen von  $v$  genannt. Sie sind i. Allg. nicht stetig oder beschränkt und existieren nur im  $L^2$ -Sinne, d. h. im Lebesgueschen Sinn „fast überall“. Zum Nachweis, dass eine in fast allen Punkten  $x \in \Omega$  definierte Funktion  $v$  in  $H^1(\Omega)$  liegt, geht man üblicherweise wie folgt vor: Zunächst wird aus Kenntnis der Struktur von  $v$  eine Folge approximierender „glatter“ Funktionen  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$  konstruiert, welche für  $k \rightarrow \infty$  samt ihrer ersten Ableitungen (fast überall) punktweise gegen  $v$  konvergieren. Kann dann noch gezeigt werden, dass

$$\overline{\lim} \|v_k\|_{1;\Omega} < \infty,$$

so folgt (nach dem Satz von der „dominierten Konvergenz“ der Maß-Theorie), dass  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge bzgl. der  $H^1$ -Norm ist und den Limes  $v$  besitzt; d. h.  $v \in H^1(\Omega)$ .

**Beispiel 1.2:** i)  $L^2$ -Funktionen: Sei  $\Omega$  zunächst die gepunktete Kreisscheibe

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}.$$

Auf  $\Omega_0$  ist die Funktion  $u(x) = \ln(|x|)$  stetig, aber unbeschränkt. Auf der vollen Kreisscheibe  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  ist  $u(x) = \ln(|x|)$  aber als Funktion in  $L^2(\Omega)$  erklärt. Dies wird klar bei Betrachtung der approximierenden, stetigen Funktionen

$$u_k(x) := \begin{cases} \ln(|x|) & \text{für } k^{-1} < |x| < 1, \\ \ln(k^{-1}) & \text{für } 0 \leq |x| \leq k^{-1}. \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge bzgl. der  $L^2$ -Norm auf  $\Omega$  ist und in allen Punkten  $x \in \Omega$  (bis auf  $x = 0$ )  $u_k(x) \rightarrow u(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) konvergiert.

Wir betrachten nun die Funktion  $u(x) := |x|^{-1}$ , welche ebenfalls auf  $\Omega_0$  stetig und unbeschränkt ist. In diesem Fall bilden die approximierenden Funktionen

$$u_k(x) := \begin{cases} |x|^{-1} & \text{für } k^{-1} < |x| < 1, \\ k & \text{für } 0 \leq |x| \leq k^{-1}, \end{cases}$$

wegen

$$\|u_k\|_{\Omega}^2 = 2\pi \int_0^{k^{-1}} k^2 r \, dr + 2\pi \int_{k^{-1}}^1 r^{-1} \, dr = 2\pi \left( \frac{1}{2} + \ln(k) \right) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

keine Cauchy-Folge bzgl. der  $L^2$ -Norm, d. h.: Dieses  $u$  ist zu singular, um als  $L^2$ -Funktion auf  $\Omega$  erklärt zu sein. Bei der analogen Betrachtung auf der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$  ergibt sich dagegen, dass  $u(x) = |x|^{-1}$  in diesem Fall sehr wohl in  $L^2(\Omega)$  liegt. Die Zugehörigkeit von Funktionen mit lokalen Singularitäten zum Lebesgue-Raum  $L^2(\Omega)$  hängt also von der jeweiligen Raumdimension ab. Wir werden denselben Effekt auch beim Sobolew-Raum  $H^1(\Omega)$  finden.

ii)  $H^1$ -Funktionen: Wir betrachten wieder die Funktion  $u(x) = \ln(|x|)$  auf der punktierten Kreisscheibe  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ . Ihr Gradient  $\nabla u(x) = |x|^{-2}x$  verhält sich bei Annäherung an  $x = 0$  wie  $|\nabla u(x)| \approx |x|^{-1}$ . Im Hinblick auf das eben diskutierte Beispiel ist  $\nabla u$  also nicht zu einer  $L^2$ -Funktion auf die volle Kreisscheibe  $\Omega$  fortsetzbar. Folglich ist  $u$  auch nicht in  $H^1(\Omega)$ . Wir sehen, dass insbesondere die Greensche Funktion zum Laplace-Operator in zwei Raumdimensionen *nicht* im „Energie-Raum“  $H^1(\Omega)$  liegt. Man beachte, dass  $v(x) = \ln(x)$  in *drei* Raumdimensionen aber sehr wohl in  $H^1(\Omega)$  liegt; der kritische Grenzfall ist hier die stärker singuläre Funktion  $u(x) = |x|^{-1}$ .

Als zweites Beispiel zeigen wir, dass  $H^1$ -Funktionen in mehr als einer Dimension nicht beschränkt sein müssen. Auf  $\Omega_0$  sei die Funktion

$$u(x) = \ln(\ln(|x|^{-1}) + 1)$$

betrachtet. Da  $|\ln(\ln(r^{-1}))|$  für  $r \rightarrow 0$  langsamer wächst als  $|\ln(r)|$ , ist  $u$  sicherlich zu

einer  $L^2$ -Funktion auf  $\Omega$  fortsetzbar. Wir berechnen nun den Gradienten

$$\nabla u(x) = -\frac{x}{|x|^2(\ln(|x|^{-1}) + 1)}.$$

Die zugehörigen „abgeschnittenen“ Funktionen

$$u_k(x) := \begin{cases} \ln(\ln(|x|^{-1}) + 1) & \text{für } k^{-1} < |x| < 1, \\ \ln(\ln(k) + 1) & \text{für } 0 \leq |x| \leq k^{-1}, \end{cases}$$

haben die „stückweise“ definierten Gradienten

$$\nabla u_k(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|^2(\ln(|x|^{-1}) + 1)} & \text{für } k^{-1} < |x| < 1, \\ 0 & \text{für } 0 \leq |x| \leq k^{-1}, \end{cases}$$

welche überall (bis auf  $x = 0$ ) gegen  $\nabla u$  konvergieren. Aus der Abschätzung

$$\|\nabla u_k\|^2 = 2\pi \int_{k^{-1}}^1 \left| \frac{r}{r^2(\ln(r^{-1}) + 1)} \right|^2 r dr = 2\pi \int_{k^{-1}}^1 \frac{1}{r(\ln(r^{-1}) + 1)^2} dr \quad (1.3.15)$$

$$= \frac{2\pi}{\ln(r^{-1}) + 1} \Big|_{k^{-1}}^1 = 2\pi - \frac{2\pi}{\ln(k) + 1} \leq 2\pi \quad (1.3.16)$$

ersehen wir ferner, dass  $(\nabla u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  bzgl. der  $L^2$ -Norm eine Cauchy-Folge ist. Folglich ist  $u$  zu einer Funktion im Sobolew-Raum  $H^1(\Omega)$  fortsetzbar. Mit der eben verwendeten „Abschneidetechnik“ erhalten wir approximierende Funktionen  $u_k$ , welche i. Allg. nur stückweise stetig differenzierbar sind, d. h. nicht im strengen Sinne in  $C^1(\overline{\Omega})$  liegen und somit nicht direkt in das oben formulierte Approximationskonzept für  $H^1$ -Funktionen passen. Dieser Mangel kann behoben werden, in dem man statt abzuschneiden regularisiert, z. B. gemäss

$$u_k(x) = \ln(\ln(|x| + k)^{-1}) + 1.$$

Diese  $u_k \in C^1(\overline{\Omega})$  bilden dann ebenfalls eine approximierende Folge von  $u$  bzgl. der  $H^1$ -Norm. Eine ähnliche Modifikation (schon bei der Definition der Sobolew-Räume) muss auch vorgenommen werden, um spezielle Gebiete  $\Omega$  mit „schlitz-artigen“ Randeinsprünge einbeziehen zu können. Solche „Schlitz-Gebiete“ spielen eine wichtige Rolle z. B. in der Baumechanik, wenn die Ausbreitung von Rissen in Bauteilen beschrieben werden soll.

Analog zu dem Sobolew-Raum  $H^1(\Omega)$  „erster Ordnung“ quadrat-integrabler Funktionen kann man auch Sobolew-Räume  $H^{m,p}(\Omega)$  höherer Ordnung  $m \in \mathbb{N}$ , bestehend aus  $p$ -integrablen Funktionen ( $1 \leq p < \infty$ ), definieren. Diese erhält man durch Vervollständigung des Raumes  $C^m(\overline{\Omega})$  bzgl. der Norm

$$\|v\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \left( \sum_{k=0}^m \|\nabla^k v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Der Fall  $p = \infty$  bedarf wieder einer gesonderten Betrachtung. Die Räume  $H^{m,\infty}(\Omega)$

werden über die Gleichsetzung  $H^{m,\infty}(\Omega) := W^{m,\infty}(\Omega)$  als Räume sog. „verallgemeinert differenzierbarer“ Funktionen mit distributionellen Ableitungen in  $L^\infty(\Omega)$  definiert. Wir wollen auf diese Begriffsbildungen nicht weiter eingehen und verweisen statt dessen auf die einschlägige Literatur über Sobolew-Räume (z. B.: Wloka [10]).

### 1.3.2 Eigenschaften von Lebesgue- und Sobolew-Räumen

Wir wollen im Folgenden einige wichtige Eigenschaften von Lebesgue- und Sobolew-Räumen zusammenstellen, welche später bei der Analyse numerischer Verfahren benötigt werden.

Sei  $1 < p < \infty$  und  $q := p/(p-1)$ . Dann gilt für Funktionen  $u \in L^p(\Omega)$  und  $v \in L^q(\Omega)$  die allgemeine „Höldersche Ungleichung“

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad (1.3.17)$$

bzw. in Kurzform  $|(u, v)_{\Omega}| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$ . Für die Grenzfälle  $p = \infty$  bzw.  $q = 1$  gilt

$$|(u, v)_{\Omega}| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^1(\Omega)}. \quad (1.3.18)$$

Die variationelle Methode zum Nachweis von „schwachen“ Lösungen der Poisson-Gleichung basiert auf der Eigenschaft der bilinearen Form  $(\nabla u, \nabla v)_{\Omega}$ , auf dem Teilraum  $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  ein Skalarprodukt zu sein.

**Hilfssatz 1.2 (Poincarésche Ungleichung):** Für Funktionen  $v \in H_0^1(\Omega)$  gilt die sog. „Poincarésche Ungleichung“

$$\|v\|_{\Omega} \leq d_{\Omega} \|\nabla v\|_{\Omega}, \quad (1.3.19)$$

mit dem Durchmesser  $d_{\Omega} := \text{diam}(\Omega)$  des Gebiets  $\Omega$ .

**Beweis:** Wir geben den Beweis nur in zwei Raumdimensionen. In höheren Dimensionen verläuft die Argumentation ganz analog. Sei  $Q$  eine Quadrat der Kantenlänge  $L = d_{\Omega}$ , in welchem das Gebiet  $\Omega$  enthalten ist. O.B.d.A. sei das Koordinatensystem so verschoben und gedreht, dass  $Q = (0, L) \times (0, L)$ . Für irgendein  $v \in H_0^1(\Omega)$  sei  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$  eine approximierende Folge. Mit  $\hat{v}_k$  bezeichnen wir die trivialen Fortsetzungen der  $v_k$  auf  $Q$ :

$$\hat{v}_k(x) := \begin{cases} v_k(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

Diese sind dann ebenfalls in  $C_0^\infty(Q)$ . Wir setzen nun  $w := \hat{v}_k$ . Zunächst gilt in Punkten  $(x, y) \in Q$ :

$$w(x, y) = w(0, y) + \int_0^x \partial_{\xi} w(\xi, y) d\xi,$$

und folglich, bei Beachtung von  $w(0, y) = 0$ ,

$$|w(x, y)|^2 \leq L \int_0^L |\partial_\xi w(\xi, y)|^2 d\xi$$

Integration zunächst über  $y \in (0, L)$  und danach über  $x \in (0, L)$  ergibt

$$\int_0^L \int_0^L |w(x, y)|^2 dy dx \leq L^2 \int_0^L \int_0^L |\partial_\xi w(\xi, y)|^2 d\xi dy.$$

Dies bedeutet

$$\|w\|_Q \leq L \|\nabla w\|_Q.$$

und wegen  $w = \hat{v}_k \equiv 0$  auf  $Q \setminus \Omega$ :

$$\|v_k\|_\Omega \leq L \|\nabla v_k\|_\Omega.$$

Für  $k \rightarrow \infty$  überträgt sich diese Beziehung durch Stetigkeit auf  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Q.E.D.

Die variationelle Methode liefert auch die Existenz von Lösungen der 1. RWA des Laplace-Operators, wenn die Randwertvorgaben inhomogen sind. Im allgemeinen Fall findet man eine schwache Lösung  $v \in H^1(\Omega)$ . Wir haben gesehen, dass  $H^1$ -Funktionen Singularitäten haben können. Es stellt sich also die Frage, in welchem Sinne die Randwerte von der „schwachen“ Lösung überhaupt angenommen werden.

**Hilfssatz 1.3 (Spur-Lemma):** Für Funktionen  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  gilt die sog. „Spur-Abschätzung“

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.3.20)$$

mit einer  $\Omega$ -abhängigen Konstante  $c(\Omega)$ .

**Beweis:** Zuerst betrachten wir den Spezialfall des Einheitsquadrats  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Sei  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ . Für Punkte  $(0, y) \in \partial\Omega$  gilt

$$v(0, y) = - \int_0^x \partial_\xi v(\xi, y) d\xi + v(x, y), \quad x \in [0, 1].$$

und folglich

$$|v(0, y)|^2 \leq \left( \int_0^1 |\partial_\xi v(\xi, y)| d\xi + |v(x, y)| \right)^2 \leq 2 \int_0^1 |\partial_\xi v(\xi, y)|^2 d\xi + 2|v(x, y)|^2.$$

Integration zunächst über  $y \in (0, 1)$  und dann über  $x \in (0, 1)$  liefert

$$\int_0^1 |v(0, y)|^2 dy \leq 2 \int_0^1 \int_0^1 |\partial_\xi v(\xi, y)|^2 d\xi dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 |v(x, y)|^2 dy dx.$$

Dieselbe Argumentation kann auch für die drei anderen Randkomponenten von  $\Omega$  ange-

wendet werden. Zusammenfassung der sich ergebenden Abschätzungen ergibt dann

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq 8\|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Die gezeigte Argumentation für das Einheitsquadrat lässt sich ohne Probleme für allgemeine Polygonegebiete modifizieren. Im allgemeineren Fall eines krumm berandeten Gebiets  $\Omega$  erhält man dasselbe Resultat mit Hilfe lokaler Transformationen, welche krumme Randstücke lokal gerade transformieren, so dass wieder das obige Argument angewendet werden kann. Q.E.D.

Mit Hilfe des Spurlemmas können wir Funktionen  $v \in H^1(\Omega)$  eine „Spur“  $v|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$  zuordnen, was die Frage nach der Annahme von Randwerten durch die schwache Lösung der 1. RWA beantwortet. Sei  $v \in H^1(\Omega)$  und  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$  eine approximierende Folge. Aufgrund der Spurabschätzung gilt dann

$$\|v_k - v_l\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c(\Omega) \|v_k - v_l\|_{H^1(\Omega)}, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Da die Norm auf der rechten Seite für  $k, l \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, folgt, dass die Spuren  $v_k|_{\partial\Omega}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) auf  $\partial\Omega$  eine Cauchy-Folge im Lebesgue-Raum  $L^2(\partial\Omega)$  bilden. Deren Limes  $v|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$  wird dann als die „Spur“ der Funktion  $v \in H^1(\Omega)$  bezeichnet. In diesem Sinne nehmen schwache  $H^1$ -Lösungen vorgegebene Randwerte an.

Das Variationsargument liefert zunächst nur die Existenz einer „schwachen“ Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  der Poisson-Gleichung. Um zu sehen, dass diese im Fall „glatter“ Daten auch „klassische“ Lösung ist, zeigt man (mit einigem Aufwand)  $u \in H^m(\Omega)$  für sukzessive ansteigendes  $m \geq 2$ . Hieraus kann dann geschlossen werden, dass  $u$  auch bis zur gewünschten Stufe klassisch differenzierbar ist. Dazu bedient man sich einer sog. „Sobolewschen Ungleichung“. Zur Motivation sei zunächst der eindimensionale Fall betrachtet.

**Beispiel 1.3:** Wir betrachten das Intervall  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$ . Für eine Funktion  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  impliziert der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$u(x) = u(y) + \int_y^x u'(\xi) d\xi, \quad x, y \in \Omega.$$

Daraus folgt nach Integration über  $y \in [0, 1]$ :

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \int_0^1 |u'| d\xi + \int_0^1 |u| d\xi = \|u\|_{H^{1,1}(\Omega)},$$

mit der Norm des Sobolew-Raums  $H^{1,1}(\Omega)$ . Dies bedeutet, dass in einer Raumdimension eine  $H^{1,1}$ -Funktion beschränkt ist. Darüber hinaus ist sie sogar stetig (genauer im  $L^2$ -Sinne äquivalent zu einer stetigen Funktion), was man mit Hilfe des üblichen Approximationsarguments erschließt. Hierfür reicht hier schon die  $L^1$ -Integrierbarkeit der ersten Ableitung aus.

In höheren Dimensionen ist die Situation komplizierter. Wir haben schon am Beispiel der Funktion  $v(x) = \ln(\ln(|x|^{-1}) + 1)$  gesehen, dass Funktionen in  $H^1(\Omega)$  (im  $\mathbb{R}^2$ ) i. Allg.

unbeschränkt sein können und man ihnen folglich auch nicht überall Punktwerte zuordnen kann. Dies ist aber möglich für Funktionen in Sobolew-Räumen höherer Ordnung. Wir präsentieren hier als Beispiel die folgende „Sobolewsche Ungleichung“.

**Hilfssatz 1.4 (Sobolewsche Ungleichung):** *Für Funktionen  $v \in C^2(\overline{\Omega})$  gilt in zwei Raumdimensionen die Abschätzung*

$$\sup_{x \in \Omega} |v(x)| \leq c(\Omega) \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad (1.3.21)$$

mit einer  $\Omega$ -abhängigen Konstante  $c(\Omega)$ .

**Beweis:** Für den nicht trivialen Beweis verweisen wir auf die einschlägige Literatur über Sobolew-Räume (z. B.: Wloka [10]). Q.E.D.

Analog wie schon vorher bei der Spurabschätzung dient die Sobolewsche Ungleichung (1.3.21) zur Definition von Punktwerten von Funktionen in Sobolew-Räumen. Für ein  $v \in H^2(\Omega)$  sei wieder  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^2(\overline{\Omega})$  eine approximierende Folge. Mit der Sobolewschen Ungleichung (1.3.21) erschließen wir, dass  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auch Cauchy-Folge bzgl. der Maximumnorm ist. Folglich können für  $v \in H^2(\Omega)$  Punktwerte definiert werden durch

$$v(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

In diesem Sinne besteht also eine („stetige“) Einbettung  $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ . Die Abschätzung (1.3.21) lässt sich (im  $\mathbb{R}^2$ ) übertragen auf die Normen der Sobolew-Räume  $H^{2,1}(\Omega)$  und  $H^{1,p}(\Omega)$  für  $p > 2$ . Folglich bestehen die stetigen Einbettungen

$$H^{2,1}(\Omega) \cup H^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad p > 2, \quad \text{im } \mathbb{R}^2. \quad (1.3.22)$$

Weitere Sobolewsche Ungleichungen führen auf die stetigen Einbettungen

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty) \quad \text{im } \mathbb{R}^2, \quad . \quad h.1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega) \quad \text{im } \mathbb{R}^3.$$

Von fundamentaler Bedeutung ist der sog. „Rellichsche<sup>13</sup> Auswahlssatz“. Wir formulieren hier nur eine einfache Variante, welche weiter unten benötigt wird.

**Hilfssatz 1.5 (Rellichscher Auswahlssatz):** *Die natürliche Einbettung des Sobolew-Raumes  $H^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  ist kompakt, d. h.: Aus jeder bzgl. der  $H^1$ -Norm beschränkten Folge  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  lässt sich eine Teilfolge auswählen, welche in  $L^2(\Omega)$  gegen einen Limes  $v$  konvergiert. Dieser Limes ist dann auch wieder in  $H^1(\Omega)$ .*

---

<sup>13</sup>Franz Rellich (1906–1955): Deutscher Mathematiker; Promotion 1929 in Göttingen bei R. Courant; Prof. in Dresden und ab 1946 Institutsleiter in Göttingen; wichtige Beiträge zur Mathematischen Physik und Theorie partieller Differentialgleichungen.

**Beweis:** Für den Beweis wird auf die Literatur verwiesen; z. B. Wloka [10]. Q.E.D.

Der Rellichsche Auswahlssatz ist das Sobolew-Raum-Analogon des Auswahlssatzes von Arzelà-Ascoli für „gleichgradig stetige“ Folgen stetiger Funktionen (siehe den Band „Numerik 1“ dieser Reihe, Rannacher [2]).

### 1.3.3 Elemente der Spektraltheorie elliptischer Operatoren

Eine der wichtigsten Anwendungen des Rellichschen Auswahlssatzes findet sich in der „Spektral-Theorie“ elliptischer Differentialoperatoren, speziell des Laplace-Operators. Wir wollen deren Elemente hier kurz entwickeln. Dabei haben wir vor allem deren Anwendung in der Lösungstheorie für parabolische Anfangs-Randwert-Aufgaben im Auge. Ferner werden Resultate der Spektraltheorie bei der Analyse der Finite-Elemente-Approximation von Eigenwertaufgaben des Laplace-Operators benötigt.

Wir haben gesehen, dass für jede rechte Seite  $f \in L^2(\Omega)$  eine eindeutige „schwache“ Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  der 1. RWA des Laplace-Operators existiert:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.3.23)$$

Diese ist bestimmt durch die variationelle Beziehung

$$(\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.3.24)$$

Die Zuordnung  $f \mapsto Sf := u$  definiert dann einen linearen Operator  $S : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ , der in diesem Sinne als die „ $L^2$ -Inverse“ des Laplace-Operators auf  $\Omega$  unter Dirichlet-Randbedingungen bezeichnet werden kann. Der Beziehung

$$\|\nabla u\|^2 = (f, u) \leq \|f\| \|u\| \leq d_\Omega \|f\| \|\nabla u\|$$

entnehmen wir, dass

$$\|Sf\| \leq d_\Omega \|\nabla Sf\| \leq d_\Omega^2 \|f\|,$$

d. h.: Der Lösungsoperator  $S : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$  ist beschränkt und wegen der kompakten Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  sogar kompakt. Wir haben schon gesehen, dass der Laplace-Operator als Operator im Hilbert-Raum  $L^2(\Omega)$  symmetrisch und positiv-definit ist:

$$(-\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) = (u, -\Delta v), \quad (-\Delta u, u) = \|\nabla u\|^2 \geq d_\Omega^{-2} \|u\|^2.$$

Dies gilt für Funktionen  $u, v \in D(\Delta)$  im Definitionsbereich der „ $L^2$ -Realisierung“ des Laplace-Operators, welcher definiert ist durch

$$D(\Delta) := \{v \in H_0^1(\Omega) : |(\nabla v, \nabla \varphi)| \leq c(v) \|\varphi\|, \varphi \in H_0^1(\Omega)\} \subset L^2(\Omega).$$

Für glatt berandete Gebiete oder konvexe Polygonegebiete  $\Omega$  kann man zeigen, dass  $D(\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Im Fall einspringender Ecken ist dagegen  $D(\Delta) \not\subset H^2(\Omega)$ . Wir haben damit eine Realisierung des Laplace-Operator im Hilbert-Raum  $L^2(\Omega)$  konstruiert, welche auf ihrem Definitionsbereich  $D(\Delta)$  symmetrisch ist, diesen ein-eindeutig

auf ganz  $L^2(\Omega)$  abbildet, also bijektiv ist und deren Inverse  $S = (-\Delta)^{-1}$  kompakt ist. Damit ist der Rahmen für die Anwendung abstrakter Resultate der Funktionalanalysis kompakter Operatoren geschaffen.

Für das Eigenwertproblem des Laplace-Operators

$$-\Delta w = \lambda w \quad \text{in } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.3.25)$$

mit Eigenfunktion  $w \in H_0^1(\Omega)$  und Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  gelten die folgenden Aussagen:

- Das Spektrum (Menge der „singulären“ Werte) besteht aus reellen, positiven Eigenwerten  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$ , welche sich im Endlichen nicht häufen können. Die zugehörigen Eigenräume  $E(\lambda_i)$  sind endlich dimensional.
- Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ , d. h.: Für jedes  $u \in L^2(\Omega)$  gilt die  $L^2$ -konvergente „Fourier<sup>14</sup>-Entwicklung“

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u, w_i) w_i. \quad (1.3.26)$$

- Mit Hilfe der Eigenwerte  $\lambda_i$  (ihrer Vielfachheiten entsprechend oft gezählt) und zugehörigen (orthonormierten) Eigenfunktionen  $w_i$  lassen sich allgemeine Funktionen des Laplace-Operators definieren. Sei  $\Phi(z)$  eine meromorphe Funktion, so dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  keine Pole sind. Dann wird durch

$$\Phi(-\Delta)u := \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(\lambda_i)(u, w_i) w_i \quad (1.3.27)$$

ein linearer Operator in  $L^2(\Omega)$  erklärt. Wenn  $\Phi(z)$  beschränkt ist, wird auch  $\Phi(-\Delta)$  beschränkt und ist auf ganz  $L^2(\Omega)$  erklärt.

Diese Aussagen zeigen die starke Parallelität zwischen kompakten Operatoren bzw. von (dicht definierten) Operatoren mit kompakter Inverser im Hilbert-Raum und durch Matrizen dargestellte linearen Abbildungen im  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.4 Parabolische Probleme

Die sog. „eindimensionale Wärmeleitungsgleichung“

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad (1.4.28)$$

---

<sup>14</sup>Jean-Baptiste Baron de Fourier (1768–1830): Französischer Mathematiker und Physiker; Mitglied der Pariser Akademie lehrte an der École Polytechnique; begleitete Napoleon auf seinem Feldzug nach Ägypten; zählt zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jahrhunderts; fand bei seinen Arbeiten zur Theorie der Wärmeleitung die Darstellbarkeit periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen.

oder allgemeiner in höheren Ortsdimensionen

$$\partial_t u - \Delta u = f, \quad (1.4.29)$$

wird üblicherweise auf Zylindern  $Q_T := \Omega \times I$  des Orts/Zeit-Raumes betrachtet. Dabei sind  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Ortsgebiet und  $I := (0, T]$  ein Zeitintervall. Im örtlich eindimensionalen Fall ( $d = 1$ ) ist die natürliche Anfangskurve  $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$  gerade Charakteristik, so dass das zugehörige Cauchysche Anfangswertproblem i. Allg. nicht lösbar ist. Entlang  $\Gamma$  dürfen, wie wir noch sehen werden, nur Anfangsbedingungen an  $u$  selbst gestellt werden:  $u|_{t=0} = u^0(x)$ . Entlang eines nicht-charakteristischen „örtlichen“ Randes  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \partial\Omega, t > 0\}$  gilt dagegen dasselbe wie im elliptischen Fall, d. h.: Die zugehörige Anfangswertaufgabe ist lösbar, doch dürfen nur  $u$  oder  $\partial_n u$  vorgeschrieben werden, wenn man stetige Abhängigkeit von den Randdaten gewährleisten will.

Analog zum elliptischen Fall bieten sich drei verschiedene Typen von Randbedingungen entlang des örtlichen Randes  $\partial\Omega \times I$  für die Anfangs-Randwert-Aufgabe (kurz „ARWA“) der Wärmeleitungsgleichung an. Zusätzlich zu der Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = u^0 \quad (1.4.30)$$

wird gefordert:

- a) *Dirichletsche Randbedingungen* („1. ARWA“):  $u = g$  auf  $\partial\Omega \times I$ ;
- b) *Neumannsche Randbedingungen* („2. ARWA“):  $\partial_n u = g$  auf  $\partial\Omega \times I$ ;
- c) *Robinsche Randbedingungen* („3. ARWA“):  $\partial_n u + \alpha u = g$  auf  $\partial\Omega \times I$ .

Die Randfunktionen  $g$  werden i. Allg. als glatt und  $\alpha \geq 0$  angenommen. Alle diese ARWAn sind, wie wir zum Teil zeigen werden, unter geeigneten Zusatzbedingungen an die Daten ebenfalls wohl gestellt. Unter einer „klassischen Lösung“ verstehen wir eine Funktion  $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$ , welche der Differentialgleichung sowie den Anfangs- und Randbedingungen genügt. Ähnlich wie bei elliptischen Problemen gibt es auch im parabolischen Fall den Begriff der „schwachen Lösung“, den wir hier aber wegen seiner Kompliziertheit nicht definieren wollen.

Zunächst diskutieren wir die Eindeutigkeitsfrage. Seien  $u^{(1)}, u^{(2)}$  wieder zwei klassische (analog zum elliptischen Fall definiert) Lösungen der 1. ARWA des Wärmeleitungsoperators, für die  $\|\nabla u^{(i)}(t)\|_\Omega$  existiert und beschränkt ist. Für die Differenz  $w := u^{(1)} - u^{(2)}$  gilt dann

$$\partial_t w - \Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega \times I, \quad w|_{t=0} = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Multiplikation mit  $w$ , Integration über  $\Omega$  und anschließende partielle Integration im Ort ergeben analog zum elliptischen Fall

$$0 = (\partial_t w, w) - (\Delta w, w) = \frac{1}{2} d_t \|w\|^2 + \|\nabla w\|^2.$$

Dies impliziert, dass  $\|w(t)\| \leq \|w(0)\| = 0$  für  $t \geq 0$ , und somit die Eindeutigkeit der Lösung und deren stetige (genauer sogar L-stetige) Abhängigkeit von den Anfangsdaten.

Die Existenzfrage lässt sich im Prinzip mit ähnlichen Methoden behandeln wie im elliptischen Fall. Wir wollen das hier aus Zeitgründen nicht weiter verfolgen. Im örtlich eindimensionalen Spezialfall  $\Omega = (-\infty, \infty)$  und  $f \equiv 0$  lässt sich die Lösung der Anfangswertaufgabe explizit angeben:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-s)^2/4t} u^0(s) ds. \quad (1.4.31)$$

Dies wird durch Nachrechnen verifiziert, wobei speziell auf die Existenz der auftretenden Integralterme zu achten ist. Man beachte, dass durch den Ansatz

$$s(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

eine spezielle Lösung (sog. „Fundamentallösung“) der Wärmeleitungsgleichung gegeben ist.

Im Fall allgemeinerer, *beschränkter* Ortsgebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  gewinnt man eine zu (1.4.31) korrespondierende Lösungsdarstellung mit Hilfe der „Methode der Variablenseparation“. Einsetzen des Lösungsansatzes  $u(x, t) = v(x)\psi(t)$  in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$\psi'(t)v(x) = \psi(t)\Delta v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} \equiv \text{konst.},$$

für alle Argumente  $(x, t) \in Q_T$ . Die Separationsfaktoren  $v(\cdot) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$ , und  $\psi(\cdot) \in C(I)$  sind also notwendig Lösungen der Eigenwertprobleme

$$-\Delta v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega, \quad -\psi'(t) = \lambda \psi(t), \quad t \geq 0,$$

unter den Nebenbedingungen  $v|_{\partial\Omega} = 0$  bzw.  $\psi(0) = 1$ , mit Parametern  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Eigenwertaufgabe für  $v(x)$  besitzt, wie schon oben diskutiert, eine abzählbare Folge von Lösungen  $\lambda_j > 0$  und  $v_j$ :

$$-\Delta v_j = \lambda_j v_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Eigenfunktionen  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$  bilden ein vollständiges Orthonormal-System im Hilbert-Raum  $L^2(\Omega)$  der auf  $\Omega$  Lebesgue-messbaren und quadratintegrablen Funktionen.

Die zugehörigen Lösungen für  $\psi(t)$  sind  $\psi_j(t) = e^{-\lambda_j t}$ . Die Anfangsfunktion besitzt die (verallgemeinerte) Fourier-Entwicklung:

$$u^0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^0 v_j(x), \quad u_j^0 = \int_I u^0(x) v_j(x) dx.$$

Durch Superposition der Einzellösungen für  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$u(x, t) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 v_j(x) e^{-\lambda_j t}, \quad (1.4.32)$$

erhalten wir folglich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, welche den Randbedingungen und insbesondere den Anfangsbedingungen genügt. (Zum Nachweis überprüfe man die Konvergenz der Reihen der jeweils nach  $x$  sowie  $t$  abgeleiteten Einzellösungen.) Im eindimensionalen Spezialfall  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$  ist gerade

$$v_j(x) = \alpha_j \sin(j\pi x), \quad \lambda_j = j^2\pi^2, \quad \alpha_j = \left( \int_I \sin^2(j\pi x) dx \right)^{-1/2} \quad (j \in \mathbb{N}),$$

und die Lösungsdarstellung erhält die explizite Form

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 \alpha_j \sin(j\pi x) e^{-aj^2\pi^2 t} \quad (1.4.33)$$

Anhand dieser Lösungsdarstellungen lassen sich einige wichtige Eigenschaften der ARWA der Wärmeleitungsgleichung ablesen. Wie bei den gewöhnlicher Differentialgleichungen entwickelt sich die Lösung ausgehend vom Anfangswert in der Zeit. Der adäquate numerische Ansatz wird also wieder ein Teilschrittverfahren in der Zeit sein. Im Ort pflanzen sich Störungen wie im elliptischen Fall „unendlich schnell“ fort. Irregularitäten in den Anfangs- oder Randdaten werden sofort ausgeglättet, d. h.: im Innern des Zylindergebiets  $Q_T := \Omega \times (0, T]$  ist die Lösung (im Falle glatter rechter Seite  $f$ ) stets glatt.

Im Folgenden wollen wir einige qualitative Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung diskutieren. Die Wärmeleitungsgleichung wird u. a. verwendet, um (ihrem Namen entsprechend) Wärmeausbreitungs- bzw. allgemein instationäre Diffusionsvorgänge zu beschreiben. Es ist wichtig, garantieren zu können, dass ihre Lösungen bei kompatiblen Daten auch stets positiv sind. Dies wird durch ein (dem elliptischen Fall ähnliches) Maximumprinzip geleistet.

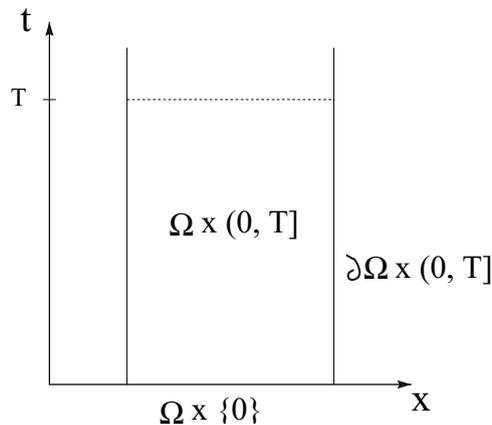


Abbildung 1.4: Parabolisches Raum-Zeit-Gebiet

**Satz 1.1 (Parabolisches Maximumprinzip):** Für jede klassische Lösung der Wärmeleitungs-Ungleichung

$$\partial_t u - \Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.4.34)$$

gilt das sog. „Maximumprinzip“, d. h.: Sie nimmt im (halboffenen) Zylinder  $Q_T := \Omega \times (0, T]$  kein striktes Maximum an.

**Beweis:** Wir geben den Beweis nur für eine Raumdimension. Die Verallgemeinerung für höhere Dimensionen ist dann evident. Für eine Lösung  $u$  der Wärmeleitungs-Ungleichung setzen wir  $v_\varepsilon := u - \varepsilon t$ , mit beliebigem  $\varepsilon > 0$ . Da  $v_\varepsilon$  stetig auf  $\bar{Q}_T$  ist, nimmt es in einem Punkt  $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_T$  sein Maximum an. Angenommen,  $(x_0, t_0) \in Q_T$ . Dann gilt  $\partial_x^2 v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$ , und folglich

$$\partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq \partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) - \partial_x^2 v_\varepsilon(x_0, t_0) = \partial_t u(x_0, t_0) - \varepsilon - \partial_x^2 u(x_0, t_0) \leq -\varepsilon.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch  $\partial_t v_\varepsilon(x_0, t) \leq -\frac{1}{2}\varepsilon$  für  $t_0 - h \leq t \leq t_0$ , mit einem geeigneten  $h > 0$ . Hiermit folgern wir, dass

$$v_\varepsilon(x_0, t_0) - v_\varepsilon(x_0, t_0 - h) = \int_{t_0-h}^{t_0} \partial_t v_\varepsilon(x_0, t) dt \leq -\frac{1}{2}\varepsilon h < 0.$$

Dies führt auf den Widerspruch  $v_\varepsilon(x_0, t_0) < v_\varepsilon(x_0, t_0 - h)$ . Also nimmt  $v_\varepsilon$  notwendig sein Maximum für  $t = 0$  an. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden darf, gilt diese Aussage auch für den (stetigen) Grenzfall  $\varepsilon = 0$ , d. h. für die Lösung  $u$ . Q.E.D.

Als Konsequenz des „parabolischen“ Maximumprinzips sehen wir insbesondere, dass eine Lösung der (homogenen) Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (1.4.35)$$

zu nicht-negativen Anfangsdaten  $u^0 \geq 0$  ( $u|_{\partial\Omega} = 0$ ) nicht-negativ bleibt für alle  $t \geq 0$ :

$$u^0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u(x, t) \leq \max_{\bar{\Omega}} u^0, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (1.4.36)$$

Ferner sind wieder „klassische“ Lösungen  $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$  eindeutig bestimmt.

**Satz 1.2 (Globale Beschränktheit):** Für jede Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung (1.4.29) gilt die a priori Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|u^0\| + \lambda^{-1} \sup_{[0,t]} \|f\|, \quad (1.4.37)$$

mit dem kleinsten Eigenwert  $\lambda > 0$  des elliptischen Operators  $-\Delta$  auf  $\Omega$  zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen.

**Beweis:** Wir betrachten die beiden Hilfsprobleme

$$\partial_t v - \Delta v = 0 \text{ in } Q_T, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = u^0, \quad (1.4.38)$$

$$\partial_t w - \Delta w = f \text{ in } Q_T, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w|_{t=0} = 0. \quad (1.4.39)$$

Offenbar ist dann  $u = v + w$  wegen der Linearität des Wärmeleitungsoperators (Superpositionsprinzip). Wir schätzen nun die beiden Lösungsanteile  $v$  und  $w$  separat ab.

i) Multiplikation von (1.4.38) mit  $v$  und Integration im Ort ergibt

$$\frac{1}{2}d_t \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 = 0.$$

Wir multiplizieren dies mit  $e^{2\lambda t}$  und finden

$$\frac{1}{2}d_t (e^{2\lambda t} \|v\|^2) + e^{2\lambda t} \|\nabla v\|^2 - \lambda e^{2\lambda t} \|v\|^2 = 0.$$

Wegen  $\lambda \|v\|^2 \leq \|\nabla v\|^2$  impliziert dies  $d_t (e^{2\lambda t} \|v\|^2) \leq 0$ , und Integration bzgl.  $t$  ergibt

$$e^{2\lambda t} \|v(t)\|^2 \leq \|u^0\|^2$$

bzw. wieder

$$\|v(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|u^0\|.$$

ii) Multiplikation von (1.4.39) mit  $w$  und Integration im Ort ergibt

$$\frac{1}{2}d_t \|w\|^2 + \|\nabla w\|^2 = (f, w) \leq \frac{1}{2}\lambda \|w\|^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-1} \|f\|^2.$$

Mit Hilfe von  $\lambda \|w\|^2 \leq \|\nabla w\|^2$  folgern wir

$$d_t \|w\|^2 + \|\nabla w\|^2 \leq \lambda^{-1} \|f\|^2.$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung nun mit  $e^{\lambda t}$  und finden

$$d_t (e^{\lambda t} \|w\|^2) + e^{\lambda t} \|\nabla w\|^2 - \lambda e^{\lambda t} \|w\|^2 \leq \lambda^{-1} e^{\lambda t} \|f\|^2,$$

bzw.

$$d_t (e^{\lambda t} \|w\|^2) \leq \lambda^{-1} e^{\lambda t} \|f\|^2.$$

Integration bzgl.  $t$  ergibt

$$e^{\lambda t} \|w(t)\|^2 \leq \lambda^{-1} \int_0^t e^{\lambda s} \|f\|^2 ds,$$

$$\|w(t)\|^2 \leq \lambda^{-1} e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \|f\|^2 ds.$$

Die Abschätzung

$$e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} ds \leq \lambda^{-1}.$$

impliziert dann  $\|w(t)\| \leq \lambda^{-1} \max_{[0,t]} \|f\|$ . Kombination der Resultate für  $v$  und  $w$  liefert die behauptete Abschätzung. Q.E.D.

Als Folgerung aus diesem Satz ersehen wir insbesondere, dass bei einem parabolischen Problem der Einfluss der Anfangsdaten exponentiell mit der Zeit abklingt. Weiter interessiert das Lösungsverhalten für Anfangsdaten  $u^0$  mit minimaler Regularität.

**Satz 1.3 (Glättungseigenschaft):** *Für jede Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (1.4.29) mit  $f \equiv 0$  gelten die a priori Abschätzungen*

$$\|\partial_t u(t)\| + \|\Delta u(t)\| \leq \|\Delta u^0\|, \quad t \geq 0, \quad (1.4.40)$$

$$\|\partial_t u(t)\| + \|\Delta u(t)\| \leq t^{-1} \|u^0\|, \quad t > 0, \quad (1.4.41)$$

vorausgesetzt, der Anfangswert  $u^0$  besitzt die erforderliche Regularität.

**Beweis:** Wir bedienen uns zum Beweis der sog. „Spektral-Methode“, welche aber auf symmetrische und autonome (d. h. nicht explizit von der Zeit abhängige) Operatoren beschränkt ist. Alternative Zugänge sind die „Halbgruppen-Methode“, welche nicht die Symmetrie des Operators erfordert, sowie die „Energie-Methode“, welche im allgemeinen Fall und sogar für nichtlineare Probleme anwendbar ist. Aus der Lösungsdarstellung (1.4.32) mit dem Orthonormalsystem von Eigenfunktionen  $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  des Laplace-Operators,

$$u(x, t) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 v_j(x) e^{-\lambda_j t},$$

folgen wir

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) := - \sum_{j=1}^{\infty} u_j^0 \lambda_j v_j(x) e^{-\lambda_j t}.$$

Aufgrund der (verallgemeinerten) Parsevalschen<sup>15</sup> Identität gilt demnach

$$\|\partial_t u\|^2 = \|\Delta u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j t}.$$

Als erstes Resultat entnehmen wir dieser Beziehung, dass

$$\|\partial_t u\|^2 = \|\Delta u\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 \lambda_j^2 = \|\Delta u^0\|^2.$$

Hieraus folgt wegen  $x e^{-x} \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,

$$\|\partial_t u\|^2 = \|\Delta u\|^2 = t^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 (\lambda_j t)^2 e^{-2\lambda_j t} \leq t^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (u_j^0)^2 = t^{-2} \|u^0\|^2,$$

was den Beweis vervollständigt. Q.E.D.

---

<sup>15</sup>Mare-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836): Französischer Mathematiker; Privatgelehrter; Beiträge zu Reihen, insbesondere Fourier-Reihen.

Als Folgerung aus diesem Satz finden wir nochmal bestätigt, dass die Wärmeleitungsgleichung die „Glättungseigenschaft“ besitzt, d. h.: Irregularitäten in den Anfangsdaten werden für  $t > 0$  ausgeglättet. Durch Weiterführung der Argumentation im Beweis von Satz 1.3 lassen sich analog beliebig hohe Ableitungen der Lösung abschätzen:

$$\|\partial_t^p u(t)\| + \|\nabla^{2p} u(t)\| \leq c(p) \|\Delta^p u^0\|, \quad t \geq 0, \quad (1.4.42)$$

sowie

$$\|\partial_t^p u(t)\| + \|\nabla^{2p} u(t)\| \leq c(p) t^{-p} \|u^0\|, \quad t > 0, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.4.43)$$

Später werden wir uns mit der Frage beschäftigen, ob und unter welchen Bedingungen auch numerische Verfahren zur Approximation der Wärmeleitungsgleichung ein solches „Glättungsverhalten“ in der Zeit aufweisen, d. h.: ob auch bei irregulären Anfangsdaten dennoch bei *festem*  $t > 0$  die volle Approximationsordnung garantiert ist.

## 1.5 Hyperbolische Probleme

Die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad (1.5.44)$$

wird in der Regel wieder auf einem Zylindergebiet  $Q_T := \Omega \times I$  mit einem (meist beschränkten) Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und einem Intervall  $I = (0, T]$  betrachtet. Die Frage nach der Wohlgestelltheit zugehöriger Anfangs-Randwertaufgaben wollen wir nur für den örtlich eindimensionalen Fall diskutieren. Die charakteristischen Steigungen der (örtlich *eindimensionalen*) Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u \quad (1.5.45)$$

sind gerade gegeben durch  $dt/dx = \pm 1$ , d. h.: die Charakteristiken sind alle Geraden in der  $(x, t)$ -Ebene mit der Steigung  $\pm 1$ . Die natürliche Anfangskurve  $\Gamma := \{(x, t) : x \in \Omega, t = 0\}$  ist also keine Charakteristik, so dass gemäß der Theorie die zugehörige Cauchysche Anfangswertaufgabe bei Vorgabe von Werten  $u(x, 0) = u^0(x)$  und  $\partial_t u(x, 0) = u^1(x)$  lösbar ist. Diese Lösung lässt sich im Fall einer Raumdimension leicht angeben. Wir betrachten den Sonderfall  $\Omega = \mathbb{R}^1$ . Die Koordinatentransformation  $\xi = x + t, \eta = x - t$  überführt die Wellengleichung in die Form

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Diese hat die Lösungen der Form

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

mit beliebigen, hinreichend glatten Funktionen  $F(\cdot)$  und  $G(\cdot)$ . Die allgemeine Lösung der Wellengleichung lautet demnach

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t).$$

Zur Erfüllung der Anfangsvorgaben auf  $\Gamma$  muss nun gelten:

$$F(x) + G(x) = u^0(x), \quad F'(x) - G'(x) = u^1(x).$$

Hieraus entnehmen wir, dass

$$F(x + t) + G(x + t) + F(x - t) + G(x - t) = u^0(x + t) + u^0(x - t), \quad (1.5.46)$$

$$F(x + t) - G(x + t) - F(x - t) + G(x - t) = \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds, \quad (1.5.47)$$

und folglich,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ u^0(x + t) + u^0(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} u^1(s) ds \right\}.$$

Dies ist die (eindeutige) klassische Lösung der Wellengleichung zu den vorgegebenen Anfangsdaten  $u^0(x)$ ,  $u^1(x)$ . Eine analoge Konstruktion ist auch in höheren Raumdimensionen möglich.

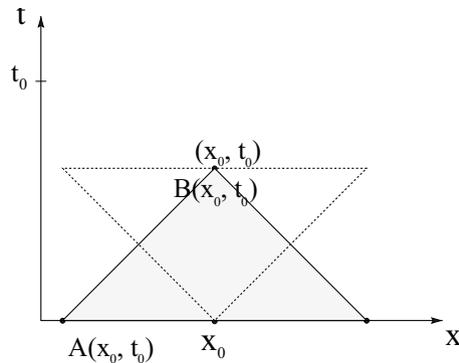


Abbildung 1.5: Hyperbolisches Raum-Zeit-Gebiet

Die Form der Lösung  $u(x, t)$  zeigt, dass bei einem hyperbolischen Problem die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information endlich ist. Lokale Störungen pflanzen sich entlang der Charakteristiken (Geraden mit Steigung  $\pm 1$ ) fort. Insbesondere erzeugen unstetige Anfangsdaten notwendig auch unstetige Lösungen. Dies erfordert im Falle irregulärer Anfangs- oder Randdaten einen neuartigen Lösungsbegriff, der auch Unstetigkeiten zulässt. Für jeden Punkt  $(x_0, t_0) \in Q_T$  gibt es demnach einen „Abhängigkeitsbereich“  $A(x_0, t_0)$  sowie einen „Bestimmtheitsbereich“  $B(x_0, t_0)$ , innerhalb deren sich das

Anfangswertproblem unabhängig vom restlichen Bereich lösen lässt:

$$A(x_0, t_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq t_0\}, \quad B(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : |x - x_0| \leq t_0\}.$$

Die Eindeutigkeit von Lösungen der Wellengleichung erschließt man wieder am leichtesten mit „Hilbertraum-Argumenten“. Sei  $u(x, t)$  eine klassische Lösung der ARWA

$$\partial_t^2 u = \Delta u \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u^1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.5.48)$$

mit endlicher „Energie“ (kinetische + potentielle Energie)

$$E(t) := \|\partial_t u(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u(t)\|_{\Omega}^2 < \infty.$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit  $\partial_t u$ , Integration über  $\Omega$  und anschließende partielle Integration ergibt

$$0 = (\partial_t^2 u - \Delta u, \partial_t u) = \frac{1}{2} d_t (\|\partial_t u\|^2 + \|\nabla u\|^2).$$

Dies impliziert, dass

$$\|\partial_t u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 = \|u^1\|^2 + \|\nabla u^0\|^2, \quad (1.5.49)$$

d. h. die Lösung ist eindeutig und hängt bzgl. der natürlichen Energie-Norm stetig von den Anfangsdaten ab. Ferner bleibt die Gesamtenergie  $E(t)$  im System in der Zeit erhalten. Dies entspricht der Vorstellung, dass bei einem Schwingungsprozess, etwa der Schwingung eines elastischen Körpers oder einer Schallwelle, bei Vernachlässigung von Dämpfung im Verlaufe der Zeit keine Energie verloren geht. Ein „gutes“ Diskretisierungsverfahren für die Wellengleichung sollte diese kritische Eigenschaft möglichst gut nachbilden.

## 1.6 Übungen

**Übung 1.1:** Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA) einer skalaren ODE

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u^0,$$

mit einer analytischen Funktion  $f(t, x)$  mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen

$$\sup_{j,k \geq 0} \|\partial_t^j \partial_x^k f(t, \cdot)\|_{\infty} \leq K < \infty, \quad t \geq t_0,$$

(z. B. die Funktion  $f(t, x) := \sin(x)$ ). Man zeige, dass man durch den Taylor-Ansatz

$$u(t) = u^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(t_0, u^0)}{k!} (t - t_0)^k$$

mit  $f^{(r)}(t_0, u^0) := (d/dt)^r f(t, u(t))|_{t=t_0}$  eine globale (d. h. für alle  $t \geq t_0$  existierende) Lösung der AWA erhält.

**Übung 1.2:** Im Text wurde die Typeneinteilung von linearen Differentialoperatoren 2. Ordnung mit der Aufgabe motiviert, aus gegebenen Werten  $u(x_0, y_0)$  und  $\partial_n u(x_0, y_0)$  entlang einer Kurve  $\Gamma$  die Lösung  $u(x, y)$  über einen Taylor-Reihenansatz zu bestimmen. Diese Konstruktion wurde allerdings nur bis zu den drei zweiten Ableitungen  $\partial_x^2 u(x_0, y_0)$ ,  $\partial_x \partial_y u(x_0, y_0)$  und  $\partial_y^2 u(x_0, y_0)$  durchgeführt und hing von der Regularität einer gewissen Matrix  $A$  ab. Man zeige, dass nach Bestimmung der zweiten Ableitungen die Konstruktion der vier dritten Ableitungen  $\partial_x^3 u(x_0, y_0)$ ,  $\partial_x^2 \partial_y u(x_0, y_0)$ ,  $\partial_x \partial_y^2 u(x_0, y_0)$  und  $\partial_y^3 u(x_0, y_0)$  auf dieselbe Matrix  $A$  führt. Diese Aussage gilt auch für die weiteren, höheren Ableitungen. Die Vorgenommene Klassifizierung des Differentialoperators als „elliptisch“, „parabolisch“ oder „hyperbolisch“ basierend auf der Konstruierbarkeit der Lösung aus den Randdaten ist also sinnvoll.

**Übung 1.3:** Man bestimme den Typ der Differentialgleichungen

- a)  $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0,$
- b)  $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0,$
- c)  $2(\partial_x + \partial_y)^2 u + \partial_y u = 0.$

(Hinweis: Das im Text angegebene Kriterium für den Typ einer Gleichung kann auch bei variablen Koeffizienten separat in jedem einzelnen Ortspunkt verwendet werden.)

**Übung 1.4:** Eine (skalare) lineare partielle Differentialgleichung (PDE) 2. Ordnung der Form

$$a_{11} \partial_1^2 u + a_{12} \partial_1 \partial_2 u + a_{21} \partial_2 \partial_1 u + a_{22} \partial_2^2 u = f$$

lässt sich durch Setzung  $u_1 := \partial_1 u$ ,  $u_2 := \partial_2 u$  in ein System von PDE 1. Ordnung umformen:

$$\begin{aligned} \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2 &= 0, \\ a_{11} \partial_1 u_1 + a_{12} \partial_1 u_2 + a_{21} \partial_2 u_1 + a_{22} \partial_2 u_2 &= f. \end{aligned}$$

Man zeige, dass sich die in der Vorlesung für (skalare) lineare PDE 2. Ordnung durchgeführte Typeneinteilung analog auch für Systeme 1. Ordnung der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} b_{11}^1 \partial_1 u_1 + b_{12}^1 \partial_1 u_2 + b_{21}^1 \partial_2 u_1 + b_{22}^1 \partial_2 u_2 &= f_1, \\ b_{11}^2 \partial_1 u_1 + b_{12}^2 \partial_1 u_2 + b_{21}^2 \partial_2 u_1 + b_{22}^2 \partial_2 u_2 &= f_2, \end{aligned}$$

vornehmen lässt (mit analogen Resultaten). Ziel ist dabei die Bestimmung von Kurven  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ , bei denen die Vorgabe von Anfangswerten für  $u_1$  und  $u_2$  entlang  $\Gamma$  die Konstruktion aller Ableitungen von  $u_1$  und  $u_2$ , beginnend mit den zweiten Ableitungen  $\partial_1^2 u_1$ ,  $\partial_1 \partial_2 u_1$ ,  $\partial_2^2 u_1$ ,  $\partial_1^2 u_2$ ,  $\partial_1 \partial_2 u_2$ ,  $\partial_2^2 u_2$  und damit einen Taylor-Reihenansatz für die Lösung erlaubt. (Bem.: Wenn die Konstruktion von  $u_1$  und  $u_2$  auf diesem Wege möglich ist, erhält man für die gegebene PDE 2. Ordnung dann durch weitere Vorgabe von  $u$  entlang  $\Gamma$  aus der Kenntnis von  $\partial_1 u = u_1$  und  $\partial_2 u = u_2$  im ganzen Lösungsgebiet dort auch eine Lösung  $u$  durch einfaches Aufintegrieren.)

**Übung 1.5:** Im Text wurde die Poincarésche Ungleichung

$$\int_G |u(x)|^2 dx \leq d_G^2 \int_G \|\nabla u(x)\|^2 dx, \quad d_G := \text{diam}(G),$$

nur für Funktionen  $u \in V_0(G)$  formuliert, d. h. welche auf dem ganzen Rand  $\partial G$  null sind. Der Beweis funktioniert aber auch für Funktionen, die nur entlang eines Teils  $\Gamma \subset \partial G$  des Randes mit Länge  $|\Gamma| \neq 0$  null sind, d. h. auf dem Raum

$$V_0(\Gamma; G) := \{v \in C^1(G) \cap C(\overline{G}) : \nabla v \in L^2(G)^n, v|_\Gamma = 0\}.$$

(i) Man führe den Beweis dieser Verallgemeinerung der Poincaréschen Ungleichung für das Einheitsquadrat  $Q = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$  und den Randteil  $\Gamma := \{x = (x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$ .

(ii) Kann die Poincarésche Ungleichung gültig bleiben, wenn der Randteil  $\Gamma \subset \partial G$  trivial ist, etwa nur aus einem Punkt besteht? Man untersuche diese Frage anhand der in (i) gegebenen Situation mit  $\Gamma := \{(0, 0)\}$ . Welche Konsequenzen hat die Antwort auf diese Frage für die 1. RWA des Laplace-Operators? (Hinweis: Man betrachte die Folge der Funktionen  $u_k(r, \theta) = r^{1/k}$ .)

**Übung 1.6:** Auf einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit glattem Rand  $\partial\Omega$  werden die folgende (a) zweite und (b) dritte Randwertaufgabe betrachtet:

$$\begin{aligned} (a) \quad & -\Delta u + au = f \quad \text{in } \Omega, & \partial_n u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ (b) \quad & -\Delta u + au = f \quad \text{in } \Omega, & \partial_n u + \alpha u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit Konstanten  $a > 0$  und  $\alpha \geq 0$ . Man zeige, dass diese RWAn jeweils höchstens eine „klassische“ Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  haben können. Welches Problem ergibt sich im Fall  $a = 0$ , d. h. für den reinen Laplace-Operator?

**Übung 1.7:** Für die klassische Lösung der Randwertaufgabe

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

auf einem glatt berandetem Gebiet  $\Omega \subset Q_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1\}$  zeige man mit Hilfe des Maximumprinzips die Einschließung  $0 \leq u(x) \leq \frac{1}{8}$ . (Hinweis: Man vergleiche  $u$  mit der quadratischen Funktion  $v = \frac{1}{4}x(1-x) + \frac{1}{4}y(1-y)$ .)

**Übung 1.8:** Der Laplace-Operator  $\Delta = \text{div grad}$  hat für Funktionen  $u = u(r, \theta)$  in Polarkoordinaten  $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$  die folgende Form:

$$\Delta u = (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2)u.$$

(i) Für ein  $\omega \in (0, 2\pi]$  sei  $S_\omega := \{(r, \theta) : r > 0, \theta \in (0, \omega)\}$  der zugehörige Sektor der  $(x, y)$ -Ebene. Man zeige, dass die auf dem Gebiet  $G := S_\omega \cap K_1(0)$  definierte Funktion

$$s_\omega(r, \theta) := r^{\pi/\omega} \sin(\theta\pi/\omega)$$

harmonisch ist, d. h.  $\Delta s_\omega \equiv 0$ , und den Randbedingungen  $s_\omega(r, 0) = s_\omega(r, \omega) = 0$  sowie  $s_\omega(1, \theta) = \sin(\theta\pi/\omega)$  genügt.

(ii) Man zeige, dass im Fall  $\pi < \omega \leq 2\pi$ , d. h. im Fall eines *stumpfen* Innenwinkels, die ersten Ableitungen dieser Funktion zwar unbeschränkt aber noch (uneigentlich) quadrat-integrierbar sind, dass ihre zweiten Ableitungen aber nicht mehr quadrat-integrierbar sind. Wie sieht das bei *spitzen* Innenwinkeln, d. h.  $0 < \omega < \pi$ , aus?

Dieses Beispiel zeigt, dass klassische Lösungen von elliptischen RWAn auch zu glatten Daten am Gebietsrand nicht regulär zu sein brauchen.

**Übung 1.9:** Man untersuche, ob die folgenden Funktionen auf dem Einheitsquadrat  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1\}$  im Sobolew-Raum  $H^1(\Omega)$  liegen:

$$a) \quad u(x, y) = |x - y|^{1/2}, \quad b) \quad u(x, y) = \sin(\ln(1/r)), \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

(Hinweis: Man untersuche die „uneigentliche“ Riemann-Integrierbarkeit der Ableitungen.)

**Übung 1.10:** Man zeige, dass für Funktionen  $u \in H^1(\Omega)$  unter der Mittelwertbedingung

$$\int_{\Omega} u(x) \, dx = 0$$

ebenfalls die Poincarésche Ungleichung gilt (mit einer Konstante  $c_\Omega$ ):

$$\|u\|_{\Omega} \leq c_\Omega \|\nabla u\|_{\Omega}.$$

(Hinweis: Zum Beweis gibt es zwei alternative Wege: Modifikation des direkten Beweises aus dem Text unter Verwendung von „Randwerten“  $u|_{\Gamma} = 0$ , oder Widerspruchsargument unter Verwendung des Rellichschen Auswahlssatzes.)

**Übung 1.11:** Man zeige mit Hilfe der Poincaréschen Ungleichung aus Aufgabe 3.2 die eindeutige Lösbarkeit der „Neumannschen Randwertaufgabe“ (2. RWA)

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \partial_n u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

im Quotientenraum  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  für rechte Seiten  $f \in L^2(\Omega)$  mit Mittelwert Null:

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = 0.$$

(Hinweis: Man modifiziere den Existenzbeweis für schwache Lösungen der 1. RWA des Laplace-Operators im Sobolew-Raum  $H_0^1(\Omega)$  für die 2. RWA im Sobolewschen Quotientenraum  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ . Dabei bedeutet „Eindeutigkeit in  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ “, dass eine „schwache“ Lösung in  $H^1(\Omega)$  existiert und bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.)

**Übung 1.12:** Auf welchem der folgenden Gebiete ist die RWA

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

wohl gestellt, d. h. besitzt eine eindeutige schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  (mit Begründung)?

a) gepunktete Kreisscheibe

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2;$$

b) geschlitzte Kreisscheibe

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\} \setminus \Gamma, \quad \Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

**Übung 1.13:** Man gebe eine variationelle Formulierung der folgenden Randwertaufgabe an:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_n u + u|_{\partial\Omega} = g,$$

und begründe, dass deren Lösung im Falle ausreichender Glattheit die RWA löst.

**Übung 1.14:** Welche von den folgenden Sobolewschen Ungleichungen sind richtig?

- a)  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad u \in H^2(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3;$
- b)  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^{1,1}(\Omega)}, \quad u \in H^{1,1}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^1;$
- c)  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2;$
- d)  $\|u\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{H^{1,1}(\Omega)}, \quad u \in H^{1,1}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$

Man erkläre die Bedeutung der verwendeten Funktionenräume und Normen.

**Übung 1.15:** Für die (klassische) Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T], \quad u|_{t=0} = u^0(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

zeige man mit Hilfe der „Spektraltechnik“ für  $u^0 \in H_0^1(\Omega)$  die a priori Abschätzung

$$\|\partial_t u(\cdot, t)\| + \|\Delta u(\cdot, t)\| \leq t^{-1/2} \|\nabla u^0\|, \quad t > 0.$$

**Übung 1.16:** Man konstruiere mit Hilfe der Methode der Variablenseparation eine Lösung der sog. „1. Anfangs-Randwert-Aufgabe (1. ARWA)“ der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u^1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Welche Regularität muss dabei für die Anfangswerte  $u^0$  und  $u^1$  gefordert werden? (Hinweis: Man orientiere sich am entsprechenden Beweis für die Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung des ONS von Eigenfunktionen des Laplace-Operators.)