

0 Einleitung

Gegenstand dieses Textes sind numerische Algorithmen zur näherungsweise Lösung von partiellen Differentialgleichungen. In der Regel lassen sich für die in der Praxis auftretenden partiellen Differentialgleichungen keine Lösungen in analytischer Form angeben. Man ist also auf numerische Approximation angewiesen. Dabei wird das kontinuierliche Ausgangsproblem durch ein „diskretes“, d. h. endlich dimensionales, ersetzt und dieses dann mit Hilfe des Computers gelöst.

0.1 Notation

Wir stellen zunächst einige der im folgenden verwendeten Begriffe und abkürzenden Bezeichnungen zusammen.

i) *Unabhängige Variable*: Wir betrachten (offene beschränkte) Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für $d = 1, 2, 3$ mit Rand $\partial\Omega$. Der äußere Normaleneinheitsvektor zu $\partial\Omega$ ist n . Punkte im \mathbb{R}^d sind $x = (x_1, \dots, x_d)^T$ oder speziell $(x, y)^T$ im \mathbb{R}^2 und $(x, y, z)^T$ im \mathbb{R}^3 . Die Zeitvariable ist t . Für d -dimensionale Vektoren a, b wird das übliche euklidische¹ Produkt mit (a, b) oder auch mit $a \cdot b$ bezeichnet. Die euklidische Vektornorm ist $\|a\| := (a, a)^{1/2}$ und die zugehörige natürliche Matrizenorm $\|A\| := \max_{x \in \mathbb{R}^d} \{\|Ax\|, \|x\| = 1\}$.

ii) *Funktionen*: Wir betrachten i. Allg. skalare Funktionen $u = u(x)$ oder $u = u(x, t)$ für Argumente $x \in \mathbb{R}^d$ bzw. $t \in \mathbb{R}$. In einigen Fällen treten auch vektorwertige Funktionen auf $u = (u_1, \dots, u_d)^T$, die i. Allg. wie skalare Funktionen bezeichnet werden. Analog werden Skalarprodukte und Normen über ein Gebiet Ω unterschiedslos für skalare wie für vektorwertige Funktionen verwendet.

iii) *Ableitungen*: Für Funktionen $u(t)$, $u(x)$ bzw. $u(x, t)$ werden totale sowie partielle Ableitungen abgekürzt geschrieben als

$$d_t u := \frac{du}{dt}, \quad \partial_t u := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \partial_x u := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \text{u.s.w.}$$

und analog auch für höhere Ableitungen, z. B.: $\partial_t^p u$ und $\partial_x^q u$. Mit dem Nabla-Operator ∇ werden der Gradient einer skalaren Funktion sowie die Divergenz einer Vektorfunktion geschrieben als $\text{grad } u = \nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)^T$ und $\text{div } u = \nabla \cdot u := \partial_1 u_1 + \dots + \partial_d u_d$. Zu einem Vektor $\beta \in \mathbb{R}^d$ wird die Ableitung in Richtung β mit $\partial_\beta u := \beta \cdot \nabla u$ bezeichnet. Entsprechend ist z. B. $\partial_n u = n \cdot \nabla u$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen entlang des Gebietsrandes $\partial\Omega$. Kombination von Divergenz- und Gradientenbildung ergibt

¹Euklid (ca. 355–290 v. Chr.): Griechischer Philosoph und Mathematiker; wirkte in Alexandria; sein mehrbändiges Lehrbuch „Die Elemente“ fasste die Grundlagen der klassischen Geometrie zusammen; von ihm stammt das klassische mathematische Ausdrucksschema „Voraussetzung - Behauptung - Beweis“.

den sog. „Laplace² -Operator“

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u = \partial_1^2 u + \dots + \partial_d^2 u.$$

Mit dem Symbol $\nabla^m u$ bezeichnen wir den Tensor aller partiellen Ableitungen der Ordnung m von u ; z. B. in zwei Dimensionen $\nabla^2 u = (\partial_x^i \partial_y^j u)_{i+j=2}$.

iv) *Integralsätze*: Für stückweise glatt berandete Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und hinreichend glatte Funktionen u, v gelten der klassische Integralsatz von Gauß³

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u \, dx = \int_{\partial\Omega} n \cdot u \, do, \quad (0.1.1)$$

sowie als Folgerung die Integralformel von Green⁴

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \partial_n v \, do - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx. \quad (0.1.2)$$

v) *Funktionsräume*: Auf Punktmenge $\Omega \in \mathbb{R}^d$ verwenden wir die üblichen Vektorräume von stetigen bzw. stetig differenzierbaren Funktionen

$$C(\overline{\Omega}), \quad C^m(\Omega), \quad C^\infty(\Omega).$$

Der Raum $C(\overline{\Omega})$ ist, versehen mit der Maximumnorm

$$\|u\|_{\infty; \overline{\Omega}} := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|,$$

vollständig, d. h. ein Banach⁵-Raum. Weiter ist $L^2(\Omega)$ der Raum der auf Ω messbaren und im Lebesgueschen Sinne quadratintegrablen Funktionen. Versehen mit dem Skalarprodukt und der zugehörigen Norm

$$(u, v)_{\Omega} := \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx, \quad \|u\|_{\Omega} = (u, u)_{\Omega}^{1/2},$$

ist $L^2(\Omega)$ vollständig, d. h. ein Hilbert⁶-Raum. Wenn der Definitionsbereich Ω aus dem Zusammenhang klar ist, wird er in der Bezeichnung von Skalarprodukten und Normen

²Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827): Französischer Mathematiker und Astronom; Prof. in Paris; begründete u. a. die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

³Carl Friedrich Gauß (1777–1855): bedeutender deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker; wirkte in Göttingen.

⁴George Green (1793–1841): Englischer Mathematiker; Autodidakt und Besitzer einer Mühle; Beiträge zur Potentialtheorie.

⁵Stefan Banach (1892–1945): Polnischer Mathematiker; Prof. in Lvov; begründete die Funktionalanalysis.

⁶David Hilbert (1862–1943): bedeutender deutscher Mathematiker; wirkte in Königsberg und Göttingen; begründete u. a. den axiomatischen Aufbau der Mathematik; zum Wesen der Axiomatik (in der Geometrie) sagte er „Man muss jederzeit anstelle von Punkten, Geraden, Ebenen - Tische, Stühle, Bierseidel sagen können“.

meist weggelassen; z. B.: $\|u\| = \|u\|_\Omega$. Weitere Funktionenräume werden später an den Stellen eingeführt, wo sie gebraucht werden.

vi) *Ungleichungen*: Wir listen einige der im Folgenden häufig verwendeten Ungleichungen für Funktionen aus den oben definierten Funktionenräumen. Für Funktionen $u, v \in L^2(\Omega)$ gilt die „Höldersche⁷ Ungleichung“

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x) dx \right| \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (0.1.3)$$

bzw. in kompakter Schreibweise: $|(u, v)|_\Omega \leq \|u\|_\Omega \|v\|_\Omega$. Für Funktionen $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ mit den Eigenschaften $u|_{\partial\Omega} = 0$ und $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$ gilt die „Poincarésche⁸ Ungleichung“

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq d_\Omega \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (0.1.4)$$

bzw. in kompakter Schreibweise: $\|u\|_\Omega \leq d_\Omega \|\nabla u\|_\Omega$, wobei $d_\Omega := \text{diam}(\Omega)$.

0.2 Ableitung von partiellen Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen werden meist als mathematische Modelle zur Beschreibung physikalischer Vorgänge abgeleitet. Ziel ist es, die Eigenschaften dieser Vorgänge durch die Gleichungen möglichst vollständig zu erfassen und davon ausgehend dann ihren Ablauf vorherzusagen. Bei der Konstruktion solcher Gleichungen geht man häufig nach recht formalen Regeln vor und verwendet Analogieschlüsse. Völlig unterschiedliche physikalische Prozesse lassen sich häufig durch Gleichungen sehr ähnlicher Gestalt beschreiben.

i) Harmonische (d. h. „schwingende“) Ausbreitungsvorgänge sind z. B. die Ausbreitung einer Wasserwelle (lokale Störung der Wasseroberfläche) oder eines Geräuschs (lokale Störung der Luftdichte). Es erscheint sinnvoll, diese im einfachsten Fall durch eine Funktion $u = u(x, t)$ im Ort x und der Zeit t der Form $u(x, t) = \sin(x) \sin(t)$ zu beschreiben. Diese genügt der Differentialgleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u. \quad (0.2.5)$$

Es zeigt sich, dass diese sog. „Wellengleichung“ tatsächlich die in der Natur auftretenden Schwingungsvorgänge beschreibt. Sie ist der Prototyp einer „hyperbolischen“ Differentialgleichung.

ii) Andere Ausbreitungsvorgänge sind dadurch gekennzeichnet, dass lokale Störungen

⁷Ludwig Otto Hölder (1859–1937): Deutscher Mathematiker; Prof. in Tübingen; Beiträge zunächst zur Theorie der Fourier-Reihen und später vor allem zur Gruppentheorie; fand 1884 die nach ihm benannte Ungleichung.

⁸Jules Henri Poincaré (1854–1912): Französischer Mathematiker; Prof. an der École Polytechnique und der Sorbonne in Paris; eins der letzten mathematischen Universalgenies; fundamentale Beiträge zu allen Bereichen der Mathematik, zur Himmelsmechanik, Strömungsmechanik und Wissenschaftsphilosophie.

nicht schwingend, sondern „diffundierend“ und sich abschwächend fortgepflanzt werden, z. B.: Temperaturausbreitung in einem Leiter (Wärmeleitung) oder Verteilung einer Dichtekonzentration in einer Flüssigkeit (Stofftransport). Zur Beschreibung solcher Vorgänge dienen Funktionen der Form $u(x, t) = \sin(x) e^{-t}$. Diese genügen der Differentialgleichung

$$\partial_t u = \partial_x^2 u. \quad (0.2.6)$$

Es zeigt sich, dass diese sog. „Wärmeleitungsgleichung“ tatsächlich die in der Natur auftretenden Diffusionsvorgänge beschreibt. Sie ist der Prototyp einer „parabolischen“ Differentialgleichung. In Fall zweier Raumdimensionen, $u = u(x, y, t)$, lautet die Wärmeleitungsgleichung unter Berücksichtigung von externen Wärmequellen

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \Delta u + f. \quad (0.2.7)$$

iii) Der Grenzzustand für $t \rightarrow \infty$ eines Diffusionsprozesses $u(x, y, t)$, z. B. beschrieben durch die Wärmeleitungsgleichung (0.2.7), ist als Lösung der sog. „Poisson⁹-Gleichung“

$$-\Delta u = -\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = f, \quad (0.2.8)$$

gegeben. Diese ist der Prototyp einer „elliptischen“ Differentialgleichung.

0.3 Beispiele

Die folgenden Beispiele aus verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen vermitteln einen Eindruck von der Vielfältigkeit der auftretenden Probleme.

1. Erhaltungsgleichungen

Die Grundgleichungen der (klassischen) Kontinuumsmechanik basieren auf dem physikalischen Grundprinzip der „Erhaltung“, d. h.: Zustandsgrößen wie z. B. Massedichte $\rho(x, t)$, innere Energie bzw. Temperatur $T(x, t)$, Impuls $\rho(x, t)\vec{v}(x, t)$, u.s.w., werden als Dichtefunktionen beschrieben, deren Integrale über beliebige bewegte „Kontrollvolumen“ sich beim Fehlen von äußeren Einflüssen nicht verändern. Für die zeitliche Veränderung der Masse $m_V(t)$ eines solchen mit dem Geschwindigkeitsfeld $v = (v_1, v_2, v_3)$ bewegten Volumens $V(t)$ gilt (sog. „Reynoldsches¹⁰ Transporttheorem“)

$$0 = d_t m_V(t) = d_t \int_{V(t)} \rho(x, t) dx = \int_{V(t)} \{\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v)\} dx. \quad (0.3.9)$$

⁹Siméon Denis Poisson (1781–1840): Französischer Mathematiker und Physiker; Prof. in Paris; Beiträge zur mathematischen Formulierung der Physik, zum Magnetismus, zur Himmelsmechanik und Wahrscheinlichkeitsrechnung; einer der Begründer der Potentialtheorie.

¹⁰Osborn Reynolds (1842–1912): Englischer Ingenieur und Mathematiker; Prof. in Manchester; Beiträge zur Theorie des Elektro-Magnetismus und der Strömungslehre, Fundamente der Turbulenzbeschreibung und der hydrodynamischen Stabilität.

Da dies für beliebige Volumen $V(t)$ gelten soll, ergibt sich für stetige Dichtefunktionen die folgende Erhaltungsgleichung 1. Ordnung (sog. „Kontinuitätsgleichung“):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0. \quad (0.3.10)$$

Auf analogem Wege erhält man aus dem Erhaltungssatz für die Temperatur unter Berücksichtigung von Quelltermen und Wärmediffusion in einem ruhenden Medium ($\vec{v} \equiv 0$) die folgende Erhaltungsgleichung 2. Ordnung (sog. „Wärmeleitungsgleichung“):

$$\partial_t T - \nabla \cdot (a \nabla T) = \nabla \cdot q, \quad (0.3.11)$$

Physikalische Anschauung erfordert, dass Lösungen zu diesen Gleichungen bei physikalisch sinnvollen Anfangs- und Randbedingungen stets positiv sind: $\rho > 0$, $T > 0$. Wir werden sehen, dass dies tatsächlich der Fall ist. Die entsprechenden Erhaltungssätze für Impuls und Drehimpuls führen unter geeigneten zusätzlichen Annahmen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung auf die bekannten „Navier¹¹-Stokes¹²-Gleichungen“ für *inkompressible*, Newtonsche¹³ Fluide mit konstanter Dichte und Temperatur ($\rho \equiv konst.$, $T \equiv konst.$):

$$\partial_t v - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0. \quad (0.3.12)$$

Diese werden hier aber nur der Vollständigkeit halber formuliert und im Laufe dieses Textes nicht näher betrachtet.

2. Variationsgleichungen

Die Grundgleichungen der (klassischen) Elastizitätstheorie basieren auf dem physikalischen Prinzip der „Energiminimierung“, d. h.: Der von einem elastischen Körper unter statischer äußerer Belastung eingenommene Zustand ist so bestimmt, dass er die potentielle Gesamtenergie des Systems minimiert. Zur Beschreibung eines elastischen Systems werden in der *linearen* Theorie die folgenden Größen verwendet: der Verschiebungsvektor u , der Verzerrungstensor $\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$, der flächenorientierte (symmetrische) Spannungstensor σ und die Volumenkraft f . Die Spannungen σ sind die Reaktionskräfte des Körpers auf von außen erzwungene Verzerrungen $\varepsilon(u)$ und werden idealisierend in einer linearen Beziehung angenommen, dem sog. (elastischen) „Materialgesetz“, $\sigma = A\varepsilon(u)$, mit dem symmetrischen und positiv definiten Elastizitätstensor A . Die potentielle Gesamtenergie des belasteten, elastischen Körpers schreibt sich dann in der Form:

¹¹Claude (Louise Marie Henri) Navier (1785–): Französischer Bauingenieur und Mathematiker; Prof. an der École Polytechnique in Paris; Beiträge zum Brückenbau (erste Theorie der Hängebrücke), Elastizitätstheorie und Strömungsmechanik.

¹²Sir Georg Gabriel Stokes (1819–1903): Englischer Mathematiker und Physiker; Prof. in Cambridge; Beiträge zur Differential- und Integralrechnung, zur Hydrodynamik und zur Theorie des Lichts, Spektralanalyse und Fluoreszenz.

¹³Isaac Newton (1643–1727): Englischer Physiker und Mathematiker; Professor an der Universität Cambridge; entwickelte u. a. die Grundlagen der klassischen Mechanik und der Differentialrechnung.

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u) \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx. \quad (0.3.13)$$

Die sich unter der äußeren Belastung einstellende Verschiebung in einen neuen Gleichgewichtszustand u_* verleiht dann $E(\cdot)$ einen minimalen Wert unter allen zulässigen Verschiebungen, d. h. solchen mit denselben Randwerten. Für einen solchen optimalen Zustand u_* gilt dann notwendig

$$\frac{d}{d\varepsilon} E(u_* + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = 0,$$

für beliebige „zulässige“ Variationen φ . Auswertung dieser Beziehung liefert die sog. „Variationsgleichung“

$$(A\varepsilon(u), \varepsilon(\varphi))_{\Omega} = (f, \varphi)_{\Omega} \quad \forall \text{ „zulässigen“ } \varphi. \quad (0.3.14)$$

Dabei bedeutet „zulässig“ für eine Testfunktion φ , dass sie hinreichend glatt ist und entlang des Randes $\partial\Omega$ verschwindet. Nimmt man an, dass das Minimum u hinreichend glatt ist, so folgt durch partielle Integration

$$(\nabla \cdot A\varepsilon(u) + f, \varphi)_{\Omega} = 0 \quad \forall \text{ „zulässigen“ } \varphi,$$

und hieraus das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung (in kompakter sowie ausführlicher Schreibweise)

$$-\nabla \cdot A\varepsilon(u) = f \quad \Leftrightarrow \quad -\sum_{i=1}^d \sum_{k,l=1}^d \partial_i A_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) = f_j \quad (j = 1, \dots, d). \quad (0.3.15)$$

Der wohl einfachste (mehrdimensionale) Spezialfall eines elastisch deformierten Körpers ist die „eingespannte Membran“ in einem (beschränkten) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Trommelfell). Hier wird eine Belastung nur in vertikaler Richtung zugelassen $\vec{f} = (0, 0, f)$ und entsprechend auch nur die Auslenkung in vertikaler Richtung $\vec{u} = (0, 0, u)$ berücksichtigt. Der Elastizitätstensor ist diagonal und wird hier der Einfachheit halber zu $A = aI$ gesetzt. Dann nimmt das obige Funktional der potentiellen Gesamtenergie die Form an

$$E(u) = \frac{1}{2} a \|\nabla u\|_{\Omega}^2 - (f, u)_{\Omega}, \quad (0.3.16)$$

und die zugehörige Differentialgleichung („Poisson-Gleichung“) lautet

$$-a\Delta u = f, \quad \text{in } \Omega. \quad (0.3.17)$$

Da die Membran am Rand eingespannt sein soll, muss weiter $u|_{\partial\Omega} = 0$ sein.

In einer elastischen Membran wirken als Gegenkräfte zur Belastung reine Federkräfte (in vertikaler Richtung) und keine Biegemomente. Dies ist begründet durch die Vernachlässigung der Dicke der Membran. Flache Körper mit (konstanter) positiver, aber geringer Dicke werden als „Platten“ bezeichnet. Im Rahmen der linearen „Kirchhoffschen

Plattentheorie“ werden zwar Biegemomente berücksichtigt, aber nur vertikale Verschiebungen zugelassen („Kirchhoff-Hypothese“). Im Fall kleiner Verschiebungen (gegenüber der Plattendicke) erhält dann die potentielle Gesamtenergie die Form

$$E(u) = \frac{1}{2}D\|\Delta u\|_{\Omega}^2 + (1 - \sigma)D \{(\partial_1^2 u, \partial_2^2 u)_{\Omega} - \|\partial_1 \partial_2 u\|_{\Omega}^2\} - (f, u)_{\Omega},$$

mit Materialparametern $\sigma \in (0, 1)$, $D > 0$. Die zulässigen Funktionen müssen in diesem Fall quadratintegrale zweite Ableitungen besitzen. Durch den Variationsansatz wie oben erhält man als notwendige (und hinreichende) Bedingung für ein Energieminimum die sog. „Plattengleichung“

$$D\Delta^2 u = f. \tag{0.3.18}$$

Aus naheliegenden Gründen wird der Operator 4. Ordnung Δ^2 auch „biharmonischer Operator“ genannt. Ist die Platte am Gebietsrand „eingespannt“, so müssen die Randbedingungen $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\partial_n u|_{\partial\Omega} = 0$ erfüllt sein. Wir merken an, dass ein identisches Modell bei der Beschreibung viskoser, inkompressibler Strömungen in zwei Raumdimensionen als Gleichung für die sog. „Stromfunktion“ φ auftritt; das Geschwindigkeitsfeld ergibt sich dabei durch Rotationsbildung $u := (\partial_y \varphi, -\partial_x \varphi)^T$.

3. Schwingungsgleichungen

Wenn der elastische Körper unter Belastung zeitliche Schwingungen ausführen kann, so wird die zugehörige Auslenkung eine Funktion des Orts und der Zeit, $u(x, t)$, und genügt im Rahmen der linearen Theorie der sog. „elastische Schwingungsgleichung“

$$\partial_t^2 u - \nabla \cdot A\varepsilon(u) = f. \tag{0.3.19}$$

Die Gleichung für die frei schwingende Membran ist die klassische „Wellengleichung“

$$\partial_t^2 u = a\Delta u. \tag{0.3.20}$$

Diese beschreibt allgemein die Ausbreitung von Wellen in schwingfähigen Medien (z. B. Schallwelle in einem Gas, Auslenkung einer elastischen Membran oder die Amplitude eines elektrischen Feldes). Sie wird üblicherweise zusammen mit „Randbedingungen“ $u|_{\partial\Omega} = 0$ sowie „Anfangsbedingungen“ $u|_{t=0} = u^0$, $\partial_t u|_{t=0} = u^1$ betrachtet.

0.4 Numerische Methoden

Aus den oben skizzierten Wegen zur Herleitung von partiellen Differentialgleichungen gewinnt man unmittelbar Ansätze zu deren Diskretisierung.

1. Differenzenverfahren

Ersetzt man die Ableitungen in den Differentialgleichungen (0.2.5), (0.2.6), (0.2.7) und (0.2.8) durch geeignete Differenzenquotienten bezüglich eines regulären Punktegitters, gewinnt man lineare Gleichungen für die zugehörigen „diskreten“ Funktionswerte. Dies ist eine sog. „Differenzenapproximation“ der Differentialgleichung. Die Eigenschaften solcher Differenzgleichungen, d. h. ihre Lösbarkeit und Approximationsgüte, werden weiter unten eingehend behandelt.

2. Finite-Volumen-Verfahren

Die lokale Erhaltungseigenschaft (0.3.9) führt dadurch auf ein numerisches Verfahren, dass man für die Lösung einen bzgl. einer endlichen Zerlegung des Gebiets Ω in Teilvolumina (z. B. Dreiecke oder Vierecke) stückweise konstanten Ansatz macht und die Gültigkeit der Erhaltungseigenschaften dafür auf jedem der sog. „Kontrollvolumen,“ fordert. Dies führt auf ein algebraisches Gleichungssystem für die zugehörigen Zellmittelwerte. Dieser Diskretisierungsansatz wird „Finite-Volumen-Methode“ genannt. Derartige Methoden finden hauptsächlich im Bereich der numerischen Strömungsmechanik Anwendung. Wegen ihrer eingeschränkten Anwendbarkeit und schwierigen Analysierbarkeit werden wir uns mit dieser Methodenklasse in dieser Vorlesung nicht weiter befassen.

3. Variationsmethoden („Methode der finiten Elemente“)

Die Variationsgleichung (0.3.14) führt durch Einschränkung auf einen endlich dimensional Teilraum V_h des Lösungsraums des kontinuierlichen Variationsproblems auf eine diskrete Variationsaufgabe

$$(A\varepsilon(u_h), \varepsilon(\varphi_h))_\Omega = (f, \varphi_h)_\Omega \quad \forall \text{ „zulässigen“ } \varphi_h \in V_h. \quad (0.4.21)$$

Dies ist äquivalent zu einem linearen (quadratischen) Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten der diskreten Lösung u_h bzgl. einer geeignet gewählten Basis des Ansatzraumes V_h . Sind die Funktionen in V_h stückweise polynomial bzgl. einer Zerlegung des Gebiets Ω z. B. in Dreiecke oder Vierecke gewählt, liegt eine sog. „Finite-Elemente-Methode“ vor. Diese Methoden werden unten sehr ausführlich behandelt.