

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis	ix
0 Einleitung	1
0.1 Einführung in die Problemstellung	1
0.2 Beispiele von gewöhnlichen Differentialgleichungen	3
0.3 Lösungsmethoden	7
0.4 Prinzipien der Verfahrensanalyse	10
0.5 Ausblick auf partielle Differentialgleichungen	11
1 Aus der Theorie der Anfangswertaufgaben	13
1.1 Existenzsätze	13
1.1.1 Existenz von Lösungen	13
1.1.2 Konstruktion von Lösungen	20
1.2 Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen	22
1.2.1 Lokale Stabilität und Eindeutigkeit	22
1.2.2 Globale Stabilität	31
1.3 Homogene lineare Systeme	36
1.4 Übungsaufgaben	39
2 Einschrittmethoden	43
2.1 Die Eulersche Polygonzugmethode	43
2.2 Allgemeine Einschrittmethoden	46
2.2.1 Lokale Konvergenz und Fehlerabschätzungen	50
2.2.2 Globale Konvergenz	53
2.3 Schrittweitenkontrolle	57
2.3.1 Schätzung des Abschneidefehlers	60
2.3.2 Adaptive Schrittweitensteuerung	61
2.3.3 Numerischer Test	63
2.4 Übungsaufgaben	64
3 Numerische Stabilität	73
3.1 Modellproblemanalyse	73

3.1.1	Steife Probleme	83
3.1.2	Implizite Verfahren	85
3.2	Lösung monotoner Probleme: Newton-Verfahren	87
3.3	Übungsaufgaben	95
4	Lineare Mehrschrittmethoden	99
4.1	Konstruktion linearer Mehrschrittformeln	99
4.2	Stabilität und Konvergenz	102
4.3	Numerische Stabilität linearer Mehrschrittmethoden	114
4.4	Praktische Aspekte	119
4.4.1	Berechnung von Startwerten	120
4.4.2	Lösung der impliziten Gleichungssysteme	120
4.4.3	Prädiktor-Korrektor-Methode	121
4.4.4	Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung: „Milne Device“	123
4.5	Übungsaufgaben	124
5	Extrapolationsmethode	127
5.1	Das Extrapolationsprinzip	127
5.2	Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen	132
5.2.1	Numerischer Test	137
5.3	Übungsaufgaben	137
6	Differentiell-algebraische Gleichungen (DAE)	141
6.1	Theorie differentiell-algebraischer Gleichungen	143
6.2	Numerik differentiell-algebraischer Gleichungen	145
6.3	Übungsaufgaben	148
7	Galerkin-Verfahren	151
7.1	Variationelle Formulierung der Anfangswertaufgaben	151
7.2	Das „unstetige“ Galerkin-Verfahren	152
7.2.1	Beispiele	154
7.2.2	Lösbarkeit der Galerkin-Gleichungen	155
7.2.3	Andere Arten von Galerkin-Verfahren	159
7.3	A priori Fehleranalyse	160

7.4	A posteriori Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung	168
7.4.1	Allgemeines zur a posteriori Fehleranalyse	168
7.4.2	Realisierung für das dG-Verfahren	171
7.4.3	Auswertung der a posteriori Fehlerabschätzung	176
7.4.4	Adaptive Schrittweitenwahl beim dG(0)-Verfahren	181
7.4.5	Vergleich zwischen dG- und Differenzen-Verfahren	182
7.5	Übungsaufgaben	187
8	Aus der Theorie der Randwertaufgaben	191
8.1	Existenz- und Eindeutigkeitssätze	191
8.1.1	Allgemeine Randwertaufgaben	191
8.1.2	Sturm-Liouville-Probleme	195
8.2	Übungsaufgaben	197
9	Schießverfahren	199
9.1	Lineare Randwertaufgaben	199
9.2	Nichtlineares Schießverfahren	206
9.3	Übungsaufgaben	212
10	Differenzenverfahren	213
10.1	Systeme erster Ordnung	213
10.2	Sturm-Liouville-Probleme	220
10.2.1	Konditionierung	229
10.3	Übungsaufgaben	230
11	Variationsmethoden	233
11.1	Allgemeines Ritz-Galerkin-Verfahren	233
11.2	Methode der finiten Elemente	238
11.2.1	„Lineare“ finite Elemente	238
11.2.2	Finite Elemente höherer Ordnung	242
11.2.3	Der transport-dominante Fall	243
11.2.4	A posteriori Fehleranalyse	245
11.3	Übungsaufgaben (zur Überprüfung des Kenntnisstandes)	247

12 Ausblick auf partielle Differentialgleichungen	251
12.1 Transportgleichung (hyperbolisches Problem)	251
12.1.1 Differenzenverfahren	252
12.1.2 Finite-Elemente-Galerkin-Verfahren	256
12.2 Wärmeleitungsgleichung (parabolisches Problem)	258
12.2.1 Diskretisierungsverfahren	260
12.3 Laplace-Gleichung (elliptisches Problem)	264
12.3.1 Differenzenverfahren	265
12.3.2 Finite-Elemente-Galerkin-Verfahren	268
A Lösungen der Übungsaufgaben	271
A.1 Kapitel 1	271
A.2 Kapitel 2	275
A.3 Kapitel 3	291
A.4 Kapitel 4	301
A.5 Kapitel 5	307
A.6 Kapitel 6	311
A.7 Kapitel 7	313
A.8 Kapitel 8	325
A.9 Kapitel 9	327
A.10 Kapitel 10	330
A.11 Kapitel 11	335
Index	341