

# 0 Einleitung

Aufgabenstellung der „numerischen“ Mathematik ist die Entwicklung von Methoden, mit denen die Lösungen mathematischer Problemstellungen effektiv berechnet bzw. möglichst mit Fehlerangabe angenähert werden können. Bis in die 50-er Jahre des vorigen Jahrhunderts zeichneten sich erfolgreiche praktische Mathematiker durch ein besonderes Geschick aus, mit großen Formel- und Datenmengen umzugehen. Seit dem Aufkommen der immer leistungsfähigeren elektronischen Rechenanlagen haben sich die Gewichte verschoben. Die „praktische“ Mathematik wurde zur „numerischen“ Mathematik, d. h. der Theorie der auf Digitalrechnern realisierbaren numerischen Algorithmen. Eins der Hauptanwendungsgebiete numerischer Methoden ist in der Simulation komplexer Naturvorgänge auf Rechenanlagen. Man möchte teure Experimente wie z. B. Windkanalversuche bei der Flugzeugkonstruktion oder Festigkeitstests bei Betonkonstruktionen durch beliebig oft und schnell wiederholbare Modellrechnungen ersetzen. Die dabei verwendeten numerischen Verfahren sind dabei aus einer Reihe von einfachen Bausteinen zusammengesetzt (z. B. Integralberechnungen, Lösung linearer Gleichungssysteme, Berechnung von Nullstellen u.s.w.). Diese einführende Vorlesung befasst sich vor allem mit diesen elementaren Bausteinen, deren Ursprünge meist noch in der Vor-Computer-Zeit liegen.

Zur „numerischen Lösung“ eines Problems der Praxis gehört unbedingt auch eine Information über den dabei gemachten Fehler, um das Resultat richtig einschätzen zu können. Der Gesamtfehler setzt sich zusammen aus den „Modellfehlern“:

- Idealisierungsfehler: Zur Beschreibung eines physikalischen Sachverhalts wird ein mathematisches Modell gebildet. Bei der mathematischen Formulierung müssen Vereinfachungen (z. B. Linearisierungen) vorgenommen werden.
- Datenfehler: Die Daten eines mathematischen Modells (z. B. Koeffizienten einer Differentialgleichung) sind aufgrund ungenauer Kenntnis von Materialeigenschaften notwendig mit Fehlern behaftet.

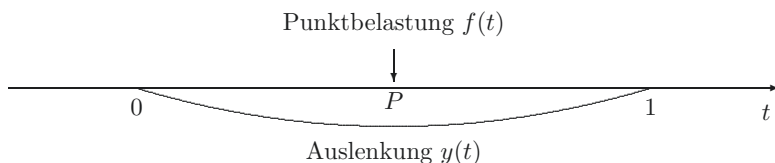
und den „numerischen“ Fehlern:

- Diskretisierungsfehler: Kontinuierliche Prozesse werden durch endliche ersetzt (z. B. Approximation des Riemannsches Integrals durch Riemannsche Summen).
- Abbruchfehler: Unendliche Algorithmen werden nach endlich vielen Schritten abgebrochen (z. B. die Iteration  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n) \rightarrow \sqrt{a}$  ( $n \rightarrow \infty$ )).
- Rundungsfehler: Auf der Rechenanlage müssen alle Rechnungen auf einem endlichen Zahlbereich durchgeführt werden (z. B.  $1/3 \sim 0,3 \dots 3$ ).

Das Zusammenwirken all dieser Fehlereinflüsse soll anhand des folgenden, einfachen Beispiels demonstriert werden:

Ein Stahlseil der Länge  $L = 1$  sei an den Spitzen zweier Masten befestigt, so dass es unter Einwirkung der Schwerkraft (fast) straff gespannt erscheint. Gefragt ist nun nach

der Auslenkung des Seils aus dieser Ruhelage, wenn ein Trapezkünstler in seiner Mitte steht.



Das physikalische Modell besteht in der (wohl begründeten) Annahme, dass sich die tatsächliche Auslenkung als Graph einer Funktion  $y(t)$  beschreiben lässt, für welche die sog. „potentielle Gesamtenergie“ ( $c$  eine Materialkonstante,  $f(t)$  Belastungsdichte)

$$E(y) = \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{y'(t)^2}{\sqrt{1 + y'(t)^2}} dt - \int_0^1 f(t)y(t) dt$$

einen minimalen Wert annimmt. Dies sehen wir als das „exakte“ mathematische Modell des angegebenen physikalischen Sachverhalts an. Zur Vereinfachung des Problems wird nun angenommen, dass die Belastung  $f(t)$  so klein ist, dass nur kleine Auslenkungsgradienten auftreten, d. h.:  $|y'(t)| \ll 1$ . In diesem Fall kann das Funktional  $E(y)$  vereinfacht werden zu

$$\tilde{E}(y) = \frac{c}{2} \int_0^1 y'(t)^2 dt - \int_0^1 f(t)y(t) dt.$$

Dies ist nun das eigentliche „mathematische“ Problem, mit dem der „numerische“ Mathematiker konfrontiert ist. Der bis hierher entstandene Modellfehler ist im Augenblick nicht Gegenstand unseres Interesses. Als notwendige (und hinreichende) Bedingung für die Minimalitätseigenschaft der Funktion  $y(t)$  erhält man durch den Variationsansatz

$$\frac{d}{d\alpha} \tilde{E}(y + \alpha\varphi) |_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \text{ „zulässige“ } \varphi = \varphi(t)$$

die folgende (lineare) Differentialgleichung mit Randbedingungen:

$$-cy''(t) = f(t), \quad t \in (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Zur Lösung des Problems wird nun eine Diskretisierung vorgenommen (sog. „zentraler Differenzenquotient 2. Ordnung“):

$$t_i \equiv ih, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad f_i \equiv f(t_i), \quad h = 1/(N+1),$$

$$y''(t_i) \approx \frac{1}{h^2} \{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1})\},$$

die auf ein lineares Gleichungssystem

$$\frac{c}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix},$$

bzw. abgekürzt  $A\eta = b$ , für den Vektor  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$  der Näherungswerte zu  $y(t_i)$  führt. Dieses Gleichungssystem besitzt wegen  $\det(A) \neq 0$  eine eindeutige Lösung. Diese kann aufgrund der Identität

$$D\eta = D\eta - A\eta + b, \quad D \equiv \frac{c}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{bmatrix},$$

ausgehend von einem Startvektor  $\eta^{(0)} \in \mathbb{R}^N$  durch die Iteration (sog. „Jacobi-Verfahren“)

$$\eta^{(n+1)} = \eta^{(n)} - D^{-1}[A\eta^{(n)} - b]$$

angenähert werden. Man kann zeigen, dass  $\eta^{(n)} \rightarrow \eta$  ( $n \rightarrow \infty$ ) konvergiert. In der Praxis muss die Iteration aber nach endlich vielen Schritten mit einem Näherungswert  $\eta^{(k)}$  abgebrochen werden. Tatsächlich wird aber auf dem Rechner statt  $\eta^{(k)}$  eine Näherung  $\tilde{\eta}^{(k)}$  geliefert, da alle arithmetischen Operationen auf einem endlichen Zahlbereich durchgeführt werden. Von diesem Ergebnis

$$\tilde{\eta}^{(k)} = (\tilde{\eta}_1^{(k)}, \dots, \tilde{\eta}_n^{(k)})^T$$

sollen nun Rückschlüsse auf die zu erwartende Auslenkung des Stahlseils gewonnen werden. Der dabei aufgetretene Fehler setzt sich zusammen aus

- Diskretisierungsfehler:  $\max_{i=1, \dots, N} |\eta_i - y(t_i)|$ .
- Abbruchfehler:  $\max_{i=1, \dots, N} |\eta_i^{(k)} - \eta_i|$ .
- Rundungsfehler:  $\max_{i=1, \dots, N} |\tilde{\eta}_i^{(k)} - \eta_i^{(k)}|$ .

Gegenstand dieses Textes ist nun der Entwurf von Lösungsverfahren für derartige Probleme aus Analysis und Lineare Algebra und die Untersuchung der bei deren Anwendung auftretenden Fehler. Ähnliche Fragestellungen ergeben sich im Zusammenhang mit der Lösung von Eigenwertaufgaben z. B. aus der Schwingungsanalyse:

$$Ay = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

und Aufgaben aus der *linearen* Optimierung:

$$c^T \cdot y \rightarrow \min!, \quad Ay = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad c, y \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$