

5 Differentiation

Nach der Diskussion der „Stetigkeit“ von Funktionen geht es jetzt um die Existenz und Charakterisierung ihrer „Extremalstellen“ („Maxima“ und „Minima“). Historisch stand dies am Anfang der Differentialrechnung. Die in Abb. 5.1 skizzierte Situation legt nahe, dass Extremalstellen einer Funktion geometrisch dadurch charakterisiert sind, dass dort der Graph eine horizontale Tangente hat. Dies führt uns auf den Begriff der „Tangentensteigung“ bzw. allgemeiner der „Ableitung“ einer Funktion. Im Folgenden beschränken wir die Diskussion auf *reelle* Funktionen.

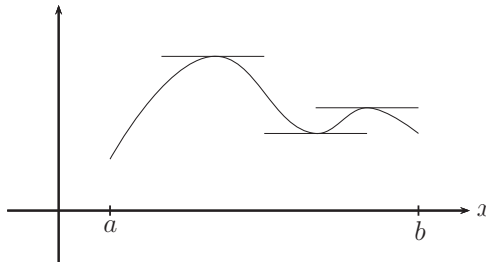


Abbildung 5.1: Illustration zum Satz vom Extremum.

Als einfaches Beispiel stellen wir folgende Aufgabe: *Zu gegebenen Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ist ein $a \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für welches der folgende Ausdruck minimal wird:*

$$f(a) := \sum_{k=1}^n (a - a_k)^2 \rightarrow \min!$$

In diesem Kapitel werden wir u. a. Methoden zur Lösung solcher und wesentlich schwierigerer Aufgaben entwickeln.

5.1 Ableitung

Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ definieren wir in einem Punkt $x_0 \in D$ einen „Differenzenquotienten“ durch

$$D_h f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

wobei nur solche „Inkmente“ $h \in \mathbb{R}$ zugelassen sind, für die $x_0 + h \in D$ ist.

Definition 5.1: *Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „differenzierbar“ im Punkt $x_0 \in D$ mit „Ableitung“ $f'(x_0)$, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 + h_n \in D$ die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten $(D_{h_n} f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.*

Bemerkung 5.1: Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, so haben die Folgen von Differenzenquotienten alle denselben Limes, d. h.:

$$f'(x_0) := \lim_{x_0+h \in D, h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Denn gilt für zwei Nullfolgen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(h'_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0+h'_n) - f(x_0)}{h'_n} = a'.$$

so können die beiden Nullfolgen zu einer einzigen zusammengefasst werden, z. B. wie $\{h_1, h'_1, h_2, h'_2, \dots\}$. Da auch für diese Nullfolge der zugehörige Differenzenquotient konvergiert, muss notwendig $a = a'$ sein. Dieser gemeinsame Limes heißt dann die „Ableitung“ (oder genauer die „1. Ableitung“) von f im Punkt x_0 .

Im Hinblick auf die vorausgehende Aussage können wir die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0) = \lim_{x \in D, x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Diese Schreibweise wird im Folgenden je nach Bedarf gleichberechtigt neben der obigen verwendet. Wenn der Punkt x_0 ein Randpunkt von D ist, z. B. der untere oder obere Endpunkt eines Intervalls $D = [a, b]$, so spricht man auch von „einseitiger Differenzierbarkeit“ von f in $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ und schreibt

$$f'(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dabei bedeutet die Schreibweise $x \downarrow x_0$ und $x \uparrow x_0$, dass sich die Werte $x \in D$ dem Grenzwert x_0 von „oben“ bzw. von „unten“ annähern:

$$x \downarrow x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad x > x_0, \quad x \rightarrow x_0, \quad x \uparrow x_0 \quad :\Leftrightarrow \quad x < x_0, \quad x \rightarrow x_0.$$

Definition 5.2: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „differenzierbar“ auf D , wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar (bzw. im Falle eines Randpunktes einseitig differenzierbar) ist. Sie heißt „stetig differenzierbar“, wenn die Ableitung f' auf D eine stetige Funktion ist.

Die obige qualitative Definition der Differenzierbarkeit ist für Beweis Zwecke nicht besonders gut geeignet. Daher geben wir im Folgenden eine mehr quantitative Charakterisierung mit Hilfe der Sprache der „Epsilonantik“.

Satz 5.1: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in einem Punkt $x_0 \in D$ genau dann differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x_0 + h \in D, \quad |h| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon. \quad (5.1.1)$$

Beweis: Der Beweis ist evident.

Q.E.D.

Satz 5.2: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x), \quad x \in D,$$

mit einer Funktion $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\lim_{x \in D, x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis: i) Sei f in x_0 differenzierbar mit $c = f'(x_0)$. Wir definieren eine Funktion $\omega(x)$ durch

$$\omega(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0).$$

Dann gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von f :

$$\frac{\omega(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0).$$

ii) Sei umgekehrt

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x),$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dann gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c = \frac{\omega(x)}{x - x_0} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0),$$

d. h.: f ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = c$.

Q.E.D.

Bemerkung 5.2: Satz 5.2 besagt in geometrischer Sprache, dass die differenzierbare Funktion f im Punkt x_0 durch eine affin-lineare Funktion (d. h. eine Gerade)

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

approximiert wird. Der Graph von g ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

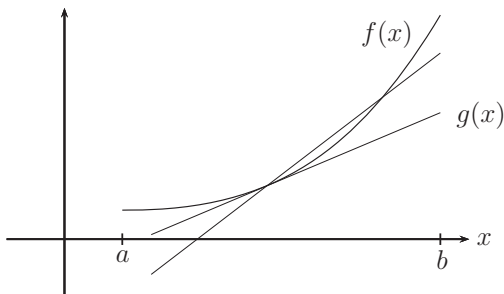


Abbildung 5.2: Approximation der Tangente durch Sekanten.

Lemma 5.1: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist, ist dort notwendig auch stetig.

Beweis: Angenommen, f ist differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann gilt nach Satz 5.2

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)$$

mit einer Funktion $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\omega(x)(x - x_0)^{-1} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0$). Damit konvergiert für $x \rightarrow x_0$ auch $f(x) \rightarrow f(x_0)$, d. h.: f ist stetig in x_0 . Q.E.D.

Bemerkung 5.3: Das Beispiel $f(x) = |x|$ zeigt, dass Stetigkeit allein noch nicht hinreichend für Differenzierbarkeit ist. Man kann sogar Funktionen (sog. „Monster“) konstruieren, die auf einem Intervall stetig, aber in keinem seiner Punkte differenzierbar sind.

Definition 5.3: Ist die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f wieder differenzierbar, so spricht man von der „2. Ableitung“ $f''(x)$. Allgemein ist die „ n -te Ableitung“ rekursiv definiert durch

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x), \quad n \geq 3, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = f^{(2)}(x) = f''(x).$$

Beispiel 5.1: Einfache Beispiele differenzierbarer Funktionen:

1. Die *konstante Funktion* $f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ist (stetig) differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Die *lineare Funktion* $f(x) = ax$ ist (stetig) differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = a.$$

3. Die *Monomfunktion* $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ ist (stetig) differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h((x+h)^{k-1} + (x+h)^{k-2}x + \dots + (x+h)x^{k-2} + x^{k-1})}{h} = kx^{k-1}. \end{aligned}$$

4. Die *elementare rationale Funktion* $f(x) = 1/x$ ist für $x \neq 0$ (stetig) differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

5. Die *Exponential-Funktion* $f(x) = e^x$, ist (stetig) differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Die Exponentialfunktion hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sie gleich ihrer Ableitung ist. Die Ableitung ihrer Umkehrfunktion, des natürlichen Logarithmus, werden wir später bestimmen.

6. Die *Sinus- und Cosinus-Funktion* $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ sind (stetig) differenzierbar. Die Ableitungen bestimmt man unter Verwendung der Formeln (4.3.37) und (4.3.38) wie folgt:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{1}{2}h) \sin(\frac{1}{2}h)}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \right) = \cos(x), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x + \frac{1}{2}h) \sin(\frac{1}{2}h)}{h} \\ &= - \left(\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{1}{2}h) \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \right) = -\sin(x). \end{aligned}$$

Die Ableitungen der Tangens- und Cotangens-Funktionen werden später bestimmt.

7. Der *Absolutbetrag* $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Um dies zu sehen, betrachten wir für die alternierende Nullfolge $h_n = (-1)^n 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, die zugehörigen Differenzenquotienten:

$$\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} = \frac{|h_n|}{h_n} = (-1)^n.$$

Offenbar konvergiert diese Folge nicht. In $x_0 \neq 0$ ist der Absolutbetrag natürlich differenzierbar, da er dort für $x < 0$ mit der linearen Funktion $f(x) = -x$ und für $x > 0$ mit $f(x) = x$ übereinstimmt, aber die Ableitung ist unstetig in $x_0 = 0$.

Lemma 5.2: Für die Ableitung gelten folgende Rechenregeln:

i) Linearkombinationen differenzierbarer Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar:

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

d. h.: Die Differentiation ist ein „linearer“ Prozess.

ii) Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt die sog. „Produktregel“:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (5.1.2)$$

iii) Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ gilt die sog. „Quotientenregel“:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad (5.1.3)$$

Beweis: i) Die Behauptung ergibt sich aus dem entsprechenden Eigenschaften von konvergenten Zahlenfolgen:

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} &= \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0). \end{aligned}$$

ii) Mit den Regeln für konvergente Folgen gilt unter Verwendung der Stetigkeit von f :

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + (f(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0). \end{aligned}$$

iii) Wir behandeln zunächst den Spezialfall $f \equiv 1$. Hierfür gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann mit Hilfe der schon gezeigten Produktregel:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis.

Q.E.D.

Beispiel 5.2: Mit Hilfe der Regeln aus Lemma 5.2 können die Ableitungen weiterer Funktionen bestimmt werden:

1. Das Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist in ganz \mathbb{R} stetig differenzierbar mit der ebenfalls polynomialen Ableitung

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^{k-1}.$$

2. Die *Rationale Funktion*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ stetig differenzierbar, und die Ableitung ist wieder eine rationale Funktion.

3. Die *Tangens- und Cotangens-Funktionen* sind in ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos} \right)'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}, \end{aligned}$$

sowie

$$\cot'(x) = \left(\frac{1}{\tan} \right)'(x) = -\frac{\tan'(x)}{\tan^2(x)} = -\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x) \cos^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Lemma 5.3: Sei $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ eine auf einem abgeschlossenen Definitionsbereich stetige, invertierbare Funktion mit Inverser $f^{-1} : B \rightarrow D$. Ist f in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Inverse f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad y_0 = f(x_0).$$

Beweis: Für $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$ mit $y_n \neq y_0$ und $y_n \rightarrow y_0$ ($n \rightarrow \infty$) gilt wegen der Stetigkeit von f^{-1} auch $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) und natürlich $x_n \neq x_0$. Somit folgt aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 :

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)^{-1} \rightarrow f'(x_0)^{-1} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dies impliziert, dass f^{-1} im Punkt y_0 differenzierbar ist mit der angegebenen Ableitung. Q.E.D.

Beispiel 5.3: Mit Hilfe der Regel aus Lemma 5.3 können Ableitungen weiterer Funktionen bestimmt werden:

1. Der *natürliche Logarithmus* $\ln(x)$ ist auf $I = (0, \infty)$ stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\ln'(y) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}, \quad y = e^x.$$

2. Die *Arcus-Funktionen* $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$ sind als Umkehrfunktionen des Sinus bzw. des Cosinus in ihrem Definitionsintervall $D = (-1, 1)$ stetig differenzierbar mit den Ableitungen für $y = \sin(x)$, $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

sowie für $y = \cos(x)$, $x \in (0, \pi)$:

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

3. Die *Arcus-Funktion* $\arctan(x)$ ist als Umkehrfunktion des Tangens auf ihrem Definitionsbereich \mathbb{R} stetig differenzierbar, und es gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos^2(x).$$

Mit $y := \tan(x)$ ist

$$y^2 = \tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1, \quad \cos^2(x) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

und folglich

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Es ist erstaunlich, dass der doch recht komplizierte Arcustangens eine so einfache Ableitung hat.

Anwendung 5.1.1: Mit Hilfe der bisher abgeleiteten Differentiationsregeln lässt sich die bereits früher auf direktem Wege gefundene Beziehung

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1)$$

sehr viel eleganter beweisen. Wegen $\ln'(1) = 1$ gilt mit $h_n := 1/n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + h_n) - \ln(1)}{h_n} = 1.$$

Hiermit folgt wegen der Stetigkeit der e -Funktion:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \exp(1).$$

Lemma 5.4 (Kettenregel): Seien $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : D_f \rightarrow D_g \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Funktion f sei im Punkt $x_0 \in D_f$ differenzierbar, und g sei in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die sog. „Kettenregel“

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0). \quad (5.1.4)$$

Beweis: Wir definieren die Funktion $\Delta g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Delta g(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ g'(y) & \text{für } y = y_0 \end{cases}.$$

Da g in y_0 differenzierbar ist, gilt $\lim_{y \rightarrow y_0} \Delta g(y) = g'(y_0)$. Ferner gilt für $y \in D_g$:

$$g(y) - g(y_0) = \Delta g(y)(y - y_0).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta g(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta g(f(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Q.E.D.

Beispiel 5.4: Zur Anwendung der Kettenregel geben wir die folgenden Beispiele:

1. Die Ableitung der Funktion $g(x) = f(ax + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, ist

$$g'(x) = a f'(ax + b).$$

2. Die Ableitung der *allgemeinen Potenzfunktion*

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} = f(g(x)), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(y) := e^y, \quad g(x) := \alpha \ln(x).$$

erhält man mit Hilfe der Kettenregel zu

$$(x^\alpha)' = f'(g(x)) g'(x) = e^{\alpha \ln(x)} \alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

3. Die Ableitung der *allgemeinen Exponentialfunktion*

$$a^x = e^{x \ln(a)} = f(g(x)), \quad f(y) := e^y, \quad g(x) := x \ln(a),$$

erhält man mit Hilfe der Kettenregel zu

$$(a^x)' = f'(g(x)) g'(x) = e^{x \ln(a)} \ln(a) = \ln(a) a^x.$$

5.2 Mittelwertsätze und Extremalbedingungen

Die folgende, bereits durch Abb 5.1 nahegelegte Charakterisierung von möglichen Extremalstellen einer differenzierbaren Funktion geht auf Fermat¹ zurück.

Definition 5.4: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in einem Punkt $x_0 \in D$ ein „globales Extremum“ (Maximum oder Minimum), wenn gilt:

$$f(x_0) \geq f(x), x \in D, \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x), x \in D.$$

Es handelt sich um ein „lokales Extremum“ (Maximum oder Minimum), wenn auf einer sog. „ δ -Umgebung“ von x_0 , d. h. einer Teilmenge $U_\delta(x_0) = \{x \in D \mid |x - x_0| < \delta\}$, gilt:

$$f(x_0) \geq f(x), x \in U_\delta(x_0), \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x), x \in U_\delta(x_0).$$

Ein globales oder lokales Extremum x_0 heißt „strikt“, wenn es das einzige Extremum in D bzw. in $U_\delta(x_0)$ ist.

Satz 5.3 (Satz vom Extremum): Besitzt eine auf einem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion f ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) $x_0 \in I$, so gilt dort notwendig

$$f'(x_0) = 0. \tag{5.2.5}$$

Beweis: Habe f in x_0 ein Minimum. Dann gilt für eine Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n > 0$ und $x_0 + h_n \in U_\delta(x_0)$:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \geq 0,$$

und für eine Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n < 0$ und $x_0 + h_n \in U_\delta(x_0)$:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \leq 0.$$

Bei Grenzübergang $h_n \rightarrow 0$ folgt

$$f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0)$$

bzw. $f'(x_0) = 0$. Im Fall eines Maximum wird analog argumentiert. Q.E.D.

Bemerkung 5.4: Eine stetige Funktion besitzt auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ ein Maximum. Dieses kann auch in den Randpunkten liegen, z. B. in a . In diesem Fall muss nicht notwendig $f'(a) = 0$ gelten; dies zeigt das Beispiel

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

¹Pierre de Fermat (1601–1655): Französischer Mathematiker und Jurist, wirkte u. a. in Toulouse; lieferte Beiträge zur Zahlentheorie und Analysis; berühmt durch die nach ihm benannte und kürzlich erst bewiesene Vermutung, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine ganzzahlige Lösung besitzt.

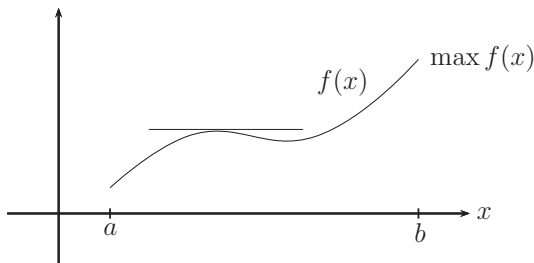


Abbildung 5.3: Extremum am Intervallrand.

Der folgende Satz von Rolle² ist von ähnlich fundamentaler Bedeutung in der Analysis wie der Bolzanosche Zwischenwertsatz.

Satz 5.4 (Satz von Rolle): *Wenn eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion in (a, b) differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$ gilt, so gibt es ein $c \in (a, b)$, in dem $f'(c) = 0$ ist. Insbesondere liegt zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion stets auch eine Nullstelle ihrer Ableitung.*

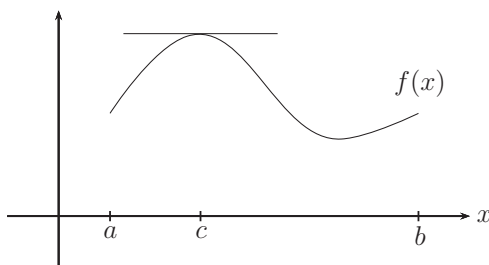


Abbildung 5.4: Illustration zum Satz von Rolle.

Beweis: Die stetige Funktion f nimmt auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Für konstantes f ist die Behauptung trivialerweise richtig. Ist f nicht konstant, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a) = f(b)$ oder $f(x_0) < f(a) = f(b)$. Folglich wird das Maximum oder das Minimum von f in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ angenommen. Nach Satz 5.3 ist dann notwendig $f'(x_0) = 0$. Q.E.D.

Als Konsequenz des Satzes von Rolle ergibt sich der folgende „1. Mittelwertsatz (der Differentialrechnung)“, der auf Lagrange zurückgeht.

²Michel Rolle (1652–1719): Französischer Mathematiker und Autodidakt; wirkte in Paris und leistete Beiträge zur Analysis, Algebra und Geometrie; der nach ihm benannten Satz wurde 1691 publiziert.

Satz 5.5 (1. Mittelwertsatz): *Ist die Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, so gibt es ein $c \in (a, b)$, so dass*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (5.2.6)$$

Beweis: Wir definieren die Funktion

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

welche in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar ist. Wie man leicht nachrechnet, gilt $g(a) = f(a) = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es also ein $c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0$. In diesem gilt dann konstruktionsgemäß

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

woraus die behauptete Aussage folgt.

Q.E.D.

Aus dem Mittelwertsatz ergeben sich eine Reihe von Folgerungen:

Korollar 5.1: *Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Im Fall $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für $x \in (a, b)$ ist f monoton steigend (fallend) und im Fall $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für $x \in (a, b)$ strikt monoton steigend (fallend). Im Fall $f' \equiv 0$ auf (a, b) ist f konstant.*

Beweis: Sei $f'(x) > 0$ für $x \in (a, b)$. Für $x, y \in (a, b)$, $y > x$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0.$$

Dies impliziert $f(y) > f(x)$. Also ist f strikt monoton steigend. Für die anderen Fälle, insbesondere den Sonderfall $f \equiv 0$, wird analog argumentiert.

Q.E.D.

Korollar 5.2: *Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, und es gelte $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann hat f im Fall $f''(x_0) > 0$ in x_0 ein striktes lokales Minimum und im Fall $f''(x_0) < 0$ ein striktes lokales Maximum.*

Beweis: Sei f zweimal differenzierbar mit $f''(x_0) > 0$. Wegen

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so dass für $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ gilt:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Mit $f'(x_0) = 0$ folgt damit

$$f'(x) < 0, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \quad f'(x) > 0, \quad x \in (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Folglich ist f im Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng monoton fallend und im Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ streng monoton wachsend, d. h.: f hat in x_0 ein striktes (lokales) Minimum. Im Fall $f''(x_0) < 0$ wird analog erschlossen, dass f in x_0 ein striktes (lokales) Maximum hat.

Q.E.D.

Bemerkung 5.5: Diese Bedingungen für ein Extremum sind nicht notwendig, wie das Beispiel der Funktion $f(x) = x^4$ zeigt, mit einem strikten Minimum im Punkt $x_0 = 0$, in welchem aber $f''(x_0) = 0$ ist.

Korollar 5.3: Gilt für eine auf einem offenen, beschränkten oder unbeschränkten Intervall I definierte und zweimal differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f''(x) \geq 0, \quad x \in I, \tag{5.2.7}$$

so ist f „konvex“, d. h.: Für beliebige $x, y \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{5.2.8}$$

(Bem.: Die Funktion f heißt „konkav“, wenn $-f$ konvex ist. Die Eigenschaften „strikt konvex“ und „strikt konkav“ sind sinngemäß definiert.)

Beweis: Wegen $f'' \geq 0$ auf I ist nach Korollar 5.1 die Ableitung f' monoton wachsend. Für $x = y \in I$ ist (5.2.8) offenbar richtig. Seien nun $x, y \in I$ mit (o.B.d.A.) $x < y$ und $\lambda \in (0, 1)$. Wir setzen $x_\lambda := \lambda x + (1 - \lambda)y$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann $\xi \in (x, x_\lambda)$ und $\eta \in (x_\lambda, y)$ mit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{x_\lambda - x} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(y) - f(x_\lambda)}{y - x_\lambda}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} x_\lambda - x &= \lambda x + (1 - \lambda)y - x = (1 - \lambda)(y - x), \\ y - x_\lambda &= y - \lambda x - (1 - \lambda)y = \lambda(y - x), \end{aligned}$$

ergibt sich somit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(y) - f(x_\lambda)}{\lambda},$$

bzw.

$$f(x_\lambda) = \lambda f(x_\lambda) + (1 - \lambda)f(x_\lambda) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Die Funktion ist also konvex.

Q.E.D.

Korollar 5.4: Ist die Ableitung einer in $[a, b]$ stetigen und in (a, b) differenzierbaren Funktion f beschränkt, $|f'(x)| \leq K$, $x \in (a, b)$, so gilt

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \quad x, x' \in [a, b], \quad (5.2.9)$$

d. h.: Die Funktion ist „Lipschitz-stetig“ auf $[a, b]$. Diese Eigenschaft wird uns später bei der Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen wieder begegnen.

Beweis: Für Paare $x, y \in [a, b]$ mit $y > x$, gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $c \in (a, b)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Hiermit folgt, wie behauptet:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)| |x - y| \leq K|x - y|.$$

Q.E.D.

Korollar 5.5: Sei f eine in $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion. Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.

Beweis: Wir haben die Voraussetzungen von Aussage Korollar 5.4 mit der speziellen Konstante $K = 0$. Dies impliziert dann, dass notwendig $f \equiv \text{konst.}$ Q.E.D.

Korollar 5.6: Eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche mit einem $c \in \mathbb{R}$ die sog. „Anfangswertaufgabe“

$$f'(x) = cf(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = A, \quad (5.2.10)$$

löst, hat die Form $f(x) = Ae^{cx}$. Die Differentialgleichung (5.2.10) mit den Daten $A = 1$ und $c = 1$ kann also auch zur Charakterisierung der Exponentialfunktion verwendet werden.

Beweis: Wir betrachten die Funktion $g(x) := f(x)e^{-cx}$. Ihre Ableitung ergibt sich mit der Voraussetzung zu

$$g'(x) = f'(x)e^{-cx} + f(x)(-c)e^{-cx} = (f'(x) - cf(x))e^{-cx} = 0.$$

Nach Korollar 5.5 ist also $g \equiv \text{konst.}$ Wegen $g(0) = f(0) = A$ folgt

$$f(x) = e^{cx}g(x) = Ae^{cx}.$$

Q.E.D.

Wir geben ein paar einfache Anwendungen von Satz 5.3 und Korollar 5.2:

Anwendung 5.2.1: Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat ihre Extrema in den Nullstellen von $f'(x) = \cos(x)$: Maxima in $x = \frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi$ und Minima in $x = \frac{1}{2}\pi \pm (2n+1)\pi$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Anwendung 5.2.2: Zu bestimmen ist das Rechteck kleinsten Umfangs bei gegebenem Flächeninhalt. Sind die Seitenlängen x und y , so ist der Flächeninhalt $F = xy$ und der Umfang $U = 2(x + y) = 2(x + F/x)$. Zur Minimierung von $U = U(x)$ suchen wir eine Nullestelle x_0 der Ableitung, d. h.:

$$U'(x_0) = 2\left(1 - \frac{F}{x_0^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wird gelöst durch $x_0 = \sqrt{F}$, was einem Quadrat entspricht. Dass es sich hier wirklich um ein Minimum handelt, zeigt die zweite Ableitung:

$$U''(x_0) = \frac{4F}{x_0^3} > 0.$$

Anwendung 5.2.3: Wir betrachten das Beispiel vom Beginn dieses Kapitels. Für Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ist ein $a \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für welches der Ausdruck

$$f(a) = \sum_{k=1}^n (a - a_k)^2$$

minimal wird. Die Funktion $f(\cdot)$ ist ein quadratisches Polynom mit der Ableitung

$$f'(a) = 2 \sum_{k=1}^n (a - a_k) = 2\left(na - \sum_{k=1}^n a_k\right).$$

Deren einzige Nullstelle, das arithmetische Mittel $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ ist wegen

$$f''(a) = 2n > 0$$

die gesuchte Minimalstelle. Diese Aufgabenstellung ist der einfachste Fall der sog. „Methode der kleinsten Quadrate“, welche auf Gauß zurückgeht.

Anwendung 5.2.4: Als physikalische Anwendung wollen wir aus dem sog. „Fermatsche Prinzip“ der geometrischen Optik (nach Fermat 1657) das Brechungsgesetz ableiten. Das Fermatsche Prinzip postuliert, dass ein Lichtstrahl, der von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 gelangen soll, immer den Weg einschlägt, der die kürzeste Zeit erfordert.

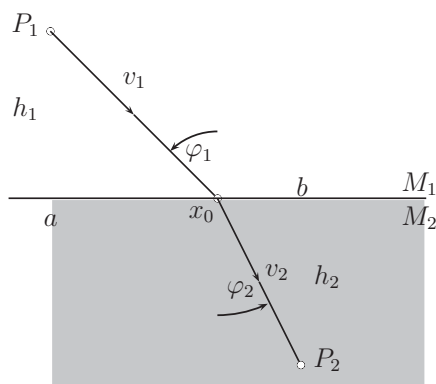


Abbildung 5.5: Illustration zum Brechungsgesetz der Optik.

In zwei ebenen, homogenen Medien M_1 und M_2 , welche durch die x -Achse getrennt sind, seien die Ausbreitungsgeschwindigkeiten für Licht $v_1 > 0$ bzw. $v_2 > 0$. Gesucht ist der schnellste Weg von einem Punkt $P_1 = (a, h_1)$ des ersten Mediums (oberhalb der x -Achse) zu einem Punkt $P_2 = (b, h_2)$ des zweiten (unterhalb der x -Achse). Dabei wird angenommen, dass der schnellste Weg zwischen zwei Punkten innerhalb eines Mediums geradlinig verläuft. Gesucht ist der Punkt $P = (x_0, 0)$, in dem der Lichtstrahl die x -Achse schneidet sowie der „Einfallswinkel“ φ_1 und „Ausfallwinkel“ φ_2 .

Die Zeit für den Weg von P_1 über einen Punkt $P = (x, 0)$ auf der x -Achse nach P_2 beträgt dann:

$$t(x) = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + h_2^2}}{v_2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung eines Minimums von $t(x)$ suchen wir eine Nullstelle der Ableitung

$$t'(x) = \frac{x-a}{v_1 \sqrt{(x-a)^2 + h_1^2}} - \frac{b-x}{v_2 \sqrt{(b-x)^2 + h_2^2}}.$$

Wegen $t'(b) > 0$ und $t'(a) < 0$ (Es wird $a < b$ vorausgesetzt.) besitzt t' mindestens eine Nullstelle $x_0 \in (a, b)$. Ferner wächst die Funktion t' streng monoton, da ihre Ableitung positiv ist:

$$t''(x) = \frac{h_1^2}{v_1 (\sqrt{(x-a)^2 + h_1^2})^3} + \frac{h_2^2}{v_2 (\sqrt{(b-x)^2 + h_2^2})^3} > 0.$$

Folglich ist x_0 die einzige Nullstelle von t' und somit die einzige Minimalstelle von t . Statt einer Berechnung von x_0 ist hier eine andere Charakterisierung von Bedeutung. Die Bedingung $t'(x_0) = 0$ ist gleichbedeutend mit:

$$\frac{\frac{x_0-a}{\sqrt{(x_0-a)^2 + h_1^2}}}{\frac{b-x_0}{\sqrt{(b-x_0)^2 + h_2^2}}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

und bei Verwendung des Einfallswinkels φ_1 und des Brechungswinkels φ_2 (s. Abb. 5.5) also mit

$$\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} = \frac{v_1}{v_2},$$

was als „Snelliussches³ Brechungsgesetz“ bezeichnet wird. Es gilt allgemein für wellenartige Ausbreitungsprozesse an Grenzflächen zwischen Medien unterschiedlicher Dichte.

Bemerkung 5.6: Das letzte Beispiel demonstriert ein wichtiges Phänomen der rationalen Naturbeschreibung. Es ist möglich, aus anerkannten Naturgesetzen, (z. B. dem Fermatschen Prinzip), rein rechnerisch neue Naturgesetze (z. B. das Reflexionsgesetz) zu gewinnen. Die Natur folgt gewissermaßen dem mathematischen Kalkül. Dies könnte man als Beleg dafür ansehen, dass der scheinbar rein formal entwickelte mathematische Formalismus im Kern doch „natürliche“ Zusammenhänge widerspiegelt. Dabei wird dem Naturgeschehen aber oft, wie z. B. vom „Fermatschen Prinzip“, ein auf ein optimales Ziel gerichtetes Wirken unterstellt, was auch zu Trugschlüssen führen kann.

Als natürliche Verallgemeinerung des 1. Mittelwertsatzes ergibt sich der folgende „2. Mittelwertsatz“ (oder auch „verallgemeinerte Mittelwertsatz“)

Satz 5.6 (2. Mittelwertsatz): *Sind die Funktionen f und g im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, und ist $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$, so gibt es ein $c \in (a, b)$, so dass gilt*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (5.2.11)$$

Beweis: Wegen $g'(x) \neq 0$ in (a, b) ist im Hinblick auf den Satz von Rolle notwendig $g(a) \neq g(b)$. Weiter ist dann mit einem $c \in (a, b)$:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c) \neq 0.$$

Wir definieren auf $[a, b]$ die Funktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Man verifiziert leicht, dass $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es dann ein $c \in (a, b)$ mit $F'(c) = 0$, d. h.:

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c).$$

Dies impliziert, wegen $g'(c) \neq 0$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Q.E.D.

³Willibrord Snellius (1580–1626): Holländischer Mathematiker; ab 1613 Professor in Leiden; fand das nach ihm benannte Brechungsgesetz experimentell (Dieses wurde zuerst von Descartes 1637 veröffentlicht.).

5.2.1 Die Regeln von L'Hospital

Die wichtigste Anwendung des 2. Mittelwertsatzes besteht in den Regeln zur Berechnung unbestimmter Ausdrücke nach L'Hospital⁴. Dabei handelt es sich um Grenzübergänge der Form

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{ \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty} \right\}.$$

Satz 5.7 (Regeln von L'Hospital): *Es seien f, g zwei auf dem (beschränkten) Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktionen. Es gelte dort $g'(x) \neq 0$, und es existiere der Limes*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}. \quad (5.2.12)$$

Dann gelten die folgenden Regeln:

1. Im Fall $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ ist $g(x) \neq 0$ in I , und es gilt:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \quad (5.2.13)$$

2. Im Fall $f(x) \rightarrow \pm\infty$ und $g(x) \rightarrow \pm\infty$ für $x \downarrow a$ ist $g(x) \neq 0$ für $a < x < x_* \leq b$, und es gilt:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \quad (5.2.14)$$

Analoge Aussagen gelten für die Grenzübergänge $x \uparrow b$ und $x \rightarrow \pm\infty$.

Beweis: 1. Wir fassen f und g als Funktionen auf, die in a stetig sind und dort den Wert Null haben: $f(a) = g(a) = 0$. Wegen $g'(x) \neq 0$ kann es dann keine weitere Nullstelle von g in I geben, d. h. $g(x) \neq 0$ in I . Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (5.2.11) gibt es dann zu jedem $x \in I$ ein $\xi \in (a, x)$, mit dem gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dann impliziert der Grenzübergang $x \downarrow a$ auch $\xi \downarrow a$, und ergibt damit die Gültigkeit der ersten Behauptung.

2. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $g'(x) \neq 0$ in (a, b) . Wir wählen ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, mit $a + \delta \leq x_*$, so dass für alle $x \in (a, a + \delta)$ gilt $f(x) \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ sowie:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \varepsilon,$$

⁴Guillaume F. A. Marquis de L'Hospital (1661–1704): Französischer Mathematiker; Schüler von Johann Bernoulli; veröffentlichte 1696 das erste Lehrbuch der Differentialrechnung, welches auch die nach ihm benannte Regel enthält.

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (5.2.11) gilt dann für beliebige $x, y \in (a, a+\delta)$ mit $x \neq y$ auch $g(x) \neq g(y)$ sowie

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - c \right| < \varepsilon.$$

Nun ist für beliebiges $x, y \in (a, a + \delta)$ mit $f(x) \neq f(y)$ und $g(x) \neq g(y)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{g(x) - g(y)}{f(x) - f(y)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)}.$$

Der zweite Faktor rechts geht beim Grenzübergang $x \rightarrow a$ gegen Eins, d. h.: Es gibt ein $\delta_* \in \mathbb{R}_+$ derart, dass für alle $x \in (a, a + \delta_*)$ gilt:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| < \varepsilon.$$

Für x mit $a < x < a + \min\{\delta, \delta_*\}$ ergibt sich damit

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < 2\varepsilon,$$

was die Gültigkeit der zweiten Behauptung impliziert.

Q.E.D.

Bemerkung 5.7: Grenzprozesse für $x \rightarrow \pm\infty$, d. h.:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

können durch die Substitution $y := 1/x$ in solche für $y \rightarrow 0$, d. h.:

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)}$$

umformuliert werden. Auf diesem Wege erhalten wir mit Hilfe der obigen Regel von L'Hospital die Formel:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.2.15)$$

Bemerkung 5.8: Bei der Anwendung der Regeln von L'Hospital ist zunächst zu prüfen, ob die Limiten der Ableitungsquotienten überhaupt existieren. Z. B. ist, obwohl gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} x \sin(1/x) = 0,$$

der Schluss

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)} &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{2x \sin(1/x) - x^2 \cos(1/x)x^{-2}}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos(x)} = -\lim_{x \downarrow 0} \cos(1/x) \end{aligned}$$

nicht zulässig, da der rechte Limes nicht existiert.

Beispiel 5.5: Wir geben einige Beispiele für die Anwendung der Regeln von L'Hospital.

1. Auf dem Intervall $I = (0, 1)$ gilt:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

2. Auf dem Intervall $I = (a, b)$ gilt für $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \lim_{x \downarrow a} \frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} = \frac{pa^{p-1}}{qa^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{p-q}.$$

3. Auf dem Intervall $I = (0, 1)$ gilt:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2e^{2x}}{(1+x)^{-1}} = 2.$$

4. Auf dem Intervall $I = (0, 1)$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{x^{-1}}{1} = 1.$$

5. Durch zweimalige Anwendung der L'Hospital'schen Regeln erhält man auf dem Intervall $I = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} \\ &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = 0. \end{aligned}$$

6. Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man durch n -malige Anwendung der L'Hospital'schen Regeln:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Bemerkung 5.9: (1) Neben den oben diskutierten Grenzübergängen in Quotienten treten auch irreguläre Produktausdrücke der folgenden Art auf:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ?$$

Dies kann häufig in der Form

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)^{-1}}$$

mit den obigen L'Hospital'schen Regeln behandelt werden.

(2) Manchmal sind auch irreguläre Exponentialausdrücke der Form

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = ?$$

zu untersuchen, was zu Grenzfällen der Art 0^0 , ∞^0 und 0^∞ führen kann. In diesem Fall wird zunächst logarithmiert,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x)) = ?$$

was zu Grenzfällen der Art $0 \cdot (-\infty)$, $0 \cdot \infty$ und $\infty \cdot 0$ führt. Man berechnet nun den Limes für diesen Ausdruck mit dem unter (1) beschriebenen Ansatz. Der Limes des gegebenen Ausdrucks ist dann wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gegeben durch

$$\exp\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))\right).$$

Wir geben hierzu ein paar Beispiele:

1. Der Grenzfall 0^0 : $\lim_{x \downarrow 0} x^x = ?$

Logarithmieren und Anwenden der L'Hospitalischen Regeln ergibt:

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{1}{x^2} = 0,$$

und somit

$$\lim_{x \downarrow 0} x^x = e^0 = 1.$$

2. Der Grenzfall 1^∞ : $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)} = ?$

Logarithmieren und Anwenden der L'Hospitalischen Regeln ergibt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1,$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)} = e^1 = e.$$

5.3 Taylor-Entwicklung

Wir haben schon gesehen, dass sich gewisse Funktionen durch Potenzreihen darstellen lassen; dazu gehören z. B. die trigonometrischen Funktionen und insbesondere die Exponentialfunktion mit der zugehörigen Potenzreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (5.3.16)$$

welche für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Dabei gilt für einen beliebigen anderen sog. „Entwicklungspunkt“ $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$e^{x-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x-x_0)^k \quad \text{bzw.} \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x-x_0)^k. \quad (5.3.17)$$

Wir wollen im Folgenden untersuchen, unter welchen Bedingungen solche Potenzreihenentwicklungen für eine Funktion f möglich sind und wie man diese aus f bestimmen kann. Zur Illustration betrachten wir zunächst ein Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Mit $x = x - x_0 + x_0$ wird hieraus

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0 + x_0)^k$$

und mit Hilfe der allgemeinen binomischen Formel

$$p(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k,$$

mit gewissen Koeffizienten b_k . Statt diese aus den a_k zubesimmen, wollen wir sie direkt aus der Funktion p ableiten. m -malige Differentiation für $0 \leq m \leq n$ ergibt:

$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^n b_k k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-m+1) (x-x_0)^{k-m}$$

und dann durch Auswertung bei $x = x_0$:

$$p^{(m)}(x_0) = b_m m!.$$

Wir finden also die Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (5.3.18)$$

Wir wollen nun untersuchen, in wie weit sich diese Formel auch auf allgemeinere Funktionen übertragen lässt.

Definition 5.5: Für eine auf dem offenen Intervall (a, b) definierte und n -mal stetig differenzierbare Funktion f heißt

$$t_n(x_0, x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für ein $x_0 \in (a, b)$ das „ n -te Taylor⁵-Polynom“ von f um x_0 .

Wir studieren den Fehler bei der Approximation von f durch sein Taylor-Polynom.

⁵Brook Taylor (1685–1731): Englischer Mathematiker und Schüler Newtons; die nach ihm benannte Reihenentwicklung war im Kern bereits Gregory, Newton, Leibniz und Johann Bernoulli bekannt.

Satz 5.8: Sei f eine auf dem offenen Intervall (a, b) definierte und $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und $t_n(x_0, \cdot)$ ihr n -tes Taylor-Polynom um ein $x_0 \in (a, b)$. Dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x und x_0 , so dass gilt:

$$f(x) = t_n(x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (5.3.19)$$

mit dem sog. „Lagrangeschen Restglied“ der Taylor-Approximation.

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass $t_n(x_0, x_0) = f(x_0)$. Wir definieren das „Restglied“

$$R_{n+1}(y, x) := f(x) - t_n(y, x)$$

und fassen es (für festes x) als Funktion von y auf. Wegen der $(n + 1)$ -maligen Differenzierbarkeit von f ist $R_{n+1}(y, x)$ mindestens einmal nach y differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} R_{n+1}(y, x) &= \frac{d}{dy} (f(x) - t_n(y, x)) = - \frac{d}{dy} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x - y)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} (x - y)^{k-1} \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x - y)^n. \end{aligned}$$

Wir wenden nun den 2. Mittelwertsatz (Satz 5.6) für die Funktionen $f(y) := R_{n+1}(y, x)$ und $g(y) := (x - y)^{n+1}$ an und erhalten wegen $R_{n+1}(x, x) = f(x) - t_n(x, x) = 0$:

$$\frac{R_{n+1}(y, x)}{(x - y)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}(x, x) - R_{n+1}(y, x)}{(x - x)^{n+1} - (x - y)^{n+1}} = \frac{\frac{d}{dy} R_{n+1}(\xi, x)}{-(n+1)(x - \xi)^n},$$

mit einem $\xi \in (a, b)$ zwischen x und y . Mit der obigen Identität für $\frac{d}{dy} R_{n+1}(y, x)$, ausgewertet für $y = \xi$, ergibt sich weiter:

$$\frac{R_{n+1}(y, x)}{(x - y)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Hieraus folgt die behauptete Identität.

Q.E.D.

Definition 5.6: a) Eine Funktion f auf einem Intervall (a, b) heißt „glatt“ oder „ C^∞ -Funktion“, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist, d. h. wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ ihre k -te Ableitung $f^{(k)}$ existiert. Ihre „Taylor-Reihe“ um ein $x_0 \in (a, b)$ ist dann definiert durch

$$t_\infty(x_0, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

b) Konvergiert die Taylor-Reihe von f um x_0 für alle x in einer Umgebung von x_0 und gilt $f(x) = t_\infty(x_0, x)$, so heißt f „(reell) analytisch“ in x_0 .

Satz 5.9 (Taylor-Entwicklung): Sei f auf dem beschränkten Intervall (a, b) eine C^∞ -Funktion mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen:

$$\sup_{x \in (a, b)} |f^{(n)}(x)| \leq M < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.3.20)$$

Dann ist f auf (a, b) analytisch, d.h.: Für alle $x, x_0 \in (a, b)$ konvergiert die Taylor-Reihe von f , und es gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (5.3.21)$$

Beweis: Aus der Restglieddarstellung (5.3.19) folgt mit Hilfe der Voraussetzung (5.3.20):

$$\left| f(x) - t_n(x_0, x) \right| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Zu beliebigem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es nun ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$\frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} < \varepsilon.$$

Dies impliziert die Behauptung.

Q.E.D.

Bemerkung 5.10: Eine C^∞ -Funktion muss nicht analytisch sein. Das übliche Gegenbeispiel ist die auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(-x^{-2}) = 0$ ist f in $x_0 = 0$ und damit auf ganz \mathbb{R} stetig. Wir wollen die Ableitungen von f in $x_0 = 0$ bestimmen. Zunächst ist für $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x^{-3} \exp(-x^{-2}), \quad f''(x) = (4x^{-6} - 6x^{-4}) \exp(-x^{-2}).$$

Durch Induktion können wir erschließen, dass alle Ableitungen von f in $x \neq 0$ die folgende Gestalt haben:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x^{-1}) \exp(-x^{-2}), \quad n \geq 1,$$

mit gewissen Polynomen p_n . Alle Ableitungen sind also in $x \neq 0$ stetig. Wir substituieren $y := x^{-2}$ und sehen wegen

$$\frac{y^k}{e^y} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty), \quad k \in \mathbb{N},$$

dass sich die Ableitungen in $x_0 = 0$ stetig durch Null fortsetzen lassen:

$$f^{(n)}(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt, dass f eine C^∞ -Funktion ist. Ihre Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ ist offenbar die Nullfunktion, d. h.: Sie ist trivialerweise für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent, stellt aber die Funktion f außer in $x = 0$ nirgends dar. Es gibt auch Funktionen, deren Taylor-Reihen außer in $x = x_0$ in keinem anderen Punkt konvergieren.

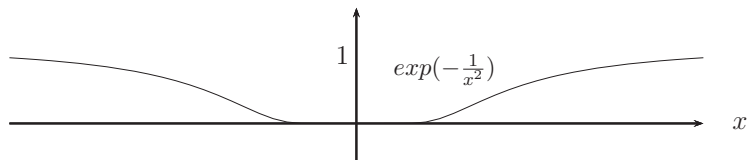


Abbildung 5.6: Graph einer C^∞ -Funktion, die nicht durch ihre Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ dargestellt wird.

Als erste Anwendung der Taylor-Entwicklung wollen wir die Aussage von Satz 5.3 über Extremalbedingungen vervollständigen.

Korollar 5.7: Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal ($n \geq 2$) stetig differenzierbare Funktion, und in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad (5.3.22)$$

Ist n gerade, so hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum oder Maximum, je nachdem ob $f^{(n)}(x_0) > 0$ oder $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist. Ist n ungerade, so hat f in x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum sondern einen sog. „Wendepunkt“.

Beweis: Ist f n -mal differenzierbar in (a, b) und gilt (5.3.22), so folgt mit der Taylor-Entwicklung von f um x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n,$$

mit einem $\xi \in (a, b)$ zwischen x und x_0 . Die Funktion

$$\Delta_n(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}, \quad x \neq x_0,$$

konvergiert für $x \rightarrow x_0$ gegen $f^{(n)}(x_0)/n!$. Folglich kann die Funktion Δ_n zu einer auf (a, b) stetigen (genauso bezeichneten) Funktion fortgesetzt werden. Für diese gilt dann

$$f(x) - f(x_0) = \Delta_n(x)(x - x_0)^n, \quad \Delta_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Ist nun etwa gemäß Voraussetzung $\Delta_n(x_0) > 0$, so existiert wegen der Stetigkeit von Δ_n eine ganze ε -Umgebung von x_0 , in der $\Delta_n > 0$ ist. Auf dieser ε -Umgebung gilt daher für gerades n :

$$f(x) - f(x_0) = \Delta_n(x)(x - x_0)^n > 0,$$

d.h.: $f(x_0)$ ist ein striktes lokales Minimum. Im Fall $\Delta_n(x_0) < 0$ wird analog argumentiert. Für ungerades n ist dagegen

$$f(x) - f(x_0) = \Delta_n(x)(x - x_0)^n \begin{cases} > 0, & x > x_0, \\ < 0, & x < x_0, \end{cases}$$

d. h.: $f(x_0)$ ist weder ein lokales Minimum noch ein Maximum.

Q.E.D.

Taylor-Reihen sind offenbar spezielle Potenzreihen. Ist nun eine Funktion, für die wir eine Potenzreihendarstellung mit positivem Konvergenzradius haben (z. B. der Sinus) automatisch analytisch, und stimmt die Potenzreihe mit ihrer Taylor-Reihe überein? Diese Frage werden wir erst am Ende dieses Kapitels beantworten.

Anwendung 5.3.1: Die Taylor-Entwicklung (mit Restglied) einer Funktion f

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

kann u. a. zur Berechnung von Funktionswerten $f(x)$ dienen. Die zugehörigen Taylor-Reihen sind konvergent (und stellen die Funktion dar), wenn die Restglieder für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren.

1. *Exponentialfunktion:* Die e -Funktion besitzt um $x_0 = 0$ die Taylor-Entwicklung

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), \quad (5.3.23)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (5.3.24)$$

Die zugehörige Reihe konvergiert offenbar für alle $x \in \mathbb{R}$ und stimmt mit der uns schon bekannten Potenzreihendarstellung der e -Funktion überein.

2. *Sinus- und Cosinus:* Die Sinus- und Cosinus-Funktionen haben um $x_0 = 0$ die Taylor-Entwicklungen

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+3}(x), \quad (5.3.25)$$

mit Restglied

$$R_{2n+3}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} \cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad (5.3.26)$$

sowie

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+2}(x), \quad (5.3.27)$$

mit Restglied

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\cos^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1} \cos(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}. \quad (5.3.28)$$

Die zugehörigen Reihen konvergieren offenbar für alle $x \in \mathbb{R}$ und stimmen mit den uns schon bekannten Potenzreihendarstellungen des Sinus und des Cosinus überein. Aus den Restglieddarstellungen (5.3.26) und (5.3.28) folgen ihre, oben nur für eingeschränkte x -Bereiche abgeleiteten Abschätzungen (4.3.43) und (4.3.44) nunmehr für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. *Logarithmus*: Da der natürliche Logarithmus bei $x_0 = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$. Bei Beachtung von $\ln(1) = 0$ und

$$\ln^{(k)}(1+x)|_{x=0} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \Big|_{x=0} = (-1)^{k-1} (k-1)!, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.3.29)$$

erhalten wir für $-1 < x \leq 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} x^k + R_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_{n+1}, \quad (5.3.30)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1} = \frac{\ln^{(n)}(1+\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1}. \quad (5.3.31)$$

Für festes $x, \xi \in (-1, 1)$ ist $|R_{n+1}(x)| \leq c(x)/n$ mit einer von x abhängigen Konstante $c(x)$, so dass das Restglied für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Im Grenzfall $x = 1$ ist der Zwischenwert $\xi \geq 0$ und daher $|R_{n+1}(x)| \leq (n+1)^{-1}$. Das Restglied konvergiert also auch in diesem Fall gegen Null, d.h.: die Reihe konvergiert (aber nicht absolut). (Für den anderen Grenzfall $x = -1$ ist der Logarithmus nicht definiert.) Wir finden also, dass die Taylor-Reihe des natürlichen Logarithmus für $x \in (-1, 1]$ konvergiert (für $x \in (-1, 1)$ sogar absolut) und den natürlichen Logarithmus darstellt. Insbesondere für $x = 1$ ist

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad (5.3.32)$$

womit wir den bereits vorher erwähnten Limes der alternierenden harmonischen Reihe bestimmt haben.

Die Konvergenz dieser Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus ist aber recht langsam (Berücksichtigung von n Reihengliedern bewirkt einen Fehler der Größenordnung

$1/n$.) und sind zu seiner Auswertung nicht gut geeignet. Zur Verbesserung der Approximation kombiniert man, einer Idee von Gregory⁶ folgend, die beiden Reihen

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

welche beide für $|x| < 1$ absolut konvergieren, zu

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}. \quad (5.3.33)$$

Ausgehend von dieser Darstellung und unter Verwendung weiterer Kunstgriffe berechnete schon Newton den natürlichen Logarithmus zahlreicher Primzahlen auf 57 Dezimalstellen genau.

4. *Allgemeiner binomischer Lehrsatz:* Am Anfang hatten wir bereits den binomischen Lehrsatz kennen gelernt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Wir wollen dies jetzt für beliebige Exponenten $r \in \mathbb{R}$ verallgemeinern. Im Hinblick auf die Beziehung $(a+b)^r = a^r(1+b/a)^r$, für $a \neq 0$, genügt es, Terme der Form $(1+x)^r$ zu betrachten. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!}, \quad r \geq k,$$

kann auch für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ definiert werden. Zusätzlich wird gesetzt:

$$\binom{r}{k} := 0, \quad r < k, \quad \binom{r}{0} := 1.$$

Die Funktion $f(x) := (1+x)^r$ ist für $|x| < 1$ definiert und eine C^∞ -Funktion. Für ihre Ableitungen gilt:

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{r(r-1) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!} (1+x)^{r-k} = \binom{r}{k} (1+x)^{r-k}.$$

Die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$ ist dann die sog. „Binomialreihe“

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k. \quad (5.3.34)$$

Diese ist für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ für alle $x \in (-1, 1)$ konvergent, was aus der folgenden Abschätzung des zugehörigen Restglieds folgt:

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \binom{r}{n+1} (1+\xi)^{r-n-1} x^{n+1} \right| \leq c(r) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

mit einer von r abhängigen Konstante $c(r)$.

⁶James Gregory (1638–1675): Schottischer Mathematiker; Beiträge zu Geometrie und Analysis; Vorläufer Newtons.

5.3.1 Newton-Verfahren

Im Folgenden diskutieren wir das sog. „Newton-Verfahren“ zur Berechnung von Nullstellen differenzierbarer Funktionen, d. h. zur Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$f(x) = 0, \quad (5.3.35)$$

mit einer auf ihrem ganzen Definitionsintervall $I = [a, b]$ stetig differenzierbaren Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ziel ist es, eine Methode zu finden, welche deutlich schneller konvergiert als die einfache Intervallschachtelung aus Abschnitt 4.2. Das (klassische) Newton-Verfahren ist motiviert durch die in Abb 5.7 dargestellte graphische Überlegung.

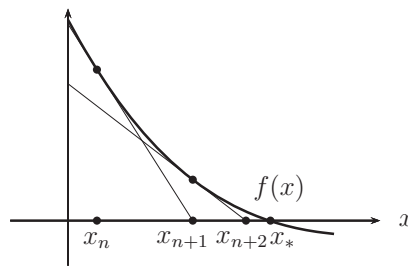


Abbildung 5.7: Illustration zum Newton-Verfahren.

Im Punkt x_n wird die Tangente an $f(x)$ berechnet und deren Schnittpunkt mit der x -Achse als neue Näherung x_{n+1} für die Nullstelle x_* von f genommen. Die Tangente ist gegeben durch die Gleichung

$$t(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

Ihre Nullstelle x_{n+1} ist bestimmt durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (5.3.36)$$

Diese Iteration ist möglich, wenn die Ableitungswerte $f'(x_n)$ nicht zu klein werden. In dieser Form gestattet das Newton-Verfahren es also, *einfache* Nullstellen zu approximieren.

Satz 5.10 (Newton-Verfahren): Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ habe eine Nullstelle $x_* \in (a, b)$, und es sei

$$m := \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)| > 0, \quad M := \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Sei $\rho > 0$ so gewählt, daß

$$q := \frac{M}{2m} \rho < 1. \quad (5.3.37)$$

und $K_\rho(x_*) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_*| \leq \rho\} \subset [a, b]$. Dann sind für jeden Startpunkt $x_0 \in K_\rho(z)$ die Newton-Iterierten $x_n \in K_\rho(z)$ definiert und konvergieren gegen die Nullstelle x_* . Dabei gelten die a priori Fehlerabschätzung

$$|x_n - x_*| \leq \frac{2m}{M} q^{(2^n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.3.38)$$

und die a posteriori Fehlerabschätzung

$$|x_n - x_*| \leq \frac{1}{m} |f(x_n)|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.3.39)$$

Beweis: i) Für Punkte $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, gilt aufgrund des 1. Mittelwertsatzes mit einem $\xi \in [x, y]$:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(\xi)| \geq m, \quad |x - y| \leq \frac{1}{m} |f(x) - f(y)|.$$

Die Nullstelle x_* von f ist also die einzige in $[a, b]$. Ferner ergibt sich im Falle der Konvergenz mit $y = x_*$ unmittelbar die behauptete a posteriori Fehlerabschätzung.

ii) Weiter liefert die Taylor-Formel mit Restglied zweiter Ordnung:

$$f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + \underbrace{\frac{1}{2}(y - x)^2 f''(\xi)}_{=: R(y, x)}, \quad |R(y; x)| \leq \frac{M}{2} |y - x|^2.$$

Für $x \in K_\rho(x_*)$ setzen wir $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ und finden

$$g(x) - x_* = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - x_* = -\frac{1}{f'(x)} \underbrace{\{f(x) + (x_* - x)f'(x)\}}_{= -R(x_*, x)}.$$

Folglich gilt:

$$|g(x) - x_*| \leq \frac{M}{2m} |x - x_*|^2 \leq \frac{M}{2m} \rho^2 < \rho, \quad (5.3.40)$$

d. h.: $g(x) \in K_\rho(x_*)$. Für $x_0 \in K_\rho(x_*)$ bleiben also alle Newton-Iterierten in $K_\rho(x_*)$. Setzt man $q_n := \frac{M}{2m} |x_n - x_*|$, so impliziert (5.3.40), dass

$$q_n \leq q_{n-1}^2 \leq \dots \leq q_0^{2^n}, \quad |x_n - x_*| \leq \frac{2m}{M} q_0^{2^n}.$$

Für

$$q_0 = \frac{M}{2m} |x_0 - x_*| \leq \frac{M}{2m} \rho < 1$$

liegt also die Konvergenz $x_n \rightarrow x_*$ ($n \rightarrow \infty$) vor mit der behaupteten a priori Fehlerabschätzung. Q.E.D.

Bemerkung 5.11: Der Vollständigkeit halber ergänzen wir noch ein paar Bemerkungen zum Newton-Verfahren:

1) Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f existiert zu jeder einfachen Nullstelle x_* ($f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$) stets eine (möglicherweise sehr kleine) Umgebung $K_\rho(x_*)$, für welche die Voraussetzungen von Satz 5.10 erfüllt sind. Das Problem beim Newton-Verfahren ist also die Bestimmung eines im „Einzugsbereich“ der Nullstelle x_* gelegenen Startpunktes x_0 . Ist ein solcher einmal gefunden, so konvergiert das Newton-Verfahren enorm schnell gegen die Nullstelle x_* : Im Fall $q \leq \frac{1}{2}$ gilt z. B. nach nur 10 Iterationsschritten bereits ($2^{10} > 1.000$):

$$|x_{10} - x_*| \leq \frac{2m}{M} q^{1.000} \sim \frac{2m}{M} 10^{-300}.$$

Wegen der Gültigkeit der Fehlerabschätzung (5.3.38) nennt man das Newton-Verfahren „quadratisch konvergent“. In jedem Iterationsschritt $x_n \rightarrow x_{n+1}$ quadriert sich die momentane Fehlerschranke, d. h. die mindest Anzahl der akkuraten Dezimalstellen von x_n verdoppelt sich.

2) Die a priori Abschätzung (5.3.38) für das Newton-Verfahren basiert auf einer Abschätzung für die Iterierten x_n der Form

$$|x_{n+1} - x_*| \leq A|x_n - x_*|^2, \quad (5.3.41)$$

mit einer gewissen Konstante $A \in \mathbb{R}_+$. Eine solche kann manchmal direkt aus der Iterationsvorschrift, d. h. ohne Verwendung der unteren bzw. oberen Schranken m und M abgeleitet werden. Ein Beispiel ist die unten diskutierte Berechnung der Quadratwurzel. Das im Beweis von Satz 5.10 verwendete Argument ergibt dann, dass die Iteration für Anfangswerte x_0 mit $q_0 := A|x_0 - x_*| < 1$ konvergiert, und es gilt die a priori Fehlerabschätzung

$$|x_n - x_*| \leq A^{-1} q_0^{(2^n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.3.42)$$

Dies erlaubt die Vorhersage der (maximal) benötigten Anzahl von Iterationsschritten zur Erreichung einer gegebenen Fehlerschranke ε :

$$\begin{aligned} A^{-1} q_0^{(2^n)} \approx \varepsilon &\Leftrightarrow 2^n \ln(q_0) \approx \ln(A\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow 2^n \approx \frac{\ln(A\varepsilon)}{\ln(q_0)} =: \beta \Leftrightarrow n \approx \frac{\ln(\beta)}{\ln(2)}. \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

3) Für das Resultat von Satz 5.10 zur Konvergenz des Newton-Verfahrens ist die Bedingung $f'(x) \neq 0$ wesentlich. Dies schließt mehrfache Nullstellen, in denen ja $f'(x_*) = 0$ gilt, aus. In diesem Fall ist das Newton-Verfahren trotzdem definiert. Im Fall einer zweifachen Nullstelle x_* mit $f(x_*) = f'(x_*) = 0$, $f''(x_*) \neq 0$ gilt nach dem 2. Mittelwertsatz

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) - f(x_*)}{f'(x_{n-1}) - f'(x_*)} = x_{n-1} - \frac{f'(\xi_n)}{f''(\eta_n)}$$

mit Zwischenpunkten $\xi_n, \eta_n \in [x_{n-1}, x_*]$. Der Quotient $f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$ bleibt also für $x_{n-1} \rightarrow x_*$ wohl definiert, die Konvergenz ist aber i. Allg. nur noch linear.

5.4 Differentiation und Grenzprozesse

Zum Abschluss dieses Kapitels behandeln wir die Frage nach der Stabilität der Eigenschaft der Differenzierbarkeit unter Störungen bzw. der Vertauschbarkeit der Grenzprozesse „Differentiation“ und „Konvergenz“. Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist wieder stetig. Die Frage ist nun, unter welchen Bedingungen für eine gleichmäßig konvergente Folge differenzierbarer Funktionen auch der Limes wieder differenzierbar ist.

Bemerkung 5.12: Die Problematik dieser Frage wird durch die folgenden pathologischen Beispiele illustriert:

1) Eine gleichmäßig konvergente Folge differenzierbarer Funktionen mit nicht differenzierbarem Limes:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \leq \frac{1}{n}, \\ |x|, & |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Die Funktionen sind überall differenzierbar und konvergieren auf \mathbb{R} gleichmäßig gegen die in $x_0 = 0$ nicht differenzierbare Betragsfunktion.

2) Eine Folge differenzierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion konvergiert, aber die Folge der Ableitungen divergiert:

$$f_n(x) := \frac{\sin(n^2x)}{n}.$$

Die Funktionen sind überall differenzierbar und konvergieren auf \mathbb{R} gleichmäßig gegen die (differenzierbare) Nullfunktion $f(x) \equiv 0$. Die Folge der Ableitungen $f'_n(x) = n \cos(n^2x)$ ist aber z. B. in den Punkten $x = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) divergent.

3) Eine Folge differenzierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion konvergiert, die Folge der Ableitungen konvergiert ebenfalls (nicht gleichmäßig), aber nicht gegen die Ableitung der Grenzfunktion:

$$f_n(x) := x - \frac{x^n}{n}.$$

Die Funktionen sind auf $I = [0, 1]$ differenzierbar und konvergieren dort gleichmäßig gegen die differenzierbare Funktion $f(x) = x$. Die Folge der Ableitungen $f'_n(x) = 1 - x^{n-1}$ konvergiert ebenfalls in I , aber in $x_0 = 1$ nicht gegen die Ableitung der Grenzfunktion $f'(1) = 1$.

Diese Beispiele zeigen, dass die Voraussetzungen des folgenden Satzes in gewissem Sinne notwendig sind.

Satz 5.11 (Stabilität der Differenzierbarkeit): Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf einem (beschränkten) Intervall I (offen oder abgeschlossen), welche punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Ist die Folge der Ableitungen

$(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen ein f^* , so ist auch f differenzierbar, und es gilt $f' = f^*$, d. h.:

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n. \quad (5.4.45)$$

Beweis: Sei $x_0 \in I$. Wir definieren auf I eine Funktion $\Delta(x)$ durch

$$\Delta(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f^*(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Die Differenzierbarkeit von f in x_0 mit der Ableitung $f'(x_0) = f^*(x_0)$ ist dann gleichbedeutend mit der Stetigkeit von $\Delta(x)$ in $x = x_0$. Für $x \in I \setminus \{x_0\}$ konvergiert

$$\Delta_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \Delta(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es nun Punkte $\xi_n \in I$, zwischen x und x_0 , so dass

$$f'_n(\xi_n) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \Delta_n(x).$$

Folglich ist

$$\Delta(x) - \Delta(x_0) = \Delta(x) - \Delta_n(x) + f'_n(\xi_n) - f^*(x_0).$$

Sei nun ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, so daß für alle $n \geq n_0$ und $x \in U_\delta(x_0) := \{x \in I \mid |x - x_0| < \delta\}$ gilt:

$$|f'_n(x) - f^*(x_0)| \leq |f'_n(x) - f^*(x)| + |f^*(x) - f^*(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Hier wird die gleichmäßige Konvergenz $f'_n \rightarrow f^*$ und die Stetigkeit von f^* verwendet. Mit $x \in U_\delta(x_0)$ gilt auch $\xi_n \in U_\delta(x_0)$. Zu beliebigem $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ können wir nun ein $n_1(x) \geq n_0$ finden, so dass für alle $n \geq n_1(x)$ gilt:

$$|\Delta(x) - \Delta_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Für beliebiges $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ folgt dann, dass für $n \geq n_1(x)$ die Abschätzung gilt:

$$|\Delta(x) - \Delta(x_0)| \leq |\Delta(x) - \Delta_n(x)| + |f'_n(\xi_n) - f^*(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig war, erhalten wir die Konvergenz $\Delta(x) \rightarrow \Delta(x_0)$ ($x \rightarrow x_0$). Q.E.D.

Als wichtige Folgerung von Satz 5.11 ergibt sich die folgende Aussage über die gliedweise Differenzierbarkeit von Funktionenreihen.

Korollar 5.8: Seien f_k stetig differenzierbare Funktionen auf dem beschränkten Intervall I (offen oder abgeschlossen) mit Ableitungen f'_k . Wenn die Partialsummen $\sum_{k=1}^n f_k$ punktweise und $\sum_{k=1}^n f'_k$ auf I gleichmäßig konvergieren, so darf in den zugehörigen Reihen gliedweise differenziert werden und es gilt:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k. \quad (5.4.46)$$

Wir wenden das letzte Resultat auf Potenzreihen an und klären insbesondere ihren Zusammenhang mit den Taylor-Reihen.

Korollar 5.9: Eine Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ stellt eine in ihrem Konvergenzintervall $I := (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ differenzierbare Funktion f dar, und zwar ist

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-x_0)^{k-1}. \quad (5.4.47)$$

Diese durch gliedweise Ableitung entstandene Potenzreihe hat ebenfalls den Konvergenzradius ρ . Durch Iteration dieses Prozesses sieht man, daß die Potenzreihe, d.h. die Funktion f , Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, welche durch sukzessive gliedweise Differentiation in der Reihe gewonnen werden können. Die Potenzreihe ist dann identisch mit der Taylor-Reihe der Funktion f .

Beweis: Der Konvergenzradius der gliedweise abgeleiteten Reihe sei ρ^* . Es gilt

$$\rho^* = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k c_k|}} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{k} \sqrt[k]{|c_k|})} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \rho.$$

Da eine Potenzreihe in jedem kompakten Teilintervall ihres Konvergenzintervalls gleichmäßig konvergiert, folgt die Richtigkeit der ersten Behauptung aus Korollar 5.8. Durch n -malige Ableitung der Potenzreihe erhalten wir

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)(x-x_0)^{k-n}$$

und folglich, wenn $x = x_0$ gesetzt wird: $f^{(n)}(x_0) = c_n n!$. Die Potenzreihe stimmt also mit der Taylor-Reihe der durch sie dargestellten Funktion überein. Q.E.D.

Beispiel 5.7: 1) Die Sinus-Funktion besitzt gemäß Abschnitt 4.3.3 die Potenzreihendarstellung

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$

Gliedweise Differentiation ergibt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots,$$

welche gerade die Potenzreihendarstellung der Cosinus-Funktion ist, d. h.:

$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

2) Die Arcus-Tangens-Funktion besitzt die Ableitung

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Die geometrische Reihe konvergiert absolut für Argumente $z = -x^2 \in I := (-1, 1)$ mit dem Limes

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Wir haben somit eine Potenzreihendarstellung von $\arctan(x)$:

$$\arctan'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

welche auf jedem Teilintervall $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gleichmäßig konvergiert. Diese Reihe ist zugleich auch die Ableitung der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

welche ebenfalls auf $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ gleichmäßig konvergiert. Somit gilt mit einem $c \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + c. \quad (5.4.48)$$

Wegen $\arctan(0) = 0$ ist $c = 0$, und wir haben eine Potenzreihendarstellung des Arcus-Tangens gefunden.

Eine weitere Anwendung von Satz 5.11 sichert die Vollständigkeit der Räume stetig differenzierbarer Funktionen.

Korollar 5.10: *Der normierte Raum $C^m[a, b]$ der auf dem Intervall $[a, b]$ m -mal stetig differenzierbaren Funktionen, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{m;\infty}$, ist vollständig.*

Beweis: Der Beweis wird als Übungsaufgabe gestellt.

Q.E.D.

5.5 Übungen

Übung 5.1 (Aufgabe zum Differenzieren): Man gebe die Ableitungen der folgenden Funktionen an:

$$a) \quad f(x) = x \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad b) \quad f(x) = x^{1/(x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Übung 5.2 (Aufgabe zum Differenzieren): Man betrachte die für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

definierten Funktionen $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Funktionen sind offenbar für $x \neq 0$ beliebig oft differenzierbar.

- a) Man zeige, dass die Funktion f_1 in $x = 0$ stetig aber nicht differenzierbar ist.
- b) Man zeige, dass die Funktion f_2 in $x = 0$ einmal differenzierbar, aber die Ableitung dort nicht stetig ist.
- c) Ist die Funktion f_3 in $x = 0$ zweimal differenzierbar und ist diese Ableitung gegebenenfalls stetig (Antwort mit Begründung!)?

Übung 5.3 (Aufgabe zu höheren Ableitungen): Man bestimme die folgenden Ableitungen 10-ter Ordnung:

$$a) \frac{d^{10}}{dx^{10}}(\sin(x) \cos(x)), \quad b) \frac{d^{10}}{dx^{10}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (x \neq 1).$$

(Hinweis: Erst denken, dann rechnen!)

Übung 5.4 (Aufgabe zur Konvexität): Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „strikt konvex“, wenn für alle $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

- a) Man zeige, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, für die $f'' > 0$ ist, auf (a, b) strikt konvex ist.
- b) Auf welchen Intervallen ist die Cosinus-Funktion $f(x) = \cos(x)$ strikt konvex? (Die Anschauung kann hier einen Hinweis geben, im Beweis ist aber analytisch zu argumentieren.)

Übung 5.5 (Aufgabe zum Extremum): Man bestimme die Extrema der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

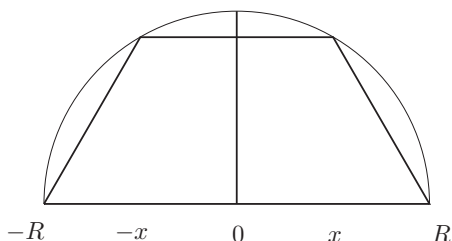
$$a) f(x) = x^x, \quad b) f(x) = x^{1/x}.$$

Übung 5.6 (Aufgabe zum Extremum): Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ die durch

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x = n$ ein striktes, globales Maximum hat.

Übung 5.7 (Aufgabe zum Extremum): In einem Halbkreis vom Radius R ist ein eingeschriebenes Trapez größten Inhalts zu konstruieren (s. Abbildung). Die Länge der unteren Seite des Trapezes ist $2R$; zu bestimmen ist die Länge der oberen Seite $2x$ des „optimalen“ Trapezes.



Übung 5.8 (Aufgabe zum Mittelwertsatz): Man bestimme die punktweisen Grenzwerte der beiden durch

$$a) \quad f_n(x) := \sin\left(\frac{1}{n}x\right), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad b) \quad f_n(x) := nx(1-x)^n, \quad x \in [0, 1],$$

definierten Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist die Konvergenz gleichmäßig? (Hinweis: Zur Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz soll der 1. Mittelwertsatz verwendet werden.)

Übung 5.9 (Aufgabe zur Taylor-Entwicklung): Man bestimme die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ der für $x \neq -1$ definierten Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Wie groß ist der Konvergenzbereich dieser Taylor-Reihe, und stellt sie die Funktion dar?

Übung 5.10 (Aufgabe zur Taylor-Entwicklung): Man bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f(x) = \sin^2(x)$$

um $x_0 = 0$. Für welche x ist diese Reihe konvergent und stellt die Funktion f dar?

Übung 5.11 (Aufgabe zu Differenzenquotienten): Zur Approximation der ersten und zweiten Ableitungen einer ein- bzw. zweimal differenzierbaren Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ können die sog. „vorwärts genommenen“ Differenzenquotienten 1. Ordnung bzw. 2. Ordnung verwendet werden:

$$D_h^{(1)} f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0), \quad x_0 + h \in (a, b),$$

$$D_h^{(2)} f(x_0) := \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} \approx f''(x_0), \quad x_0 + 2h \in (a, b).$$

Man leite unter der Annahme der zwei- bzw. dreimaligen Differenzierbarkeit von f Fehlerabschätzungen der folgenden Form

$$\begin{aligned} |D_h^{(1)} f(x_0) - f'(x_0)| &\leq ch \sup_{x \in (a,b)} |f^{(2)}(x)|, \\ |D_h^{(2)} f(x_0) - f''(x_0)| &\leq ch \sup_{x \in (a,b)} |f^{(3)}(x)|, \end{aligned}$$

ab mit Angabe der Konstante c . (Hinweis: Man betrachte die Taylor-Entwicklungen der Differenzenquotienten.)

Übung 5.12 (Aufgabe zu Differenzenquotienten): Zur Approximation der ersten und zweiten Ableitungen einer ein- bzw. zweimal differenzierbaren Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ können die sog. „zentrale Differenzenquotienten“ 1. Ordnung bzw. 2. Ordnung verwendet werden:

$$\begin{aligned} D_h^{(1)} f(x_0) &:= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \approx f'(x_0), \\ D_h^{(2)} f(x_0) &:= \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \approx f''(x_0). \end{aligned}$$

Man zeige unter der Annahme der drei- bzw. viermaligen Differenzierbarkeit von f die folgenden Fehlerabschätzungen:

$$\begin{aligned} |D_h^{(1)} f(x_0) - f'(x_0)| &\leq \frac{1}{6} h^2 \sup_{x \in (a,b)} |f^{(3)}(x)|, \\ |D_h^{(2)} f(x_0) - f''(x_0)| &\leq \frac{1}{12} h^2 \sup_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)|. \end{aligned}$$

(Hinweis: Man betrachte die Taylor-Entwicklungen der Differenzenquotienten.)

Übung 5.13 (Aufgabe zu den Regeln von L'Hospital): Man untersuche, wenn möglich, mit Hilfe der Regeln von L'Hospital die folgenden Grenzprozesse:

$$\begin{aligned} a) \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}, \\ b) \quad &\lim_{x \rightarrow \infty} x((1+x^{-1})^x - e), \\ c) \quad &\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^{-x}}{x}. \end{aligned}$$

(Hinweis: Für Teil b) versuche man zunächst die Transformation $y := x^{-1}$.)

Übung 5.14 (Aufgabe zu den Regeln von L'Hospital): Man versuche, mit Hilfe der Regeln von L'Hospital die folgenden Grenzwerte zu bestimmen:

$$a) \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x}, \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Übung 5.15 (Aufgabe zu den Regeln von L'Hospital): Man berechne mit Hilfe der Regeln von L'Hospital die folgenden Grenzwerte:

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \tan(x)^{\cot(x)}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{1/\sin(x)}.$$

Übung 5.16 (Aufgabe zum Newton-Verfahren): Addition und Multiplikation reeller Zahlen sind (sowohl per Hand als auf dem Digitalrechner) in der Regel wesentlich schneller zu bewerkstelligen als die Division. Daher ist es wünschenswert, letztere auf eine Folge von Additionen und Multiplikationen zurückzuführen.

a) Man zeige, dass dies mit Hilfe des Newton-Verfahrens möglich ist. Dazu wende man dieses auf die Funktion

$$f(x) = x^{-1} - a, \quad a \neq 0,$$

an. Dabei genügt es, Argumente $1 \leq a < 10$ zu betrachten.

b) Für welche Startwerte ist die Iteration quadratisch konvergent?

c) Wie viele Schritte sind in etwa erforderlich, um ausgehend von dem Startwert $x_0 := 0,5$ stets eine Genauigkeit von 16 Dezimalstellen (Rundungsfehlergenauigkeit) zu erhalten. Dabei sei „exakte“ Rechner-Arithmetik angenommen. (Hinweis: Man versuche direkt eine Beziehung der Form $|x_{n+1} - x_*| \leq A|x_n - x_*|^2$ herzuleiten.)

Übung 5.17 (Aufgabe zur Vertauschung von Grenzprozessen): Man rekapituliere die Definition einer „analytischen Funktion“ und zeige a) dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$ konvergiert und b) eine analytische Funktion darstellt. (Hinweis: Man rechtfertige die gliedweise Ableitung der Reihe.)

Übung 5.18 (Aufgabe zu Funktionenräumen): Man zeige, dass die Menge der auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $I := [a, b]$ Lipschitz-stetigen Funktionen einen Vektorraum bildet, auf welchem durch

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \max_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x, y \in I, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

eine Norm definiert ist. Ist der so gewonnene normierte Raum $C^{0,1}[a, b]$ vollständig?

Übung 5.19 (Aufgabe zu Funktionenräumen): Man zeige, dass für $m \in \mathbb{N}_0$ bildet die Menge der auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ m -mal stetig differenzierbaren Funktionen einen Vektorraum bildet; auf diesem ist durch

$$\|f\|_{m; \infty} := \max_{k=0, \dots, m} \|f^{(k)}\|_{\infty}$$

eine Norm definiert. Man zeige weiter, dass der Raum $C^m[a, b]$ vollständig und damit ein Banach-Raum ist.