

3 Die Grundgleichungen der Strukturmechanik

3.1 Mathematische Modelle

Wir betrachten nun die mathematische Beschreibung des Verhaltens *elastischer* Körper unter äußeren Belastungen. Im Gegensatz zu den Flüssigkeiten, bei denen die „Veränderungsgeschwindigkeit“ der physikalischen Größen interessiert, möchte man beim Festkörper das Resultat des Übergangs von einer statischen Gleichgewichtslage unter Belastung in eine neue Lage. Gesucht ist also der Verschiebungsvektor $u(\xi, t)$ der Deformation

$$\xi = x(\xi, 0) \rightarrow x(\xi, t) = \xi + u(\xi, t), \quad \xi \in \Omega_0,$$

eines Körpers in der Ausgangskonfiguration $\Omega := \Omega(0)$ in die neue Konfiguration $\Omega(t)$. Dabei interessiert man sich meist für die Deformation in eine neue Gleichgewichtslage $\Omega(1)$ mit Deformation $u(\xi, 1)$ oder ein angeregter Schwingungsvorgang, bei dem die Deformation $u(\xi, t)$ einen zeitlich periodischen Verlauf hat. Bei der Beschreibung dieser Vorgänge bedienen wir uns der Lagrangesche Koordinaten einer ausgewählten Referenzkonfiguration (meist der unbelasteten Ruhekonfiguration).

3.1.1 Das allgemeine nichtlineare Modell

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall der durch eine instationäre Belastung mit Volumenkraftdichte $f(\xi, t)$ und Oberflächenkraftdichte $g(\xi, t)$ verursachten Deformation $u(\xi, t)$ aus der Ruhekonfiguration Ω mit $u(\xi, 0) = u^0(\xi)$. Als erstes müssen wir alle in den allgemeinen Erhaltungssätzen erscheinenden Größen bzgl. des ξ -Systems ausdrücken. Der Einfachheit halber machen wir die folgenden Annahmen:

- **Isothermer Prozess:** Die Deformation des Körpers aus der Referenzkonfiguration Ω erfolgt *isotherm*, so dass keine durch Temperaturgradienten bedingte mechanische Effekte auftreten. (Thermodynamische Effekte werden aber wichtig bei der Betrachtung von Körpern aus bestimmten nicht-elastischen Materialien.)
- **Referenzkonfiguration:** In der Referenzkonfiguration sind die Massedichte $\rho^0(\xi)$, die Materialeigenschaften und die Volumenkraftdichte $f^0(\xi, t)$ bekannt.

Wir brauchen hier also nur die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls (Drehimpuls) zu berücksichtigen. Bezogen auf das Momentansystem des deformierten Körpers lauten diese in integraler Form wie folgt:

- Masseerhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x, t) dx = 0; \tag{3.1.1}$$

– Impulserhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x, t) v(x, t) dx = \int_{V(t)} \rho(x, t) f(x, t) dx + \int_{\partial V(t)} n(x) \cdot \sigma(x, t) do_x, \quad (3.1.2)$$

mit der Massedichte $\rho(x, t)$, der Volumenkraftdichte $f(x, t)$, dem Geschwindigkeitsvektor

$$v(x, t) = v(\xi(x, t), t) = \partial_t x(\xi, t) = \partial_t \{\xi + u(\xi, t)\} = \partial_t u(\xi, t),$$

und dem Cauchyschen Spannungstensor $\sigma(x, t)$. In der strömungsmechanischen Betrachtung werden aus diesen Gleichungen mit dem Reynoldsdenschen Transporttheorem Gleichgewichtsgleichungen bezogen auf das Momentansystem $x = x(\xi, t)$ abgeleitet. In der strukturmechanischen Betrachtung wollen wir anders vorgehen. Die Erhaltungsgleichungen werden zunächst auf das Ausgangssystem ξ bezogen umgeschrieben und dann die zeitlichen Ableitungen ausgeführt.

a) Masseerhaltung:

Sei $V(t) \subset \Omega(t)$ ein (beliebiges) Volumenelement der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t , welches durch Deformation des Volumens $V \subset \Omega$ in der Grundkonfiguration entsteht:

$$x \in V(t) : \quad x(\xi, t) = \xi + u(\xi, t), \quad \xi \in V.$$

Die Transformationsformel (1.1.8) für Volumenintegrale ergibt

$$\int_{V(t)} \rho(x, t) dx = \int_V \rho(x(\xi, t), t) \det(x'(\xi, t)) d\xi,$$

und bei Beachtung von $\det(x'(\xi, t)) = \det(I + \nabla u(\xi, t))$:

$$\int_{V(t)} \rho(x, t) dx = \int_{V_0} \rho(x(\xi, t), t) \det(I + \nabla u(\xi, t)) d\xi.$$

Mit der bekannten Massedichte $\rho^0(\xi)$ des Referenzsystems gilt daher:

$$\rho(x(\xi, t), t) = \det(I + \nabla u(\xi, t))^{-1} \rho^0(\xi). \quad (3.1.3)$$

Die momentane Massedichte $\rho(x, t)$ ist also bestimmt durch die als bekannt angenommene Referenzmassedichte $\rho^0(\xi)$ und die gesuchte Deformation $u(\xi, t)$. Sie wird daher im folgenden nicht als eigenständige Unbekannte betrachtet. Die Bedingung der Masseerhaltung ist dabei automatisch erfüllt:

$$\int_{V(t)} \rho(x, t) dx = \int_V \rho^0(\xi) d\xi, \quad t \geq 0.$$

b) Impulserhaltung:

Der Geschwindigkeitsvektor in der Momentankonfiguration $v(x, t)$ hat bezogen auf das Referenzsystem die Form $v(x, t) = \partial_t u(\xi, t)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x) v(x) dx &= \frac{d}{dt} \int_V \rho(x(\xi, t), t) \partial_t u(\xi, t) \det(I + \nabla u(\xi, t)) d\xi \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \rho^0(\xi) \partial_t u(\xi, t) \partial \xi = \int_V \rho^0(\xi) \partial_t^2 u(\xi, t) \partial \xi. \end{aligned}$$

Der Volumenkraftterm wird wie folgt umgeschrieben:

$$\int_{V(t)} \rho f dx = \int_V \rho(x(\xi, t), t) f(x(\xi, t), t) \det(I + \nabla u(\xi, t)) d\xi = \int_V \rho^0(\xi) f(\xi + u(\xi, t), t) d\xi.$$

Mit dem oben abgeleiteten Kirchhoffschen Spannungstensor $k(\xi, t)$ gilt weiter:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V(t)} n(x) \cdot \sigma(x, t) do_x &= \int_{\partial V} \{I + \nabla u(\xi, t)\} k(\xi, t) \cdot n(\xi) do_\xi \\ &= \int_V \nabla \cdot (\{I + \nabla u(\xi, t)\} k(\xi, t)) d\xi. \end{aligned}$$

Die Impulserhaltung im Volumen $V(t)$ erhält also die Form

$$\int_V \rho^0(\xi) \partial_t^2 u(\xi, t) \partial \xi = \int_V \{ \rho^0(\xi) f^0(\xi, t) + \nabla \cdot (\{I + \nabla u(\xi, t)\} k(\xi, t)) \} d\xi.$$

Da das Volumen $V \subset \Omega$ beliebig gewählt ist, folgt wegen der angenommenen Stetigkeit aller involvierten Größen die punktweise Gleichgewichtsbeziehung

$$\rho^0(\xi) \partial_t^2 u(\xi, t) - \nabla \cdot (\{I + \nabla u(\xi, t)\} k(\xi, t)) = \rho^0(\xi) f(\xi + u(\xi, t), t). \quad (3.1.4)$$

Das allgemeine Anfangs-Randwertproblem der Elastizitätstheorie

Mit den bisher bereitgestellten Begriffen und Beziehungen kann nun das allgemeine Anfangs-Randwertproblem für die Deformation eines elastischen Körpers formuliert werden. Vorgegeben seien:

1. ein physikalischer Körper, dessen Massepunkte im kräftefreien Grundzustand ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit den oben vereinbarten Regularitätseigenschaften einnehmen;
2. eine Massedichte $\rho^0(\xi)$ in der Referenzkonfiguration;
3. eine äußere masse-orientierte Volumenkraft mit Kraftdichte $f(x, t)$ in $\Omega(t)$;
4. eine Oberflächenbelastung mit Dichte $q^\partial(x, t)$ entlang einer Randkomponente $\partial\Omega_\sigma(t) \subset \partial\Omega(t)$;
5. eine Randverschiebung $u^\partial(\xi, t)$ auf der Randkomponente $\partial\Omega_u := \partial\Omega \setminus \partial\Omega_\sigma$.

Es sei weiter angenommen, dass der Körper unter der Einwirkung der äußeren Kräfte (3) und (4) bei Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen (5) eine Deformation

$$\xi \rightarrow \xi + u(\xi, t)$$

erfährt. Gefragt ist dann nach dem zugehörigen Verschiebungsfeld $u(\xi, t)$, nach dem Verzerrungstensor $\epsilon(\xi, t)$, welcher die Verformung des Körpers beschreibt, und nach dem Kirchhoffschen Spannungstensor $k(\xi, t)$, welcher die innere Belastung des Materials durch diese Verformung wiedergibt. Zur Bestimmung dieser 15 unabhängigen Größen (in drei Dimensionen und bei Berücksichtigung der Symmetrie der Tensoren ϵ und k) stehen bisher die folgenden Gleichungen zur Verfügung:

- 6 kinematische Gleichungen:

$$\epsilon(\xi, t) = \frac{1}{2}(\nabla u(\xi, t) + \nabla u(\xi, t)^T + \nabla u(\xi, t)^T \nabla u(\xi, t)) \quad (3.1.5)$$

für $\xi \in \Omega$, $t \geq 0$;

- 3 statische Gleichgewichtsbedingungen:

$$\rho^0(\xi) \partial_t^2 u(\xi, t) - \nabla \cdot (\{I + \nabla u(\xi, t)\} k(\xi, t)) = \rho^0(\xi) f(\xi + u(\xi, t), t) \quad (3.1.6)$$

für $\xi \in \Omega$, $t \geq 0$;

- kinematische Randbedingungen:

$$u(\xi, t) = u^\partial(\xi, t) \quad \text{für } \xi \in \partial\Omega_u, t \geq 0; \quad (3.1.7)$$

- statische Randbedingungen:

$$n \cdot (\{I + \nabla u(\xi, t)\} k(\xi, t)) = q^\partial(\xi + u(\xi, t), t) \quad \text{für } \xi \in \partial\Omega_\sigma, t \geq 0; \quad (3.1.8)$$

- Anfangsbedingungen:

$$u(\xi, 0) = u^0(\xi), \quad \partial_t u(\xi, 0) = v^0(\xi) \quad \text{für } \xi \in \Omega. \quad (3.1.9)$$

Die noch fehlenden 6 Bestimmungsgleichungen werden durch das sog. „Elastizitätsgesetz“ geliefert, welches Spannungs- und Verzerrungstensor verknüpft (homogenes Material):

$$k(\xi, t) = C(\epsilon(\xi, t)). \quad (3.1.10)$$

Für das Anfangs-Randwertproblem (3.1.5) - (3.1.10) in seiner vollen Allgemeinheit gibt es keine mathematische Theorie, welche die Existenz von Lösungen, deren Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Daten sichert (Wohlgestelltheit des Modells). Um solche Aussagen zu gewinnen, müssen gravierende Einschränkungen an die Struktur des Problems gemacht werden. Das ist der Gegenstand der folgenden Diskussion.

3.1.2 Linearisierte Modelle

Ausgehend von dem obigen allgemeinen (nichtlinearen) Modell erhält man durch vereinfachende Annahmen verschiedene linearisierte Modelle von wesentlich einfacherer Struktur. Wir werden im folgenden nur die sog. „lineare Theorie“ elastischer Deformationen entwickeln. Diese ist gekennzeichnet durch die Annahmen:

- Es treten nur (relativ) kleine Verschiebungen und Verzerrungen auf, $\|u\| \ll \text{diam}(\Omega)$ und $\|\nabla u\| \ll 1$, so dass alle physikalischen Größen direkt auf ein festes kartesisches Koordinatensystem bezogen werden können. Man nennt die resultierende Theorie „kinematisch linear“.
- Es liegt *lineares* Materialverhalten vor, d. h.: Verzerrungen und Spannungen sind „proportional“ zu einander. Man nennt die resultierende Theorie „statisch linear“.
- Das Materialverhalten ist *isotherm* und *isotrop*, d. h. temperaturunabhängig und invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems.
- Die Massedichte ρ bleibt unter der Verschiebung $\xi \rightarrow \xi + u(\xi)$ gleich und wird daher beim Deformationsvorgang nicht weiter betrachtet. Der Einfachheit halber setzen wir daher im Folgenden $\rho^0 \equiv 1$.

Die erste Annahme ist eine starke Einschränkung, da sie große Deformationen, wie sie z. B. bei Prozessen in der Umformtechnik (Karosseriebau) oder in der Tragwerktechnik (Brückenbau) auftreten, ausschließt. In einer „geometrisch“ *nichtlinearen* Theorie muss die Lageveränderung des Ausgangskörpers bei der Beschreibung des statischen Gleichgewichts berücksichtigt werden, was die resultierenden Gleichungen wesentlich verkompliziert. Die Annahme der „physikalischen“ Linearität im Materialgesetz ist bei den meisten Materialien (z. B. Stahl, Keramik, Hartplastik) ausreichend gut erfüllt. Speziellere Werkstoffe wie Gummi, Weichplastik sowie komplexere Faser- und Verbundwerkstoffe erfordern aber eine *nichtlineare* Beschreibung. Nicht-isothermes Materialverhalten liegt z. B. vor bei der Beschreibung des Fahrverhaltens von Autoreifen und bei der Bearbeitung von Walzstahl.

Kinematische Linearisierung (kleine Verzerrungen)

Unter der Annahme kleiner Deformationen $\|\nabla u(\xi, t)\| \ll 1$ können Terme, welche *quadratisch* in ∇u sind, gegenüber den *linearen* sowie solche *linearen* Terme gegenüber *konstanten* vernachlässigt werden. Dementsprechend werden der Verzerrungstensor in der linearen Form

$$\epsilon \approx \frac{1}{2} \{ \nabla u + \nabla u^T \}$$

und der Deformationsgradient in der konstanten Form

$$I + \nabla u \approx I$$

approximiert. Letzteres impliziert wegen

$$\det(x') = \det(I + \nabla u) \approx 1, \quad \text{adj}(\partial_i x_i) \approx \delta_{ij},$$

dass Kirchhoffscher und Cauchyscher Spannungstensor zusammenfallen:

$$k_{ij}(\xi) := \frac{\text{adj}(\partial_l x_i)}{\Delta_x} l_{lj} = \frac{\text{adj}(\partial_l x_i) \text{adj}(\partial_k x_j)}{\Delta_x} \sigma_{lk} \approx \sigma_{ij}(x(\xi)).$$

Darüberhinaus werden das ξ -System (Lagrangesche Koordinaten) und das x -System (Eulersche Koordinaten) identifiziert. Die Momentengleichung (3.1.6) kann unter diesen Annahmen also in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\partial_t^2 u(\xi, t) - \nabla \cdot \sigma(\xi, t) = f(\xi, t) \quad \text{für } \xi \in \Omega, t \geq 0. \quad (3.1.11)$$

Statische Linearisierung (Hooksches Gesetz)

Nach Satz 2.2 hat im Fall *isotropen* Materialverhaltens das Materialgesetz notwendig die Form

$$k(\xi, t) = \varphi_0 I + \varphi_1 \epsilon(\xi, t) + \varphi_2 \epsilon(\xi, t)^2 \quad (3.1.12)$$

mit nur von den Tensorinvarianten

$$I_1(k) = \text{spur}(k), \quad I_2(k) = \frac{1}{2} \{k_{ij} k_{ji} - k_{ii} k_{jj}\}, \quad I_3(k) = \det(k),$$

abhängenden Funktionen $\varphi_i = \varphi_i(I_1, I_2, I_3)$. Unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Verzerrungen und resultierenden Spannungen ergibt sich aus der allgemeinen Theorie das Materialgesetz (für isotherme und isotrope Medien) in der Form

$$k = 2\mu\epsilon + \lambda \text{spur}(\epsilon) I \quad (3.1.13)$$

mit den möglicherweise ortsabhängigen sog. „Laméschen¹ Elastizitätskonstanten“ μ und λ . Diese Beziehung wird als „Hooksches² Gesetz“ bezeichnet. Bei gleichzeitiger kinematischer Linearisierung erhalten wir also das voll linearisierte Materialgesetz

$$\sigma = \mu \{ \nabla u + \nabla u^T \} + \lambda \nabla \cdot u I. \quad (3.1.14)$$

Bemerkung 3.1: Wir merken an, dass zur Herleitung der obigen einfachen Gestalt des Materialgesetzes mit nur zwei Materialparametern μ und λ die *Isotropie* des Materialverhaltens, d. h. seine Richtungsunabhängigkeit, angenommen wurde. In der Praxis spielen

¹Gabriel Lamé (1795–1870): Französischer Mathematiker und Physiker; arbeitete zunächst in Sankt Petersburg und danach als Prof. an der École Polytechnique in Paris; Beiträge zur Differentialgeometrie und mathematischen Physik, insbesondere zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung (Lamésche Kurven), die nach ihm benannten Konstanten spielen eine wichtige Rolle in der Elastizitätstheorie und der Strömungsmechanik.

²Robert Hooke (1635–1703): Englischer Universalgelehrter; Prof. für Geometrie am Gresham College in London; arbeitete als Zeichner, Vermesser, Architekt und Instrumentenbauer; Mitbegründer der Royal Society 1662; entdeckte den großen roten Fleck auf dem Jupiter und prägte den Begriff „Zelle“, hauptsächlich bekannt durch das nach ihm benannte Elastizitätsgesetz.

aber auch *anisotrope* Materialien eine große Rolle (z. B. geschichtete Materialien und Verbundstoffe). Zu deren Beschreibung werden allgemeine lineare Beziehungen

$$\sigma = C\epsilon$$

mit einem Materialtensor $C = (C_{ijkl})_{i,j,k,l=1}^3$ verwendet. Die Zahl der im Materialtensor enthaltenen freien Parameter wird eingeschränkt durch die Forderung, dass symmetrische Tensoren in symmetrische Tensoren abgebildet werden,

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk}, \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.1.15)$$

Diese Symmetrieeigenschaft impliziert die Beziehung

$$C\epsilon = \frac{1}{2}C_{ijkl}\{\partial_l u_k + \partial_k u_l\} = C_{ijkl}\partial_k u_l = C\nabla u.$$

Der Körper heißt „homogen“, wenn seine physikalischen Eigenschaften unabhängig vom Betrachtungspunkt sind, d. h.: C ist ein Tensor elastischer Konstanten:

$$C(\xi) \equiv C, \quad \xi \in \Omega.$$

Häufig können Symmetrieeigenschaften des elastischen Verhaltens des Materials zur weiteren Reduzierung der Anzahl der freien Parameter verwendet werden. Dies wird im Folgenden erläutert. Zunächst stellen wir fest, dass die Tensoren

$$C_{ijkl}^1 := \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad C_{ijkl}^2 := \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$$

linear unabhängig und invariant gegenüber unitären Transformationen $D = (d_{ij})_{i,j=1}^3$ (Drehungen, Spiegelungen) sind:

$$d_{ip}d_{jq}d_{kr}d_{ls}C_{pqrs}^1 = d_{ip}d_{jp}d_{kr}d_{lr} = d_{ip}d_{pj}^T d_{kr}d_{rs}^T = C_{ijkl}^1$$

und analog für C^2 . Aufgrund der Symmetrieeigenschaft (3.1.15) besitzt der Materialtensor C höchstens 36 verschiedene Elemente, die wie folgt angeordnet werden:

$$C = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}_{1111}} & C_{1211} & C_{1311} & \underline{\mathbf{C}_{2211}} & C_{2311} & \mathbf{C}_{3311} \\ & \underline{\mathbf{C}_{1212}} & C_{1312} & C_{2212} & C_{2312} & C_{3312} \\ & & \mathbf{C}_{1313} & C_{2213} & C_{2313} & C_{3313} \\ & & & \mathbf{C}_{2222} & C_{2322} & \mathbf{C}_{3322} \\ C_{ijpq} & = C_{pqij} & & & \mathbf{C}_{2323} & C_{3323} \\ & & & & & \mathbf{C}_{3333} \end{bmatrix}.$$

i) Spiegelungsinvarianz: Aus der Invarianz gegenüber Spiegelungen an der (x_i, x_j) -Ebene,

$$d_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad d_{ii} = -1, \quad d_{jj} = 1, \quad i \neq j,$$

folgt notwendig für $i \notin \{j, k, l\}$:

$$C_{ijkl} = -d_{ji}d_{kk}d_{ll}C_{ijkl} = -C_{ijkl},$$

d. h.: Es ist $C_{ijkl} = 0$, falls ein Index $\tau \in \{1, 2, 3\}$ unter i, j, k, l nur einmal vorkommt. Dies reduziert die Anzahl der wesentlichen Elemente in C auf 12 (gekennzeichnet durch „Dickdruck“).

ii) Drehinvarianz: Ferner ist C invariant gegenüber orthogonalen Drehungen, d. h. gegenüber Permutationen der Koordinatenindizierung. Dies impliziert

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}, \quad C_{2211} = C_{3311} = C_{3322}.$$

Dies reduziert die Anzahl der wesentlich verschiedenen Elemente von C auf drei (gekennzeichnet durch Unterstreichung). Schließlich betrachten wir eine Drehung um die x_3 -Achse mit Drehwinkel $\alpha \rightarrow 0$:

$$D = \begin{bmatrix} \cos \text{kinematisch zu } \alpha & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{O}(\alpha^2) & \mathcal{O}(\alpha) & 0 \\ \mathcal{O}(\alpha) & 1 + \mathcal{O}(\alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$d_{ij} = (1 + \mathcal{O}(\alpha^2))\delta_{ij} + \mathcal{O}(\alpha)\varepsilon_{3ij}$, mit dem oben eingeführten ε -Tensor. Dann ist

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= d_{ip}d_{jq}d_{kr}d_{ls}C_{pqrs} \\ &= ((1 + \mathcal{O}(\alpha^2))\delta_{ip} + \mathcal{O}(\alpha)\varepsilon_{3ip})((1 + \mathcal{O}(\alpha^2))\delta_{jq} + \mathcal{O}(\alpha)\varepsilon_{3jq}) \times \\ &\quad \times ((1 + \mathcal{O}(\alpha^2))\delta_{kr} + \mathcal{O}(\alpha)\varepsilon_{3kr})((1 + \mathcal{O}(\alpha^2))\delta_{ls} + \mathcal{O}(\alpha)\varepsilon_{3ls})C_{pqrs} \\ &= C_{ijkl} + \mathcal{O}(\alpha)(\varepsilon_{3ip}C_{pjkl} + \varepsilon_{3jq}C_{iqkl} + \varepsilon_{3kr}C_{ijrl} + \varepsilon_{3ls}C_{ijks}) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

und folglich bei Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$:

$$\varepsilon_{3ip}C_{pjkl} + \varepsilon_{3jq}C_{iqkl} + \varepsilon_{3kr}C_{ijrl} + \varepsilon_{3ls}C_{ijks} = 0.$$

Wir wählen speziell $i = 1, j, k, l = 2$ und finden

$$\varepsilon_{312}C_{2222} + \varepsilon_{321}C_{1122} + \varepsilon_{321}C_{1212} + \varepsilon_{321}C_{1221} = 0$$

bzw.

$$C_{2222} - C_{1122} - C_{1212} = 0.$$

Dies reduziert die Anzahl der verschiedenen Elemente von C auf zwei.

Wir betrachten nun das Materialgesetz für den „homogenen“ und „isotropen“ Körper in etwas mehr Detail,

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \text{spur}(\epsilon)I, \quad (3.1.16)$$

wobei $\lambda(\xi) \equiv \lambda$ und $\mu(\xi) \equiv \mu$. Im Fall $\mu \neq 0$ und $3\lambda + 2\mu \neq 0$ besteht die Umkehrbeziehung

$$\epsilon = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\text{spur}(\sigma)I. \quad (3.1.17)$$

Mit der sog. „Poissonschen³ Querkontraktionszahl“ ν und dem „Youngschen⁴ Modul“ E definiert durch

$$\nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

schreiben wir dies in der Form

$$\epsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{spur}(\sigma) I. \quad (3.1.18)$$

Wir wollen den physikalisch möglichen Wertebereich für die Elastizitätskonstanten diskutieren. Im betrachteten Fall kleiner Verzerrungen ist:

- ϵ_{ii} ($i = 1, 2, 3$) relative Längenänderung in x_i -Richtung;
- $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\pi - \omega_{ij}\}$ ($i \neq j$) Winkeländerung in der (x_i, x_j) -Ebene;
- $\operatorname{spur}(\epsilon) = \epsilon_{ii}$ relative Volumenänderung;
- σ_{ij} x_j -Komponente der Flächenkraft zu Flächenelementen normal zur x_i -Achse.

Wir betrachten die folgenden Spezialfälle:

1. *Gleichförmiger Druck:* $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$.

Das Hooksche Gesetz (3.1.18) liefert die zugehörigen Verzerrungen

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \operatorname{spur}(\sigma) \delta_{ij} = -p \frac{1 - 2\nu}{E} \delta_{ij} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij}.$$

Da einem Druck (d. h. einer Kraft in negativer Normalenrichtung) eine Volumenverkleinerung entsprechen sollte, muss $3K = 3\lambda + 2\mu > 0$ (K „Kompressionsmodul“) sein.

2. *Reiner Druck in x_1 -Richtung:* $\sigma_{ij} = p \delta_{ij} \delta_{1j}$

mit den zugehörigen Verzerrungen

$$\epsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \epsilon_{11} = \frac{p}{E}, \quad \epsilon_{ii} = -\frac{\nu}{E} p \quad (i = 2, 3).$$

Da ein reiner Druck in x_1 -Richtung einer Kontraktion in x_2 - und x_3 -Richtung entsprechen sollte, muss $\nu > 0$ und $E > 0$ sein.

³Siméon Denis Poisson (1781–1840): Französischer Mathematiker und Physiker; Prof. in Paris; Beiträge zur mathematischen Formulierung der Physik, zum Magnetismus, zur Himmelsmechanik und Wahrscheinlichkeitsrechnung; einer der Begründer der Potentialtheorie.

⁴Thomas Young (1773–1829): Englischer Augenarzt und Physiker; Studium der Medizin in London und Edinburgh, Promotion zum Dr. med. 1796 in Göttingen; 1801–1804 Prof. für Physik am Royal Institute, dann praktizierender Arzt; Beiträge u. a. zu den Gebieten Optik, Elastizitätstheorie, Physiologie, Sprachen und Ägyptologie (Entzifferung der Hieroglyphen); postulierte u. a. den Wellencharakter des Lichts und maß als erster dessen Wellenlänge (Doppelspaltexperiment).

3. *Reine Scherung in der (x_1, x_2) -Ebene:*

$$\sigma = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \frac{a}{2\mu} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da einer positiven Kraft in x_2 -Richtung entlang von Flächenstücken normal zur x_1 -Achse eine Winkelvergrößerung entsprechen sollte, muss $\mu > 0$ sein.

Wir fassen die durch die obigen einfachen Tests gefundenen Bedingungen an die Elastizitätskonstanten zusammen:

$$\nu, \mu, E > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0. \quad (3.1.19)$$

Insbesondere ist also für den isotropen Körper stets die Invertierbarkeit des Elastizitätstensors gesichert. Bei Walzstahl verwendet man z. B. $\nu = 0,3$ und $E = 0,001$. Hier ist das *lineare* Hooksche Gesetz für einen ziemlich großen Deformationsbereich gut erfüllt. Für andere Materialien (z. B. Kunststoffe, „weiche“ Materialien) genügt ein linearer Ansatz jedoch nicht mehr.

Bemerkung 3.2: Zur Aufstellung eines nichtlinearen Materialgesetzes wird ausgegangen von den linearen Beziehungen $\sigma_0 = 3K\epsilon_0$ und $\sigma' = 2\mu\epsilon'$, mit den Tensoren $\sigma_0 := \frac{1}{3}\text{spur}(\sigma)$ und $\sigma' := \sigma - \sigma_0$ und entsprechend für ϵ . Man macht dann etwa den nichtlinearen Ansatz

$$\sigma_0 = 3K\kappa(\epsilon_0)\epsilon_0, \quad \sigma' = 2\mu\gamma(\psi_0^2)\epsilon'$$

mit einer sog. „Dehnungsfunktion“ $\kappa(\cdot)$ und einer „Scherungsfunktion“ $\gamma(\cdot)$ mit der Eigenschaft $\kappa(t), \gamma(t) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow 0$) und dem sog. „Schermaß“

$$\psi_0 := \frac{2}{3}((\epsilon_{11} - \epsilon_0)^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_0)^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_0)^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{13}^2))^{1/2}.$$

Die jeweilige Form der Funktionen $\kappa(\cdot)$ und $\gamma(\cdot)$, welche das nichtlineare Materialverhalten beschreiben, muss auf experimentellem Wege ermittelt werden.

3.1.3 Die Lamé-Naviersche Anfangs-Randwertaufgabe

Nach kinematischer und statischer Linearisierung und Annahme von isothermem und isotropem Materialverhalten erhält das allgemeine System (3.1.5-3.1.12) die folgende vereinfachte Form:

- kinematische Gleichungen: $\epsilon = \frac{1}{2}\{\nabla u + \nabla u^T\}$;
- statische Gleichungen: $\partial_i^2 u - \nabla \cdot \sigma = f$;
- Materialgesetz: $\sigma = C\epsilon = 2\mu\epsilon + \lambda\text{spur}(\epsilon)I$

sowie die oben angegebenen statischen sowie kinematischen Randbedingungen und die Anfangsbedingungen. Die Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie lautet demnach:

$$\partial_t^2 u(\xi, t) - \nabla \cdot \{C \nabla u(\xi, t)\} = f(\xi, t) \quad \text{für } \xi \in \Omega, t \geq 0, \quad (3.1.20)$$

$$u(\xi, t) = u^0(\xi, t) \quad \text{für } \xi \in \partial\Omega_u, t \geq 0, \quad (3.1.21)$$

$$n \cdot C \nabla u(\xi, t) = p(\xi, t) \quad \text{für } \xi \in \partial\Omega_\sigma, t \geq 0, \quad (3.1.22)$$

$$u(\xi, 0) = u^0(\xi), \quad \partial_t u(\xi, 0) = v^0(\xi) \quad \text{für } \xi \in \Omega. \quad (3.1.23)$$

Dieses System von Gleichungen wird als „Lamé-Naviersche⁵ Anfangs-Randwertaufgabe“ bezeichnet. Bei Beachtung der konkreten Form von C mit konstanten Elastizitätskoeffizienten μ und λ lautet die statische Gleichgewichtsgleichung

$$\partial_t^2 u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u = f, \quad (3.1.24)$$

im festen Referenzgebiet Ω .

Bemerkung 3.3: Zum Vergleich mit (3.1.20) rekapitulieren wir die entsprechende Momentengleichung der Strömungsmechanik (bei konstantem Viskositätskoeffizienten μ):

$$\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \mu \Delta v - \frac{1}{3} \mu \nabla \nabla \cdot v + \nabla p = \rho f. \quad (3.1.25)$$

im üblicherweise als fest angenommenem Lösungsgebiet $\Omega(t) = \Omega$. Die beiden Darstellungen (3.1.24) und (3.1.25) stellen denselben Sachverhalt bzgl. des ξ -Systems bzw. des x -Systems dar. Allerdings ist die Elastizitätsgleichung kinematisch und statisch linearisiert, während die Strömungsgleichung lediglich statisch linearisiert ist.

3.1.4 Einfache Anwendungen („Semi-inverse Methode“)

Die im vorigen Abschnitt behandelten allgemeinen Randwertaufgaben der mathematischen Elastizitätstheorie werden bei Konkretisierung für reale Systeme meist so kompliziert, dass keine geschlossenen Lösungen angegeben werden können. Einen analytischen Näherungsansatz macht die so genannte „inverse Methode“. Dabei legt man a priori eine Verschiebung fest und bestimmt aus dieser mit Hilfe der Grundgleichungen die zugehörigen Verzerrungen, Spannungen sowie den Körper mit seiner Belastung und Lagerung, für welchen der angenommene Verschiebungszustand möglich ist. Die gebräuchlichere „semi-inverse Methode“ gibt nur einen Teil der Unbekannten vor und ergänzt dann die fehlenden Stücke, so dass die Grundgleichungen erfüllt sind. Auf diese Weise hofft man, Lösungen für praktisch vorkommende Aufgaben zu finden. Direkte numerische Ansätze zur Lösung der Randwertprobleme sind Gegenstand eines späteren Abschnittes. Im Folgenden wird die Arbeitsweise der semi-inversen Methode anhand zweier einfacher Probleme beschrieben.

⁵Claude (Louise Marie Henri) Navier (1785–1836): Französischer Bauingenieur und Mathematiker; Prof. an der École Polytechnique in Paris; Beiträge zum Brückenbau (erste Theorie der Hängebrücke), Elastizitätstheorie und Strömungsmechanik.

Deformation eines Quaders unter Schwerkrafteinwirkung

Ein Quader aus homogenem, isotropem Material mit spezifischem Gewicht γ nehme im Ruhezustand ein Gebiet

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x_i < 1 (i = 1, 2), 0 < x_3 < L\}$$

ein und unterliege der Schwerkraft $K = (0, 0, -\gamma)^T$.

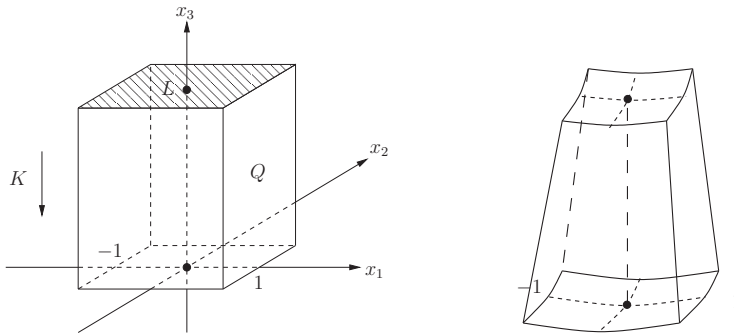


Abbildung 3.1: Elastischer Quader: Konfiguration (links) und Deformation unter Schwerkrafteinfluss (rechts)

Gefragt ist nach der Deformation des Quaders, wenn in seiner Deckfläche F die gleichmäßig verteilte Gegenkraft $p = (0, 0, \gamma)^T$ angreift, welche der Schwerkraft das Gleichgewicht hält. Dabei sei angenommen, dass die auftretenden Verzerrungen klein sind, und dass der Körper dem Hookeschen Gesetz genügt. Da zunächst keine kinematischen Randbedingungen vorgeschrieben sind, wird die (lineare) Randwertaufgabe (3.1.24) eine Lösung haben, welche nur bis auf ein Verschiebungsfeld der Form

$$u(x) = a + Bx$$

mit einem konstanten Vektor a und einer schiefsymmetrischen Matrix B eindeutig bestimmt ist. Durch geeignete Wahl von u kann dann etwa eine Randbedingung der Art $u(0, 0, L) = \partial_i u(0, 0, L) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) realisiert werden. Eine solche „Punktbedingung“ kann nicht a priori gefordert werden, da das zugehörige Randwertproblem im Sobolevraum $H^1(\Omega)^3$ dann nicht korrekt gestellt wäre.

Im Sinne der semi-inversen Methode wird der Spannungsansatz gemacht

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma x_3 \end{pmatrix}$$

welcher offenbar der statischen Gleichgewichtsbedingung $\operatorname{div} \sigma + K = 0$ in Q und den vorgegebenen statischen Randbedingungen $\sigma \cdot n = p$ auf ∂Q mit $P = 0$ auf $\partial Q \setminus F$ genügt. Aus dem Hookeschen Gesetz

$$\epsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{spur}(\sigma) I$$

gewinnen wir die zugehörigen Verzerrungen

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \gamma x_3, \quad \epsilon_{33} = \frac{1}{E} \gamma x_3, \quad \epsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

und aus den kinematischen Gleichungen $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u)$ die Verschiebungen

$$\partial_1 u_1 = \partial_2 u_2 = -\frac{\nu}{E} \gamma x_3, \quad \partial_3 u_3 = \frac{1}{E} \gamma x_3, \quad \partial_j u_i + \partial_i u_j \quad (i \neq j).$$

Integration dieser Gleichungen ergibt (für die ausführliche Rechnung siehe Leipholz [45]):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu \gamma}{E} x_1 x_3 + a x_2 - d x_3 + b, \\ u_2 &= -\frac{\nu \gamma}{E} x_2 x_3 - a x_1 - e x_3 + c, \\ u_3 &= \frac{\nu \gamma}{2E} \{x_3^2 + \nu(x_1^2 + x_2^2)\} + d x_1 + e x_2 + f, \end{aligned}$$

mit freien Integrationskonstanten a, b, c, d, e, f . Wie anfangs schon bemerkt, können der konstante Vektor $a = (b, c, f)^T$ und die schiefsymmetrische Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & -d \\ -a & 0 & -a \\ d & e & 0 \end{pmatrix}$$

so gewählt werden, dass z. B. $u_i = \partial_j u_i = 0$ ist im Punkt $x = (0, 0, L)^T$. Aufgrund der noch zu zeigenden Eindeutigkeitssätze für die Elastizitätsaufgaben ist damit „die“ Lösung des gestellten Problems bestimmt. Bei Beachtung der Punktbedingung finden wir

$$a = \left(0, 0, -\frac{\gamma}{2E} L^2\right)^T, \quad B = 0,$$

bzw.

$$u_1 = -\frac{\nu \gamma}{E} x_1 x_3, \quad u_2 = -\frac{\nu \gamma}{E} x_2 x_3, \quad u_3 = \frac{\gamma}{2E} \{x_3^2 + \nu(x_1^2 + x_2^2) - L^2\}.$$

Die Gestalt des verformten Quaders ist bestimmt durch die Transformation $x(\xi) = \xi + u(\xi)$, wobei $\xi = (\xi_i)_{i=1,2,3}$ die raumfesten Lagrangeschen Koordinaten sind. Für die Bodenfläche $\{\xi_3 = 0\}$ findet man

$$x_i = \xi_i \quad (i = 1, 2), \quad x_3 = \frac{\gamma}{2E} \{\nu(\xi_1^2 + \xi_2^2) - L^2\} = \frac{\gamma}{2E} \{\nu(x_1^2 + x_2^2) - L^2\}$$

und für die Deckfläche $F = \{\xi_3 = L\}$

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i \left(1 - \frac{\nu \gamma}{E} L\right), \quad i = 1, 2, \\ x_3 &= L + \frac{\nu \gamma}{2E} (\xi_1^2 + \xi_2^2) = L + \frac{\nu \gamma}{2E} (x_1^2 + x_2^2) \left(1 - \frac{\nu \gamma}{E} L\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Der Quader geht also über in einen Pyramidenstumpf, welcher durch zwei nahezu kongruente Rotationsparaboloide abgeschlossen wird (s. Abb. 3.1).

Torsion eines zylindrischen Stabes

Wir untersuchen die Torsion eines zylindrischen Stabes mit Querschnitt $Q \subset \mathbb{R}^2$, der an einem Ende festgehalten und am anderen einem Drehmoment M unterliegt (s. Abb. 3.2).

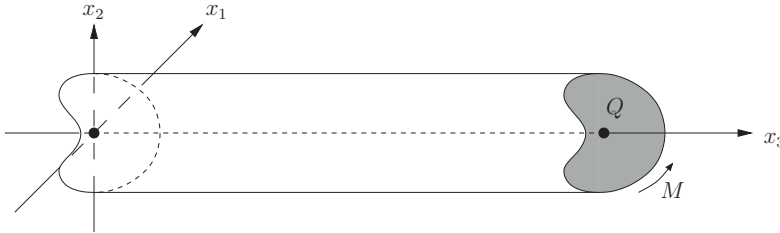


Abbildung 3.2: Konfiguration eines Torsionsstabes

Das Material sei wieder homogen, isotrop, und die Verzerrungen seien klein. Es wird der Spannungsansatz gemacht

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

und die Volumenkraft vernachlässigt: $K \equiv 0$. Dann folgt aus den statischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_3 \sigma_{i3} = 0 &\Rightarrow \sigma_{i3} = \sigma_{i3}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \\ \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

über das Hookesche Gesetz

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = 0, \quad \epsilon_{i3} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{i3}, \quad i = 1, 2,$$

und aus den kinematischen Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(x_1, x_3), \quad u_3 = u_3(x_2, x_3), \\ \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Mit der so genannten „Prandtlischen⁶ Torsionsfunktion“ $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$ machen wir den zunächst noch heuristischen Lösungsansatz

$$\sigma_{13} := \partial_2 \Phi, \quad \sigma_{23} := -\partial_1 \Phi,$$

⁶Ludwig Prandtl (1875–1953): Deutscher Ingenieur; Studium an der TH München, Promotion 1900 an der Univ. München; 1902 Prof. in Hannover, ab 1904 in Göttingen, Leiter des neu gegründeten Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung 1925–1946; bedeutende Beiträge zu den Grundlagen der Strömungsmechanik, insbesondere der Aerodynamik, entwickelte 1904 die nach ihm benannte Grenzschichttheorie.

welcher automatisch (3.1.26) erfüllt.

Bei der Torsion des Stabes um den Winkel $\theta = \theta(x_3)$ geht der Punkt $P = (x_1, x_2)$ in den Punkt $P' = (x'_1, x'_2)$ über. Wir nehmen an, dass die Torsion gering ist, $|\theta| \ll 1$, und machen den linearen Ansatz

$$\theta = \delta x_3,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor δ „Drilling“ genannt wird (s. Abb. 3.3).

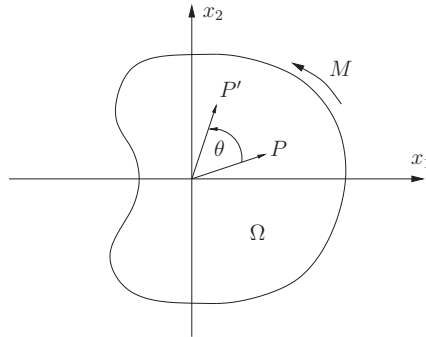


Abbildung 3.3: Querschnitt durch einen Torsionsstab

Dann ist näherungsweise

$$x'_1 = \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 \sim x_1 - \theta x_2, \quad x'_2 = \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \sim \theta x_1 + x_2,$$

bzw.

$$u_1 = x'_1 - x_1 \sim -\delta x_2 x_3, \quad u_2 = x'_2 - x_2 \sim \delta x_1 x_3.$$

Aus formalen Gründen wird noch gesetzt:

$$u_3 := \delta \Psi(x_1, x_2)$$

mit der so genannten Verwölbungsfunktion Ψ . Damit findet man für die Torsionsfunktion

$$\begin{aligned} \partial_2 \Phi = \sigma_{13} &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) = \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_1 u_3 - \delta x_2), \\ \partial_1 \Phi = -\sigma_{23} &= -\frac{E}{1+\nu} \epsilon_{23} = -\frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) = -\frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_2 u_3 + \delta x_1), \end{aligned}$$

bzw. durch Differentiation

$$\Delta \Phi = \partial_1^2 \Phi + \partial_2^2 \Phi = -\frac{E}{1+\nu} \delta.$$

Ferner ist

$$\partial_1 u_3 = -2 \frac{1+\nu}{E} \partial_2 \Phi + \delta x_2, \quad \partial_2 u_3 = -2 \frac{1+\nu}{E} \partial_1 \Phi + \delta x_1, \quad (3.1.28)$$

woraus man bei bekanntem Φ durch Integration die Verwölbung u_3 berechnet.

Zur Bestimmung der adäquaten Randbedingungen für Φ auf ∂Q sei daran erinnert, dass entlang des Zylindermantels keine Oberflächenkräfte wirken, d. h.: $\sigma \cdot n = 0$, bzw.

$$0 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = \partial_2\Phi n_1 - \partial_1\Phi n_2 = \partial_1\Phi\tau_1 + \partial_2\Phi\tau_2 = \partial_\tau\Phi,$$

mit dem Tangentenvektor $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T = (n_2, -n_1)^T$ entlang ∂Q . Also ist $\Phi = \text{konst.}$ auf ∂Q , und wir setzen willkürlich $\Phi = 0$ auf ∂Q . Für die Torsionsfunktion ergibt sich also die Randwertaufgabe

$$-\Delta\Phi = \frac{E}{1+\nu}\delta \quad \text{in } Q, \quad \Phi = 0 \quad \text{auf } \partial Q, \quad (3.1.29)$$

welche für glatten Rand ∂Q stets eine klassische Lösung besitzt.

Auf dem Randteil $\{x_3 = 0\}$ gilt die kinematische Randbedingung $u = 0$, während auf $\{x_3 = L\}$ eine statische Randbedingung durch das einwirkende Dreh- bzw. Torsionsmoment M bedingt ist. Letzteres ergibt sich aus dem obigen Lösungsansatz bei Berücksichtigung von $n = (0, 0, 1)^T$ auf $\{x_3 = L\}$ zu

$$\sigma_{ij}n_j = p_i \quad \text{bzw.} \quad p_1 = \partial_2\Phi, \quad p_2 = -\partial_1\Phi, \quad p_3 = 0.$$

Das erforderliche Torsionsmoment ist gerade

$$M = \int_Q K \times r \, dF = \int_Q \{\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2\} \, dF = \int_Q \{\partial_1\Phi x_1 + \partial_2\Phi x_2\} \, dF = 2 \int_Q \Phi \, dF.$$

Wir fassen die bisherigen Resultate zusammen:

Zu gegebenem Zylinderquerschnitt Q und Drilling δ (pro Längeneinheit) sei Φ die Lösung der Randwertaufgabe (3.1.29). Dann erhält man durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_2\Phi \\ 0 & 0 & -\partial_1\Phi \\ \partial_2\Phi & -\partial_1\Phi & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma, \quad u = \begin{pmatrix} -x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ \Psi(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (3.1.30)$$

eine (klassische) Lösung der Grundaufgabe (3.1.24) zu den Daten $K = 0$ und p . Die Verwölbung Ψ ermittelt man durch Integration aus (3.1.28).

3.2 Mathematische Theorie der Lamé-Navierschen Gleichungen

Für die linearen Lamé-Naviersche-Gleichungen steht eine vollständige Existenz- und Regularitätstheorie zur Verfügung. Deren wesentlichen Resultate werden im folgenden analog zur entsprechenden Theorie für die Randwertaufgaben des Laplace-Operators entwickelt.

3.2.1 Eigenschaften des Elastizitätstensors

Ein elastischer Körper erfahre während eines Zeitintervalls $0 \leq t \leq T$ eine Verschiebung $u(\xi, t)$. Die zugehörige Familie (symmetrischer) Verzerrungstensoren $\epsilon(t) = \epsilon(\cdot, t)$ definiert dann einen sog. „Verzerrungsweg“ $\Gamma_\epsilon = \{\epsilon(t), t \in [0, T]\}$. Aufgrund des linearen Elastizitätsgesetzes ergeben sich die zugehörigen Spannungstensoren

$$\sigma(t) = C\epsilon(t), \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (i, j = 1, \dots, 3).$$

Wir führen die folgende Größe ein (im Sinne eines Riemann-Stieltjes-Integrals)

$$A_{\Gamma_\epsilon} := \int_0^T \sigma(t) : d\epsilon(t) = \int_0^T \sigma(t) : d_t \epsilon(t) dt,$$

welche die Dimension einer Arbeit hat (Kraft mal Weg) und interpretiert werden kann als die Arbeit (pro Volumeneinheit), welche von den (inneren) Flächenkräften $\sigma(t)$ während der Deformation mit den Verzerrungen $\epsilon(t)$ geleistet wird. Aus physikalischen Gründen wird angenommen, dass die zu einem geschlossenen Verzerrungsweg Γ_ϵ , $\epsilon(0) = \epsilon(T)$, gehörende Spannungsarbeit $A_{\Gamma_\epsilon} \geq 0$ ist (Wärmeverlust). Ferner sollte $A_{\Gamma_\epsilon} > 0$ sein für jeden in $\epsilon(0)$ beginnenden, *nicht* geschlossenen Verzerrungsweg. Wir wollen zeigen, dass diese Annahmen äquivalent zur Positivdefinitheit und Symmetrie des Elastizitätstensors sind. Dazu dient der auf Green⁷ (1839) zurückgehende Begriff des „Dehnungspotentials“. Dies ist eine Funktion $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\Phi(0) = 0, \quad \nabla_\epsilon \Phi(\epsilon) = C\epsilon, \tag{3.2.31}$$

mit dem Gradienten

$$\nabla_\epsilon \Phi(\epsilon)_{ij} := \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \Phi(\epsilon) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Falls ein solches Potential Φ existiert, gilt die Identität

$$A_{\Gamma_\epsilon} = \int_0^T C\epsilon(t) : d\epsilon(t) = \int_0^T d\Phi(\epsilon(t)) = \Phi(\epsilon(T)) - \Phi(\epsilon(0)). \tag{3.2.32}$$

Lemma 3.1: *Die folgenden Aussagen sind Äquivalent:*

- i) Die Spannungsarbeit zu einem geschlossenen Verzerrungsweg Γ_ϵ erfüllt $A_{\Gamma_\epsilon} \geq 0$.
- ii) Die Spannungsarbeit zu einem geschlossenen Verzerrungsweg Γ_ϵ erfüllt $A_{\Gamma_\epsilon} = 0$.
- iii) Der Elastizitätstensor C ist symmetrisch: $C_{ijkl} = C_{klij}$ ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).
- iv) Die Funktion $\Phi(\epsilon) := \frac{1}{2}C\epsilon : \epsilon$ ist ein Dehnungspotential.

⁷George Green (1793–1841): Englischer Mathematiker und Physiker; Autodidakt und Besitzer einer Mühle; Mitbegründer der Potentialtheorie und der Theorie des Elektromagnetismus; die Greensche Funktion sowie die Greenschen Formeln gehen auf ihn zurück.

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Wir definieren für beliebigen geschlossenen Verzerrungsweg Γ_ϵ den umgekehrten Verzerrungsweg:

$$\Gamma_{\epsilon^*} := \{\epsilon^*(t) := \epsilon(T-t), t \in [0, T]\},$$

und erhalten

$$A_{\Gamma_{\epsilon^*}} = \int_0^T C\epsilon^*(t) : d\epsilon^*(t) = \int_0^T C\epsilon(T-t) : d\epsilon(T-t) = \int_T^0 C\epsilon(t) : d\epsilon(t) = -A_{\Gamma_\epsilon}.$$

Wegen $A_{\Gamma_{\epsilon^*}} \geq 0$ und $A_{\Gamma_\epsilon} \geq 0$ nach Voraussetzung folgt $A_{\Gamma_\epsilon} = 0$.

(ii) \Rightarrow (iii): Für zwei Verzerrungstensoren ϵ, ϵ' sei Γ_ϵ der durch

$$\epsilon(t) := (\cos(t) - 1)\epsilon + \sin(t)\epsilon', \quad t \in [0, 2\pi],$$

definierte geschlossene Verzerrungsweg. Dann ist

$$\begin{aligned} C\epsilon(t) : d_t\epsilon(t) &= C((\cos(t) - 1)\epsilon + \sin(t)\epsilon') : (-\sin(t)\epsilon + \cos(t)\epsilon') \\ &= (\sin(t) - \sin(t)\cos(t))C\epsilon : \epsilon + (\cos(t)^2 - \cos(t))C\epsilon' : \epsilon - \sin(t)^2C\epsilon : \epsilon' \\ &\quad + \sin(t)\cos(t)C\epsilon' : \epsilon' \end{aligned}$$

und somit gemäß (ii):

$$0 = A_{\Gamma_\epsilon} = \int_0^{2\pi} C\epsilon(t) : d_t\epsilon(t) dt = \pi(\epsilon' : C\epsilon - \epsilon : C\epsilon').$$

Der Elastizitätstensor ist also symmetrisch auf symmetrischen Dyaden, d. h.:

$$\epsilon' : C\epsilon = \epsilon : C\epsilon', \quad \text{bzw.} \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3).$$

(iii) \Rightarrow (iv): Wir setzen $\Phi(\epsilon) := \frac{1}{2}C\epsilon : \epsilon$ und finden $\Phi(0) = 0$ sowie

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon \Phi(\epsilon)_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \Phi(\epsilon) = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left(\frac{1}{2} C_{pqrs} \epsilon_{pq} \epsilon_{rs} \right) \\ &= \frac{1}{2} C_{pqrs} (\delta_{ip} \delta_{jq} \epsilon_{rs} + \epsilon_{pq} \delta_{ir} \delta_{js}) = \frac{1}{2} (C_{ijrs} \epsilon_{rs} + C_{pqij} \epsilon_{pq}) = C_{ijrs} \epsilon_{rs} = \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

(iv) \Rightarrow (i): Für einen geschlossenen verzerrungsweg Γ_ϵ gilt gemäß der Identität (3.2.32) und der Annahme (iv):

$$A_{\Gamma_\epsilon} = \Phi(\epsilon(T)) - \Phi(\epsilon(0)) \geq 0.$$

Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Als Folgerung des vorausgegangenen Lemmas erhalten wir die fundamentale Aussage:

Satz 3.1: Die Spannungsarbeit A_{Γ_ϵ} entlang jedes nicht geschlossenen Verzerrungswegs Γ_ϵ mit $\epsilon(0) = 0$ ist positiv genau dann, wenn der Elastizitätstensor C symmetrisch und auf allen symmetrischen Dyaden positiv definit ist:

$$C\epsilon : \epsilon > 0, \quad \epsilon \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}, \quad \epsilon \neq 0.$$

Beweis: \Rightarrow : i) Wir zeigen zunächst die Symmetrie von C . Sei dazu Γ_ϵ ein beliebiger geschlossener Verzerrungsweg mit $\epsilon(0) = \epsilon(T) = 0$. Es ist entweder $\epsilon(t) = 0$, $t \in [0, T]$, d.h. auch $A_{\Gamma_\epsilon} = 0$, oder $\epsilon(t) \neq 0$ für ein $t \in [0, T]$. Mit $t' = \sup\{t \in [0, T] : \epsilon(t) \neq 0\}$ ist dann nach Annahme

$$A_{\Gamma_\epsilon} = \int_0^{t'} C\epsilon(s) : d\epsilon(s) = \lim_{t \rightarrow t'} \int_0^t C\epsilon(s) : d\epsilon(s) \geq 0.$$

Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (iii) in Lemma 3.1 liefert dann die Symmetrie von C .

ii) Für beliebiges $\epsilon \neq 0$ definieren wir den Verzerrungsweg $\Gamma_\epsilon := \{\epsilon(t) := t\epsilon, t \in [0, 1]\}$, welcher offenbar nicht geschlossen ist. Nach Annahme ist dann $A_{\Gamma_\epsilon} > 0$, d. h.:

$$\frac{1}{2}\epsilon : C\epsilon = \Phi(\epsilon(1)) - \Phi(\epsilon(0)) = \int_0^1 C\epsilon(t) : d\epsilon(t) = A_{\Gamma_\epsilon} > 0.$$

\Leftarrow : Zu symmetrischem, positiv definitem Elastizitätstensor C existiert gemäß der Äquivalenz (iii) \Leftrightarrow (iv) in Lemma 3.1 ein Dehnungspotential Φ . Für jeden nicht geschlossenen Verzerrungsweg Γ_ϵ mit $\epsilon(0) = 0$ und $\epsilon(T) \neq 0$ ist dann

$$A_{\Gamma_\epsilon} = \Phi(\epsilon(T)) - \Phi(\epsilon(0)) = \Phi(\epsilon(T)) = \frac{1}{2}C\epsilon(T) : \epsilon(T) > 0.$$

Dies vervollständigt den Beweis.

Q.E.D.

Speziell für *isotropes* Material ist der Elastizitätstensor C stets symmetrisch mit dem Dehnungspotential

$$\Phi(\epsilon) := \mu\epsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda \text{spur}(\epsilon)^2 \quad (3.2.33)$$

und dem zugehörigen Elastizitätsgesetz

$$\sigma = \nabla_\epsilon \Phi(\epsilon) = 2\mu\epsilon + \lambda \text{spur}(\epsilon)I.$$

Lemma 3.2: *Im Fall isotropen Materials ist der Elastizitätstensor C genau dann positiv definit, wenn für die Materialkonstanten gilt:*

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \quad \text{bzw.} \quad E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}. \quad (3.2.34)$$

Beweis: i) Ist C positiv definit, so gilt für alle symmetrischen Dyaden $\epsilon = (\epsilon_{ij})_{i,j=1}^3 \neq 0$:

$$C\epsilon : \epsilon = 2\mu\epsilon : \epsilon + \lambda \text{spur}(\epsilon)I : \epsilon = 2\mu\epsilon_{ij}^2 + \lambda \text{spur}(\epsilon)^2 > 0.$$

Für $\epsilon := I$ ergibt sich $6\mu + 9\lambda > 0$ und für $\epsilon \neq 0$ mit $\text{spur}(\epsilon) = 0$ weiter $2\mu\epsilon_{ij}^2 > 0$. Also muss $2\mu + 3\lambda > 0$ und $\mu > 0$ sein.

ii) Für eine symmetrische Dyade $\epsilon = (\epsilon_{ij})_{i,j=1}^3$ definieren wir den sog. „deviatorischen Anteil“ ϵ' durch $\epsilon' := \epsilon - \frac{1}{3}\text{spur}(\epsilon)I$. Für diesen gilt dann konstruktionsgemäß $\text{spur}(\epsilon') = 0$

und $\varepsilon' : I = 0$. Sei nun $\mu > 0$ und $2\mu + 3\lambda > 0$ angenommen. Für beliebige symmetrische Dyade $\epsilon \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} C\epsilon : \epsilon &= (2\mu\epsilon' + (\tfrac{2}{3}\mu + \lambda)\text{spur}(\epsilon)I) : (\epsilon' + \tfrac{1}{3}\text{spur}(\epsilon)I) \\ &= 2\mu\epsilon' : \epsilon' + (\tfrac{2}{3}\mu + \lambda)\text{spur}(\epsilon)I : \epsilon' + \tfrac{2}{3}\mu\text{spur}(\epsilon)\epsilon' : I + \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3}\mu + \lambda)\text{spur}(\epsilon)^2 I : I \\ &= 2\mu\epsilon' : \epsilon' + (\tfrac{2}{3}\mu + \lambda)\text{spur}(\epsilon)^2 > 0 \end{aligned}$$

für $\mu > 0$ und $3\lambda + 2\mu > 0$.

Q.E.D.

Bemerkung 3.4: Aus physikalischen Gründen hatten wir für die Materialkonstanten bereits vorher die Eigenschaften $\nu > 0$, $\mu > 0$ und $E > 0$ ermittelt. Dies ist jedoch, wie (3.2.34) zeigt, nicht notwendig für die Positivdefinitheit des Elastizitätstensors. Es sei nochmals betont, dass die Positivdefinitheit des Elastizitätstensors C nur auf den symmetrischen Dyaden gefordert wird. Dies impliziert i. Allg. nicht seine Definitheit auf allen Dyaden. Insbesondere kann nicht erwartet werden, dass

$$C\nabla u : \nabla u > 0$$

gilt für alle Verschiebungsgradienten $\nabla u \neq 0$. Dieser Umstand macht bei der Behandlung der Existenzfrage von Lösungen der Elastizitätsgleichungen einige Schwierigkeiten.

3.2.2 Eindeutigkeitssatz und Extremalprinzipien

Im Folgenden wird die allgemeine Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie (3.1.20-3.1.23) vom „klassischen“ Standpunkt aus betrachtet, d. h.: Es wird nach der Existenz und Eindeutigkeit klassisch differenzierbarer Lösungen sowie nach deren charakteristischen Eigenschaften gefragt. Dabei beschränken wir uns auf den Fall zeitlich unabhängiger („stationärer“) Deformationen, d. h. der Beschleunigungsterm $\partial_t^2 u$ wird vernachlässigt.

Wir führen zunächst die folgenden Bezeichnungen ein: Ein „(klassisch) zulässiger Zustand“ eines elastischen Körpers bezogen auf einen kraftfreien Grundzustand ist beschrieben durch ein Trippele $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ bestehend aus einem Verschiebungsvektorfeld $u = (u_i)_{i=1}^3$, einem (symmetrischen) Verzerrungstensorfeld $\epsilon = (\epsilon_{ij})_{i,j=1}^3$ und einem (symmetrischen) Spannungstensorfeld $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^3$ mit den Regularitätsseigenschaften

$$u_i \in C(\Omega \cup \partial\Omega_u) \cap C^2(\Omega), \quad \epsilon_{ij} \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad \sigma_{ij} \in C(\Omega \cup \partial\Omega_\sigma) \cap C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Definition 3.1: Ein zulässiger Zustand $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ heißt „kinematisch zulässig“, wenn im Fall hinreichend regulärer Daten $\partial\Omega$, f , u^∂ , σ^∂ gilt:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad \text{in } \Omega, \tag{3.2.35}$$

$$\sigma = C\epsilon \quad \text{in } \Omega, \tag{3.2.36}$$

$$u = u^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_u, \tag{3.2.37}$$

und „statisch zulässig“, wenn gilt:

$$-\nabla \cdot \sigma = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2.38)$$

$$\epsilon = C^{-1}\sigma \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2.39)$$

$$n \cdot \sigma = n \cdot \sigma^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \quad (3.2.40)$$

Der Elastizitätstensor $C(\xi) = (C_{ijkl}(\xi))_{i,j,k,l=1}^3$ wird als symmetrisch und positiv definit (auf symmetrischen Dyaden) sowie als hinreichend regulär angenommen:

$$C_{ijkl} \in C^2(\overline{\Omega}), \quad C_{ijkl} = C_{klij}, \quad C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} > 0, \quad \epsilon \neq 0. \quad (3.2.41)$$

Definition 3.2: *i) Die Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie (in sog. „gemischter“ Formulierung) besteht darin, einen Zustand $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ zu bestimmen, der sowohl kinematisch als auch statisch zulässig ist.*

ii) Eine Lösung wird als „klassisch“ bezeichnet, wenn alle auftretenden Ableitungen und Gleichungen im „klassischen“ Sinne stetiger bzw. stetig differenzierbarer Funktionen verstanden werden können. Dieser Lösungsbegriff wird später im Rahmen einer „variationalen Theorie“ verallgemeinert werden.

Neben dieser allgemeinen „gemischten“ Formulierung sind von Bedeutung auch die sog. „primale“ Formulierung („Verschiebungsmodell“):

(P) *Finde ein Verschiebungsfeld u mit den Eigenschaften $u_i \in C(\Omega \cup \partial\Omega_u) \cap C^1(\Omega \cup \partial\Omega_\sigma) \cap C^2(\Omega)$ und*

$$-\nabla \cdot C\nabla u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2.42)$$

$$n \cdot C\nabla u = n \cdot \sigma^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma, \quad (3.2.43)$$

$$u = u^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_u, \quad (3.2.44)$$

sowie die sog. „duale“ Formulierung („Spannungsmodell“):

(P*) *Finde ein Spannungsfeld σ mit den Eigenschaften $\sigma_{ij} \in C(\Omega \cup \partial\Omega_\sigma) \cap C^1(\Omega)$ und*

$$\nabla \cdot \sigma = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2.45)$$

$$\nabla \times C^{-1}\sigma = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2.46)$$

$$n \cdot \sigma = n \cdot \sigma^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \quad (3.2.47)$$

Dabei ist die Bedingung (3.2.46) gerade äquivalent dazu, dass eine Vektorfunktion u existiert mit der Eigenschaft

$$\epsilon := C^{-1}\sigma = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

Für die gemischte Formulierung der Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie gilt der folgende fundamentale Eindeutigkeitssatz von Cosserat⁸ (1898):

⁸Eugène Cosserat (1866–1931): Französischer Mathematiker und Astronom; lehrte Mathematik in Toulouse (ab 1896 als Prof.) und wurde dort 1906 Prof. für Astronomie und Direktor des Observatoriums; bekannt vor allem durch seine Arbeiten zur Elastizitätstheorie teilweise zusammen mit seinem älteren Bruder François („Cosserat-Kontinuum!“), nach dem Tod des Bruders 1914 keine weiteren Arbeiten zur Mechanik.

Satz 3.2 (Satz von Cosserat): *Unter den obigen Voraussetzungen unterscheiden sich zwei klassische Lösungen $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ der Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie nur um einen Ausdruck der Art (Starrkörperbewegung)*

$$u^{(1)}(\xi) - u^{(2)}(\xi) = b + B\xi$$

mit einem konstanten Vektor $b = (b_i)_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3$ und einer konstanten schiefsymmetrischen Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1}^3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $b_{ij} = -b_{ji}$. Enthält der Randteil $\partial\Omega_u$ wenigstens drei linear unabhängige Punkte, so ist notwendig $b = 0$, $B = 0$, d. h.: Eine klassische (hinreichend reguläre) Lösung der Grundaufgabe ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ und $S'' = \{u'', \epsilon'', \sigma''\}$ zwei zulässige Lösungen der Grundaufgabe. Dann ist der Zustand $S = S' - S'' = \{u, \epsilon, \sigma\}$ eine Lösung des zugehörigen Problems zu homogenen Daten $f = 0$, $q^\partial = 0$, $u^\partial = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C\epsilon : \epsilon \, d\xi &= \int_{\Omega} \sigma : \epsilon \, d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \, d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_j \sigma_{ij} u_i + \partial_i \sigma_{ij} u_j) \, d\xi + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (n_j \sigma_{ij} u_i + n_i \sigma_{ij} n_j) \, do \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \cdot u \, d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma \cdot u \, do = 0. \end{aligned}$$

Da C als positiv definit vorausgesetzt ist, folgt notwendig $\epsilon = 0$ bzw. $\partial_j u_i + \partial_i u_j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$). Durch Differentiation und Vertauschung der Ableitungen erhalten wir

$$2\partial_i \partial_j u_k = \partial_i \partial_j u_k + \partial_j \partial_i u_k = -\partial_k \partial_j u_i - \partial_k \partial_i u_j = -\partial_k (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = 0.$$

Also hat das Vektorfeld u die Gestalt $u(\xi) = b + B\xi$ mit konstantem Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Aufgrund der Bedingung $\partial_j u_i + \partial_i u_j = 0$ ist dann notwendig $b_{ij} = -b_{ji}$, d. h.: Die Matrix B ist schiefsymmetrisch. Enthält der Randteil $\partial\Omega_u$ drei linear unabhängige Punkte $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, so besagt die kinematische Randbedingung $u(\xi^{(i)}) = b + B\xi^{(i)} = 0$. Hieraus erhalten wir auch

$$B(\xi^{(1)} - \xi^{(2)}) = B(\xi^{(1)} - \xi^{(3)}) = B(\xi^{(2)} - \xi^{(3)}) = 0.$$

Da mit $\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}\}$ auch die Differenzen $\{\xi^{(1)} - \xi^{(2)}, \xi^{(1)} - \xi^{(3)}, \xi^{(2)} - \xi^{(3)}\}$ linear unabhängig sind, folgt $B = 0$ und damit auch $b = 0$. Q.E.D.

Von fundamentaler Bedeutung für die ingenieurwissenschaftliche Begründung der sog. „Finite-Elemente-Methode (FEM) zur numerischen Lösung der Grundaufgabe ist das folgende „Prinzip der virtuellen Arbeit“:

Satz 3.3 (Prinzip der virtuellen Arbeit): *Für je zwei statisch bzw. kinematisch zulässige Zustände $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ und $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ gilt*

$$\int_{\Omega} \sigma : \epsilon' \, d\xi - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma \cdot u^\partial \, do = \int_{\Omega} f \cdot u' \, d\xi + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot u' \, do. \quad (3.2.48)$$

Beweis: Definitionsgemäß ergibt sich bei Anwendung des Satzes von Gauß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma : \epsilon' d\xi &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \cdot u' d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma \cdot u' do \\ &= \int_{\Omega} f \cdot u' d\xi + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} n \cdot \sigma^{\partial} \cdot u' do + \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma \cdot u^{\partial} do. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die behauptete Aussage.

Q.E.D.

Bemerkung 3.5: Das „Prinzip der virtuellen Arbeit“ besagt, physikalisch interpretiert, dass die von den Spannungen eines statisch zulässigen Zustandes mit den Verzerrungen eines kinematisch zulässigen Zustandes geleistete „virtuelle“ Arbeit gerade gleich der von den äußeren Belastungen f , σ^{∂} mit den zugehörigen Verschiebungen geleistete Arbeit ist.

Wir wollen nun die Lösungen der Grundaufgabe mit Hilfe von Extremaleigenschaften charakterisieren. Dazu greifen wir auf die oben definierte Spannungsarbeit

$$A_{\Gamma_{\epsilon}} = \int_0^1 \sigma(t) : d\epsilon(t)$$

zu einem Verzerrungsweg $\Gamma_{\epsilon} := \{\epsilon(t), t \in [0, 1]\}$, zurück. Mit dem zugehörigen Dehnungspotential $\Phi(\epsilon) = \frac{1}{2}C\epsilon : \epsilon$ gilt für die betrachtete Deformation des Körpers aus dem statischen Gleichgewichtszustand $S_0 = \{0, 0, 0\}$ in den Endzustand $S_1 = \{u(1), \epsilon(1), \sigma(1)\} = \{u, \epsilon, \sigma\}$:

$$A_{\Gamma_{\epsilon}} = \Phi(\epsilon(T)) - \Phi(\epsilon(0)) = \Phi(\epsilon).$$

Da die Spannungsarbeit auf die Volumeneinheit bezogen ist, bestimmt sich die gesamte „Dehnungsenergie“ $U_{\epsilon}(S)$ bzw. die sog. „Spannungsenergie“ $U_{\sigma}(S)$ zu

$$U_{\epsilon}(S) := \int_{\Omega} \Phi(\epsilon) d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C\epsilon : \epsilon d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \epsilon d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : C^{-1}\sigma d\xi =: U_{\sigma}(S).$$

Die „potentielle Energie“ des Systems ist dann definiert durch

$$E_{\epsilon}(S) := U_{\epsilon}(S) - \int_{\Omega} f \cdot u d\xi - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} n \cdot \sigma^{\partial} \cdot u do,$$

und die sog. „komplementäre Energie“ durch

$$E_{\sigma}(S) := U_{\sigma}(S) - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma \cdot u^{\partial} do.$$

Lemma 3.3: Für jede klassische Lösung $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ der Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie gilt:

$$E_{\epsilon}(S) + E_{\sigma}(S) = 0. \quad (3.2.49)$$

Beweis: Nach Definition ist $U_\epsilon(S) = U_\sigma(S)$ und somit

$$\begin{aligned}
 E_\epsilon(S) + E_\sigma(S) &= U_\epsilon(S) - \int_\Omega f \cdot u \, d\xi - \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot u \, do + U_\sigma(S) - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma \cdot u^\partial \, do \\
 &= \int_\Omega \sigma : \epsilon \, d\xi - \int_\Omega f \cdot u \, d\xi - \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot u \, do - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma \cdot u^\partial \, do \\
 &= - \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u \, d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma \cdot u \, do - \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot u \, do \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma \cdot u^\partial \, do \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.

Q.E.D.

Wir formulieren nun das wichtige „Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie“ (oder kurz „primales Prinzip“), welches auf Ideen von Green (1839) und Kirchhoff (1850) zurückgeht und erstmals von Hadamard⁹ (1903) und Love¹⁰ (1906) mathematisch begründet wurde.

Satz 3.4 (Primales Prinzip): *Ein kinematisch zulässiger Zustand $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ ist genau dann Lösung der linearen Grundaufgabe, wenn für ihn die potentielle Energie ein striktes Minimum bzgl. aller kinematisch zulässigen Zustände annimmt, d. h.:*

$$E_\epsilon(S) < E_\epsilon(S') \quad (3.2.50)$$

für jeden kinematisch zulässigen Zustand S' mit $\epsilon' \neq \epsilon$.

Beweis: i) Seien $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ eine (klassische) Lösung der Grundaufgabe und $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ ein beliebiger anderer kinematisch zulässiger Zustand. Dann gilt:

$$E_\epsilon(S') - E_\epsilon(S) = U_\epsilon(S') - U_\epsilon(S) - \int_\Omega f(u - u') \, d\xi - \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial (u' - u) \, do.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie von C gewinnt man die Identität

$$C(\epsilon' - \epsilon) : (\epsilon' - \epsilon) = C\epsilon' : \epsilon' - 2C\epsilon : \epsilon' + C\epsilon : \epsilon$$

und damit

$$U_\epsilon(S') - U_\epsilon(S) = U_\epsilon(S' - S) + \int_\Omega C\epsilon : (\epsilon' - \epsilon) \, d\xi.$$

⁹Jacque Salomon Hadamard (1865–1963): Französischer Mathematiker; Prof. in Bordeaux und Paris; viele wichtige Beiträge zur komplexen Analysis und speziellen Funktionen, zur analytischen Zahlentheorie, zur Variationsrechnung und zu den Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

¹⁰Augustus Edward Hough Love (1863–1940): Englischer Mathematiker; seit 1899 Prof. für „Natural Philosophy“ in Oxford; bekannt durch seine Beiträge zur mathematischen Elastizitätstheorie („Kirchhoff-Love Plattentheorie“), Arbeiten zur Wellenausbreitung („Love-Wellen“) und Geophysik/Gezeiteneffekte („Love-Zahlen“).

Da S eine Lösung der Grundaufgabe ist, folgt Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes:

$$\begin{aligned} U_\epsilon(S') - U_\epsilon(S) &= U_\epsilon(S' - S) + \int_\Omega C\epsilon : (\epsilon' - \epsilon) d\xi \\ &= U_\epsilon(S' - S) - \int_\Omega \nabla \cdot \sigma \cdot (u' - u) d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma \cdot (u' - u) do \\ &= U_\epsilon(S' - S) + \int_\Omega f \cdot (u' - u) d\xi + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot (u' - u) do. \end{aligned}$$

Also ist aufgrund der Definitheit von C für $\epsilon' \neq \epsilon$:

$$E_\epsilon(S') - E_\epsilon(S) = U_\epsilon(S' - S) = \frac{1}{2} \int_\Omega C(\epsilon' - \epsilon) : (\epsilon' - \epsilon) d\xi > 0.$$

ii) Sei nun $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ ein kinematisch zulässiger Zustand, d. h. $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$, $\sigma = C\epsilon$ und $u|_{\partial\Omega_u} = u^\partial$, welcher $E_\epsilon(\cdot)$ zum Minimum macht bzgl. aller anderer kinematisch zulässiger Zustände. Dann gilt für einen beliebigen zulässigen Zustand $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ mit $u'|_{\partial\Omega_u} = 0$ notwendig

$$\frac{d}{dr} E_\epsilon(S + rS')|_{r=0} = 0.$$

Ausführung der Differentiation in

$$E_\epsilon(S + rS') = \frac{1}{2} \int_\Omega C(\epsilon + r\epsilon') : (\epsilon + r\epsilon') d\xi - \int_\Omega f \cdot (u + ru') d\xi - \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot (u + ru') do$$

und Anwendung des Satzes von Gauß ergibt daher

$$0 = \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u' d\xi + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u' do.$$

Variation von u' ergibt dann mit Hilfe des sog. Fundamentalsatzes der Variationsrechnung die Gültigkeit der punktweisen Beziehungen

$$-\nabla \cdot \sigma = f \quad \text{in } \Omega, \quad n \cdot \sigma = n \cdot \sigma^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma,$$

d. h.: Der kinematisch zulässige Zustand S ist Lösung der Grundaufgabe. Q.E.D.

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie besagt, dass die Differenz zwischen Spannungsenergie (im deformierten Körper „gespeicherte“ Energie) und der von außen durch die gegebenen Belastungen geleisteten Arbeit (der „Energieverlust“ während des Deformationsvorgangs) minimal ist für die tatsächliche Lösung der Grundaufgabe bzgl. aller anderen kinematisch zulässigen Zustände. Eine analoge Aussage gilt auch für die komplementäre Energie. Dieses sog. „Duale Prinzip“ geht auf ältere Quellen zurück und wurde erstmals u. a. von Trefftz¹¹ (1928) bewiesen.

¹¹Erich Immanuel Trefft (1888–1937): Deutscher Mechaniker und Mathematiker; Studium zunächst des Maschinenbaus an der TH Aachen, dann der Mathematik in Göttingen und später in Straßburg; Prof. der Mathematik in Aachen 1919, dann ab 1922 Prof. für Technische Mechanik an der TH Dresden; Beiträge zur Aero- und Hydrodynamik sowie zur Elastizitäts- und Schwingungslehre (sog. „Trefftzsches Verfahren“ 1926).

Satz 3.5 (Duales Prinzip): Für jede klassische Lösung $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ der linearen Grundaufgabe hat die komplementäre Energie ein striktes Minimum bzgl. aller statisch zulässiger Zustände, d. h.:

$$E_\sigma(S) < E_\sigma(S') \quad (3.2.51)$$

für jeden statisch zulässigen Zustand S' mit $\sigma' \neq \sigma$. Die Umkehrung dieser Aussage (analog zum Primalen Prinzip) gilt unter der zusätzlichen Annahme $\text{rot}\sigma = 0$ und, dass das Referenzgebiet Ω einfach zusammenhängend und konvex bzgl. des Randteils $\partial\Omega_\sigma$ ist.

Beweis: i) Seien $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ eine (klassische) Lösung der Grundaufgabe und $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ ein beliebiger anderer statisch zulässiger Zustand. Dann gilt:

$$E_\sigma(S') - E_\sigma(S) = U_\sigma(S') - U_\sigma(S) - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot (\sigma' - \sigma) \cdot u^\partial do.$$

Analog wie im Beweis von Satz 3.4 gilt

$$U_\sigma(S') - U_\sigma(S) = U_\sigma(S' - S) + \int_\Omega \sigma : C^{-1}(\sigma' - \sigma) d\xi.$$

Dies impliziert

$$E_\sigma(S') - E_\sigma(S) = U_\sigma(S' - S) + \int_\Omega \sigma : C^{-1}(\sigma' - \sigma) d\xi - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot (\sigma' - \sigma) \cdot u^\partial do$$

und weiter mit Hilfe des Satzes von Gauß

$$\begin{aligned} E_\sigma(S') - E_\sigma(S) &= U_\sigma(S' - S) + \int_\Omega \epsilon : (\sigma' - \sigma) d\xi - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot (\sigma' - \sigma) \cdot u^\partial do \\ &= U_\sigma(S' - S) - \int_\Omega \nabla \cdot (\sigma' - \sigma) \cdot u d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot (\sigma' - \sigma) \cdot u d\xi \\ &= U_\sigma(S' - S) > 0. \end{aligned}$$

ii) Sei nun $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ ein statisch zulässiger Zustand, d. h. $-\text{div}\sigma = f$, $\epsilon = C^{-1}\sigma$ und $n \cdot \sigma|_{\partial\Omega_\sigma} = n \cdot \sigma^\partial$, welcher $E_\sigma(\cdot)$ zum Minimum macht bzgl. aller anderer statisch zulässiger Zustände. Dann gilt für einen beliebigen zulässigen Zustand $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ mit $\text{div}\sigma' = 0$ und $n \cdot \sigma'|_{\partial\Omega_\sigma} = 0$ notwendig

$$\frac{d}{dr} E_\sigma(S + rS')|_{r=0} = 0.$$

Aus der Eigenschaft $\text{rot}\sigma = 0$ folgt, dass es zu den Verzerrungen $\epsilon = C^{-1}\sigma$ ein Verschiebungsfeld u gibt mit $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$. Dann folgt folgt nach Ausführung der Differentiation in

$$E_\sigma(S + rS') = \frac{1}{2} \int_\Omega (\sigma + r\sigma') : C^{-1}(\sigma + r\sigma') d\xi - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot (\sigma + r\sigma') \cdot u^\partial do$$

und Anwendung des Satzes von Gauß

$$0 = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma' \cdot u \, d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma' \cdot (u - u^\partial) \, do = \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma' \cdot (u - u^\partial) \, do.$$

Variation von σ' ergibt mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Variationsrechnung wieder die punktweise Beziehung

$$u = u^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_u,$$

d. h.: Der statisch zulässige Zustand S erfüllt notwendig die Dirichletsche¹² Randbedingung und ist damit Lösung der Grundaufgabe. Q.E.D.

Die beiden bisher formulierten Extremalprinzipien gelten für Funktionen, die entweder den kinematischen oder den statischen Bedingungen genügen. Man kann nun auch Prinzipien finden, welche für allgemeine Zustände gelten, d. h. obige Bedingungen noch zusätzlich als sog. „natürliche“ Randbedingungen enthalten. Dies führt auf sog. „dual-primale“ (oder auch „gemischte“) Formulierungen der Grundaufgabe. Aus der Vielzahl derartiger Prinzipien seien die folgenden beiden zitiert. Das Variationsprinzip von Hellinger¹³ (1914), Prange¹⁴ (1916) und Reissner¹⁵ (1950) gilt für kinematisch zulässige Zustände und ergibt die statische Zulässigkeit als natürliche Folgerung der Stationaritätsbedingung.

Satz 3.6 (Dual-Primales Prinzip von Hellinger/Reissner): *Ein gegebener zulässiger Zustand $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ ist genau dann Lösung der Grundaufgabe, wenn er das Funktional*

$$\Theta(S) := U_\sigma(S) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u \, d\xi - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma \cdot u^\partial \, do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u \, do$$

stationär macht bzgl. aller anderen derartigen Zustände, d. h.:

$$\frac{d}{dr} \Theta(S + rS')|_{r=0} = 0 \tag{3.2.52}$$

für alle zulässigen $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ mit $\nabla \cdot \sigma' = 0$, $n \cdot \sigma'|_{\partial\Omega_\sigma} = 0$ und $u'|_{\partial\Omega_u} = 0$.

¹²Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859): Geb. in Düren (damals bei Frankreich; wirkte in Berlin und Göttingen (Nachfolger von Gauss)); wichtige Beiträge zur Zahlentheorie, Analysis und Differentialgleichungen („Dirichletsches Prinzip“).

¹³Ernst David Hellinger (1883–1950): Deutscher Mathematiker; Studium der Mathematik in Heidelberg, Breslau und Göttingen; arbeitete u. a. mit D. Hilbert (Hilbert-Hellinger-Theorie), bekannt insbesondere durch seinen bahnbrechenden Artikel „Die allgemeinen Anstze der Mechanik der Kontinua“ in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, B.G. Teubner, Leipzig, 1914; seit 1914 Prof. an der neu gegründeten Univ. Frankfurt, nach Versetzung in den Zwangsruhestand wegen seiner jüdischen Herkunft 1939 Emigration in die USA; später Beiträge zu Integralgleichungen und Spektraltheorie.

¹⁴Georg (Heinrich Friedrich Wilhelm) Prange (1885–1942): Deutscher Mathematiker; Studium in Göttingen und München, 1914 Promotion bei D. Hilbert, seine Habilitationsschrift 1916 befasste sich mit den Grundlagen der Variationsverfahren in der Elastizitätstheorie; ab 1921 Prof für angewandte Mathematik an der TH Hannover.

¹⁵Max Erich Reissner (1913–1996): Deutscher Baumechaniker; Studium der Ingenieurwissenschaften an der TH Berlin, emigrierte 1936 in die USA, Prof. für Mathematik am Massachusetts Institute of Technology (MIT, USA), dann ab 1970 Prof. für Angewandte Mechanik an der University California, San Diego, USA; entwickelte die u. a. nach ihm benannte „Mindlin-Reissner-Plattentheorie“ (1945).

Beweis: i) Sei $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ ein zulässiger Zustand mit, welcher Lösung der Grundaufgabe ist. Dann gilt für alle zulässigen Zustände $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ mit $\nabla \cdot \sigma' = 0$, $n \cdot \sigma'|_{\partial\Omega_\sigma} = 0$ und $u'|_{\partial\Omega_u} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \Theta(S+rS') &= \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \int_{\Omega} (\sigma+r\sigma') : C^{-1}(\sigma+r\sigma') d\xi + \frac{d}{dr} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\sigma+r\sigma') + f) \cdot (u+ru') d\xi \\ &\quad - \frac{d}{dr} \int_{\partial\Omega_u} n \cdot (\sigma+r\sigma') \cdot u^\partial do + \frac{d}{dr} \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma+r\sigma' - \sigma^\partial) \cdot (u+ru') do \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \Theta(S+rS')|_{r=0} &= \int_{\Omega} C^{-1}\sigma : \sigma' d\xi + \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma' \cdot u d\xi + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u' d\xi \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma' \cdot u^\partial do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma' \cdot u do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u' do. \end{aligned}$$

Beachtung von $C^{-1}\sigma = \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ und der Satzes von Gauß ergibt weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \Theta(S+rS')|_{r=0} &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma' \cdot u d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma' \cdot u do + \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma' \cdot u d\xi \\ &\quad + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u' d\xi - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma' \cdot u^\partial do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma' \cdot u do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u' do \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u' d\xi + \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma' \cdot (u - u^\partial) do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u' do \end{aligned}$$

und damit schließlich

$$\frac{d}{dr} \Theta(S+rS')|_{r=0} = 0.$$

ii) Sei nun $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ ein zulässiger Zustand, der stationärer Punkt des Funktinals $\Theta(\cdot)$ ist. Dann gilt wie in (i) gezeigt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} C^{-1}\sigma : \sigma' d\xi + \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma' \cdot u d\xi + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u' d\xi \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma' \cdot u^\partial do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma' \cdot u do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u' do \end{aligned}$$

für beliebigen zulässigen Zustand $S' = \{u', \epsilon', \sigma'\}$ mit $\nabla \cdot \sigma' = 0$, $n \cdot \sigma'|_{\partial\Omega_\sigma} = 0$ und $u'|_{\partial\Omega_u} = 0$. Mit Hilfe des Satzes von Gauß folgt weiter mit $\epsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} C^{-1}\sigma : \sigma' d\xi - \int_{\Omega} \epsilon(u) : \sigma' d\xi + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma' \cdot u do + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u' d\xi \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma' \cdot u^\partial do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma' \cdot u do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u' do \\ &= \int_{\Omega} C^{-1}\sigma : \sigma' d\xi - \int_{\Omega} \epsilon(u) : \sigma' d\xi + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u' d\xi \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_u} n \cdot \sigma' \cdot (u - u^\partial) do + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot (\sigma - \sigma^\partial) \cdot u' do. \end{aligned}$$

Durch Variation von σ' und u' folgen mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Variationsrechnung die punktwisen Beziehungen

$$C^{-1}\sigma = \epsilon(u), \quad \nabla \cdot \sigma + f = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u - u|_{\partial\Omega_u} = 0, \quad \sigma - \sigma|_{\partial\Omega_\sigma} = 0,$$

d. h.: der Zustand S ist Lösung der Grundgleichungen. Q.E.D.

3.2.3 Existenz von Lösungen und Wohlgestellttheit

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass klassische Lösungen der Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie eindeutig sind und sich durch gewisse Extremalitätseigenschaften charakterisieren lassen. Nun wollen wir uns mit der Existenzfrage beschäftigen. Da elliptische Randwertaufgaben bekanntlich nicht immer klassisch differenzierbare Lösungen haben, muss zunächst der Begriff der „Zulässigkeit“ geeignet abgeschwächt werden. Dazu bieten sich der Sobolew-Raum-Kalkül an, den wir im Folgenden für die vorliegende Situation bereitstellen werden.

Mit $L^2(\Omega)$ wird der Hilbert-Raum der auf Ω im Lebesgueschen Sinne quadratintegrierbaren Funktionen bezeichnet, versehen mit dem üblichen Skalarprodukt und der zugehörigen Norm

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(\xi)v(\xi) d\xi, \quad \|u\|_\Omega = \left(\int_\Omega |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Der Raum der auf Ω messbaren und wesentlich beschränkten Funktionen wird mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnet. Weiter sind auf $C^\infty(\bar{\Omega})$ die sog. „Sobolew-Normen“ m -ter Ordnung erklärt:

$$\|u\|_{m;\Omega} := \left(\sum_{k=0}^m \|\nabla^k u\|_0^2 \right)^{1/2},$$

mit den Tensorfeldern der k -ten Ableitungen

$$\nabla^k u = (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} u)_{i_1, \dots, i_k=1}^3.$$

Durch Vervollständigung des Raumes $\{u \in C^\infty(\Omega) \mid |\nabla^k u| \in L^2(\Omega), k = 1, \dots, m\}$ glatter Funktionen bzgl. der Normen $\|\cdot\|_{m;\Omega}$ (Äquivalenzklassenbildung) erhält man die bekannten Sobolew-Räume $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, bzw. $L^2(\Omega)$ für $m = 0$. Diese Konstruktion lässt auch Gebiete Ω mit Rissen zu. Für mehr Details über Sobolew-Räume und Eigenschaften der enthaltenen Funktionen verweisen wir auf die Monographien Sobolew [19], Adams [4], Wloka [22] und auf den Band 3 in dieser Lecture Notes Reihe [3].

Für das Folgende machen wir eine Reihe grundlegender Voraussetzungen:

(V1) *Das Grundgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ besitzt einen Rand $\partial\Omega$, welcher der „eingeschränkten Kegelbedingung“ genügt, d. h.: Es existieren eine endliche offene Kugelüberdeckung $\{O_k, k = 1, \dots, N\}$ von $\bar{\Omega}$ und zugehörige Kreiskegel $K_0(\Gamma_k, R)$ mit Radius $R > 0$ und Einheitssphärenabschnitt $\Gamma_k \subset S_1$, $|\Gamma_k| = \gamma_0 > 0$, so dass für jeden Punkt $\xi \in \Omega \cap O_k$ der Kegel $K_\xi(\Gamma_k, R) \subset \Omega$ ist. O.b.d.A. kann angenommen werden, dass die Kugeln O_k den Radius R und ihren Mittelpunkt in Ω haben.*

Diese Bedingung ist etwa erfüllt, wenn $\partial\Omega \in C^2$ oder stückweise glatt ohne degenerierte Randpunkte oder Kurven ist. Dann kann $H^m(\Omega)$, so wie wir ihn definiert haben, identifiziert werden mit dem Raum der L^2 -Funktionen mit verallgemeinerten (distributionellen) m -ten Ableitungen in $L^2(\Omega)$.

(V2) *Der Randteil $\partial\Omega_u \subset \partial\Omega$ besitzt ein positives Oberflächenmaß $|\partial\Omega_u| > 0$ und enthält mindestens drei linear unabhängige innere Punkte.*

Dann ist der Abschluss $V_0 := H_0^1(\partial\Omega_u; \Omega)$ des Teilraums

$$\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega_u\} \subset H^1(\Omega)$$

ein echter Teilraum von $H^1(\Omega)$. Er enthält alle H^1 -Funktionen, welche im „verallgemeinerten Sinne“ auf $\partial\Omega_u$ verschwinden. Für Vektorfunktionen $v \in H_0^1(\partial\Omega_u; \Omega)^3$ gilt dann die „Poincarésche Ungleichung“:

$$\|v\|_\Omega \leq c_{\text{poin}} \|\nabla v\|_\Omega. \quad (3.2.53)$$

Dabei bezeichnen sinngemäß $H^m(\Omega)^3$ den Raum der Vektorfelder mit Komponenten in $H^m(\Omega)$. Ferner gilt für jede lineare Funktion $w(\xi) = a + b \cdot \xi$ mit $w = 0$ auf $\partial\Omega_u$ dann notwendig $w = 0$ auf ganz Ω . Für die „Spur“ von Funktionen $v \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt die sog. „Spurabschätzung“:

$$\|v\|_{\partial\Omega} \leq c_{\text{spur}} \|v\|_{1;\Omega}. \quad (3.2.54)$$

Dies gestattet es, auch für H^1 -Funktionen eine Einschränkung (ihre „Spur“) auf $\partial\Omega$ zu erklären. Seien nämlich $v \in H^1(\Omega)$ und $v_k \in C^1(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, approximierende Funktionen mit $\|v_k - v\|_1 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Dann bilden aufgrund der Spurabschätzung die Spuren $v_k|_{\partial\Omega}$ eine Cauchy-Folge im Hilbert-Raum $L^2(\partial\Omega)$. Mit deren Limes $\tilde{v} \in L^2(\partial\Omega)$ wird dann $v|_{\partial\Omega} := \tilde{v}$, gesetzt. Die Spurabschätzung überträgt sich so auf ganz $H^1(\Omega)$.

(V3) *Der Elastizitätstensor $C = (C_{ijkl})_{i,j,k,l=1}^3$ ist auf Ω symmetrisch und gleichmäßig beschränkt,*

$$C_{ijkl} = C_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (3.2.55)$$

sowie positiv definit

$$C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} > 0 \quad (3.2.56)$$

für alle symmetrischen Tensoren $\epsilon = (\epsilon_{ij})_{i,j=1}^3 \neq 0$.

(V4) *Die äußeren Belastungen erfüllen $f \in L^2(\Omega)^3$, $\sigma^\partial \in L^2(\partial\Omega)_{\text{sym}}^{3 \times 3}$, und die Randverschiebung ist gegeben als globales Felder bzw. als Spur eines solchen: $u^\partial \in H^1(\Omega)^3$.*

Unter den Voraussetzungen (V1) - (V4) sind die Bilinearform

$$a(u, v) := \int_\Omega C \epsilon(u) : \epsilon(v) d\xi = \frac{1}{4} \int_\Omega C(\nabla u + \nabla u^T) : (\nabla v + \nabla v^T) d\xi$$

und die Linearform

$$l(v) := \int_\Omega f \cdot v d\xi + \int_{\partial\Omega_\sigma} n \cdot \sigma^\partial \cdot v do.$$

wohldefiniert auf dem Hilbert-Raum $H^1(\Omega)^3$ und offensichtlich auch beschränkt (bzw. stetig),

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{1;\Omega} \|v\|_{1;\Omega}, \quad |l(v)| \leq \beta \|v\|_{1;\Omega}, \quad u, v \in H^1(\Omega)^3. \quad (3.2.57)$$

Darüberhinaus ist die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ definit auf Verschiebungen u mit zugehörigen symmetrischen Verzerrungstensoren gemäß

$$a(u, u) \geq \gamma \|\epsilon(u)\|_{\Omega}^2, \quad u \in H^1(\Omega)^3. \quad (3.2.58)$$

Definition 3.3 (Schwache Formulierung): Die sog. „(primale) schwache“ Formulierung der Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie sucht ein Verschiebungsvektorfeld $u \in H^1(\Omega)^3$ mit den Eigenschaften $u - u^\partial \in V_0 := H_0^1(\partial\Omega_u; \Omega)^3$ und

$$a(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in V_0. \quad (3.2.59)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass jede klassische Lösung $u \in C^2(\Omega)^3 \cap C^1(\Omega \cup \partial\Omega_0)^3 \cap C(\Omega \cup \partial\Omega_u)^3$ der Grundaufgabe automatisch auch „schwache“ Lösung ist. Umgekehrt genügt jede solche „schwache“ Lösung, wenn sie regulär genug ist, notwendig den Gleichungen einer klassischen Lösung. Es handelt sich hierbei also um eine wirkliche Verallgemeinerung der klassischen Formulierung der Grundaufgabe. Dass der so definierte „schwache“ Lösungsbegriff adäquat für das vorliegende Problem ist, zeigt der folgende Satz:

Satz 3.7 (Existenzsatz): Unter den Voraussetzungen (V1) - (V4) besitzt die Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie eine eindeutig bestimmte „schwache“ Lösung. Diese ist ein striktes Minimum des Energiefunktionals

$$E(u) := \frac{1}{2}a(u, u) - l(u) \quad (3.2.60)$$

auf $u^\partial + H_0^1(\partial\Omega_u; \Omega)^3$. Ferner gilt die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{1;\Omega} \leq c_{\text{stab}}^{-1} \{c_{\text{poin}} \|f\|_{\Omega} + c_{\text{spur}} \|q^\partial\|_{\partial\Omega_\sigma} + \alpha \|u^\partial\|_{1;\Omega}\}, \quad (3.2.61)$$

mit einer Konstante $c_{\text{stab}} > 0$.

Beweis: i) Wir wollen zeigen, dass die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ auf dem Hilbert-Raum V_0 ein Skalarprodukt definiert, das äquivalent zum üblichen V_0 -Skalarprodukt ist:

$$c_0 \|v\|_{1;\Omega}^2 \leq a(v, v) \leq c_1 \|v\|_{1;\Omega}^2, \quad v \in V_0.$$

Dazu bleibt aufgrund der vorausgesetzten Beschränktheit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, deren Definitheit (bzw. Stabilität) zu zeigen:

$$a(v, v) \geq c_{\text{stab}} \|v\|_{1;\Omega}^2, \quad v \in V_0. \quad (3.2.62)$$

Dann garantiert der Darstellungssatz von Riesz, dass zu der auf V_0 beschränkten Linearform

$$F(\cdot) := l(\cdot) - a(u^\partial, \cdot)$$

ein eindeutig bestimmtes Element $w \in V_0$ existiert, mit dem gilt:

$$a(w, \varphi) = F(\varphi) = l(\varphi) - a(u^\partial, \varphi) \quad \forall \varphi \in V_0.$$

Das Element $u := w + u^\partial \in H^1(\Omega)^3$ erfüllt dann $u - u^\partial \in V_0$ sowie

$$a(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in V_0,$$

d. h. ist die gesuchte (eindeutig bestimmte) schwache Lösung der Grundaufgabe.

ii) Der Beweis der strikten Minimalität des Energiefunktionals $E(\cdot)$ für u kann dann analog zum Beweis des klassischen Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie erfolgen. Der Vollständigkeit halber rekapitulieren wir den Beweis. Für die variationelle Lösung $u \in u^\partial + V_0$ gilt mit jeder anderen Funktion $v \in u^\partial + V_0$:

$$\begin{aligned} E(v) - E(u) &= \frac{1}{2}a(v, v) - l(v) - \frac{1}{2}a(u, u) + l(u) \\ &= \frac{1}{2}a(v, v) - l(v - u^\partial) - l(u^\partial) - \frac{1}{2}a(u, u) + l(u - u^\partial) + l(u^\partial) \\ &= \frac{1}{2}a(v, v) - a(u, v - u^\partial) - l(u^\partial) - \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, u - u^\partial) + l(u^\partial) \\ &= \frac{1}{2}a(v, v) - a(u, v) + \frac{1}{2}a(u, u) \\ &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq 0. \end{aligned}$$

Folglich ist u striktes Minimum des Energiefunktionals.

iii) Die a priori Abschätzung für u erhalten wir aus der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned} c_{\text{stab}} \|u - u^\partial\|_{1;\Omega}^2 &\leq a(u - u^\partial, u - u^\partial) = a(u, u - u^\partial) - a(u^\partial, u - u^\partial) \\ &= (f, u - u^\partial) + (q^\partial, u - u^\partial)_{\Gamma_p} - a(u^\partial, u - u^\partial) \\ &\leq \{c_{\text{poin}} \|f\|_\Omega + c_{\text{spur}} \|q^\partial\|_{\partial\Omega_\sigma} + \alpha \|u^\partial\|_{1;\Omega}\} \|u - u^\partial\|_1. \end{aligned}$$

iv) Die Definitheitsabschätzung (3.2.62) ist eine Folgerung aus der sog. „2. Kornschen Ungleichung“

$$\|v\|_{1;\Omega} \leq \gamma_{\text{korn}} \{\|\epsilon(v)\|_\Omega + \|v\|_\Omega\}, \quad v \in H^1(\Omega)^3, \quad (3.2.63)$$

deren Beweis weiter unten gegeben wird. Mit Hilfe der Definitheit des Elastizitätstensors auf symmetrischen Dyaden folgt daraus

$$c_1 \|u\|_{1;\Omega}^2 \leq \{a(u, u) + \|u\|_\Omega^2\}, \quad v \in H^1(\Omega)^3.$$

Wenn nun die behauptete Ungleichung nicht gälte, so gäbe es notwendig eine Folge von Feldern $v^{(k)} \in V_0$, $k \in \mathbb{N}$, mit den Eigenschaften

$$\|v^{(k)}\|_{1;\Omega} = 1, \quad a(v^{(k)}, v^{(k)}) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Der Kompaktheitssatz von Rellich besagt, dass die Einbettung $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ kompakt ist. Folglich existiert ein Feld $v \in V_0$, so dass für eine Teilfolge $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ gilt:

$$\|v^{(k)} - v\|_{\Omega} \rightarrow 0, \quad (\nabla(v^{(k)} - v), \nabla\varphi)_{\Omega} \rightarrow 0 \quad (k \in \mathbb{N}', k \rightarrow \infty).$$

Die letzte Aussage entspricht der „schwachen“ Konvergenz im Hilbert-Raum V_0 . Damit erschließen wir

$$\begin{aligned} c_1 \|v^{(k)} - v\|_{1;\Omega}^2 &\leq a(v^{(k)} - v, v^{(k)} - v) + \|v^{(k)} - v\|_{\Omega}^2 \\ &= a(v^{(k)}, v^{(k)}) - 2a(v^{(k)}, v) + a(v, v) + \|v^{(k)} - v\|_{\Omega}^2 \\ &\rightarrow -a(v, v) \leq 0 \quad (k \in \mathbb{N}', k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d. h. die „starke“ Konvergenz $\|v^{(k)} - v\|_{1;\Omega} \rightarrow 0$ ($k \in \mathbb{N}', k \rightarrow \infty$). Wegen $a(v^{(k)}, v^{(k)}) \rightarrow 0$ impliziert dies notwendig $a(v, v) = 0$ bzw. $\epsilon(v) = 0$. Folglich ist das Feld von der Gestalt $v(\xi) = b - B\xi$ mit einem konstanten Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und einer konstanten, schiefsymmetrischen Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Wegen $v = 0$ auf $\partial\Omega_u$ folgt so gemäß Voraussetzung notwendig $v = 0$ und damit der Widerspruch $\|v^{(k)}\|_{1;\Omega} \rightarrow 0$ ($k \in \mathbb{N}', k \rightarrow \infty$). Q.E.D.

Der Zusammenhang zwischen der primalen „schwachen“ Formulierung (3.2.59) der Grundaufgabe und der klassischen Formulierung (3.2.42-3.2.44) stellt das folgende Resultat her.

Satz 3.8 (Regularität): *Unter den Voraussetzungen (V1) - (V4) und den zusätzlichen Regularitätsannahmen*

$$\partial\Omega_u, \partial\Omega_{\sigma} \in C^{2+\alpha}, \quad C \in C^2(\overline{\Omega}), \quad f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})^3, \quad \sigma^{\partial} \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})_{\text{sym}}^{3 \times 3}, \quad u^{\partial} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})^3,$$

ist die schwache H^1 -Lösung der Grundaufgabe auch klassisch, d. h.:

$$u \in C^2(\Omega)^3 \cap C^1(\Omega \cup \partial\Omega_{\sigma})^3 \cap C(\Omega \cup \partial\Omega_u)^3.$$

In den Berührungspunkten der Randteile $\partial\Omega_{\sigma}$ und $\partial\Omega_u$ weist die Lösung u i. Allg. ein gewisses singuläres Verhalten auf (unbeschränkter Verschiebungsgradient bzw. Spannungstensor). Der tiefliegende Beweis dieses Satzes liegt außerhalb des Rahmens dieses Textes (siehe dazu die angegebene Literatur zur Theorie partieller Differentialgleichungen)

Der zu einer regulären Lösung u der *primalen* Formulierung Grundaufgabe gehörende Zustand $S = \{u, \epsilon, \sigma\}$ mit $\epsilon := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ und $\sigma := C\epsilon$ ist auch Lösung im Sinne der *gemischten* und der *dualen* Formulierung.

Zum Abschluss dieses Abschnitts diskutieren wir die oben verwendete sog. „Kornsche Ungleichung“ (Korn¹⁶ 1906).

¹⁶Arthur Korn (1870–1945): Deutscher Physiker und Mathematiker; Studium der Mathematik und Physik in Freiburg und Leipzig; Habilitation 1895 in München, ab 1914 Prof. für Physik an der TU Berlin; Arbeiten zu Elastizitätstheorie, Potentialtheorie, theoretischer Mechanik, Integralgleichungen und Problemen der Elektrotechnik und Quantenmechanik; konstruierte das ersten bildtelegraphische System (1916); wegen seiner jüdischen Herkunft 1933 aus dem Universitätsdienst entlassen, emigrierte aber erst 1939 in die USA, dort Prof. für Physik und Mathematik am Stevens Institute of Technology in Hoboken, New Jersey.

Lemma 3.4 (1. Kornsche Ungleichung): *Im Fall $\partial\Omega_u = \partial\Omega$ gilt für Felder $v \in H_0^1(\Omega)^3$ die sog. „1. Kornsche Ungleichung“*

$$\|\nabla v\|_{\Omega} \leq c_{\text{korn}} \|\epsilon(u)\|_{\Omega}. \quad (3.2.64)$$

An das Gebiet Ω (offene Punktmenge) müssen in diesem Fall keinerlei einschränkende Regularitätsbedingungen gestellt werden.

Beweis: Es genügt, die behauptete Ungleichung für Felder $v \in C_0^\infty(\Omega)^3$ zu beweisen. Mit Hilfe des üblichen Stetigkeitsarguments überträgt sie sich dann auf ganz $H_0^1(\Omega)^3$. Durch mehrfache Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und Beachtung von $v = 0$ und $\nabla v = 0$ auf $\partial\Omega$ erhalten wir:

$$\int_{\Omega} \partial_j v_i \partial_i v_j \, d\xi = \int_{\Omega} \partial_i v_i \partial_j v_j \, d\xi = \int_{\Omega} |\operatorname{div} v|^2 \, d\xi.$$

Die Beziehungen

$$\|\epsilon(v)\|_{\Omega}^2 = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\partial_j v_i + \partial_i v_j|^2 \, d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_j v_i|^2 + \partial_j v_i \partial_i v_j) \, d\xi \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{\Omega}^2$$

vervollständigen dann den Beweis. Q.E.D.

Die sog. „2. Kornsche Ungleichung“ bezieht sich auf Felder, welche keinen Randbedingungen unterworfen sind.

Lemma 3.5 (2. Kornsche Ungleichung): *Für Felder $v \in H^1(\Omega)^3$ gilt die sog. „2. Kornsche Ungleichung“*

$$\|\nabla v\|_{\Omega} \leq c_{\text{korn}} \{ \|\epsilon(u)\|_{\Omega} + \|v\|_{\Omega} \}. \quad (3.2.65)$$

Diese Ungleichung gilt für Gebiete mit glattem Rand $\partial\Omega \in C^1$, für Polygon- und Polyedergebiete und allgemeiner für Gebiete mit Lipschitz-Rand.

Beweis: Der vergleichsweise schwierige Beweis dieser Ungleichung wurde erstmals von Friedrichs¹⁷(1947) gegeben. Eine vereinfachten Variante geht auf Fichera¹⁸ (1965) zurück, die wir weiter unten darstellen. Ein weitgehend elementarer Beweis wurde von Nitsche¹⁹ (1981) gegeben, dessen Idee wir zunächst skizzieren.

¹⁷Otto Paul Friedrichs (1901–1982): Deutscher Mathematiker; Prof. in Braunschweig, emigrierte 1937 nach USA ans Courant-Institut in New York; wichtige Beiträge zu partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

¹⁸Gaetano Fichera (1922–1996): Italienischer Mathematiker; seit 1949 Prof. für Analysis in Triest, ab 1956 in Rom; Beiträge zu den Gebieten Variationsrechnung, Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Theorie partieller Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Ma- und Integrationstheorie, Funktionentheorie, Numerische Analysis, Differentialformen und deren Anwendungen u. a. in der Elastizitätstheorie.

¹⁹Joachim A. Nitsche (1926–1996): Deutscher Mathematiker; Prof. in Freiburg; fundamentale Beiträge zur Theorie der Finite-Elemente-Methode.

i) Der wesentliche erste Schritt besteht in der Konstruktion eines Fortsetzungsoperators $E : H^1(\Omega)^3 \rightarrow H_0^1(\mathbb{R}^3)^3$ mit der Eigenschaft

$$\|\epsilon(Eu)\|_{\mathbb{R}^3} \leq c\{\|\epsilon(u)\|_{\Omega} + \|u\|_{\Omega}\}.$$

Dabei ist $H_0^1(\mathbb{R}^3)$ die Vervollständigung des Raumes $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger bzgl. der H^1 -Norm $\|u\|_{1;\mathbb{R}^3} = (\|\nabla u\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|u\|_{\mathbb{R}^3}^2)^{1/2}$. Diese nicht-triviale Konstruktion ist der „harte Kern“ des Beweises. Im zweiten Schritt wird der Rand $\partial\Omega$ des gegebenen Gebiets Ω durch eine endliche Menge von Kugeln $K_n, n = 1, \dots, N$, mit Zentrum auf $\partial\Omega$ überdeckt,

$$\Omega_n := \Omega \cap K_n$$

Weiter wählen wir ein Gebiet $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, so dass Ω_0 und die Ω_n eine Überdeckung von Ω bilden. Sei $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine zugehörige Zerlegung der Eins, d. h.:

$$\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega_n), \quad \sum_{n=0}^N \varphi_n = 1.$$

Für $u \in H^1(\Omega)^3$ definieren wir die Zerlegung

$$u = \sum_{n=0}^N u^{(n)}, \quad u^{(n)} := \varphi_n u.$$

Anwendung der 1. Kornschen Ungleichung für $Eu^{(n)}$ und der obigen a priori Abschätzung impliziert

$$\|\nabla u^{(n)}\|_{\mathbb{R}^3} \leq c\|\epsilon(u^{(n)})\|_{\mathbb{R}^3}.$$

Wegen

$$\epsilon_{ij}(u^{(n)}) = \varphi_n \epsilon_{ij} + \frac{1}{2}(u_i \partial_j \varphi_n + u_j \partial_i \varphi_n)$$

ergibt sich

$$\|\epsilon(u^{(n)})\| \leq c\{\|\epsilon(u)\|_{\Omega} + \|u\|_{\Omega}\}.$$

Summation dieser Abschätzung über $n = 0, 1, \dots, N$ vervollständigt den Beweis.

ii) Wir skizzieren nun noch den sehr technischen Beweis nach Fichera. Seien $\{O_\nu, \nu = 1, \dots, N\}$ eine (endliche) offene Überdeckung von $\bar{\Omega}$ und $\{\varphi_\nu, \nu = 1, \dots, N\}$ eine zugehörige „Zerlegung der Eins“ mit den Eigenschaften

$$\varphi_\nu \in C_0^\infty(O_\nu), \quad \sum_{\nu=1}^N \varphi_\nu^2 \equiv 1 \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Damit ist für ein beliebiges $v \in H^1(\Omega)^3$

$$\int_{\Omega} |\partial_k v_i|^2 dx = \sum_{\nu=1}^N \int_{\Omega} |\varphi_\nu \partial_k v_i|^2 dx \leq c \sum_{\nu=1}^N \int_{\Omega} |\partial_k(\varphi_\nu v_i)|^2 dx + c\|v\|_{\Omega}^2.$$

Ferner ist aufgrund analoger Überlegungen

$$\sum_{\nu=1}^N \|\varepsilon(\varphi_\nu v)\|_\Omega^2 \leq c \{ \|\varepsilon(v)\|_\Omega^2 + \|v\|_\Omega^2 \}.$$

Für den Beweis der Behauptung genügt es also, für $\nu \in \{1, \dots, N\}$ zu zeigen:

$$\int_\Omega |\partial_k(\varphi_\nu v_i)|^2 dx \leq c \int_\Omega |\partial_k(\varphi_\nu v_i) + \partial_i(\varphi_\nu v_k)|^2 dx. \quad (3.2.66)$$

Für beliebiges aber festes $\nu \in \{1, \dots, N\}$ sei gesetzt:

$$v := \varphi_\nu v, \quad O := O_\nu, \quad \Gamma := \Gamma_\nu = \partial O_\nu,$$

wobei wieder o.B.d.A. $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ angenommen werden kann. Für beliebiges $x \in O \cap \Omega$ ist dann (wegen $v \equiv 0$ auf O^c) mit einem festen Punkt $\omega \in \Gamma$:

$$v(x) = \int_0^R \partial_\rho^2 v(x + \rho\omega) \rho d\rho.$$

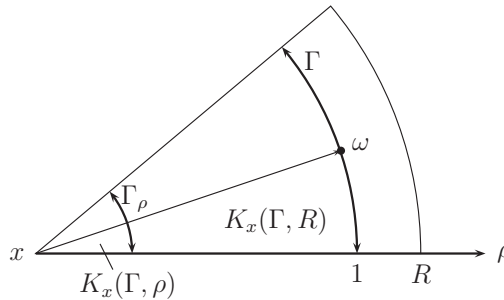


Abbildung 3.4: Konfigurationsskizze zum Beweis

Die ρ -Ableitungen lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} \partial_\rho^2 v &= \partial_l \partial_k v \partial_\rho y_k \partial_\rho y_l, & \partial_\rho^2 y_k &\equiv 0, \\ y &= x + \rho\omega, & \partial_\rho y_k &= \frac{(y-x)_k}{|y-x|}, & |y-x| &= \rho. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$v(x) = \int_0^R \partial_l \partial_k v(y) \frac{(x-y)_k (x-y)_l}{|x-y|} d\rho.$$

Sei nun $\psi = \psi(\omega)$ eine Funktion auf der Einheitssphäre S_1 mit den Eigenschaften

$$\psi \in C_o^\infty(\Gamma), \quad \int_\Gamma \psi(\omega) d\omega = 1.$$

Damit wird dann nach Multiplikation mit ψ und anschließender Integration über Γ :

$$v(x) = \int_{K_x(\Gamma, R)} \partial_l \partial_k v(y) \frac{(x-y)_k (x-y)_l}{|x-y|^3} \psi \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) dy,$$

wobei

$$\int_{\Gamma} \int_0^R \dots \rho^2 d\rho d\omega = \int_{K_x(\Gamma, R)} \dots dy, \quad \omega = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

Mit Hilfe der folgenden Identität für $\varepsilon = \varepsilon(v)$

$$\begin{aligned} 2\partial_l \partial_k v_i &= \partial_k (\partial_l v_i + \partial_i v_l) + \partial_l (\partial_k v_i + \partial_i v_k) - \partial_i (\partial_k v_l + \partial_l v_k) \\ &= \partial_k \varepsilon_{il} + \partial_l \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{lk} \end{aligned}$$

erhalten wir weiter

$$v_i(x) = \int_{K_x(\Gamma, R)} (\partial_k \varepsilon_{il} + \partial_l \varepsilon_{ik} - \partial_i \varepsilon_{lk})(y) M_{kl}(y-x) dy \quad (3.2.67)$$

mit der „Kernfunktion“

$$M_{kl}(y-x) = \frac{(y-x)_k (y-x)_l}{|y-x|^3} \psi \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right).$$

Zur Abkürzung wird nun gesetzt

$$\alpha_{il}^k(x) := \int_{K_x(\Gamma, R)} \partial_k \varepsilon_{il}(y) M_{kl}(y-x) dy.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_j \alpha_{il}^k(x) &= \int_{K_x(\Gamma, R)} \partial_k \varepsilon_{il}(y) \partial_{x_j} M_{kl}(y-x) dy \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{K_x(\Gamma, R) \setminus K_x(\Gamma, \rho)} \dots dy, \end{aligned}$$

und nach partieller Integration nach y_k :

$$\begin{aligned} \partial_j \alpha_{il}^k(x) &= - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{K_x(\Gamma, R) \setminus K_x(\Gamma, \rho)} \varepsilon_{il}(y) \partial_{x_j} \partial_{y_k} M_{kl}(y-x) dy \\ &\quad + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \varepsilon_{il}(y) \partial_{x_j} M_{kl}(y-x) n_j d\omega. \end{aligned}$$

Auf dem kugelflächenstück Γ und auf dem Kegelmantel verschwindet der Integrand nach Konstruktion. Bei Transformation $y = \rho\omega \rightarrow \omega$ geht das Flächenintegral über in

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \partial_{x_j} M_{kl}(y-x) n_j d\Omega = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \varepsilon_{il}(x + \rho\omega) \partial_{x_j} M_{kl}(\Omega) \omega_j d\omega.$$

Wir finden also

$$\partial_j \alpha_{il}^k(x) = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{K_x(\Gamma, R)} \varepsilon_{il}(y) S_{kl}^\rho(y-x) dy - \varepsilon_{il}(x) \kappa_{kl} \quad (3.2.68)$$

mit den Konstanten

$$\kappa_{kl} := \int_{\Gamma} \partial_{x_j} M_{kl}(\omega) \omega_j d\omega$$

und den Funktionen

$$S_{kl}^\rho(t) := \begin{cases} \partial_{x_j} \partial_{y_k} M_{kl}(t), & \rho \leq |t| \leq R, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

O.b.d.A. kann angenommen werden, dass $\bar{\Omega}$ in dem Würfel $Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| < \pi/2, i = 1, 2, 3\}$ enthalten ist und dass $\varepsilon = \varepsilon(v)$ außerhalb von $\bar{\Omega}$ durch Null fortgesetzt ist. Dann hat man

$$F_{ij}^{(\rho)}(x) := \int_{K_x(\Gamma, R)} \varepsilon_{il}(y) S_{kl}^\rho(y-x) dy = \int_Q \varepsilon_{il}(y) S_{kl}^\rho(y-x) dy.$$

Wir entwickeln nun $F_{ij}^{(\rho)}$ in eine Fourier-Reihe. Die Fourier-Koeffizienten haben die Gestalt, $s \in \mathbb{Z}^3$:

$$\begin{aligned} \int_Q F_{ij}^{(\rho)}(x) e^{isx} dx &= \int_Q \int_Q \varepsilon_{il}(y) S_{kl}^\rho(y-x) e^{isx} dy dx \\ &= \int_Q \int_Q \varepsilon_{il}(y) S_{kl}^\rho(y-x) e^{isy} e^{-is(y-x)} dy dx \\ &= \int_Q \varepsilon_{il}(y) e^{isy} \left(\int_Q S_{kl}^\rho(y-x) e^{-is(y-x)} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Man überlegt nun, dass aufgrund der speziellen Struktur von S_{kl}^ρ die Integrale

$$I_{kl}^s := \int_Q S_{kl}^\rho(y-x) e^{-is(y-x)} dx = \int_Q S_{kl}^\rho(z) e^{-isz} dz$$

unabhängig von $y \in Q$ sind. Dies zu verifizieren sei als Übungsaufgabe gestellt. Wir werden hierfür zeigen, dass

$$|I_{kl}^s| \leq c, \quad s \in \mathbb{Z}^3. \quad (3.2.69)$$

Dann folgt nach der Parsevalschen Identität für Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} \int_Q |F_{ij}^{(\rho)}(x)|^2 dx &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \left| \int_Q F_{ij}^{(\rho)}(x) e^{isx} dx \right|^2 \\ &\leq c \sum_{l=1}^3 \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \left| \int_Q \varepsilon_{il}(y) e^{isy} dy \right|^2 \leq c \sum_{l=1}^3 \int_Q |\varepsilon_{il}(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Für $x \in O \cap \Omega$ konvergiert nun nach Konstruktion (3.2.68)

$$F_{ij}^{(\rho)}(x) \rightarrow -\partial_j \alpha_{il}^k(x) - \kappa_{kl} \varepsilon_{il}(x) \quad (\rho \rightarrow 0).$$

Das Lemma von Fatou liefert dann die Beziehung (ohne Summation)

$$\int_{\Omega} |\partial_j \alpha_{il}(x)|^2 dx \leq c \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} |\varepsilon_{il}(x)|^2 dx.$$

und damit schließlich über (3.2.67)

$$\int_{\Omega} |\partial_j v_i(x)|^2 dx \leq c \sum_{k,l=1}^3 \int_{\Omega} |\varepsilon_{kl}(x)|^2 dx. \quad (3.2.70)$$

Dies beweist die gewünschte lokale Abschätzung (3.2.66). Es bleibt nur noch, den Beweis von (3.2.69) nachzutragen. Wir geben dazu nur eine Skizze und stellen die technischen Einzelheiten als Übung. Zunächst gilt mit einer Funktion

$$\tau_{kl} \in C_0^\infty(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \tau_{kl}(\omega) d\omega = 0,$$

die Darstellung

$$\int_Q S_{kl}^\rho(z) e^{-isz} dz = \int_{\Gamma} \tau_{kl}(\omega) \int_{\rho}^R e^{-i\rho s \omega} \rho^{-1} d\rho d\omega.$$

Für $s \neq 0$ ist also mit $\alpha := |s|^{-1}s$:

$$I_{kl}^s = \int_{\Gamma} \tau_{kl}(\omega) \int_{\rho}^R (e^{-i\rho|s|\alpha} - e^{-\rho|s|}) \rho^{-1} d\rho d\omega.$$

Durch geeignete Aufspaltung des Integrationsintervalls und Reihenentwicklung lässt sich das Integral

$$\int_0^R (e^{-i\rho|s|\alpha} - e^{-\rho|s|}) \rho^{-1} d\rho$$

im wesentlichen auf das Dirichletsche Integral

$$\left| \int_1^\infty e^{-it} t^{-1} dt \right| < \infty$$

zurückführen und erweist sich so als gleichmäßig beschränkt bzgl. $s \in \mathbb{Z}^3$. Damit folgt schließlich (3.2.69), was den Beweis vervollständigt. Q.E.D.

3.2.4 Inkompressible Materialien

Einige elastische Materialien wie z. B. Gummi verhalten sich unter Deformation „inkompressibel“, d. h.: Die Deformation erfolgt so, dass materielle Volumina praktisch nicht zusammengedrückt werden. Dies wird wieder durch die lineare Differentialgleichungsnebenbedingung

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.2.71)$$

ausgedrückt. Zur Berücksichtigung dieser Zusatzbedingung betrachten wir wieder das Energiefunktional des linear-elastischen Körpers

$$E(u) := \frac{1}{2}(C\epsilon(u), \epsilon(u))_\Omega - (f, u)_\Omega - (n \cdot \sigma^\partial, u)_{\partial\Omega_\sigma}$$

und minimieren es nun auf der Mannigfaltigkeit $u^\partial + V_0^{div}$, mit

$$V_0^{div} := \{v \in V_0 = H_0^1(\partial\Omega_u; \Omega)^3 \mid \nabla \cdot v = 0\} \subset V_0,$$

der kinematisch zulässigen Verschiebungsfelder, welche zusätzlich „divergenz-frei“ sind. Die Lösung ist dann charakterisiert durch

$$E(u) = \min_{v \in u^\partial + V_0^{div}} E(v).$$

Die Existenz eines eindeutig bestimmten Minimums zeigt man mit demselben Argument wie im obigen Fall. Das restringierte Minimierungsproblem lässt sich mit Hilfe des sog Euler-Lagrange-Ansatzes in ein unrestringiertes umformen. Dazu betrachten wir das „Lagrange-Funktional“

$$L(u, p) := \frac{1}{2}(C\epsilon(u), \epsilon(u))_\Omega - (f, u)_\Omega - (n \cdot \sigma^\partial, u)_{\partial\Omega_\sigma} - (p, \nabla \cdot u)_\Omega$$

mit dem „Lagrange-Multiplikator“ $p \in H := L^2(\Omega)$. Das Minimum u von $E(\cdot)$ auf $u^\partial + V_0^{div}$ ist dann charakterisiert als stationärer Punkt von $L(u, p)$, d. h. als Lösung des Sattelpunkt-Systems

$$\begin{aligned} \nabla_u L(u, p)(\delta u) &= 0 \quad \forall \delta u \in V_0, \\ \nabla_p L(u, p)(\delta p) &= 0 \quad \forall \delta p \in H, \end{aligned}$$

bzw. ausgeschrieben:

$$(C\epsilon(u), \epsilon(\varphi))_\Omega - (p, \nabla \cdot \varphi)_\Omega = (f, \varphi)_\Omega + (n \cdot \sigma^\partial, \varphi)_{\partial\Omega_\sigma} \quad \forall \varphi \in V_0, \quad (3.2.72)$$

$$(\nabla \cdot u, \chi)_\Omega = 0 \quad \forall \chi \in H. \quad (3.2.73)$$

Der Lagrange-Multiplikator p kann hier als ein „Druck“ interpretiert werden, den man auch über den Stokesschen Materialansatz

$$\sigma = -pI + 2\mu\epsilon + \lambda \operatorname{spur}(\epsilon)I$$

erhalten hätte. Die Existenz dieses Druckes ergibt sich aus der allgemeinen „inf-sup-Abschätzung“ für $\partial\Omega_u \neq \partial\Omega$:

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{v \in V_0} \frac{(q, \nabla \cdot v)_\Omega}{\|q\|_\Omega \|\nabla v\|_\Omega} \geq \beta > 0, \quad (3.2.74)$$

oder deren speziellen Variante im Fall $\partial\Omega_u = \partial\Omega$:

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^3} \frac{(q, \nabla \cdot v)_\Omega}{\|q\|_\Omega \|\nabla v\|_\Omega} \geq \beta > 0, \quad (3.2.75)$$

mit dem Funktionenraum $L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : (q, 1)_\Omega = 0\}$. Diesen Zusammenhang und insbesondere den Beweis der „inf-sup-Abschätzung“ werden wir noch im Zusammenhang mit inkompressiblen Strömungen näher diskutieren.

3.2.5 Die Lamé-Naviersche Schwingungsaufgabe

Wir betrachten nun die volle instationäre Variante der Grundaufgabe der linearen Elastizitätstheorie bestehend aus dem Differentialgleichungssystem

$$\partial_t^2 u - \nabla \cdot C\varepsilon(u) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \quad (3.2.76)$$

kombiniert mit den Randbedingungen

$$u = u^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_u \times (0, T], \quad n \cdot C\varepsilon(u) = n \cdot \sigma^\partial \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma \times (0, T], \quad (3.2.77)$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(\cdot, 0) = u^0, \quad \partial_t u(\cdot, 0) = v^0 \quad \text{in } \Omega. \quad (3.2.78)$$

Der Elastizitätstensor C wird wieder als symmetrisch und positiv definit (auf symmetrischen Dyaden) angenommen; seine genaue Gestalt (z. B. für isotropes Material) spielt für das Folgende keine Rolle. Diese Anfangs-Randwertaufgabe hat die Struktur der skalaren Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - c\Delta u = 0 \quad (3.2.79)$$

und wird daher zur Unterscheidung auch als „Elastische Wellengleichung“ bezeichnet. Da wir jetzt nur an freien Schwingungsvorgängen interessiert sind, werden die Volumenkraft sowie die Randdaten auf Null gesetzt, d. h.: $f = 0$, $u^\partial = 0$ und $\sigma^\partial = 0$. Der ganze Prozess wird also allein durch die Anfangsdaten bestimmt.

Die Eindeutigkeit von Lösungen der elastischen Wellengleichung erschließt man wieder am leichtesten mit „Hilbertraum-Argumenten“. Sei $u(x, t)$ eine klassische Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe (3.2.76 -3.2.78) mit endlicher „Energie“ (kinetische + potentielle Energie)

$$E(t) := \frac{1}{2} \|\partial_t u(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} (C\varepsilon(u(t)), \varepsilon(u(t)))_\Omega < \infty.$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit $\partial_t u$, Integration über Ω und anschließende partielle Integration ergibt

$$0 = (\partial_t^2 u - \nabla \cdot C\varepsilon(u), \partial_t u)_\Omega = d_t \left(\frac{1}{2} \|\partial_t u\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} (C\varepsilon(u), \varepsilon(u))_\Omega \right) = d_t E(t).$$

Dies impliziert, dass

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|\partial_t u(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} (C\varepsilon(u(t)), \varepsilon(u(t)))_\Omega \\ &= \frac{1}{2} \|v^0\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} (C\varepsilon(u^0), \varepsilon(u^0))_\Omega = E(0), \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

d. h.: Die Lösung ist eindeutig und hängt bzgl. der natürlichen Energienorm stetig von den Anfangsdaten ab. Ferner bleibt die Gesamtenergie $E(t)$ im System in der Zeit erhalten. Dies entspricht der Vorstellung, dass bei der Schwingung eines elastischen Körpers (bei Vernachlässigung von Dämpfung) im Verlaufe der Zeit keine Energie verloren geht. Ein „gutes“ Diskretisierungsverfahren für die Wellengleichung sollte diese kritische Eigenschaft möglichst gut wiedergeben.

Zum Nachweis der Existenz von Lösungen der elastischen Wellengleichung bedienen wir uns der sog. Fourier-Methode. Der elliptische Differentialoperator $L := -\operatorname{div} C\varepsilon(\cdot)$ kann als ein linearer (unbeschränkter) Operator im Hilbert-Raum $L^2(\Omega)^3$ mit dichtem Definitionsbereich

$$D(L) := \{v \in V_0 : Lv \in L^2(\Omega)^3 \text{ im Distributionssinne}\}$$

definiert werden. Dieser Operator ist wegen der Symmetrie und Koerzitivität der Energieform $(C\varepsilon(v), \varepsilon(v))_\Omega$ selbstadjungiert und positiv definit und folglich injektiv. Da die stationäre Randwertaufgabe mit homogenen Randdaten $u^\partial = 0$ und $\sigma^\partial = 0$ für jede rechte Seite $f \in L^2(\Omega)^3$ eine eindeutig bestimmte „schwache“ Lösung in V_0 besitzt, ist dieser Operator auch surjektiv und hat eine beschränkte Inverse $L^{-1} : L^2(\Omega)^3 \rightarrow L^2(\Omega)^3$. Wegen des Rellichschen Auswahlssatzes ist diese Inverse auch kompakt. Folglich ist die Theorie Fredholmscher Operatoren anwendbar. Insbesondere gilt das folgende Lemma:

Lemma 3.6: *Das Spektrum des selbstadjungierten, positiv definiten Differentialoperators L in $L^2(\Omega)^3$ mit kompakter Inverser besteht nur aus reellen Eigenwerten, welche positiv sind und sich nicht im Endlichen häufen können*

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Ferner existiert ein zugehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen $\{w^{(k)} \in V_0, k \in \mathbb{N}\}$, mit Hilfe dessen sich jedes $u \in V_0$ darstellen lässt in der Form (verallgemeinerte Fourier-Reihe und Parsevalsche Identität)

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w^{(k)})_\Omega w^{(k)}, \quad \|u\|_\Omega^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, w^{(k)})_\Omega|^2, \quad (3.2.81)$$

wobei die Reihe bzgl. der L^2 -Norm sowie der H^1 -Norm konvergiert.

Satz 3.9: *Die Anfangsdaten seien $u^0 \in D(L)$ und $v^0 \in V_0$ und haben die Entwicklungen*

$$u^0 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 w^{(k)}, \quad v^0 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^0 w^{(k)}.$$

Dann stellt die Reihe

$$u(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ u_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k^0 \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right\} w^{(k)}(\xi) \quad (3.2.82)$$

eine Funktion dar, welche die Anfangs-Randwertaufgabe der elastischen Wellengleichung löst. Dabei konvergieren die gliedweise differenzierten Reihen für $\partial_t^2 u$ und Lu im L^2 -Sinne und auch die Anfangswerte werden im L^2 -Sinne angenommen.

Beweis: Wir machen den formalen Lösungsansatz (Separation der Variablen)

$$u(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{u_k^0 w^{(k)}(\xi) \varphi_k(t) + v_k^0 w^{(k)}(\xi) \psi_k(t)\}$$

mit gewissen Funktionen $\varphi_k(t)$ und $\psi_k(t)$. Einsetzen in die Wellengleichung ergibt die Bedingung (unter der Annahme der Konvergenz der Reihe)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t^2 u - \operatorname{div}(C \nabla u) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \{u_k^0 w^{(k)} \varphi_k''(t) - u_k^0 \nabla \cdot (C \nabla w^{(k)}) \varphi_k(t) + v_k^0 w^{(k)} \psi_k''(t) - v_k^0 \nabla \cdot (C \nabla w^{(k)}) \psi_k(t)\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \{u_k^0 w^{(k)} \varphi_k''(t) + u_k^0 \lambda_k w^{(k)} \varphi_k(t) + v_k^0 w^{(k)} \psi_k''(t) + v_k^0 \lambda_k w^{(k)} \psi_k(t)\}. \end{aligned}$$

Hieraus entnehmen wir die folgenden Gleichungen für die Funktionen φ_k und ψ_k :

$$\begin{aligned} \varphi_k''(t) + \lambda_k \varphi_k(t) &= 0, & t \geq 0, & \quad \varphi_k(0) = 1, \quad \varphi_k'(0) = 0, \\ \psi_k''(t) + \lambda_k \psi_k(t) &= 0, & t \geq 0, & \quad \psi_k(0) = 0, \quad \psi_k'(0) = 1. \end{aligned}$$

Die zugehörigen (eindeutig bestimmten) Lösungen sind

$$\varphi_k(t) = \cos(\sqrt{\lambda_k} t), \quad \psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit ergibt sich der Lösungsansatz

$$u(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ u_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k^0 \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right\} w^{(k)}(\xi). \quad (3.2.83)$$

Wenn $u^0 \in D(L)$ und $v \in V_0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\Omega}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |v_k^0 \sin(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 \leq \|u^0\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\lambda_1} \|v^0\|_{\Omega}^2, \\ \|\partial_t u(t)\|_{\Omega}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k^0 \sin(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |v_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 \leq \alpha \|\nabla u^0\|_{\Omega}^2 + \|v^0\|_{\Omega}^2, \\ \|\partial_t^2 u(t)\|_{\Omega}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |u_k^0 \sin(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |v_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 \leq \|Lu^0\|_{\Omega}^2 + \alpha \|\nabla v^0\|_{\Omega}^2, \\ \|Lu(t)\|_{\Omega}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |u_k^0 \sin(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |v_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t)|^2 \leq \|Lu^0\|_{\Omega}^2 + \alpha \|\nabla v^0\|_{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Insbesondere sind alle diese Reihen im L^2 -Sinne konvergent. Die konstruierte Funktion u erfüllt also die elastische Wellengleichung und die zugehörigen Anfangsbedingungen. Die Überlegung am Anfang zeigt auch, dass sie eindeutig bestimmt ist. Q.E.D.

3.3 Theorie der Biegung dünner Platten

Unter einer „dünnen Platte“ wird ein elastischer Körper verstanden, der eine ausgezeichnete Mittelfläche Ω in der (x_1, x_2) -Ebene besitzt und dessen x_3 -Dicke d klein gegenüber den anderen Abmessungen ist. Der Einfachheit halber sei hier angenommen, dass das Material homogen und isotrop und dass die Dicke konstant ist.

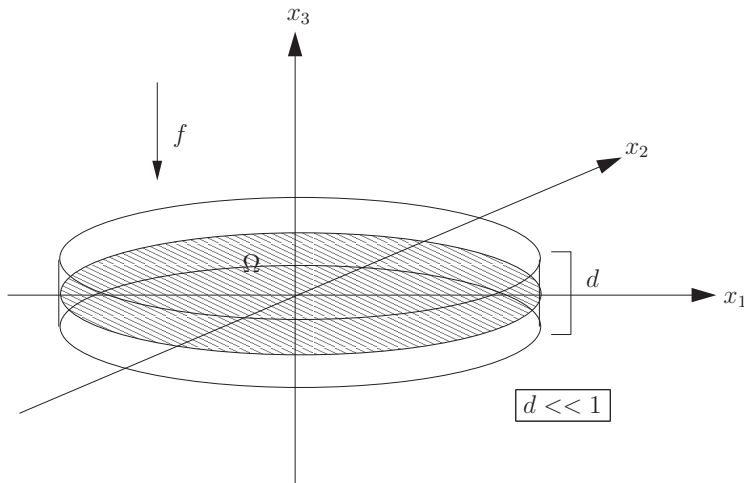


Abbildung 3.5: Konfiguration einer „dünnen“ Platte

Auf die Platte wirke in x_3 -Richtung eine Belastung mit Dichte $f = f(x_1, x_2)$. Die dadurch hervorgerufenen Verzerrungen sollen wieder so klein sein, $\|\varepsilon\| \ll 1$, dass die lineare Theorie herangezogen werden kann. Dazu definieren wir die Größen

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &:= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{ij} dx_3, \quad i, j = 1, 2 && \text{(Schnittkräfte),} \\
 Q_{i3} &:= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{i3} dx_3, \quad i = 1, 2, 3 && \text{(Querkräfte),} \\
 M_{ij} &:= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad i, j = 1, 2 && \text{(Momente).}
 \end{aligned}$$

Die äußere Belastung p wird als in x_3 -Richtung konstante Volumenkraft $K = (0, 0, p/d)^T$ interpretiert. Damit weichen wir etwas von der ingenieurwissenschaftlichen Literatur ab, wo f gewöhnlich als Oberflächenkraft aufgefasst wird, was jedoch zu gewissen Ungereimtheiten der Theorie führt. Zu den typischen Eigenschaften einer Platte gehören ferner die statischen Randbedingungen

$$n \cdot \sigma = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times \{x_3 = \pm d/2\} \quad (\text{„freier“ Rand}) \quad (3.3.84)$$

und die kinematischen Randbedingungen

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [-d/2, d/2] \quad (\text{„eingespannter“ Rand}) \quad (3.3.85)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times \{x_3 = 0\} \quad (\text{„gelenkig gelagerter“ Rand}). \quad (3.3.86)$$

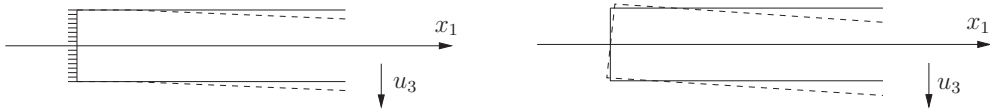


Abbildung 3.6: Randbedingungen der dünnen Platte: „eingespannter“ Rand (links) und „gelenkig gelagerter“ Rand (rechts)

Die Auswertung der statischen Bedingungen (3.3.84) und $\operatorname{div}\sigma + f = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \sigma_{3i}|_{x_3=\pm d/2} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \int_{-d/2}^{d/2} \{\partial_1\sigma_{1i} + \partial_2\sigma_{2i} + \partial_3\sigma_{3i}\} x_3 dx_3 &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \int_{-d/2}^{d/2} \{\partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} + \partial_3\sigma_{33}\} dx_3 + \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} f dx_3 &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \partial_1 M_{11} + \partial_2 M_{12} - Q_{13} &= 0, \\ \partial_1 M_{12} + \partial_2 M_{22} - Q_{23} &= 0, \\ \partial_1 Q_{13} + \partial_2 Q_{23} + p &= 0, \end{aligned}$$

und bei Kombination dieser Identitäten für $M = (M_{ij})_{i,j=1}^3$:

$$\nabla^2 : M = \partial_1^2 M_{11} + 2\partial_1\partial_2 M_{12} + \partial_2^2 M_{22} = -f. \quad (3.3.87)$$

Für die weitere Betrachtung wird der Ansatz gemacht

$$\epsilon_{33} = \partial_3 u_3 = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.3.88)$$

welcher mit den statischen Randbedingungen (3.3.84) verträglich ist und durch die geringe Dicke d der Platte motiviert wird. Dies führt über das Hookesche Gesetz

$$\epsilon = (1 + \nu)E^{-1}\sigma - \nu E^{-1}\operatorname{spur}(\sigma)I$$

zu den Beziehungen

$$\epsilon_{i3} = \frac{1}{2}(\partial_i u_3 + \partial_3 u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.3.89)$$

und

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, \quad (3.3.90)$$

bzw.

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{12}. \quad (3.3.91)$$

Wir bezeichnen nun mit $u^M = u^M(x_1, x_2)$ die Verschiebung der Mittelfläche der Platte und finden

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^M(x_1, x_2) + \int_0^{x_3} \partial_3 u_i(x_1, x_2, \eta) d\eta \quad (i = 1, 2).$$

Wegen $d \ll 1$ und $\partial_3 u_i = -\partial_i u_3$ kann daher näherungsweise gesetzt werden:

$$u_i = u_i^M - x_3 \partial_i u_3^M \quad (i = 1, 2), \quad u_3 = u_3^M. \quad (3.3.92)$$

Die zugehörigen Verzerrungen ergeben sich dann unter Verwendung von (3.3.89) zu

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \epsilon_{ij}^M - \frac{1}{2}x_3(\partial_i \partial_j u_3^M + \partial_j \partial_i u_3^M) = \epsilon_{ij}^M - x_3 \partial_i \partial_j u_3^M \quad (3.3.93)$$

für $i, j \in \{1, 2\}$ mit

$$\epsilon_{ij}^M := \frac{1}{2}(\partial_i u_j^M + \partial_j u_i^M).$$

Zur Abkürzung wird im Folgenden $u := u_3^M(x_1, x_2)$ gesetzt, d. h.: *Die Durchbiegung der Platte wird durch die Durchbiegung ihrer Mittelfläche beschrieben.*

3.3.1 Das Kirchhoffsche Plattenmodell

Wir entwickeln nun zunächst die auf Kirchhoff (1850) zurückgehende Theorie „(relativ) kleiner Durchbiegungen“ $|u| \ll d$. Dabei wird angenommen, dass die Verzerrungen der Mittelfläche gegenüber den anderen Größen vernachlässigt werden können:

$$\epsilon_{ij}^M = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (3.3.94)$$

Dies führt mit (3.3.93) zu dem Ansatz (beachte $u := u_3^M$)

$$\epsilon_{ij} = -x_3 \partial_i \partial_j u \quad (i, j = 1, 2)$$

sowie

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 (\partial_1^2 u + \nu \partial_2^2 u), \\ \sigma_{22} &= -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 (\partial_2^2 u + \nu \partial_1^2 u), \\ \sigma_{12} &= -\frac{E}{1+\nu} x_3 \partial_1 \partial_2 u. \end{aligned}$$

Für die Momente M_{ij} erhalten wir also die Darstellung

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D(\partial_1^2 u + \nu \partial_2^2 u), \\ M_{22} &= -D(\partial_2^2 u + \nu \partial_1^2 u), \\ M_{12} &= -(1 - \nu)D\partial_1 \partial_2 u, \end{aligned} \tag{3.3.95}$$

mit der „Plattensteifigkeit“

$$D := \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-d/2}^{d/2} x_3^2 dx_3 = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{d^3}{12}.$$

Kombination von (3.3.95) und der Momentengleichung (3.3.87) ergibt dann die bekannte Plattengleichung, der die Durchbiegung $u = u(x_1, x_2)$ der „Kirchhoffschen Platte“ notwendig genügt:

$$D\Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega. \tag{3.3.96}$$

Die zugehörigen „kinematischen“ Randbedingungen sind

- i) eingespannter Rand: $u = \partial_i u = 0$ ($i = 1, 2$) bzw. $u = \partial_n u = 0$ auf $\partial\Omega$.
- ii) gelenkig gelagerter Rand: $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Weitere „statische“ Randbedingungen, insbesondere am „freien“ Rand, werden weiter unten im Rahmen eines variationellen Ansatzes abgeleitet werden.

Bemerkung 3.6: Die Herleitung brauchbarer Gleichungen für die Durchbiegung der dünnen Platte wurde erstmals auf direktem Wege von Sophie Germain²⁰ (1811) und Navier (1823) geleistet, allerdings noch unter Verwendung etwas zweifelhafter Annahmen. Eine fundierte Ableitung aus den Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie, wie hier durchgeführt, erreichten erstmals Poisson und Cauchy (1830). Wir werden weiter unten die Plattengleichung (3.3.96) über den auf Green (1830) und vor allem Kirchhoff (1850) zurückgehenden Variationsansatz herleiten. Dies ist weitgehend äquivalent zu dem Weg über die statischen Gleichgewichtsbeziehungen (3.3.87) für die Momente, gestattet jedoch eine zwingendere Bestimmung der adäquaten natürlichen „statischen“ Randbedingungen. Ferner ist dadurch ein natürlicher Ansatzpunkt für eine nichtlineare Erweiterung der Theorie gegeben.

²⁰Sophie Germain (1776–1831): Französische Mathematikerin; Kaufmannstochter in Paris, erwarb mathematische Kenntnisse im Selbststudium, Briefwechsel mit Joseph-Louis Lagrange an der École Polytechnique in Paris und ab 1804 mit Carl Friedrich Gauß; arbeitete u. a. an der letzten Fermat’schen Vermutung und bewies, dass diese für eine Reihe von Primzahlen (den nach ihr benannten „Sophie-Germain-Primzahlen“) zutrifft.; ab 1809 beschäftigte sie sich mit der Beschreibung der Schwingungen elastischer Platten. ihr Lösungsansatz von 1811 war noch fehlerbehaftet, wurde aber später von anderen weiterverfolgt.

Zum Nachweis der Existenz von Lösungen des Kirchhoffschen Plattenmodells gehen wir wieder vom „Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie“

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \epsilon \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx$$

aus, wie es oben für das allgemeine Grundproblem der (linearen) Elastizitätstheorie diskutiert worden ist. Dieser Ansatz führt zu der Dehnungs- bzw. Spannungsenergie der dünnen Platte mit kleiner Durchbiegung

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-d/2}^{d/2} \{ \sigma_{11} \epsilon_{11} + 2\sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{22} \epsilon_{22} \} \, dx_3 \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-d/2}^{d/2} \{ \sigma_{11} \partial_1^2 u + 2\sigma_{12} \partial_1 \partial_2 u + \sigma_{22} \partial_2^2 u \} \, dx_3 \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ M_{11} \partial_1^2 u + 2M_{12} \partial_1 \partial_2 u + M_{22} \partial_2^2 u \} \, d\Omega \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \int_{\Omega} \{ (\partial_1^2 u + \nu \partial_2^2 u) \partial_1^2 u + 2(1-\nu) \partial_1 \partial_2 u^2 + (\partial_2^2 u + \nu \partial_1^2 u) \partial_2^2 u \} \, d\Omega \\ &= \frac{D}{2} \int_{\Omega} \{ \Delta u^2 - 2(1-\nu) (\partial_1^2 u \partial_2^2 u - \partial_1 \partial_2 u^2) \} \, d\Omega. \end{aligned}$$

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie postuliert dann, dass das Funktional

$$E(u) = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \{ \Delta u^2 - 2(1-\nu) (\partial_1^2 u \partial_2^2 u - \partial_1 \partial_2 u^2) \} \, d\Omega - \int_{\Omega} f u \, d\Omega$$

von der tatsächlichen Durchbiegung u zum Minimum gemacht wird bzgl. aller kinematisch zulässigen Funktionen (hier: $u \in H^2(\Omega)$ mit $u = \partial_n u = 0$ oder $u = 0$ auf $\partial\Omega$). Die Eulersche Differentialgleichung dieser Variationsaufgabe ist dann gerade die Kirchhoffsche Plattengleichung

$$D\Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega. \quad (3.3.97)$$

Dies liegt daran, dass

$$\int_{\Omega} \{ \partial_1^2 u \partial_2^2 v + \partial_2^2 u \partial_1^2 v - 2\partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 v \} \, d\Omega = 0,$$

was man für hinreichend glatte Funktionen leicht durch partielle Integration sieht. Durch Nullsetzen der ersten Variation, d. h.

$$\frac{d}{ds} E(u + sv)|_{s=0} = 0$$

erhält man wie üblich die „schwache Formulierung“ der Plattengleichung

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V_0 \quad (3.3.98)$$

mit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und der Linearform $f(\cdot)$,

$$a(u, v) := D \int_{\Omega} \{ \Delta u \Delta v - (1 - \nu)(\partial_1^2 u \partial_2^2 v + \partial_2^2 u \partial_1^2 v - 2\partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 v) \} d\Omega,$$

$$l(v) := \int_{\Omega} f v dx,$$

und dem Raum $V_0 \subset V := H^2(\Omega)$ aller zulässigen Variationen,

$$V_0 := \{v \in V \mid v = \partial_n v = 0 \text{ auf } \Gamma_c, v = 0 \text{ auf } \Gamma_s\}.$$

Dabei ist $\partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_s \cup \Gamma_f$ mit den (abgeschlossenen) Randteilen Γ_c , Γ_s und Γ_f , entlang derer die Platte eingespannt („clamped“), gelenkig gelagert („simply supported“) bzw. frei („free“) ist. Hier und im Folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die kinematischen Randvorgaben auf Γ_c und Γ_s homogen (d. h. gleich Null) sind. In den Berührungspunkten der Randkomponenten bleiben die Randwerte zunächst unbestimmt und ergeben sich dann aus den Eigenschaften der erhaltenen Lösung.

Satz 3.10: *Die einzige lineare Funktion in V_0 sei die Nullfunktion, und $0 \leq \nu \leq 1$. Dann existiert für jedes Funktional $l(\cdot) \in V_0^*$ eine eindeutige Lösung $u \in V_0$ des variationellen Plattenproblems (3.3.98), und es gilt die a priori Abschätzung*

$$\|v\|_{H^2} \leq c \|l\|_{H^{-2}}, \quad \|l\|_{H^{-2}} := \sup_{\varphi \in H_0^2(\Omega)} \frac{|l(\varphi)|}{\|\nabla^2 \varphi\|}. \quad (3.3.99)$$

Beweis: Der Beweis basiert auf der Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes für Funktionale auf dem Hilbert-Raum V . Für den Parameterbereich $0 \leq \nu < 1$ ist die offensichtlich symmetrische Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt. Allgemein gilt für jedes feste $\nu \in [0, 1)$:

$$a(v, v) \geq c(\nu) \|\nabla^2 v\|^2, \quad v \in V_0.$$

Da V_0 keine lineare Funktion außer der Nullfunktion enthält, ergibt eine Variante der Poincaréschen Ungleichung

$$a(v, v) \geq c(\nu) \|\nabla^2 v\|^2 \geq c(\nu, \Omega) \|v\|_{H^2}, \quad v \in V_0.$$

Der Beweis wird üblicherweise mit Hilfe eines Widerspruchsarguments geführt und sei als Übungsaufgabe gestellt. Mit dieser Abschätzung ergibt sich u. a., dass ein lineares Funktional der speziellen Form $l(\varphi) := (f, \varphi)$, $\varphi \in V_0$, bzgl. des Skalarprodukts $a(\cdot, \cdot)$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Riesz gibt es dann für jedes Funktional $l \in V_0^*$ ein eindeutig bestimmtes Element $u \in V_0$, so dass die variationelle Gleichung (3.3.98) erfüllt ist. Ferner gilt die a priori Abschätzung (3.3.99). Q.E.D.

Bemerkung 3.7: Im zugelassenen Grenzfall $\nu = 0$ gilt

$$a(u, v) = D \int_{\Omega} \nabla^2 u : \nabla^2 v dx, \quad D = \frac{Ed^3}{24}.$$

Der andere (ausgeschlossene) Grenzfall $\nu \rightarrow 1$ führt zu einer singular werdende Plattensteifigkeit $D(\nu) \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 1$), während der reine Integralterm die folgende einfache Gestalt annimmt:

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx.$$

Dieser speziellen Situation werden wir wieder begegnen im Zusammenhang mit der sog. „Stromfunktionsformulierung“ der Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Newtonsche Flüssigkeiten.

„Natürliche“ statische Randbedingungen

Wir wollen nun die in der variationellen Formulierung (3.3.98) der Plattengleichung implizit enthaltenen „natürlichen (statischen) Randbedingungen“ entlang der Randkomponenten Γ_s und Γ_f bestimmen. Sei dazu die Lösung $u \in V$ von (3.3.98) hinreichend regulär, etwa $u \in H^4(\Omega)$. Zweimalige Anwendung der Greenschen Formeln ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx &= \int_{\partial\Omega} \Delta u \partial_n v \, do - \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \{ \Delta u \partial_n v - \partial_n \Delta u v \} \, do + \int_{\Omega} \Delta^2 u v \, dx \end{aligned}$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor $n = (n_1, n_2)^T$ zu $\partial\Omega$ und der Ableitung in Normalenrichtung $\partial_n = n \cdot \nabla = n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2$. Der zugehörige Tangenteneinheitsvektor (positiver Umlaufsinn) ist dann gerade $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T = (n_2, -n_1)^T$ und die Ableitung in Tangentenrichtung $\partial_\tau = \tau \cdot \nabla = n_2 \partial_1 - n_1 \partial_2$. Ferner gelten in jedem Punkt auf $\partial\Omega$ die Identitäten

$$\partial_1 v = n_1 \partial_n v + n_2 \partial_\tau v, \quad \partial_2 v = n_2 \partial_n v - n_1 \partial_\tau v,$$

was man leicht mit Hilfe von $n \cdot n = 1$ verifiziert. Mit dem Vektorfeld

$$\vec{w} := \begin{pmatrix} -\partial_2 v \partial_1 \partial_2 u + \partial_1 v \partial_2^2 u \\ -\partial_1 v \partial_1 \partial_2 u + \partial_2 v \partial_1^2 u \end{pmatrix}$$

lässt sich schreiben

$$\int_{\Omega} \{ \partial_1^2 u \partial_2^2 v + \partial_2^2 u \partial_1^2 v - 2 \partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 v \} \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w} \, dx = \int_{\partial\Omega} n \cdot \vec{w} \, do.$$

Unter Verwendung der obigen Beziehungen für $\partial_i v, \partial_n v, \partial_\tau v$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} n \cdot \vec{w} \, do &= \int_{\partial\Omega} \{ \partial_2 v (-n_1 \partial_2 + n_2 \partial_1) \partial_1 u - \partial_1 v (-n_1 \partial_2 + n_2 \partial_1) \partial_2 u \} \, do \\ &= \int_{\partial\Omega} \{ \partial_2 v \partial_\tau \partial_1 u - \partial_1 v \partial_\tau \partial_2 u \} \, do = \int_{\partial\Omega} \{ (n_2 \partial_n v - n_1 \partial_\tau v) \partial_\tau (n_1 \partial_n v + n_2 \partial_\tau v) \\ &\quad - (n_1 \partial_n v + n_2 \partial_\tau v) \partial_\tau (n_2 \partial_n v - n_1 \partial_\tau v) \} \, do \\ &= \int_{\partial\Omega} \{ \partial_n v \partial_\tau^2 u - \partial_\tau v \partial_\tau \partial_n u \} \, do. \end{aligned}$$

Partieller Integration nach τ ergibt schließlich

$$\int_{\partial\Omega} n \cdot \vec{w} \, do = \int_{\partial\Omega} \{ \partial_\tau^2 u \partial_n v + \partial_n \partial_\tau^2 u v \} \, do.$$

Wir fassen nun die gefundenen Identitäten für die Integrale in (3.3.98) zusammen zu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \Delta^2 u - D^{-1} p \} v \, dx + \int_{\partial\Omega} \{ \Delta u - (1-\nu) \partial_\tau^2 u \} \partial_n v \, do \\ - \int_{\partial\Omega} \{ \partial_n \Delta u - (1-\nu) \partial_n \partial_\tau^2 u \} v \, do = 0. \end{aligned}$$

Da dies für beliebige zulässige Funktionen v gelten soll, ergeben sich notwendig die Differentialgleichung („Plattengleichung“)

$$D\Delta^2 u = p \quad \text{in } \Omega, \quad (3.3.100)$$

und zusätzlich zu den erzwungenen („kinetischen“) Randbedingungen

$$\begin{aligned} u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_c \cup \Gamma_s, \\ \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_c, \end{aligned} \quad (3.3.101)$$

die natürlichen („statischen“) Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Delta u - (1-\nu) \partial_\tau^2 u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \cup \Gamma_f, \\ \partial_n \Delta u - (1-\nu) \partial_\tau^2 \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_f. \end{aligned} \quad (3.3.102)$$

Regularität der „schwachen“ Lösung

Im Allg. besitzt die „schwache“ Lösung $u \in V_0$ des Kirchhoffschen Plattenmodells höhere Regularität. Aus der Fülle der entsprechenden Resultate zitieren wir nur diejenigen für den Spezialfall der „eingespannten“ Platte, d. h.: für die Randbedingungen $u = 0$ und $\partial_n u = 0$ entlang des ganzen Randes $\Gamma_C = \partial\Omega$:

- Auf konvexen Polygonebenen ist $u \in H^3(\Omega)$, und es gilt die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^3} \leq c(\Omega) \|f\|_{H^{-1}}, \quad \|f\|_{H^{-1}} := \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(f, \varphi)|}{\|\nabla \varphi\|}. \quad (3.3.103)$$

- Auf konvexen Polygonebenen mit maximalem inneren Winkel $\omega \leq 126^\circ$ ist $u \in H^4(\Omega)$, und es gilt die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^4} \leq c(\Omega) \|f\|_{L^2}. \quad (3.3.104)$$

- Die obigen beiden Aussagen gelten auch, wenn der Rand $\partial\Omega$ „glatt“ ist, d. h. mindestens zweimal stetig differenzierbar parametrisierbar.

- Im Fall nichtkonvexer Polygonegebiete ist i. Allg. $u \notin H^3(\Omega)$, sondern weist in der Umgebung der einspringenden Ecken mit Innenwinkel $\omega > 2\pi$ ein wohl definiertes singuläres Verhalten auf. Dieses lässt sich mit den entsprechenden Polarkoordinate wie folgt ausdrücken:

$$u(r, \theta) = Ar^\alpha \psi(\omega) + \tilde{u}(r, \theta), \quad (3.3.105)$$

mit dem sog. „Spannungsintensitätsfaktor“ $A \in \mathbb{R}$, einem „singulären“ Exponenten $1/2 \leq \alpha = \alpha(\Omega) < 1$, einer glatten Winkelfunktion $\psi(\theta)$ und einem „regulären“ Anteil $\tilde{u} \in H^3(\Omega)$. Es gilt dann die a priori Abschätzung

$$|A| + \|\tilde{u}\|_{H^3} \leq c(\Omega) \|f\|_{H^{-1}}. \quad (3.3.106)$$

- Die obigen Aussagen gelten auch im Fall der rein „gelenkig gelagerten“ Platte, d. h. für die Randbedingung $u = 0$ und $\Delta u - (1-\nu)\partial_\tau^2 u = 0$ auf $\Gamma_s = \partial\Omega$. Die vollständig „freie“ Platte, $\Gamma_f = \partial\Omega$, ist in Satz 3.10 nicht zugelassen (Eindeutigkeitsproblem). Im Fall von wechselnden Randbedingungen treten lokale Singularitäten analog zu denen bei einspringenden Ecken auf, welche die Regularität der Lösung reduzieren. Hierzu gibt es in der Literatur eine vollständige Theorie (s. Grisvard [10] und [25]).

3.3.2 Das nichtlineare von Kármánsche Plattenmodell

Bei der Betrachtung dünner Platten mit relativ „großer“ Durchbiegung $|u| \approx d$ dürfen die Verzerrungen ϵ_{ij}^M der Mittelfläche nicht mehr vernachlässigt werden. Die zugehörige Theorie geht auf von Kármán²¹ (1910) zurück. Dabei werden zusätzlich noch gewisse quadratische Terme im Verzerrungsansatz berücksichtigt (geometrisch semi-lineare Theorie), während alle anderen aus der Annahme $d \ll 1$ begründeten Ansätze der Kirchhoffschen Theorie beibehalten werden:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= \epsilon_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{12}, \end{aligned}$$

sowie mit $u := u_3^M$:

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^M - x_3 \partial_i u \quad (i = 1, 2), \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij}^M - x_3 \partial_i \partial_j u \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Für die Verzerrungen der Mittelfläche wird der nicht-lineare Ansatz gemacht

$$\epsilon_{ij}^M = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^M + \partial_j u_i^M) + \frac{1}{2}\partial_i u_3^M \partial_j u_3^M \quad (i, j = 1, 2), \quad (3.3.107)$$

²¹Theodore von Kármán (1881–1963): Ungarischer Physiker und Luftfahrttechniker; gilt als Pionier der modernen Aerodynamik und der Luftfahrt- und Raketenforschung; nach Studium in Budapest und Göttingen 1910 Habilitation, ab 1913 Prof. in Aachen, nach 1929 Teiltätigkeit am California Institute of Technology (USA) und schließlich 1934 Emigration in die USA; nach dem Krieg ab 1956 Institutsleiter des später nach ihm benannten „Von Kármán Institut für Strömungsmechanik“ in Belgien; bekannteste Arbeit 1911/1912 über die nach ihm benannten „Kármánsche Wirbelstraßen“, grundlegende Beiträge zur Plastizitäts- und Plattentheorie.

wobei die anderen quadratischen Terme $\partial_i u_k^M \partial_j u_k^M$ ($k = 1, 2$) vernachlässigt werden. Die Dehnungsenergie ist dann

$$\begin{aligned} U(\epsilon) &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \int_{-d/2}^{d/2} \{(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})^2 - 2(1-\nu)(\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2)\} dx_3 d\Omega \\ &= \frac{Ed}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \{(\epsilon_{11}^M + \epsilon_{22}^M)^2 - 2(1-\nu)(\epsilon_{11}^M \epsilon_{22}^M - \epsilon_{12}^{M2})\} d\Omega \\ &\quad + \frac{D}{2} \int_{\Omega} \{\Delta u^2 - 2(1-\mu)(\partial_1^2 u \partial_2^2 u - \partial_1 \partial_2 u^2)\} d\Omega. \end{aligned}$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass die gemischten Terme vom Ausquadrieren alle den Faktor x_3 haben und folglich bei Integration $\int_{-d/2}^{d/2} \dots dx_3$ keinen Beitrag liefern.

Es sei darauf hingewiesen, dass zwar für die Verzerrungen ein nichtlinearer Ansatz gemacht wurde, aber trotzdem weiterhin in Langrangeschen Koordinaten gerechnet wird. Es handelt sich also nur um eine kleine *nichtlineare Korrektur*.

Für das Folgende wird angenommen, dass das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie auch in der geometrisch nichtlinearen Theorie gilt. Wir haben es nun jedoch mit *drei* unbekannt Funktionen zu tun: u_i^M ($i = 1, 2, 3$). Nullsetzen der ersten Variationen bzgl. u_i^M

$$\frac{d}{ds} \left[U(\epsilon[u + sv]) - \int_{\Omega} p(u + sv) d\Omega \right]_{|s=0} = 0 \quad \forall v \text{ „zulässig“} \quad (i = 1, 2, 3)$$

führt auf die notwendigen Beziehungen

$$\begin{aligned} D \int_{\Omega} \{ \Delta u \Delta v - (1-\nu)(\partial_1^2 u \partial_2^2 v + \partial_2^2 u \partial_1^2 v - 2\partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 v) \} d\Omega \\ + \frac{2Ed}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \{ (\epsilon_{11}^M + \epsilon_{22}^M)(\partial_2 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v) - (1-\nu) \{ \epsilon_{11}^M \partial_2 u \partial_2 v + \epsilon_{22}^M \partial_1 u \partial_1 v \\ - \epsilon_{12}^M (\partial_1 u \partial_2 v + \partial_2 u \partial_1 v) \} \} d\Omega = \int_{\Omega} p v d\Omega \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ (\epsilon_{11}^M + \epsilon_{22}^M) \partial_1 v - (1-\nu)(\epsilon_{22}^M \partial_1 v - \epsilon_{12}^M \partial_2 v) \} d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} \{ (\epsilon_{11}^M + \epsilon_{22}^M) \partial_2 v - (1-\nu)(\epsilon_{11}^M \partial_2 v - \epsilon_{12}^M \partial_1 v) \} d\Omega &= 0, \end{aligned}$$

für alle „zulässigen“ Variationen v . Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall der eingespannten Platte

$$u^M = \partial_i u^M = 0 \quad \text{auf} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Durch partielle Integration gewinnt man dann auf die übliche Weise die zugehörigen Eulerschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \frac{p}{D} + \frac{12}{d^2} \{ (\epsilon_{11}^M + \nu \epsilon_{22}^M) \partial_1^2 u + (\epsilon_{22}^M + \nu \epsilon_{11}^M) \partial_2^2 u + 2(1-\nu) \epsilon_{12}^M \partial_1 \partial_2 u \} \\ &\quad + \frac{12}{d^2} \{ \partial_1 (\epsilon_{11}^M + \nu \epsilon_{22}^M) + (1-\nu) \partial_2 \epsilon_{12}^M \} \partial_1 u + \frac{12}{d^2} \{ \partial_2 (\epsilon_{22}^M + \nu \epsilon_{11}^M) + (1-\nu) \partial_1 \epsilon_{12}^M \} \partial_2 u. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_1(\epsilon_{11}^M + \nu\epsilon_{22}^M) + (1 - \nu)\partial_1\epsilon_{12}^M &= 0, \\ \partial_2(\epsilon_{22}^M + \nu\epsilon_{11}^M) + (1 - \nu)\partial_2\epsilon_{12}^M &= 0.\end{aligned}$$

Während in der (linearen) Kirchhoffschen Theorie die Schnittkräfte N_{ij} verschwanden, haben wir nun

$$\begin{aligned}N_{11} &= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{11} dx_3 = \frac{Ed}{1 - \nu^2}(\epsilon_{11}^M + \nu\epsilon_{22}^M), \\ N_{22} &= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{22} dx_3 = \frac{Ed}{1 - \nu^2}(\epsilon_{22}^M + \nu\epsilon_{11}^M), \\ N_{12} &= \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{12} dx_3 = \frac{Ed}{1 + \nu}\epsilon_{12}^M.\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen schreiben sich die drei gefundenen Differentialgleichungen als

$$\Delta^2 u = \frac{p}{D} + \frac{1}{D}(N_{11}\partial_1^2 u + N_{22}\partial_2^2 + 2(1 - \nu)N_{12}\partial_1\partial_2 u), \quad (3.3.108)$$

$$\partial_1 N_{11} + \partial_2 N_{12} = 0, \quad (3.3.109)$$

$$\partial_1 N_{11} + \partial_1 N_{12} = 0. \quad (3.3.110)$$

Für die allgemeine Lösung der letzten beiden Gleichungen macht man mit einer „Spannungsfunktion“ Ψ den Ansatz

$$N_{11} = \partial_2^2 \Psi, \quad N_{22} = \partial_1^2 \Psi, \quad N_{12} = -\partial_1 \partial_2 \Psi.$$

Die Definitionsgleichungen für die Schnittkräfte ergeben dann

$$\epsilon_{11}^M = \frac{1}{Ed}(\partial_2^2 \Psi - \nu\partial_1^2 \Psi), \quad \epsilon_{22}^M = \frac{1}{Ed}(\partial_1^2 \Psi - \nu\partial_2^2 \Psi), \quad \epsilon_{12}^M = -\frac{1 + \nu}{Ed}\partial_1 \partial_2 \Psi,$$

während die kinematischen Gleichungen (6.13) für ϵ_{ij}^M erfordern

$$\begin{aligned}\partial_2^2 \epsilon_{11}^M + \partial_1^2 \epsilon_{22}^M - 2\partial_1 \partial_2 \epsilon_{12}^M &= \partial_1 \partial_2^2 u_1^M + \partial_1 u^M \partial_1 \partial_2^2 u + \partial_1^2 \partial_2 u_2^M + \partial_2 u \partial_1^2 \partial_2 u - \partial_1^2 \partial_2 u_2^M \\ &\quad - \partial_1 \partial_2^2 u_1^M - \partial_1 u \partial_1 \partial_2^2 u - \partial_1^2 \partial_2 u \partial_2 u + \partial_1 \partial_2 u^2 - \partial_1^2 u \partial_2^2 u \\ &= \partial_1 \partial_2 u^2 - \partial_1^2 u \partial_2^2 u.\end{aligned}$$

Kombination dieser Beziehungen ergibt

$$\frac{1}{Ed}(\partial_2^4 \Psi - \nu\partial_1^2 \partial_1^2 \Psi + \partial_1^4 \Psi + 2(1 + \nu)\partial_1^2 \partial_2^2 \Psi - \nu\partial_1^2 \partial_2^2 \Psi) = \partial_1 \partial_2 u^2 - \partial_1^2 u \partial_2^2 u.$$

Damit haben wir die grundlegenden Gleichungen der Von Kármánschen Plattentheorie gefunden:

$$\Delta^2 u = \frac{p}{D} + \frac{1}{D}(\partial_2^2 \Psi \partial_1^2 u + \partial_1^2 \Psi \partial_2^2 u - 2\partial_1 \partial_2 \Psi \partial_1 \partial_2 u), \quad (3.3.111)$$

$$\Delta^2 \Psi = Ed(\partial_1 \partial_2 u^2 - \partial_1^2 u \partial_2^2 u). \quad (3.3.112)$$

Dies ist ein System semi-linearer Differentialgleichungen für die Normaldurchbiegung $u := u_3^M$ der Mittelfläche der Platte und für die Spannungsfunktion Ψ , aus der sich dann die Mittelflächenverschiebungen u_i^M ($i = 1, 2$) zurückgewinnen lassen. Die zugehörigen Randbedingungen der eingespannten Platte sind

$$u = \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (3.3.113)$$

und (willkürliche Festlegung!)

$$\Psi = \partial_n \Psi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.3.114)$$

3.3.3 Physikalisch nichtlineare Plattentheorie

Wir verwenden wieder die Bezeichnungen

$$\sigma_0 := \frac{1}{3}\text{spur}(\sigma), \quad \epsilon_0 := \frac{1}{3}\text{spur}(\epsilon)$$

für die mittleren Normalspannungen und Mitteldehnungen und $\sigma' = \sigma - \sigma_0 I$, $\epsilon' = \epsilon - \epsilon_0 I$ für die zugehörigen Deviatoren. Es sei daran erinnert, dass ϵ_0 die (lokale) Volumenänderung und ϵ' die Gestaltänderung beschreiben. Letztere wird mit Hilfe des Schermaßes

$$\psi_0^2 := \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ (\epsilon_{11} - \epsilon_0)^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_0)^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{12}^2 \right\}$$

gemessen. Das nichtlineare Materialverhalten wird nun mit Hilfe der Dehnungsfunktion

$$\kappa(\epsilon_0) \rightarrow 1 \quad (\epsilon_0 \rightarrow 0)$$

und der Scherungsfunktion

$$\gamma(\psi_0^2) \rightarrow 1 \quad (\psi_0 \rightarrow 0)$$

in einem verallgemeinerten Hookeschen Ansatz beschrieben:

$$\sigma = 3K\kappa(\epsilon_0)\epsilon_0 I + 2\mu\gamma(\psi_0^2)\epsilon', \quad (3.3.115)$$

mit dem Kompressionsmodul $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$.

Wir definieren nun die „verallgemeinerte Querkontraktionszahl“

$$\nu(\epsilon_0, \psi_0) := \frac{1}{2} \frac{3K\kappa(\epsilon_0) - 2\mu\gamma(\psi_0^2)}{3K\kappa(\epsilon_0) + \mu\gamma(\psi_0^2)} \rightarrow \nu_0 \quad (\epsilon_0, \psi_0 \rightarrow 0)$$

sowie den „verallgemeinerten Youngschen Modul“

$$E(\epsilon_0, \psi_0) := 2\mu\{1 - \nu(\epsilon_0, \psi_0)\} \rightarrow E_0 \quad (\epsilon_0, \psi_0 \rightarrow 0),$$

welche nichtlinear von der Mitteldehnung ϵ_0 und dem Schermaß ψ_0 abhängen. Dann lassen sich unter den obigen Annahmen der geometrisch linearen Kirchhoffschen Plattentheorie die Spannungen wieder schreiben als

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{E\gamma}{1-\nu^2}(\partial_1^2 u + \nu\partial_2^2 u)x_3, \\ \sigma_{22} &= -\frac{E\gamma}{1-\nu^2}(\partial_2^2 u + \nu\partial_1^2 u)x_3, \\ \sigma_{12} &= -\frac{E\gamma}{1+\nu}\partial_1\partial_2 u x_3. \end{aligned}$$

Für die Mitteldehnung und das Schermaß gewinnt man analog zur linearen Theorie

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= -\frac{1}{3} \frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0} x_3 \Delta u, \\ \psi_0^2 &= \frac{8}{9} \{ \nu_1 (\partial_1^2 u^2 + \partial_2^2 u^2) + \nu_2 \partial_1^2 u \partial_2^2 u + 3 \partial_1 \partial_2 u^2 \} x_3^2\end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\nu_1 := \frac{\nu_0}{(1-\nu_0)^2} + 1, \quad \nu_2 := \frac{2\nu_0}{(1-\nu_0)^2} - 1.$$

Aus der Gleichung (3.3.87) für die Momente ergibt sich nun die folgende quasilineare Plattengleichung

$$\sum_{i,j,k,l=1}^2 \partial_k \partial_l (a_{ijkl} \partial_i \partial_j u) = p \quad \text{in } \Omega, \quad (3.3.116)$$

mit den Randbedingungen der eingespannten Platte

$$0 = \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.3.117)$$

und den Koeffizientenfunktionen

$$\begin{aligned}a_{1111} &:= \int_{-d/2}^{d/2} \frac{E\gamma}{1-\nu^2} x_3^2 dx_3 = a_{2222}, & a_{1122} &:= \int_{-d/2}^{d/2} \frac{E\gamma}{1-\nu^2} x_3^2 dx_3, \\ a_{1212} &:= \int_{-d/2}^{d/2} \frac{E\gamma}{1+\nu} x_3^2 dx_3, & a_{ijkl} &= 0 \quad \text{sonst.}\end{aligned}$$

Die teilweise etwas aufwendigen Zwischenrechnungen dieses Paragraphen findet man im Buch von Kauderer (S. 143ff) ausgeführt.

3.3.4 Extremalprinzipien

Für den Ansatz numerischer Näherungsverfahren zur Lösung der Plattengleichung (3.3.96) bzw. ihrer nichtlinearen Erweiterungen (3.3.108), (3.3.110) und (3.3.116) sind besonders die variationellen Formulierungen geeignet. Eine erste haben wir bereits in Gestalt des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie kennengelernt. Wir betrachten hier nur die eingespannte Platte mit hinreichend glatt berandeter Mittelfläche Ω . Ferner werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= (\partial_i \partial_j)_{i,j=1}^2 && \text{Matrix-Differentialoperator 2. Ordnung,} \\ \nabla^2 u &= (\partial_i \partial_j u)_{i,j=1}^2 && \text{Matrix der zweiten Ableitungen,} \\ M &= (M_{ij})_{i,j=1}^2 && \text{Matrix der Biegemomente,} \\ (u, v) &= \int_{\Omega} uv dx && L^2\text{-Skalarprodukt,} \\ (M, N) &= (M_{ij}, N_{ij}), && D(u, M) := (\partial_i u, \partial_j M_{ij}), \\ H^1(\Omega)_{\text{sym}}^{2 \times 2} &:= \{ M = (M_{ij})_{i,j=1}^2 \mid M_{ij} \in H^1(\Omega), M_{ij} = M_{ji} \}.\end{aligned}$$

Damit kann die Gleichgewichtsbedingung (3.3.87) geschrieben werden als

$$\nabla^2 : M = -p \quad \text{in } \Omega \quad (3.3.118)$$

und das Elastizitätsgesetz als

$$M = M[u] := -\nu D \Delta u I - (1 - \nu) D \nabla^2 u \quad (3.3.119)$$

bzw.

$$\nabla^2 u = G[M] := \frac{\nu}{D(1 - \nu^2)} \text{spur}(M) I - \frac{1}{D(1 - \nu)} M. \quad (3.3.120)$$

Kombination dieser Gleichungen ergibt dann wieder die übliche Plattengleichung (3.3.96)

$$\Delta^2 u = -D^{-1} p \quad \text{in } \Omega.$$

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie besagte dann, dass die Lösung u charakterisiert werden kann als Lösung von

$$E(u) = \frac{1}{2}(M[u], \nabla^2 u) - (p, u) \rightarrow \min! \quad \text{auf } H_0^2(\Omega). \quad (3.3.121)$$

mit der zugehörigen Variationsgleichung

$$a(u, \varphi) := (M[u], \nabla^2 \varphi) + (M[\varphi], \nabla^2 u) = (p, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega). \quad (3.3.122)$$

Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ hat auch die vertrautere Darstellung

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \{ \Delta u \Delta \varphi - (1 - \nu)(\partial_1^2 u \partial_2^2 \varphi + \partial_2^2 u \partial_1^2 \varphi - 2\partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 \varphi) \} dx.$$

Analog zu den Existenzsätzen in Abschnitt 3.2.3 zeigt man mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz, dass die Variationsgleichung (3.3.122) für jedes $p \in L^2(\Omega)$ eine eindeutig bestimmte „schwache“ Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$ besitzt. Der relativ einfache Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Eine weitere Charakterisierung der Lösung der Plattengleichung stellt das folgende Sattelpunktprinzip dar. Dazu wird ein „stationärer“ Punkt $\{M, u\} \in H^1(\Omega)_{\text{sym}}^{2 \times 2} \times H_0^1(\Omega)$ des Funktional

$$J(M, u) := \frac{1}{2}(G[M], M) + D(u, M) + (u, p)$$

gesucht. Durch Auswertung von

$$\frac{d}{ds} J(M + s\Psi, u)|_{s=0} = \frac{d}{ds} J(M, u + s\varphi)|_{s=0} = 0$$

für zulässige Variationen $\Psi \in H^1(\Omega)_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ und $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gewinnt man die zugehörigen variationsgleichungen

$$D(\varphi, M) = (\varphi, p) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (3.3.123)$$

$$D(u, \Psi) = (G[M], \Psi) \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega)_{\text{sym}}^{2 \times 2}. \quad (3.3.124)$$

Durch partielle Integration und Anwendung des Fundamentalsatzes der Variationsrechnung überlegt man sich leicht, dass jede hinreichend reguläre Lösung $\{M, u\}$ von (3.3.123), (3.3.124) notwendig die folgenden Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= p \quad \text{in } \Omega, \\ u &\in H_0^2(\Omega), \quad M := M[u] \quad \text{in } \Omega,\end{aligned}$$

d. h.: u ist eine Lösung der Plattengleichung. Umgekehrt erhält man zu jeder Lösung $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)$ der Plattengleichung durch $\{M, u\} := \{\nabla^2 u, u\}$ eine Lösung des Systems (3.3.123) - (3.3.124). Da zumindest im Fall, dass Ω ein konvexes Polygonebiet oder hinreichend glatt berandet ist, die schwache Lösung der Plattengleichung stets in $H^3(\Omega)$ liegt, kann man die Problemformulierungen (3.3.122) und (3.3.123) - (3.3.124) als weitgehend äquivalent bezeichnen. Der Vorteil von (3.3.123) - (3.3.124) ist, dass die in der Praxis vor allem gesuchten Biegemomente M_{ij} explizit als Unbekannte erscheinen und folglich bei einem Approximationsverfahren auch unabhängig von u berechnet werden. Auf diesen Aspekt wird unten noch näher eingegangen werden.