

## 6 Verfahren für hyperbolische Probleme

Wir diskutieren zunächst wieder die klassischen Differenzenapproximationen zur Lösung hyperbolischer Anfangs-Randwert-Aufgaben (ARWAN). Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns dabei auf das Modellproblem der Wellengleichung in einer Ortsdimension mit Dirichletschen Randbedingungen, d.h. auf die 1. ARWA:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u &= f \quad \text{in } Q_T := (0, 1) \times [0, T], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad u(x, 0) = u^0, \quad \partial_t u(x, 0) = v^0, \end{aligned} \quad (6.0.1)$$

bzw. deren örtlich zweidimensionales Analogon

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u &= f \quad \text{in } Q_T := \Omega \times [0, T], \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad \partial_t u|_{t=0} = v^0. \end{aligned} \quad (6.0.2)$$

Das Definitionsgebiet  $\Omega$  wird wieder als glatt berandet oder als konvexes Polygonebiet vorausgesetzt. Die Problemdata  $f, u^0, v^0$  sind ebenfalls glatt und kompatibel, so dass die Lösung ebenfalls als glatt angenommen werden kann. Unsere theoretischen Überlegungen haben gezeigt, dass bei hyperbolischen Problemen Irregularitäten in den Anfangsdaten oder der rechten Seite entlang der Charakteristiken fortgepflanzt werden. Im Gegensatz zu den elliptischen und parabolischen Problemen besitzen hyperbolische keinerlei „Glättungseigenschaft“. Lokale Störungen (bzw. Wellen) werden ungedämpft fortgepflanzt. Insbesondere gilt das Prinzip der „Energieerhaltung“, d.h.: Für  $f \equiv 0$  bleibt die Gesamtenergie (Summe aus kinetischer und elastischer Energie) in der Zeit erhalten:

$$\|\partial_t u(t)\|^2 + c^2 \|\nabla u(t)\|^2 = \|v^0\|^2 + c^2 \|\nabla u^0\|^2. \quad (6.0.3)$$

Diese charakteristische Eigenschaft sollten auch Diskretisierungen der Wellengleichung besitzen.

### 6.1 Differenzenverfahren für die Wellengleichung

Wir beginnen mit der örtlich eindimensionalen, homogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u &= 0 \quad \text{in } Q_T := (0, 1) \times [0, T], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad u(x, 0) = u^0, \quad \partial_t u(x, 0) = v^0. \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Auf einem (äquidistanten) Orts-Zeit-Gitter  $\{x_n = nh, t_m = mk\}$  mit Ortsgitterweite  $h$  sowie Zeitschrittweite  $k$  lautet die zentrale Differenzenapproximation 2. Ordnung

$$k^{-2} \{U_n^m - 2U_n^{m-1} + U_n^{m-2}\} - c^2 h^{-2} \{U_{n-1}^{m-1} - U_n^{m-1} + U_{n+1}^{m-1}\} \quad (6.1.5)$$

zur Bestimmung der Approximationen  $U_n^m \sim u(x_n, t_m)$ . Dies ist eine (explizite) „Zweischrittformel“. Die Startwerte  $U_n^0$  und  $U_n^1$  werden aus den Anfangsbedingungen berechnet gemäß:

$$U_n^0 := u^0(x_n),$$

sowie unter Beachtung von

$$\begin{aligned} u(x_n, k) &= u(x_n, 0) + k\partial_t u(x_n, 0) + \frac{1}{2}k^2\partial_t^2 u(x_n, 0) + \dots \\ &= u^0(x_n) + kv^0(x_n) + \frac{1}{2}c^2k^2\partial_x^2 u^0(x_n) + \dots \end{aligned}$$

durch

$$U_n^1 = u^0(x_n) + kv^0(x_n) + \frac{1}{2}c^2k^2h^{-2}\{u^0(x_{n-1}) - 2u^0(x_n) + u^0(x_{n+1}))\}.$$

Mit dem Quotienten  $\sigma := k/h$  gilt für den zugehörigen Abschneidefehler:

$$\tau_{h,k} = \{\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u\} + \frac{1}{12}h^2(\sigma^2 - c^{-2})\partial_t^4 u + \frac{1}{360}h^4(\sigma^4 - c^{-4})\partial_t^6 u + \dots$$

Offenbar ist  $\tau_{h,k} \equiv 0$  für  $\sigma = c^{-1}$ , d.h.: Die explizite Differenzenformel

$$U_n^m = U_{n-1}^{m-1} + U_{n+1}^{m-1} - U_n^{m-2}$$

ist eine „exakte“ Differenzendarstellung der Wellengleichung. Das Abhängigkeitsgebiet der Differenzenformel hängt offenbar von der Schrittweitenrelation  $\sigma = k/h$  ab.

1. Fall  $0 < \sigma \leq c^{-1}$ : Abhängigkeitsgebiet der Differenzenformel enthält das der Differentialgleichung;
2. Fall  $\sigma = c^{-1}$ : „Übereinstimmung“;
3. Fall  $\sigma > c^{-1}$ : Abhängigkeitsgebiet der Differenzenformel ist enthalten in dem der Differentialgleichung.

**Satz 6.1 (CFL-Bedingung):** *Notwendig für die Konvergenz*

$$U_n^m \rightarrow u(x_n, t^m) \quad (h, k \rightarrow 0), \quad (6.1.6)$$

für beliebige Anfangsdaten ist die Schrittweitenbedingung (sog. Bedingung von Courant<sup>1</sup>-Friedrichs<sup>2</sup>-Lewy<sup>3</sup>, kurz „CFL-Bedingung“)

$$\sigma := \frac{k}{h} \leq c^{-1}. \quad (6.1.7)$$

<sup>1</sup>Richard Courant (1888–1972): Deutscher Mathematiker; Prof. in Münster und Göttingen, nach Vertreibung durch die Nazis 1933 Prof. an der New York University, Gründer des berühmten, später nach ihm benannten „Courant-Instituts“; Beiträge zur Funktionentheorie und Mathematischen Physik, „Erfinder“ der Idee der Finite-Elemente-Methode (publiziert 1943 nach Vorarbeiten aus 1922).

<sup>2</sup>Otto Paul Friedrichs (1901–1982): Deutscher Mathematiker; Prof. in Braunschweig, emigrierte 1937 nach USA ans Courant-Institut in New York; wichtige Beiträge zu partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

<sup>3</sup>Hans Lewy (1904–1988): Deutscher Mathematiker; 1927 Promotion in Göttingen bei F. Courant, dort auch Privatdozent; die u. a. nach ihm benannte „CFL-Stabilitätsbedingung“ ist in einer Arbeit von 1928 „Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik“ (Math. Annalen 100, 32–74) enthalten; 1933 Entlassung aus dem Staatsdienst und Emigration in die USA, ab 1935 Prof. in Berkeley; Beiträge zur Theorie partieller Differentialgleichungen.

**Beweis:** Sei  $\sigma > c^{-1}$ . Wenn in irgendeinem festen Gitterpunkt  $(x_n, t_m)$  für eine spezielle Anfangsbedingung  $U_n^m \rightarrow u(x_n, t_m)$  konvergiert für  $h, k \rightarrow 0$ , so können wir diese Anfangsdaten außerhalb des Abhängigkeitsintervalls von  $(x_n, t_m)$  bzgl. der Differenzenformel beliebig ändern, ohne dass  $U_n^m$  verändert wird. In diesem Fall kann also  $U_n^m$  nicht gegen die veränderte Lösung  $\tilde{u}(x_n, t_m)$  konvergieren. Q.E.D.

**Bemerkung 6.1:** Wir weisen darauf hin, dass für spezielle Anfangsdaten durchaus (theoretische) Konvergenz auch für  $\sigma > c^{-1}$  eintreten kann; in diesem Fall liegt aber numerische Instabilität vor. Die Schrittweitenbedingung (6.1.7) ist weniger restriktiv als die entsprechende Bedingung  $k \leq \frac{1}{2}ah^2$  bei der Wärmeleitungsgleichung.

Im folgenden werden wir die Konvergenz des Differenzenschemas (6.1.5) untersuchen. Dabei bedienen wir uns der Spektraltechnik, die wir bereits bei parabolischen Problemen kennengelernt haben. Der örtliche Differenzenoperator

$$A_h U_n^m := -\frac{c^2}{h^2} \{U_{n-1}^m - 2U_n^m + U_{n+1}^m\} \quad (6.1.8)$$

( $U_0^m = U_{N+1}^m = 0$ ) ist symmetrisch und positiv definit bzgl. des diskreten Skalarprodukts

$$(v, w)_h := h^2 \sum_{n=1}^N v_n w_n, \quad \|v\|_h := (v, v)_h^{1/2}.$$

Seine Eigenwerte seien  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \sim 4c^2/h^2$  mit einem zugehörigen Orthonormalsystem  $\{w^{(n)}, n = 1, \dots, N\}$  von Eigenvektoren. Insbesondere gilt

$$(A_h v, v)_h \geq \lambda \|v\|_h^2 \quad (6.1.9)$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstante  $\lambda > 0$ .

**Satz 6.2 (CFL-Bedingung):** Die explizite Differenzenformel (6.1.5) ist genau dann numerisch stabil, wenn die CFL-Bedingung  $k/h \leq c^{-1}$  erfüllt ist. Im Falle einer hinreichend glatten Lösung gilt dann die Konvergenzabschätzung

$$\max_{[0, T]} \|U_h^m - u(\cdot, t_m)\|_h \leq c(u) T^2 \{k^2 + h^2\}. \quad (6.1.10)$$

**Beweis:** i) Für die Entwicklungskoeffizienten in

$$U_h^m = \sum_{n=1}^N a_n^m w^{(n)}$$

gilt

$$a_n^m - 2a_n^{m-1} + a_n^{m-2} + k^2 \lambda_n a_n^{m-1} = 0$$

bzw.

$$a_n^m + (k^2 \lambda_n - 2)a_n^{m-1} + a_n^{m-2} = 0. \quad (6.1.11)$$

Diese homogene Differenzgleichung hat die allgemeine Lösung

$$a_n^m = c_1 r_1^m + c_2 r_2^m$$

mit den Wurzeln  $r_i$  des charakteristischen Polynoms  $\rho(r) = r^2 + (k^2 \lambda_n - 2)r + 1$ :

$$r_{1,2} = \frac{2 - k^2 \lambda_n \pm \sqrt{(2 - k^2 \lambda_n)^2 - 4}}{2}.$$

Im Fall  $k^2 \lambda_n \leq 4$  ist  $|r_{1,2}| \leq 1$ , d. h.: Es liegt Stabilität vor. Im Fall  $k^2 \lambda_n > 4$  ist  $|r_2| > 1$ , d. h.: Es besteht Instabilität. Offenbar gilt für  $h \rightarrow 0$ :

$$k^2 \lambda_n \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \leq c^{-1}. \quad (6.1.12)$$

ii) Sei nun  $k^2 \lambda_n \leq 4$  und die Lösung  $u$  glatt. Wir betrachten den Fehler der Ortsdiskretisierung getrennt von dem der Zeitdiskretisierung:

$$e_n^m := u(x_n, t_m) - U_n^m = u(x_n, t_m) - u_h(x_n, t_m) + u_h(x_n, t_m) - U_n^m =: \varepsilon_h(x_n, t_m) + E_n^m.$$

Für den Ortsdiskretisierungsfehler  $\varepsilon_h$  gilt  $\varepsilon_h^0 = \partial_t \varepsilon_h^0 = 0$  und

$$\partial_t^2 \varepsilon_h + A_h \varepsilon_h = \mathcal{O}(h^2).$$

Wir multiplizieren diese Identität mit  $\partial_t \varepsilon_h$ ,

$$\frac{1}{2} d_t \{ \|\partial_t \varepsilon_h\|_h^2 + (A_h \varepsilon_h, \varepsilon_h)_h \} = (\mathcal{O}(h^2), \partial_t \varepsilon_h)_h,$$

und integrieren über  $[0, t]$ :

$$\|\partial_t \varepsilon_h(t)\|_h^2 + (A_h \varepsilon_h(t), \varepsilon_h(t))_h = \|\varepsilon_h(0)\|_h^2 + (A_h \varepsilon_h(0), \varepsilon_h(0))_h + \int_0^t (\mathcal{O}(h^2), \partial_s \varepsilon_h)_h ds.$$

Dies impliziert

$$\max_{[0,t]} \{ \|\partial_t \varepsilon_h\|_h^2 + (A_h \varepsilon_h, \varepsilon_h)_h \} \leq t \mathcal{O}(h^2) \max_{[0,t]} \|\partial_t \varepsilon_h\|_h$$

bzw. nach Aufintegrieren bzgl. der Zeit:

$$\max_{[0,t]} \|\varepsilon_h\|_h \leq c t^2 h^2. \quad (6.1.13)$$

Der Faktor  $t^2$  lässt sich hier nicht vermeiden, da bei der Wellengleichung (im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung) lokale Störungen *nicht* ausgedämpft werden.

iii) Für den Zeitdiskretisierungsfehler gilt

$$k^{-2}\{E^m - 2E^{m-1} + E^{m-2}\} + A_h E^{m-1} = \mathcal{O}(k^2). \quad (6.1.14)$$

Die Konstante in  $\mathcal{O}(k^2)$  hängt dabei von den Zeitableitungen von  $u_h(t)$  bis zur Ordnung 4 ab. Diese lassen sich durch die entsprechenden Zeitableitungen von  $u$  beschränken, was hier jedoch nicht ausgeführt wird. Für die  $n$ -te Fourier-Komponente  $E_n^m = (E^m, w^{(n)})_h$  gilt

$$E_n^m - 2E_n^{m-1} + E_n^{m-2} + k^2 \lambda_n E_n^{m-1} = (\mathcal{O}(k^4), w^{(n)})_h,$$

gleichmäßig bzgl.  $n$ . Das charakteristische Polynom dieser Differenzgleichung ist  $\rho(r) = r^2 + (k^2 \lambda_n - 2)r + 1$  mit Wurzeln  $|r_{1,2}| = 1$ . Die a priori Abschätzung für Lösungen inhomogener Differenzgleichungen aus Hilfssatz 6.1 liefert also:

$$|E_n^m| \leq c \left\{ \max_{\mu=0,1} |E_n^\mu| + m^2 \max_{\nu=2,\dots,m} \mathcal{O}(k^4) \right\}$$

bzw.

$$\|E^m\|_h^2 = \sum_{\nu=1}^m |E_n^\nu|^2 \leq c \{ \|E^0\|_h^2 + \|E^1\|_h^2 \} + ct_m^4 k^4.$$

Offenbar ist  $E^0 = 0$  und

$$\begin{aligned} E^1 &= u_h(t_1) - U^1 = u_h(t_1) - u^0 - ku^1 - \frac{1}{2}k^2 A_h u^0 \\ &= -\varepsilon(t_1) + u(t_1) - u^0 - ku^1 - \frac{1}{2}k^2 c^2 \partial_x^2 u(0) + \mathcal{O}(k^2 h^2) \\ &= -\varepsilon(t_1) + u(t_1) - u^0 - ku^1 - \frac{1}{2}k^2 \partial_t^2 u(0) + \mathcal{O}(k^2 h^2) \\ &= \mathcal{O}(k^3 + k^2 h^2) + \mathcal{O}(k^3). \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\|E^m\|_h^2 \leq ct_m^2 \{h^2 + k^2\}^2. \quad (6.1.15)$$

Kombination der Abschätzungen (6.1.13) und (6.1.15) vervollständigt schließlich den Beweis. Q.E.D.

**Hilfssatz 6.1 (Differenzgleichungen):** Die Folge  $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  genüge der linearen, inhomogenen Differenzgleichung

$$\sum_{\nu=0}^R a_\nu y_{m+\nu} = g_m, \quad m \geq 0. \quad (6.1.16)$$

Wenn alle Nullstellen  $\lambda_\nu$  des charakteristischen Polynoms

$$\rho(z) := \sum_{\nu=0}^R a_\nu z^\nu$$

Betrag  $|\lambda_\nu| \leq 1$  haben, gilt die a priori Abschätzung

$$\max_{R \leq \nu \leq m} |y_\nu| \leq c_R \left\{ \max_{0 \leq \nu \leq R} |y_\nu| + m^2 \max_{0 \leq \nu \leq m} |g_\nu| \right\}, \quad m \geq R. \quad (6.1.17)$$

**Beweis:** Siehe das Kapitel über Mehrschrittmethodenden im Band „Numerik 1 (Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen)“ [2]. Q.E.D.

**Bemerkung 6.2:** Die bisher erhaltenen Aussagen bleiben gültig, wenn man das explizite Differenzschema auf das reine *Anfangswertproblem* („Cauchy-Problem“) der Wellengleichung anwendet. In diesem Fall ist man auf explizite Verfahren angewiesen, da zur Verwendung impliziter Formeln die notwendigen Randwerte fehlen.

Bei der ARWA der Wellengleichung kann man sich von der einschränkenden CFL-Bedingung durch Verwendung impliziter Differenzenformeln befreien, etwa der Art

$$k^{-2} \{U_h^m - 2U_h^{m-1} + U_h^{m-2}\} + \alpha A_h U_h^m + (1 - 2\alpha) A_h U_h^{m-1} + \alpha A_h^{m-2} = 0 \quad (6.1.18)$$

mit einem Parameter  $\alpha \in [0, 1]$ . Diese Formel hat den Abschneidefehler

$$\tau_h = h^2 \left\{ \left\{ \frac{1}{12}(\sigma^2 - 1) - \alpha\sigma^2 \right\} \partial_x^4 u + \mathcal{O}(h^2) \right\};$$

Sie ist also für beliebiges  $\alpha$  von zweiter Ordnung. Für ein implizites Differenzschema enthält ihr Abhängigkeitsbereich offensichtlich den der Differentialgleichung.

**Satz 6.3 (Konvergenz impliziter Verfahren):** Die implizite Differenzenformel (6.1.18) ist im Falle  $\alpha \geq 1/4$  unbedingt stabil und im Fall  $0 < \alpha < 1/4$  stabil für

$$0 < \sigma \leq \frac{1}{c\sqrt{1-4\alpha}}; \quad (6.1.19)$$

Für andere  $\sigma$  ist sie instabil. Im stabilen Fall gilt die Konvergenzabschätzung

$$\max_{[0, T]} \|U_h^m - u(\cdot, t_m)\|_h \leq c(u) T \{k^2 + h^2\}. \quad (6.1.20)$$

**Beweis:** Für die Entwicklungskoeffizienten in

$$U_h^m = \sum_{n=1}^N a_n^m w^{(n)}$$

gilt

$$a_n^m - 2a_n^{m-1} + a_n^{m-2} + k^2 \lambda_n \{ \alpha a_n^m + (1 - 2\alpha) a_n^{m-1} + \alpha a_n^{m-2} \} = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser Differenzenformel

$$\rho(r) = (1 + \alpha k^2 \lambda_n) r^2 + (k^2 \lambda_n (1 - 2\alpha) - 2) r + (1 + k^2 \lambda_n \alpha)$$

hat die Wurzeln

$$r_{1,2} = \frac{2 - k^2\lambda_n(1 - 2\alpha) \pm \sqrt{(k^2\lambda_n(1 - 2\alpha) - 2)^2 - 4(1 + k^2\lambda_n\alpha)^2}}{2(1 + \alpha k^2\lambda_n)}.$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Stabiler Fall:

$$(k^2\lambda_n(1 - 2\alpha) - 2)^2 \leq 4(1 + k^2\lambda_n\alpha)^2 \quad \Rightarrow \quad |r_{1,2}| = 1. \quad (6.1.21)$$

b) Instabiler Fall

$$(k^2\lambda_n(1 - 2\alpha) - 2)^2 > 4(1 + k^2\lambda_n\alpha)^2 \quad \Rightarrow \quad |r_2| > 1. \quad (6.1.22)$$

Der Kette äquivalenter Ungleichungen

$$\begin{aligned} k^2\lambda_n(1 - 2\alpha) - 2 &\leq 2 + 2k^2\lambda_n\alpha \\ k^2\lambda_n - 2\alpha k^2\lambda_n &\leq 4 + 2\alpha k^2\lambda_n \\ k^2\lambda_n - 4\alpha k^2\lambda_n &\leq 4 \\ \frac{4k^2c^2}{h^2}(1 - 4\alpha) &\leq 4 \\ \frac{k^2}{h^2}(1 - 4\alpha) &\leq c^{-2} \end{aligned}$$

entnehmen wir die Bedingungen  $\alpha \geq 1/4$  oder

$$0 < \alpha < 1/4, \quad \sigma \leq \frac{1}{c\sqrt{1 - 4\alpha}}. \quad (6.1.23)$$

Dagegen ist

$$\begin{aligned} k^2\lambda_n(1 - 2\alpha) - 2 &\geq -2 - 2k^2\lambda_n\alpha \\ k^2\lambda_n - 2\alpha k^2\lambda_n &\geq -2\alpha k^2\lambda_n \\ k^2\lambda_n &\geq 0, \end{aligned}$$

stets erfüllt. Dies beweist den die Stabilität betreffenden Teil des Satzes. Die Konvergenzabschätzung wird dann ähnlich wie im expliziten Fall gezeigt. Wir lassen die Details weg. Q.E.D.

In zwei Raumdimensionen ist der Abhängigkeitsbereich der Wellengleichung kegelförmig (z. B. Kreiskegel bei kreisförmigem Grundgebiet). Die obigen Aussagen für den ein-dimensionalen Fall gelten sinngemäß auch in zwei Dimensionen. Bei Ortsdiskretisierung mit dem 5-Punkte-Operator  $A_h$  lautet das Analogon des expliziten Schemas (6.1.5)

$$k^{-2} \{U_h^m - 2U_h^{m-1} + U_h^{m-2}\} + c^2 A_h U_h^{m-1} = 0 \quad (6.1.24)$$

und hat die Stabilitätsbedingung

$$\sigma \leq \frac{1}{\sqrt{2c}}. \quad (6.1.25)$$

In drei Raumdimensionen verschärft sich diese Bedingung zu  $\sigma \leq (\sqrt{3c})^{-1}$ .

## 6.2 Finite-Elemente-Verfahren für die Wellengleichung

Als Basis von Finite-Elemente-Diskretisierungen dient wieder die variationelle Formulierung von (6.0.2):

$$(\partial_t^2 u, \varphi) + (a \nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V, \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (6.2.26)$$

mit dem üblichen Sobolew-Raum  $V := H_0^1(\Omega)$ . Im Sinne der „Rothe-Methode“ könnten diese Gleichung nun zunächst wieder mit einem Differenzenschema 2. Ordnung in der Zeit und anschließend die einzelnen Zeitschritte mit FE-Ansätzen im Ort diskretisiert werden. Dies führt wie bei den Differenzenverfahren zwangsläufig auf Zwei-Schritt-Schemata, mit denen die Energieerhaltung nicht zu bewerkstelligen ist. Wir wollen daher jetzt einen anderen Weg beschreiten, der etwas näher an der Vorgehensweise bei parabolischen Problemen ist. Durch Einführung der zusätzlichen Unbekannten  $v = \partial_t u$  geht die Wellengleichung über in das System

$$\partial_t u - v = 0, \quad (6.2.27)$$

$$\partial_t v - c^2 \Delta u = f, \quad (6.2.28)$$

mit den natürlichen Randbedingungen  $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$  sowie den Anfangsbedingungen  $u|_{t=0} = u^0$  und  $v|_{t=0} = v^0$ . In variationeller Form schreibt sich dies wie

$$(\partial_t v, \varphi) - (v, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in V, \quad t \in [0, T], \quad (6.2.29)$$

$$(\partial_t u, \psi) + c^2 (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in V, \quad (6.2.30)$$

mit den Anfangsbedingungen  $u|_{t=0} = u^0$  und  $v|_{t=0} = v^0$ . Dieses System von Differentialgleichungen ist wieder „hyperbolisch“, da alle Eigenwerte der Koeffizientenmatrix rein imaginär sind. Zur Diskretisierung wäre also ein Zeitschrittverfahren günstig, bei dem die imaginäre Achse gerade der Rand des Stabilitätsgebiets ist. Das Crank-Nicolson-Verfahren besitzt diese Eigenschaft.

Zur Diskretisierung dieses Systems verwenden wir das Rothe-Verfahren, d. h.: Zunächst wird bzgl. der Zeit diskretisiert. Dazu verwenden wir auf einem Zeitgitter

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_M = T,$$

mit Schrittweiten  $k_m = t_m - t_{m-1}$  das Crank-Nicolson-Schema:

$$\begin{aligned} (u^m - u^{m-1}, \psi) - \frac{1}{2} k_m (v^m + v^{m-1}, \psi) &= 0, \\ (v^m - v^{m-1}, \varphi) + \frac{1}{2} k_m (c^2 \nabla (u^m + u^{m-1}), \nabla \varphi) &= 0, \end{aligned}$$

für alle Testfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  mit Anfangswerten  $u^0$  und  $v^0$ . Bei diesem Zeitschritt-



verfahren bleibt die totale Energie in jedem einzelnen Zeitschritt erhalten. Dazu setzen wir im variationellen Schema  $\varphi := u^m - u^{m-1}$  und  $\psi := v^m - v^{m-1}$  und kombinieren die beiden resultierenden Gleichungen zu

$$\frac{1}{2}\|v^m\|^2 + \frac{1}{2}\|c\nabla u^m\|^2 = \frac{1}{2}\|v^{m-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|c\nabla u^{m-1}\|^2. \quad (6.2.31)$$

Die einzelnen Probleme in jedem Zeitschritt  $t_{m-1} \rightarrow t_m$  werden nun mit Hilfe eines FE-Verfahrens diskretisiert. Dazu werden zu jedem Zeitlevel  $t_m$  FE-Ansatzräume  $V_h^m \subset V = H_0^1(\Omega)$  auf Gittern  $\mathbf{T}_H^m$  der üblichen Art gewählt. Im folgenden betrachten wir zunächst den Fall, dass die Gitter und Ansatzräume zu allen Zeitpunkten dieselben sind. Die allgemeine Situation von mit der Zeit variierenden Ortsgittern ist in Abb. 6.1 skizziert.

Zu dem FE-Ansatz gehören wieder die Masse- und Steifigkeitsmatrizen

$$M_h = (m_{ij})_{ij} = ((\varphi_h^{(j)}, \varphi_h^{(i)}))_{ij}, \quad A_h = (a_{ij})_{ij} = ((c^2 \nabla \varphi_h^{(j)}, \nabla \varphi_h^{(i)}))_{ij},$$

wobei  $\{\varphi_h^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  die Knotenbasis von  $V_h$  ist. Dabei wird angenommen, dass beide Unbekannte  $u_h$  sowie  $v_h$  in demselben Ansatzraum  $V_h$  bestimmt werden. Dies ist wegen der physikalisch vorgegebenen Randbedingung  $v|_{\partial\Omega} = \partial_t u|_{\partial\Omega} = 0$  sinnvoll. Eigentlich bräuchte  $v_h$  im Hinblick auf die gewählte variationelle Formulierung aber nur in  $L^2(\Omega)$  gewählt zu werden.

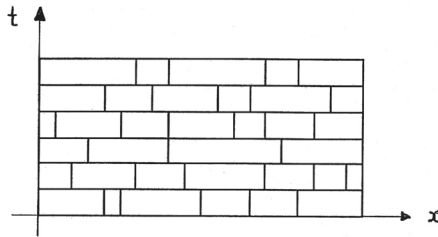


Abbildung 6.1: Raum-Zeit-Gitter mit „hängenden Knoten“

Bezeichnen wir nun die zugehörigen Knotenwertvektoren von  $u_h^m$  und  $v_h^m$  ebenfalls mit  $u_h^m$  und  $v_h^m$ , so erhält das Zeitschrittschema die Gestalt

$$\begin{aligned} M_h(U_h^m - U_h^{m-1}) + \frac{1}{2}k_m M_h(V_h^m - V_h^{m-1}) &= 0, \\ M_h(V_h^m - V_h^{m-1}) + \frac{1}{2}k_m A_h(U_h^m + U_h^{m-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Dies kann nun so umgeformt werden, dass ein System von zwei sukzessive lösbaren Problemen entsteht:

$$\begin{aligned} (M_h + \frac{1}{4}k_m^2 A_h)U_h^m &= M_h U_h^{m-1} + k_m M_h V_h^{m-1} - \frac{1}{4}k_m^2 A_h U_h^{m-1}, \\ M_h V_h^m &= M_h V_h^{m-1} - \frac{1}{2}k_m A_h (U_h^m + U_h^{m-1}). \end{aligned}$$

In jedem Zeitschritt sind also eine (modifizierte) Ritz-Projektion sowie eine  $L^2$ -Projektion durchzuführen. Die Konvergenzanalyse dieses Verfahrens kann wieder mit Hilfe der oben schon beschriebenen „Energie-Technik“ erfolgen, was hier aber nicht ausgeführt wird.

### 6.3 Lösungsaspekte

Bei der Anwendung unbedingt stabiler, impliziter Differenzenschemata müssen in jedem Zeitschritt lineare Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrizen der Form  $I_h + \alpha k^2 A_h$  gelöst werden. Deren Kondition verhält sich im Falle  $k \sim h$  wie

$$\kappa_2(A_h) \sim 1. \quad (6.3.32)$$

Auf solchen gleichförmigen Gittern sind implizite Verfahren also verhältnismäßig kostengünstig. Dies ändert sich aber, wenn das Ortsgitter zur Anpassung an irreguläre Lösungsstrukturen lokal verfeinert wird.

### 6.4 Übungen

**Übung 6.1:** Zum Abschluss noch ein paar Testfragen zum vorausgegangenen Stoff:

1. Wodurch unterscheiden sich das „Ritzsche Projektionsverfahren“ vom allgemeinen „Galerkin-Verfahren“, und was ist ein „Petrov-Galerkin-Verfahren“?
2. Was ist neben der Grobgitterkorrektur der wichtigste Bestandteil eines Mehrgitterverfahrens?
3. Welche ist die mit einem „quadratischen“ Finite-Elemente-Ansatz maximal erreichbare Konvergenzordnung  $\mathcal{O}(h^r)$  (bzgl. einer „minimalen“ Fehlernorm)?
4. Was versteht man unter der „Maximalwinkel-“ bzw. der „Minimalwinkel-Bedingung“ für Triangulierungen?
5. Was versteht man unter „Glättungseigenschaft“ eines Zeitschrittverfahrens, und besitzt das Crank-Nicolson-Verfahren diese Eigenschaft?
6. Was ist ein „isoparametrischer“ Finite-Elemente-Ansatz?
7. Was ist die Faustregel hinsichtlich der erforderlichen Ordnung von Quadraturformeln zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix eines Finite-Elemente-Verfahrens?
8. Welcher Schrittweitenbedingung unterliegt das explizite Euler-Verfahren zur Lösung der mit dem 5-Punkte-Differenzenoperator im Ort diskretisierten Wärmeleitungsgleichung?
9. Welche Kondition in Abhängigkeit von der Gitterweite hat die Steifigkeitsmatrix einer Finite-Elemente-Diskretisierung der „Plattengleichung“ (biharmonischer Operator)?
10. Was ist eine „M-Matrix“, und welche Eigenschaften folgen daraus?