2 Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik

2.1 Erhaltungsgleichungen

In diesem Abschnitt werden die in strömungsmechanischen Modellen grundlegenden Beziehungen für die Größen „Verzerrungsgeschwindigkeit“ und „Spannungsgeschwindigkeit“ abgeleitet, woaus sich dann Bestimmungsgleichungen für alle relevanten Zustandsgrößen des Massekontinuums ergeben. Ausgangspunkt sind die folgenden Annahmen an ein Massevolumen als abgeschlossenes physikalisches System:

- „Masseerhaltung“: Masse wird weder erzeugt noch vernichtet.
- „Impulserhaltung“ (2. Newtonsches Gesetz): Die Änderungsrate des Impulses (Drehimpulses) ist gleich der einwirkenden Kraft (Drehmoment).
- „Energieerhaltung“: Energie wird weder erzeugt noch vernichtet.

Entsprechend bezeichnet man den Satz von Variablen „(Masse)-Dichte“ ρ, „Impuls“ ρv und „Energie-(Dichte) ρe als „Erhaltungsvariablen“ („konservative“ Variablen) im Gegensatz zu den „primitiven“ Variablen „Dichte“ ρ, „Geschwindigkeit“ v und „Temperatur“ θ. Im folgenden werden die Grundgleichungen der Strömungsmechanik zunächst in sog. „Erhaltungsform“, d. h. für die Erhaltungsvariablen abgeleitet. Welche der Variablensätze, konservative oder primitive, am besten bei der Beschreibung einer Strömungssituation verwendet werden hängt von den konkreten Gegebenheiten ab.

2.1.1 Das Reynolds'sche Transporttheorem

Sei Φ eine für jeden materiellen Punkt ξ zur Zeit t angebbare physikalische Größe (z. B. Massedichte oder Impuls). Durch

$$\Phi = \Phi(x,t) = \Phi(x(\xi,t),t),$$

kann Φ auch auf die Eulerschen Ortspunkte x bezogen werden. Wir definieren die „lokale“ Ableitung nach der Zeit

$$\partial_t\Phi = \partial_t\Phi(x,t),$$

welche die zeitliche Änderung von Φ an einem festen Ortspunkt x (raumfester Beobachter) angibt, und die „materielle“ Ableitung

$$d_t\Phi = d_t\Phi(x(\xi,t),t) = \partial_t\Phi + v\cdot\nabla_x\Phi,$$

welche die zeitliche Änderung von Φ für ein individuelles Teilchen ξ beschreibt. Dabei ist wieder $v(x,t) = \partial_t x(\xi,t)$ das Geschwindigkeitsfeld der materiellen Teilchen.

Satz 2.1 (Reynolds'sches Transport-Theorem): *Sei $\Phi = \Phi(x,t)$ eine hinreichend glatte skalare Funktion. Dann gilt für jedes materielle Volumen $V(t)$ die Beziehung*

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Phi\,dx = \int_{V(t)} \big\{\partial_t\Phi + \nabla\cdot(\Phi v)\big\}\,dx\,. \tag{2.1.1}$$

Beweis: Die Transformation $\xi \to x(\xi,t)$ ist umkehrbar eindeutig, glatt mit Funktionaldeterminante

$$\Delta(\xi,t) = \det\Big(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\Big)_{i,j=1,2,3} > 0\,.$$

Durch Transformation auf das „Referenzvolumen“ $V_0 = V(0)$ erhalten wir

$$\int_{V(t)} \Phi(x,t)\,dx = \int_{V_0} \Phi(x(\xi,t),t)\Delta(\xi,t)\,d\xi$$

und für die zeiliche Ableitung

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Phi(x,t)\,dx = \int_{V_0} \Big\{d_t\Phi(x(\xi,t),t)\,\Delta(\xi,t) + \Phi(x(\xi,t),t)\,\partial_t\Delta(\xi,t)\Big\}\,d\xi\,.$$

Weiter gilt:

$$d_t\Phi(x(\xi,t),t) = \partial_t\Phi(x,t) + v(x,t)\cdot\nabla_x\Phi(x,t) \tag{2.1.2}$$

und mit der Abkürzung $a_{ij} := \partial x_i/\partial\xi_j$ bei Vertauschbarkeit der Ableitungen:

$$\partial_t\Delta(\xi,t) = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}\partial_t a_{ij} = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}\frac{\partial v_i}{\partial\xi_j} = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_j} = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}a_{kj}.$$

Beachtung von Lemma 1.1 mit $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{co}(a_{ij})$ ergibt weiter

$$\partial_t\Delta(\xi,t) = \Delta_{ij}a_{kj}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}\Delta\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \Delta\,\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \Delta\,\mathrm{div}v\,.$$

Setzen wir dies oben ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Phi\,dx \int_{V_0} &\Big\{\partial_t\Phi + v\cdot\nabla\Phi + \Phi\,\nabla\cdot v\Big\}\Delta(\xi,t)\,d\xi \\ = \int_{V(t)} &\Big\{\partial_t\Phi + \nabla\cdot(\Phi v)\Big\}\,dx\,,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. Q.E.D.

Aus mathematischer Sicht handelt es sich beim Reynolds'schen[1] Transporttheorem um das höherdimensionale Analogon der bekannten Formel für die Ableitung eines eindimensionalen Integrals mit parameterabhängigen Integranden und Integrationsgrenzen. Für eine „Erhaltungsgröße“ mit

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Phi\,dx = 0$$

ergibt sich mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

$$\int_{V(t)} \partial_t\Phi\,dx = -\int_{\partial V(t)} n\cdot v\Phi\,do\,. \tag{2.1.3}$$

Das heißt, die zeitliche Änderung der Größe Φ im Volumen $V(t)$ ist gleich ihrem negativen „Gesamtfluss“ über den Rand $\partial V(t)$.

[1] Osborne Reynolds (1842–1912): Britischer Physiker; nach Studium der Mathematik in Cambridge 1868 Prof. für Ingenieurwissenschaften an der Univ. of Manchester; Arbeiten zur Strömungsmechanik und Turbulenz sowie zur Bodenmechanik; nach ihm ist u. a. die „Reynolds-Zahl“ in der Strömungsmechanik benannt.

2.1.2 Masseerhaltung

Bei gegebener Massedichte $\rho = \rho(x,t)$ ergibt sich die in einem materiellen Volumen $V = V(t)$ enthaltene Masse zu

$$m(V) = \int_V \rho \, dx \, .$$

Die physikalische Erfahrung besagt, dass der Masseinhalt eines materiellen Volumens in der Zeit erhalten bleibt, d.h.: Es gibt keine Massequellen oder -senken:

$$d_t m(V) = 0 \, .$$

Setzt man im Transporttheorem $\Phi = \rho$, besagt dies

$$\int_V \big\{ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) \big\} \, dx = 0$$

für beliebige Volumina V. Wird der Integrand als stetig angenommen (eine nicht immer erfüllte zusätzliche Voraussetzung an die Dynamik des Fluids), muss daher notwendig in jedem Orts-Zeit-Punkt (x,t) gelten:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \, . \tag{2.1.4}$$

Dies ist die Gleichung der Masseerhaltung („Kontinuitätsgleichung“). Sie besagt, dass die zeitliche Änderung der in einem raumfesten Volumen V enthaltenen Masse gleich der durch seinen Rand nach innen strömenden Masse ist:

$$\int_V \partial_t \rho \, dx - \int_{\partial V} n \cdot (\rho v) \, do \, .$$

2.1.3 Impulserhaltung

Nach den vorausgegangenen Überlegungen werden die auf ein materielles Volumen $V = V(t)$ wirkenden Kräfte beschrieben durch

$$K(V) = \int_V \rho f \, dx + \int_{\partial V} n \cdot \sigma \, do = \int_V \{ \rho f + \nabla \cdot \sigma \} \, dx \, .$$

Der Impuls ist gegeben durch

$$I(V) = \int_V \rho v \, dx \, .$$

Die zeitliche Erhaltung des Impulses (Newtonsches Gesetz)

$$d_t I(V) = K(V)$$

liefert die vektorielle Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v \, dx = \int_V \{ \rho f + \nabla \cdot \sigma \} \, dx \, .$$

Anwendung des Transporttheorems mit $\Phi = \rho v_i$ impliziert dann für $i = 1,2,3$ die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v_i \, dx = \int_V \big\{\partial_t(\rho v_i) + \nabla\cdot(\rho v_i v)\big\}\, dx$$

und somit

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla\cdot(\rho v_i v) = \rho f_i + (\nabla\cdot\sigma)_i \,.$$

In vektorieller Schreibweise lautet diese Grundgleichung der Impulserhaltung („Momentengleichung") in konservativer Form:

$$\partial_t(\rho v) + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) = \rho f + \nabla\cdot\sigma\,, \tag{2.1.5}$$

mit dem äußeren Vektorprodukt $v\otimes v := (v_i v_j)_{i,j=1}^3$. Bei Beachtung der Beziehungen

$$\partial_t(\rho v) = \rho\partial_t v + v\partial_t\rho, \qquad \nabla\cdot(\rho v\otimes v) = v\nabla\cdot(\rho v) + \rho v\cdot\nabla v,$$

ergibt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die Impulserhaltungsgleichung in nicht-konservativer Form:

$$\rho\partial_t v + \rho(v\cdot\nabla)v = \rho f + \nabla\cdot\sigma. \tag{2.1.6}$$

2.1.4 Drehimpulserhaltung

Für ein materielles Volumen $V = V(t)$ ist der Drehimpuls bzgl. des Ursprungs definiert durch

$$L(V) = \int_V x\times(\rho v)\, dx$$

und das Drehmoment

$$D(V) = \int_V x\times(\rho f)\, dx + \int_{\partial V} x\times(n\cdot\sigma)\, do.$$

Der Erhaltungssatz für den Drehimpuls besagt dann, dass

$$d_t L(V) = D(V).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwenden wir wieder den oben definierten „Permutationstensor" $\varepsilon = (\varepsilon_{ijk})_{i,j,k=1,2,3}$ mit den Elementen $\varepsilon_{ijk} = 1, -1, 0$, je nach dem, ob $\{ijk\}$ eine gerade, ungerade oder gar keine Permutation von $\{1,2,3\}$ ist. Damit gilt z.B.

$$(x\times a)_i = \varepsilon_{ijk} x_j a_k \,.$$

Das Transporttheorem mit $\Phi = \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k$ impliziert nun

$$\frac{d}{dt}\int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k \, dx = \int_V \big\{\partial_t(\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k) + \nabla\cdot(\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k v)\big\}\, dx \,.$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\partial_t(\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k) = \varepsilon_{ijk} x_j v_k \partial_t\rho + \varepsilon_{ijk}\rho x_j \partial_t v_k$$

und

$$\nabla\cdot(\varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k v)=\partial_l(\varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k v_l)=\varepsilon_{ijk}x_j v_k \mathrm{div}(\rho v)+\varepsilon_{ijk}\rho x_j v_l\partial_l v_k+\varepsilon_{ijk}\rho v_j v_k$$

erhalten wir wegen $v\times v=0$

$$d_tL(V)=\int_{V(t)}\big\{x\times v\partial_t\rho+\rho x\times\partial_t v+(x\times v)\nabla\cdot(\rho v)+\rho x\times(v\cdot\nabla)v\big\}\,dx.$$

Unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho v)=0$ erhalten wir hieraus

$$d_tL(V)=\int_V x\times\big(\rho\partial_t v+\rho(v\cdot\nabla)v\big)\,dx.$$

Der zweite Summand in der Definition des Drehmoments $D(V)$ lässt sich mit Hilfe des Gaußchen Satzes umformen zu

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\varepsilon_{ijk}x_jn_l\sigma_{lk}\,do&=\int_V\varepsilon_{ijk}\partial_l(x_j\sigma_{lk})\,dx\\&=\int_V\big\{\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}+\varepsilon_{ijk}x_j\partial_l\sigma_{lk}\big\}\,dx=\int_V\big\{(\varepsilon:\sigma)_i+(x\times\nabla\cdot\sigma)_i\big\}\,dx\,.\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\int_V x\times\big(\rho\partial_t v+\rho(v\cdot\nabla)v\big)\,dx=\int_V\big\{x\times(\rho f+\nabla\cdot\sigma)+\varepsilon:\sigma\big\}\,dx\,.$$

Bei Beachtung der Impulserhaltung

$$\rho\partial_t v+\rho(v\cdot\nabla)v=\rho f+\nabla\cdot\sigma$$

folgt $\varepsilon:\sigma=0$. Hieraus erhält man $\sigma_{jk}-\sigma_{kj}=0$, d. h.: Die Drehimpulserhaltung impliziert wieder die Symmetrie des Spannungstensors:

$$\sigma=\sigma^T. \tag{2.1.7}$$

2.1.5 Energieerhaltung

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik führt, auf strömungsmechanische Konfigurationen angewendet, zum Postulat der Existenz einer „inneren Energiedichte“ $e=e(x,t)$, so dass sich die innere Energie eines materiellen Volumens $V=V(t)$ darstellt als

$$E_{\mathrm{int}}(V)=\int_V\rho e\,dx\,.$$

Seine „kinetische Energie“ zum Zeitpunkt t ist

$$E_{\mathrm{kin}}(V)=\tfrac12\int_V\rho|v|^2\,dx\,.$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie

$$d_t E(V(t)) = d_t\big(E_{\text{int}}(V) + E_{\text{kin}}(V)\big)$$

muss gleich sein der Leistung der wirkenden Massekräfte und Spannungen

$$P(V) = \int_V \rho f \cdot v \, dx + \int_{\partial V} n \cdot \sigma \cdot v \, do \,,$$

zuzüglich der Energiezufuhr durch Wärmequellen und abzüglich des Energieverlustes durch abfließende Wärme

$$Z(V) = \int_V \rho h \, dx - \int_{\partial V} q \cdot n \, do \,,$$

wobei $q(x,t)$ den Wärmestrom über ∂V bezeichnet. Bei dieser Energiebilanz wird Energieverlust durch „Strahlung“ vernachlässigt. Insgesamt gilt also die Erhaltungsgleichung

$$d_t\{E_{\text{int}}(V) + E_{\text{kin}}(V)\} = P(V) + Z(V) \,. \tag{2.1.8}$$

Das Transporttheorem angewendet für $\Phi = \frac{1}{2}\rho|v|^2$ sowie $\Phi = \rho e$ ergibt

$$\begin{aligned} d_t E_{\text{kin}}(V) &= \int_V \big\{\tfrac{1}{2}\partial_t(\rho|v|^2) + \tfrac{1}{2}\nabla \cdot (\rho|v|^2 v)\big\} \, dx \\ d_t E_{\text{int}}(V) &= \int_V \big\{\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e v)\big\} \, dx. \end{aligned}$$

Kombination dieser Beziehungen mit der Erhaltungsgleichung (2.1.8) liefert

$$\begin{aligned} &\int_V \big\{\partial_t(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2) + \nabla \cdot (\rho e v + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2 v)\big\} \, dx \\ &= \int_V \{\rho f \cdot v + \rho h\} \, dx + \int_{\partial V} n \cdot (\sigma \cdot v - q) \, do =: A_V + A_{\partial V} \,. \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral $A_{\partial V}$ lässt sich mit dem Gaußschen Satz, unter der Verwendung der Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, umformen zu

$$A_{\partial V} = \int_{\partial V} n_j(\sigma_{ij} v_i - q_j) \, do = \int_V \partial_j(\sigma_{ij} v_i + q_j) \, dx = \int_V \nabla \cdot (\sigma \cdot v - q) \, dx \,.$$

Wir fassen dies zusammen zu

$$\begin{aligned} &\int_V \big\{\partial_t(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2) + \nabla \cdot (\rho e v + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2 v)\big\} \, dx \\ &\qquad = \int_V \big\{\rho f \cdot v + \rho h + \nabla \cdot (\sigma \cdot v - q)\big\} \, dx. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir schließlich die allgemeine Erhaltungsgleichung für die totale Energie („Energiegleichung“):

$$\partial_t(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2) + \nabla \cdot (\rho e v + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2 v) = \rho f \cdot v + \nabla \cdot (\sigma \cdot v) + \rho h - \nabla \cdot q. \tag{2.1.9}$$

Die zeitliche und örtliche Veränderung der totalen Energie $\rho e + \frac{1}{2}\rho|v|^2$ ist bestimmt durch die externe Quellen ρh, den Wärmezuwachs durch „mechanische" Leistung $\rho f \cdot v + \nabla \cdot (\sigma \cdot v)$ und den diffusiven Wärmefluss $\nabla \cdot q$.

Diese Beziehung kann unter Heranziehung der Kontinuitätsgleichung und der Momentengleichung

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \qquad \partial_t v + v \cdot \nabla v = \rho f + \nabla \cdot \sigma\,,$$

gemäß

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2) &= \partial_t(\rho e) + \tfrac{1}{2}|v|^2 \partial_t \rho + \rho \partial_t v \cdot v, \\ \nabla \cdot (\rho e v + \tfrac{1}{2}\rho|v|^2 v) &= \nabla \cdot (\rho e v) + \tfrac{1}{2}|v|^2 \nabla \cdot (\rho v) + \rho v \cdot \nabla v \cdot v, \end{aligned}$$

reduziert werden zu

$$\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e v) \;=\; \sigma : \nabla v - \nabla \cdot q + \rho h. \tag{2.1.10}$$

2.1.6 Bilanzgleichungen

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen. Für die Zustandsgrößen

ρ Massedichte,

$\rho v = (\rho v_i)_{i=1,2,3}$ Impuls,

ρe (totale) Energiedichte,

wurden ausgehend von den grundlegenden physikalischen Erhaltungsprinzipien die folgenden Beziehungen gefunden:

1) Kontinuitätsgleichung für Dichte ρ (Masseerhaltung):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0\,. \tag{2.1.11}$$

2) Momentengleichung für Impuls ρv (Impulserhaltung):

$$\partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) - \nabla \cdot \sigma = \rho f\,. \tag{2.1.12}$$

3) Energiegleichung für Gesamtenergiedichte $E := e + \frac{1}{2}|v|^2$ (Energieerhaltung):

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E v) = \rho f \cdot v + \nabla \cdot (\sigma \cdot v) + \rho h - \nabla \cdot q. \tag{2.1.13}$$

Der obigen Variablen werden auch „konservative" Variablen und die zugehörigen Gleichungen „Erhaltungsgleichungen" genannt.

2.2 Materialgleichungen

Die bisher abgeleiteten Zustandsgleichungen haben sich aus allgemeinen Erhaltungsprinzipien ergeben, welche praktisch für alle Flüssigkeiten und Gase gelten. Im folgenden werden diese Gleichungen unter Verwendung materialspezifischer Eigenschaften weiter spezialisiert. Dazu werden die inneren Spannungen σ und der Energiefluss q an die anderen Strömungsgrößen gekoppelt.

2.2.1 Viskositätsmodell

Das obige System enthält 11 unbekannten Zustandsgrößen ρ, $v = (v_i)_{i=1,2,3}$, $\sigma = (\sigma_{ij})_{i.j=1,2,3}$ (symmetrisch) und e. Zu ihrer Bestimmung stehen zunächst nur die 5 Zustandsgleichungen der Masse-, Impuls- und Energieerhaltung zur Verfügung. Die noch fehlenden Beziehungen erhält man aus den sog. „Materialgleichungen" aufgrund der speziellen Eigenschaften des jeweiligen Fluids.

Die sog. „Stokesschen[2] Fluide", wie die meisten „normale" Flüssigkeiten und Gase, zeichnen sich dadurch aus, dass der Spannungstensor im Ruhezustand stets kugelsymmetrisch ist,

$$\sigma_{|v=0} = -pI\,,$$

mit dem skalaren, „hydrostatischen" Druck p. Bei einem Gas ist p der „thermodynamische" Druck, der über gewisse thermodynamische Zustandsgleichungen mit den anderen Zustandsgrößen θ und ρ verknüpft ist; wir werden darauf weiter unten zurückkommen. Im bewegten Fluid wird damit angesetzt:

$$\sigma = -pI + \tau\,,$$

mit einem (symmetrischen) Tensor τ, der die sog. „Reibungsspannungen" („Scherspannungen") beschreibt. Bei rein mechanischer Betrachtungsweise kann $\mathrm{spur}(\tau) = 0$ angesetzt werden; andernfalls würden die entsprechenden Spannungen in den Druck absorbiert werden. Der Tensor τ wird nun über das allgemeine Materialgesetz

$$\tau = F(\epsilon)$$

mit dem Tensor $\epsilon \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ der Verzerrungsgeschwindigkeiten verknüpft, wobei $F = (F_{ij})_{i,j=1,2,3}$ eine geeignete stetige, tensor-wertige Funktion ist. Dies ergibt neben den 5 Bilanzgleichungen 6 weitere Kopplungsbedingungen für die zu bestimmenden 11 Zustandsgrößen. Im „Stokesschen Fluid" werden an die Tensorfunktion $F(\cdot)$ die folgenden Forderungen gestellt:

1. *Symmetrie:* Die Materialfunktion bildet symmetrische Tensoren $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ in ebenfalls symmetrische Tensoren $F(T) \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ ab. Ferner ist $F(0) = 0$.

2. *Isotropie:* Das Materialgesetz ist invariant gegenüber volumenerhaltenden, orthogonalen Koordinatentransformationen, d. h.:

$$F(QTQ^T) = QF(T)Q^T \tag{2.2.14}$$

für jeden symmetrischen Tensor $T = (T_{ij})_{i,j=1,2,3}$ und jede orthogonale Transformation $Q = (Q_{ij})_{i,j=1,2,3}$ mit $QQ^T = I$, $\det(Q) = 1$.

[2] Sir Georg Gabriel Stokes (1819–1903): Englischer Mathematiker und Physiker; Prof. in Cambridge; Beiträge zur Differential- und Integralrechnung, zur Hydrodynamik und zur Theorie des Lichts, Spektralanalyse und Fluoreszenz.

Satz 2.2 (Materialtensor): *Unter den obigen Annahmen hat die Tensorfunktion $F = F(T)$ notwendig die Gestalt*

$$F(T) = \varphi_0 I + \varphi_1 T + \varphi_2 T^2 \, , \tag{2.2.15}$$

mit gewissen stetigen, skalaren Funktionen $\varphi_i(I_1, I_2, I_3)$ der drei „Invarianten" von T :

$$I_1(T) = spur(T), \quad I_2(T) = \tfrac{1}{2}\{T_{ij}T_{ji} - T_{ii}T_{jj}\}, \quad I_3(T) = det(T)\, .$$

Beweis: Sei T ein beliebiger, symmetrischer 3×3-Tensor mit einem Orthonormalsystem $\{e_1, e_2, e_3\}$ von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, d. h.: Es gilt $Te_i = \lambda_i e_i$. Es sei bemerkt, dass die „Invarianten" von T gerade die Koeffizienten seines charakteristischen Polynoms sind:

$$\chi_T(\lambda) := \det(\lambda I - T) = I_1 + I_2\lambda + I_3\lambda^2 + \lambda^3.$$

Dessen Nullstelle sind die Eigenwerte von T. Da die Determinante einer Matrix invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, d. h. insbesondere gegenüber orthogonalen Transformationen, ist, sind dies auch das charakteristische Polynom bzw. seine Koeffizienten. Dies begründet die Bezeichnung „Invarianten" für die Größen I_1, I_2, I_3.

i) Als erstes wird gezeigt, dass $\{e_1, e_2, e_3\}$ auch Eigenvektoren von $F(T)$ sind. Dazu sei Q die orthogonale Transformation, welche einer 180^o-Drehung um die e_3-Achse entspricht. Dann gilt $QQ^T = I$ und $\{e_1, e_2, e_3\}$ bildet offenbar ein gemeinsames Eigensystem von Q und T . Dies impliziert, dass T und Q kommutieren und folglich gilt:

$$QT = TQ, \qquad QTQ^T = T.$$

Dies ergibt sich aus den Beziehungen $QTe_i = Q\lambda_i e_i = \lambda_i\tau_i e_i = \tau_i\lambda_i e_i = T\tau_i e_i = TQe_i$ mit den Eigenwerten $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ von Q unter Beachtung, dass $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine Basis bildet. Gemäß (2.2.14) gilt dann

$$F(T) = F(QTQ^T) = QF(T)Q^T$$

sowie

$$F(T)Q = QF(T).$$

Also kommutieren Q und $F(T)$ und haben folglich ebenfalls das gemeinsame System von Eigenvektoren $\{e_1, e_2, e_3\}$. Mit der aus diesen Eigenvektoren gebildeten (unitären) Matrix $W := [e_1, e_2, e_3]$ gilt dann

$$F(\mathrm{diag}(\lambda_i)) = F(WTW^{-1}) = WF(T)W^{-1} = \mathrm{diag}(\mu_i)\, .$$

Die Eigenwerte $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ von $F(T)$ sind offenbar allein durch $F(\cdot)$ bestimmte Funktionen der Eigenwerte $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ von T . Die Behauptung des Satzes ist damit auf den Fall reduziert, dass $F(D_\nu) = D_\mu$ eine Abbildung zwischen Diagonalmatrizen ist.

ii) Wir nehmen nun zunächst an, dass alle Eigenwerte λ_i von T *einfach* sind. Dann ist

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

und das lineare Gleichungssystem

$$\varphi_0 + \varphi_1\lambda_i + \varphi_2\lambda_i^2 = \mu_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

besitzt eindeutige Lösungen $\varphi_i = \varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Hieraus erschließen wir mit Hilfe der Orthonormalität des Eigensystems $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Darstellung

$$F(T) = \varphi_0 I + \varphi_1 T + \varphi_2 T^2.$$

Da die Eigenwerte λ_i gerade die Nullstellen des (kubischen) charakteristischen Polynoms von T sind, lassen sie sich explizit (Wurzelausdrücke) durch dessen Koeffizienten, d. h. die Invarianten I_i, ausdrücken. Damit ist die Behauptung für den Fall, dass die Eigenwerte von T paarweise verschieden sind, bewiesen.

iii) Im Fall mehrfacher Eigenwerte des Tensors T kann durch Störung seiner Elemente erreicht werden, dass alle Eigenwerte einfach sind. Dann gilt die behauptete Darstellung für den gestörten Tensor. Man kann zeigen (Übungsaufgabe), dass diese Darstellung gleichmäßig stetig von der Störung abhängt, so dass man durch Grenzübergang zum ungestörten Fall die Behauptung auch für den allgemeinen Fall möglicherweise mehrfacher Eigenwerte erhält. Q.E.D.

Bemerkung 2.1: Zur Illustration des Mechanismus, der die Darstellung (2.2.15) des allgemeinen Materialgesetzes bedingt, betrachten wir den (nicht unbedingt physikalisch motivierten) Ansatz $F(T) = T^4$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist die Matrix T Matrix-Nullstelle ihres eigenen charakteristischen Polynoms, d. h.: $\chi_T(T) = 0$. Im hier interessierenden Fall einer symmetrischen Matrix mit Eigenwerten $\{\lambda_i\}$ und zugehöriger Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von Eigenvektoren ergibt sich dies mit Hilfe der Linearfaktorzerlegung $\chi(\lambda) = \prod_{i=1}^3(\lambda - \lambda_i)$ durch

$$\chi_T(T)e_j = \prod_{i=1}^{3}(T - \lambda_i I)e_j = \prod_{i=1, i\neq j}^{3}(T - \lambda_i I)(T - \lambda_j I)e_j = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

was $\chi_T(T)x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und damit $\chi_T(T) = 0$ impliziert. Damit erhalten wir die Beziehung

$$F(T) = T^4 = -I_1 - I_2 T - I_3 T^2.$$

Durch rekursive Anwendung dieses Arguments ergibt sich die Darstellung (2.2.15) dann auch für jedes beliebige Polynom $F(T) = \sum_{k=0}^m c_k T^k$ und weiter für jede gleichmäßig konvergente Potenzreihe $F(T) = \sum_{k=0}^\infty c_k (T - T_0)^k$. Das im Beweis von Satz 2.2 verwendete Argument setzt aber für die Abbildung $F(\cdot) : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ nur gleichmäßige Stetigkeit (auf kompakten Mengen) voraus, lässt also insbesondere auch Materialgesetze mit „Knicken“ zu.

Wird das Materialgesetz (2.2.15) für ein Stokessches Fluid zusätzlich als „linear“ angenommen, so muss es notwendig die folgende Form haben:

$$\sigma = -pI + F(\epsilon) = -pI + 2\mu\epsilon + \lambda\,\text{spur}(\epsilon)I, \qquad (2.2.16)$$

mit zwei *Materialkonstanten* μ („Scherviskosität") und λ („Volumenviskosität"). Fluide, welche einem solchen *linearen* Materialgesetz genügen, nennt man „Newtonsche[3] Fluide". Die beiden Viskositätsparameter μ und λ hängen im allgemeinen von der Dichte sowie der Temperatur ab.

Wenn die durch Wärmegefälle hervorgerufenen Spannungen klein gegenüber den mechanischen Spannungen sind, kann man das Temperaturfeld θ als durch nicht-mechanische Bedingungen gegeben und dementsprechend als konstant annehmen. Die Viskositätsparameter μ und λ können dann als unabhängig von θ betrachtet werden (sog. „isotherme" Strömung). In einer isothermen Strömung sind μ und λ in Ort und Zeit konstant, so dass

$$\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \nabla \cdot \tau, \quad \tau := \mu\{\nabla v + \nabla v^T\} + \lambda \nabla \cdot vI.$$

Aus der kinetischen Theorie der Gase erhält man im Fall ein-atomiger Gase die Beziehung

$$3\lambda + 2\mu = 0, \quad \mu \geq 0. \tag{2.2.17}$$

Im allgemeinen Fall mehr-atomiger Gase gilt nur $3\lambda + 2\mu \geq 0$; trotzdem wird in der Regel die Beziehung (2.2.17) auch im allgemeien Fall verwendet. Damit ergibt sich

$$\tau = \mu\{\nabla v + \nabla v^T\} - \tfrac{2}{3}\mu \nabla \cdot vI. \tag{2.2.18}$$

Die Erhaltungsgleichung für den Impuls erhält dann wegen

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \tau)_j &= \partial_i \tau_{ij} = \partial_i \big\{\mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \tfrac{2}{3}\mu \, \nabla \cdot v \, \delta_{ij}\big\} \\ &= \mu \Delta v_j + \mu \partial_j \nabla \cdot v - \tfrac{2}{3}\mu \, \partial_j \mathrm{div} v = \mu \Delta v_j + \tfrac{1}{3}\mu \, \partial_j \nabla \cdot v\end{aligned}$$

die allgemeine Form

$$\partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) - \mu \Delta v - \tfrac{1}{3}\mu \nabla \nabla \cdot v + \nabla p = \rho f.$$

Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0$ ergibt sich mit

$$\partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = \rho \partial_t v + v \partial_t \rho + v \, \nabla \cdot (\rho v) + \rho v \cdot \nabla v$$

die Impulsgleichung für ein allgemeines „Newtonsches Fluid":

$$\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \mu \Delta v - \tfrac{1}{3}\mu \nabla \nabla \cdot v + \nabla p = \rho f. \tag{2.2.19}$$

2.2.2 Thermodynamische Aspekte

Da im obigen Materialgesetz die neue Zustandsgröße „Druck" p eingeführt wurde, benötigt man zur endgültigen „Schließung" des Systems noch weitere Gleichungen. Dies sind phänomenologisch gewonnene, algebraische Beziehungen zwischen Dichte, Druck, Temperatur und innerer Energie:

$$p = p(\rho, \theta), \quad e = e(\rho, \theta). \tag{2.2.20}$$

[3] Isaac Newton (1643–1727): Englischer Physiker und Mathematiker; Professor an der Universität Cambridge; entwickelte u. a. die Grundlagen der klassischen Mechanik und der Differentialrechnung.

Die thermodynamischen Grundgesetze implizieren Bedingungen für die Gestalt dieser Relationen.

Einem abgeschlossenen, wärme-isolierten (ruhenden) Massevolumen im Gleichgewichtszustand werde eine Wärmemenge Q und eine mechanische Arbeit A zugeführt, und es stelle sich wieder ein Gleichgewichtszustand ein.

1) Der „1. Hauptsatz der Thermodynamik“ besagt, dass Wärme und mechanische Arbeit energetisch gleichwertig sind und nicht „verloren gehen“ können. Der Zuwachs an innerer Energie muss also gleich der Summe aus eingebrachter Wärme und Arbeit sein:

$$de = Q + A.$$

Die einfachste Form der erbrachten Arbeit ist die Kompression oder Expansion des Massevolumens, wobei $dA = -pdV$. Der Zuwachs an innerer Energiedichte de infolge einer Wärmezufuhr δq und Kompression $d(\rho^{-1})$ eines Volumens mit Masse $\rho(V) = 1$ (d. h. $V = \rho^{-1}$) ist daher

$$de = \delta q - pd(\rho^{-1}) \tag{2.2.21}$$

ii) Der „2. Hauptsatz der Thermodynamik“ besagt nun, dass die Beziehung (2.2.21) das totale Differential einer neuen Zustandsgröße, der sog. „Entropie“ s , definiert in der Form

$$\theta ds = de + pd(\rho^{-1}). \tag{2.2.22}$$

Ferner kann diese Entropie in einem energetisch abgeschlossenen System nicht abnehmen; bei jedem irreversiblen Prozess nimmt sie zu.

Bei einem „idealen“ Gas wird eine lineare Proportionalität der Form

$$p = R\rho\theta, \tag{2.2.23}$$

postuliert mit der sog „Gaskonstante“ $R > 0$. Bei Gaspartikeln mit Molekulargewicht m ist $R = R_{\text{abs}}/m$ mit der sog. „absoluten“ Gaskonstante R_{abs} .

Führt man einem materiellen Volumen (quasi-statisch) eine Wärmemenge δq zu und hält dabei das Volumen fest, so steigt die Temperatur proportional um $d\theta = c_v^{-1}\delta q$. Die so definierte Konstante $c_v > 0$, die sog. „spezifische Wärme“ (bei konstantem Volumen), ist unabhängig von den anderen Zustandsgrößen. Abweichungen hiervon treten erst bei extrem hohen Temperaturen und Drücken auf. Da mit dem Volumen auch die Dichte konstant bleibt (d. h.: $d(\rho^{-1}) = 0$), gilt im Hinblick auf (2.2.21)

$$e = c_v\theta + konst.$$

Erfolgt die Wärmezufuhr bei konstantem Druck, so gilt $dq = c_p d\theta$ mit der ebenfalls konstanten sog. „spezifischen Wärme“ $c_p > 0$ (bei konstantem Druck). Hierbei dehnt sich das Gas aus und leistet Arbeit; wegen (2.2.23) gilt dann

$$d(\rho^{-1}) = \frac{R}{p}d\theta.$$

Dies impliziert im Hinblick auf (2.2.21), dass

$$de = c_v d\theta = c_p\theta - R d\theta,$$

woraus notwendig $R = c_p - c_v := c_v(\gamma-1) > 0$ mit $\gamma := c_p/c_v$ folgt. Für zwei-atomige Gase (z. B. Luft) ist $\gamma = 1,4$.

Lässt man das materielle Volumen (quasi-statisch) expandieren, ohne den Wärmeinhalt zu ändern, und entzieht man ihm die Arbeit $pd(\rho^{-1})$, so wird

$$dq = 0 = c_v d\theta + R\theta\rho\, d(\rho^{-1}),$$

bzw. bei Beachtung von $c_v^{-1}R = \gamma - 1$,

$$0 = \frac{d\theta}{\rho^{\gamma-1}} + (\gamma-1)\theta\frac{d(\rho^{-1})}{\rho^{\gamma-2}} = d\Big(\frac{\theta}{\rho^{\gamma-1}}\Big).$$

Folglich ist

$$\frac{\theta}{\rho^{\gamma-1}} \equiv konst, \quad \frac{p}{\rho^{\gamma}} \equiv konst., \quad \frac{\theta}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} \equiv konst.$$

Die „Konstante“ in diesen Beziehungen hängt jeweils von den anderen, nicht vorkommenden Zustandsgrößen ab. Für ein reibungsloses, nicht-wärmeleitendes Gas bleibt die Entropie entlang jeder Stromlinie konstant, und es gilt (z. B. für Luft):

$$p = \alpha\rho^{\gamma} \tag{2.2.24}$$

mit einer temperatur-abhängigen Konstante $\alpha > 0$ und $\gamma = c_p/c_v = 1,4$.

Im allgemeinen entsteht zwischen den Masseteilchen in Folge der Wärmeleitfähigkeit ein Wärmestrom, der in folgender Form angesetzt wird:

$$q = -\kappa\nabla\theta,$$

mit einer skalaren Funktion $\kappa = \kappa(\rho, \theta, |\nabla\theta|)$, dem sog. „Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten“. Ferner gilt wegen $\rho e = c_v\rho\theta = c_p\rho\theta - R\rho\theta$ auch

$$\rho e = c_p\rho\theta - p. \tag{2.2.25}$$

Unter Beachtung von

$$\tau : \nabla v = (\mu\{\nabla v + \nabla v^T\} - \tfrac{2}{3}\mu\,\nabla\cdot vI) : \nabla v = \tfrac{1}{2}\mu(\nabla v + \nabla v^T)^2 - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)^2$$

führt dies auf die Energiegleichung in „konservativer“ Form

$$\begin{aligned}\partial_t(c_p\rho\theta - p) + \nabla\cdot((c_p\rho\theta - p)v) - \nabla\cdot(\kappa\nabla\theta) &= \rho h \\ &- p\,\nabla\cdot v + \tfrac{1}{2}\mu(\nabla v + \nabla v^T)^2 - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)^2.\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Schallgeschwindigkeit: Zur Charakterisierung einer Gasströmung ist der Begriff der „Schallgeschwindigkeit“ wichtig. Damit wird die folgende Größe bezeichnet:

$$c(p) := \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Die Beobachtung zeigt, dass ein Gas durch eine Druckerhöhung dichter wird, so dass stets $c > 0$ ist. Die Größe

$$\mathrm{Ma} := \frac{|v|}{c(p)}$$

wird (lokale) „Mach[4]-Zahl“ genannt. Sie erweist sich als entscheidend für den Charakter des Systems der Grundgleichungen (elliptisch - parabolisch - hyperbolisch). Wir werden diese Zusammenhänge im nächsten Abschnitt noch genauer diskutieren.

2.2.3 Erhaltungsgleichungen in nicht-konservativer Form

Neben den Erhaltungsgleichungen werden Anfangs- und Randbedingungen gestellt, die durch die spezifische physikalische Gegebenheit der betrachteten Situation bestimmt sind.

Anfangsbedingungen:

$$\rho_{|t=0} = \rho^0, \quad v_{|t=0} = v^0, \quad \theta_{|t=0} = \theta^0.$$

Randbedingungen:

$$v_{|\Gamma_D^v} = v^D, \quad (\mu n \cdot \tau(v) - np)_{|\Gamma_N^v} = p^N, \qquad \theta_{|\Gamma_D^\theta} = \theta^D, \quad (\kappa \partial_n \theta + \alpha\theta)_{|\Gamma_N^\theta} = \theta^N.$$

Für Druck und Dichte dürfen in der Regel (Ausnahmefall: „freie“ Ausströmrandbedingung) keine Randbedingungen gestellt werden.

Rand- und Anfangsbedingungen sind für die primitiven Variablen $\{v, \theta\}$ gegeben. Ferner wird im allg. der Spannungstensor σ als Funktion von v, θ ausgedrückt. Daher bietet es sich an, die Zustandsgleichungen direkt für die „primitiven“ Variablen $\{\rho, v, \theta\}$ zu schreiben. Dies führt auf die folgenden Grundgleichungen für allgemeine „Newtonsche Fluide“ in *nichtkonservativer* Form:

1') Kontinuitätsgleichung für Dichte ρ *:*

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0\,; \tag{2.2.27}$$

2') Momentengleichung für Geschwindigkeit v *:*

$$\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \nabla \cdot (\mu\{\nabla v + \nabla v^T\}) + \tfrac{2}{3}\nabla(\mu\, \nabla \cdot v) + \nabla p = \rho f\,; \tag{2.2.28}$$

[4]Ernst (Waldfried Josef Wenzel) Mach (1838–1916): Österreichischer Physiker, Philosoph und Psychologe; Studium der Mathematik und Naturwissenschaften in Wien, 1864 Prof. für Mathematik in Graz, 1867–1895 Prof. für Physik in Prag, dort auch Rektor, 1895 Prof. für Philosophie in Wien; Vordenker der Relativittstheorie, grundlegende experimentelle Beiträge zur Gasdynamik (nach ihm benannte „Mach-Zahl“), Experimente u. a. auch zur Sinnesphysiologie (Gleichgewichtssinn und Sinnestäuschungen); Arbeiten zur Wissenschaftphilosophie und Erkenntnistheorie.

3') Energiegleichung für (absolute) Temperatur θ :

$$\rho c_p\partial_t\theta + \rho c_p v\cdot\nabla\theta - \nabla\cdot(\kappa\nabla\theta) = \rho h + \partial_t p + v\cdot\nabla p + \tfrac{1}{2}\mu(\nabla v + \nabla v^T)^2 - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)^2. \tag{2.2.29}$$

Im Fall, dass Wärmeleitung die einzige nicht-mechanische Energieübertragung ist, kann man (2.2.29) weiter spezialisiert. Vernachlässigung der entsprechenden Terme in der Energiebilanz ergibt die Energiegleichung in reduzierter Form:

$$\rho c_p\partial_t\theta + \rho c_p v\cdot\nabla\theta - \nabla\cdot(\kappa\nabla\theta) = \rho h\,. \tag{2.2.30}$$

Für ein ruhendes Kontinuum (d. h.: $v\equiv 0$) ergibt sich so die sog. „Wärmeleitungsgleichung"

$$\rho c_p\partial_t\theta - \nabla\cdot(\kappa\nabla\theta) = \rho h\,. \tag{2.2.31}$$

2.3 Gasdynamische Gleichungen (Euler-Gleichungen)

In Gasströmungen können starke Dichteänderungen durch mechanische „Kompression" von Gasteilchen auftreten, bis hin zu „fast" Unstetigkeiten (sog. „Schocks" oder „Verdichtungsstöße"). Temperaturänderungen spielen hierbei meist eine untergeordnete Rolle. In diesem Fall können viskose Effekte durch innere Reibung gegenüber den Trägheitskräften vernachlässigt werden. Für das Newtonsche Fluid reduziert sich dann das lineare Materialgesetz (2.2.16) auf

$$\sigma = -pI.$$

Da die korrekte Erfassung von Schocks (Position und Stärke) sehr empfindlich von der Einhaltung der globalen Balancegleichungen abhängt empfielt sich die Verwendung der *konservativen* Variablen $\{\rho,\rho v,\rho E\}$.

Die Kontinuitäts- und Impulsgleichung reduzieren sich im reibungsfreien Fall zu

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho v) = 0\,, \tag{2.3.32}$$
$$\partial_t(\rho v) + \nabla\cdot(\rho v\otimes v) + \nabla p = \rho f\,. \tag{2.3.33}$$

Wir betrachten hier wieder den Fall eines „idealen" Gases, für welches gilt:

$$p = R\theta\rho, \quad R = c_p - c_v, \quad \gamma := \frac{c_p}{c_v} > 1, \quad e = c_v\theta,$$

mit der Gaskonstante R, der „spezifischen Wärme" c_p (bei konstantem Druck) und der „spezifischen Wärme" c_v (bei konstantem Volumen). Kombination mit der Beziehung $\rho E := \rho e + \frac{1}{2}\rho|v|^2$ ergibt dann

$$p = (\gamma-1)(\rho E - \tfrac{1}{2}\rho|v|^2). \tag{2.3.34}$$

Bei reibungslosen, „schnellen" Gasströmungen kann der Beitrag der mechanischen Wärmeerzeugung in der Energiegleichung nicht vernachlässigt werden. Dafür spielt die diffusive Wärmeausbreitung keine Rolle. Die Energiegleichung nimmt dann wegen

$$\nabla \cdot (\sigma \cdot v) = -\nabla \cdot (pv)$$

die Form an:

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E v + pv) = \rho f \cdot v + \rho h, \tag{2.3.35}$$

mit der totalen Energiedichte $E := e + \frac{1}{2}|v|^2$.

Im Fall fehlender äußerer Volumenkräfte und Wärmequellen, $f \equiv 0,\ h \equiv 0$, lässt sich dieses System in Form einer (hyperbolischen) „Erhaltungsgleichung" für den Vektor der konservativen Variablen $u := (\rho, \rho v, \rho E)^T$, schreiben:

$$\partial_t u + \nabla \cdot F(u) = 0, \tag{2.3.36}$$

mit der „Fluss funktion"

$$F(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v \otimes v + pI \\ \rho E v + pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i (v_j)_{j=1,2,3} + p(\delta_{ij})_{j=1,2,3}) \\ \rho E v_i + p v_i \end{pmatrix}_{i=1,2,3}.$$

Dies sind die sog. „Eulerschen[5] Gleichungen" in „konservativer" Form. Mit Hilfe der Ableitungen

$$A_i(u) := \nabla_u F_i(u) \quad (i = 1, 2, 3)$$

erhalten wir die dazu formal äquivalente nicht-konservative Form der Eulerschen Gleichungen als ein „quasi-lineares" System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(u) \partial_i u = 0. \tag{2.3.37}$$

Zur Bestimmung des Typs dieses Systems haben wir die Projektion den Koeffiziententensors $(A_i)_{i=1}^3$ auf eine beliebige Richtung n zu betrachten:

$$B(u, n) := \sum_{i=1}^{3} n_i A_i(u).$$

mit der Matrix

$$B(u, n) = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ v \otimes v & \rho v & 0 \\ E v & \rho E + p & v \end{pmatrix}.$$

[5]Leonhard Euler (1707–1783), geb. in Basel: universeller Mathematiker und Physiker; bedeutendster und produktivster Mathematiker seiner Zeit; wirkte in Berlin und St. Petersburg; Arbeiten zu allen mathemischen Gebieten seiner Zeit.

Die Eigenwerte der Matrix $B(u,n)$ sind

$$\lambda_1 = n \cdot v - c, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = n \cdot v, \qquad \lambda_5 = n \cdot v + c,$$

wobei

$$c^2 := \frac{dp}{d\rho} = R\theta = \frac{p}{\rho}$$

die Schallgeschwindigkeit definiert. Den Begriff „Schallgeschwindigkeit“ wollen wir im folgenden etwas detaillierter diskutieren.

Schallgeschwindigkeit und Mach-Zahl:
In einem „inkompressiblen“ Fluid beeinflußen lokale Störungen unmittelbar das ganze Strömungsbebiet. Dagegen könnn sich in einem „kompressiblen“ Gas Druck- und Dichtestörungen nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Wir wollen den Mechanismus dieser Störungsausbreitung untersuchen. Dazu betrachte wir Druck- und Dichteänderungen, die klein gegenüber einem Ruhedruck p_0 und einer Ruhedichte ρ_0 sind:

$$|p - p_0| \ll |p_0|, \qquad |\rho - \rho_0| \ll |\rho_0|.$$

In diesem Fall bleiben die Geschwindigkeit und ihr Gradient klein, und man erhält durch Linearisierung der Zustandsgleichungen:

$$0 = \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) \approx \partial_t \rho + \rho_0 \nabla \cdot v, \tag{2.3.38}$$

$$0 = \rho \partial_t v + \nabla p \approx \rho_0 \partial_t v + \nabla p. \tag{2.3.39}$$

Unter der Annahme einer glatten Beziehung $p = p(\rho)$ (bei festgehaltener Temperatur) gilt

$$\partial_t p = \frac{dp}{d\rho}\, \partial_t \rho = c^2 \partial_t \rho.$$

Im Fall „isothermer“ Strömungen ($\theta \equiv konst.$) verwendet man z. B. oft das „barotrope“ Gasgesetz

$$p = p(\rho) = \alpha \rho^\gamma \tag{2.3.40}$$

mit einer Konstante $\alpha > 0$, die meist stark von der (konstanten) Temperatur abhängt, und einem materialabhängigen Exponenten $\gamma > 1$

Für kleine Störungen des Ruhezustands kann $c(p) = c(p_0) =: c$ als konstant angesehen werden. Elimination von v aus (2.3.38) und (2.3.39) ergibt dann

$$\partial_t^2 p = c^2 \partial_t^2 \rho = -c^2 \rho_0 \nabla \cdot \partial_t v = -c^2 \nabla \cdot (\rho_0 \partial_t v) = c^2 \nabla \cdot \nabla p = c^2 \Delta p = c^4 \Delta \rho,$$

und folglich die Beziehungen

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0, \qquad \partial_t^2 \rho - c^2 \Delta \rho = 0,$$

Druck und Dichte genügen also einer Wellengleichung jeweils mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c = c(p)$. Diese „Schallgeschwindigkeit“ beschreibt also die Geschwindigkeit, mit der sich Störungen im Druck und der Dichte ausbreiten.

Wir wollen die Diskussion der „isothermen“ Situation noch etwas weiter treiben. Aus der linearisierten Gleichung (2.3.39) erhalten wir $\partial_t \nabla \times v = 0$ und folglich näherungsweise $\nabla \times v = 0$. Im Hinblick auf diese Beobachtung machen wir für das Folgende die weiteren vereinfachenden Annahmen:

– stationäre Strömung: $\partial_t p \equiv 0 \equiv \partial_t \rho$;

– rotationsfreie Strömung: $\nabla \times v = 0$;

– Existenz eines „Volumenkraftpotentials“: $f = -\nabla V$;

– barotropes Materialverhalten: $p = \alpha \rho^\gamma$.

Mit Hilfe der bereits oben verwendeten Identität

$$v \cdot \nabla v = \tfrac{1}{2} \nabla |v|^2 - v \times (\nabla \times v)$$

und der lokalen Schallgeschwindigkeit $c = c(p)$ erhalten wir die Zustandsgleichungen

$$\rho \nabla \cdot v + v \cdot \nabla \rho = 0\,, \tag{2.3.41}$$

$$\tfrac{1}{2} \nabla |v|^2 + c^2 \rho^{-1} \nabla \rho + \nabla V = 0\,. \tag{2.3.42}$$

Durch Multiplikation von (2.3.42) mit v und Einsetzen von (2.3.41) kann die Massedichte ρ eliminiert werden und man erhält die folgende sog. „Gasdynamische Gleichung“:

$$\tfrac{1}{2} v \cdot \nabla |v|^2 - c^2 \nabla \cdot v + v \cdot \nabla V = 0\,, \tag{2.3.43}$$

bzw. nach etwas Umformung in komponentenweiser Form

$$\sum_{i=1}^d (v_i^2 - c^2) \partial_i v_i + \sum_{i,j=1 (i \neq j)}^d v_i v_j \partial_i v_j + \sum_{i=1}^d v_i \partial_i V = 0\,.$$

Die Rotationsfreiheit $\nabla \times v = 0$ impliziert im einfachzusammenhängenden Strömungsgebiet die Existenz eines (skalaren) Geschwindigkeitspotentials Φ, so dass

$$v = \nabla \Phi\,.$$

Damit lässt sich die Gasdynamische Gleichung als eine (skalare) Differentialgleichung zweiter Ordnung schreiben:

$$\sum_{i=1}^d \big((\partial_i \Phi)^2 - c^2 \big) \partial_i^2 \Phi + \sum_{i,j=1 (i \neq j)}^d \partial_i \Phi \partial_j \Phi \partial_{ij}^2 \Phi + \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi \partial_i V = 0\,. \tag{2.3.44}$$

Dabei hängt die lokale Schallgeschwindigkeit c vom momentanen Strömungszustand ab: $c = c(v, V)$. Diese Abhängigkeit muss noch bestimmt werden, um das System zu schließen. Aufgrund der Annahme eines barotropen Gases gilt

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \nabla p = \rho^{-1} \nabla (\alpha \rho^\gamma) = \rho^{-1} \alpha \gamma \rho^{\gamma - 1} \nabla \rho &= \nabla \Big(\frac{\alpha \gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} \Big) \\ = \nabla \Big(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{d\rho} \Big) &= \nabla \Big(\frac{c^2}{\gamma - 1} \Big)\,. \end{aligned}$$

Damit erhält die sog. „Bernoulli[6] -Gleichung“ die Form

$$\nabla\big(\tfrac{1}{2}|v|^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} + V\big) = 0\,,$$

bzw.

$$\tfrac{1}{2}|v|^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} + V \equiv konst.$$

im gesamten Strömungsgebiet. In einem gewissen Anströmbereich können im allgemeinen v, c und V als bekannte Größen v_0, c_0 und V_0 angesehen werden. Damit wird

$$\tfrac{1}{2}|v|^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} + V = \tfrac{1}{2}|v_0|^2 + \frac{c_0^2}{\gamma-1} + V_0,$$

bzw. nach Auflösung dieser Gleichung nach c^2 :

$$c^2 = c_0^2 + (\gamma-1)\,\big(\tfrac{1}{2}(|v_0|^2 - |v|^2) + V_0 - V\big)\ .$$

Im allgemeinen wird das Kraftpotential V im Anströmbereich zu Null normiert: $V_0 = 0$.

Aus (2.3.44) ist der Übergang der allgemeinen Gasdynamische Gleichung des idealen (kompressiblen) Gases zur Potentialgleichung (2.3.45) der idealen (inkompressiblen) Flüssigkeit leicht zu ersehen. Die Annahme der Inkompressibilität ist gleichbedeutend mit der Annahme einer „unendlich großen“ Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen der Dichte (Schallgeschwindigkeit), so dass hier stets

$$|v| \ll c$$

vernachlässigt werden kann. Es ergibt sich so die reine „Potentialgleichung“

$$\Delta\Phi = 0\,. \tag{2.3.45}$$

Wir bemerken, dass in Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeit in der Regel deutlich größer als die Strömungsgeschwindigkeit ist; erstere ist z. B. in Wasser 1400 m/s. In Gasen kann die Strömungsgeschwindigkeit durchaus größer als die Schallgeschwindigkeit sein (sog. „Überschallströmungen“). Allerdings kann die „Inkompressibilität“ auch in Gasen oft mit recht guter Genauigkeit angenommen werden; z. B. wird die Luftströmung um Automobile oder um Flugzeuge in der Start- und Landephase in der Regel als „inkompressibel“ behandelt.

Die mathematische Analyse der Gasdynamischen Gleichung (2.3.44) erweist sich als sehr schwierig, da sie nicht immer von einheitlichem Typ ist. Wir wollen diese Frage

[6] Daniel Bernoulli (1700–1782): Schweizer Mathematiker und Physiker aus der Gelehrtenfamilie Bernoulli; Studium der Medizin in Basel, Heidelberg, Straßburg und wieder in Basel; 1725 Ruf an die Russische Akademie der Wissenschaften in Sankt Petersburg, ab 1733 wieder in Basel zunächst als Prof. für Anatomie und Botanik und später für Physik; Hauptwerk “Hydrodynamica“ über die Grundlagen der Hydrodynamik; weitere Arbeiten über spezielle gewöhnlichen Differentialgleichungen (Riccati-Gleichung) und die Gammafunktion, die nach ihm benannte „Bernoulli-Gleichung“ ist von fundamenrtaler Bedeutung in der Strömungsmechanik.

anhand des zweidimensionalen Modells diskutieren. Dazu setzen wir für das Folgende $x := x_1,\ y := x_2,\ u := v_1,\ v := v_2,\ u_x := \partial_x u$, u.s.w.. Mit dem Geschwindigkeitspotential Φ ($\Phi_x = u,\ \Phi_y = v$) erhält die Gleichung (2.3.44) dann die Form

$$(u^2 - c^2)\Phi_{xx} + 2uv\Phi_{xy} + (v^2 - c^2)\Phi_{yy} + uV_x + vV_y = 0\,. \tag{2.3.46}$$

Der Typ dieser partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung bestimmt sich aus den Eigenwerten der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} u^2 - c^2 & uv \\ uv & v^2 - c^2 \end{pmatrix}.$$

Die für den Typ der Gasdynamischen Gleichung charakteristische Größe ist die sog. „Mach-Zahl“

$$\mathrm{Ma} := \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c}\,.$$

Im vorliegenden Fall sind die folgenden drei Fälle möglich:

- Beide Eigenwerte von A sind positiv oder negativ, d. h.: Die Gleichung ist vom „elliptischen“ Typ. Dies ist der Fall im „Unterschallbereich“: $u^2 + v^2 < c^2$ („subsonische Strömung“, $\mathrm{Ma} < 1$).

- Ein Eigenwert ist positiv und der andere negativ, d. h.: Die Gleichung ist vom „hyperbolischen“ Typ. Dies ist der Fall im „Überschallbereich“: $u^2 + v^2 > c^2$ („supersonische Strömung“, $\mathrm{Ma} > 1$).

- Ein Eigenwert ist gleich Null, d. h.: Die Gleichung ist vom „parabolischen“ Typ. Dies ist der Fall für $u^2 + v^2 = c^2$ („transsonische Strömung“, $\mathrm{Ma} \sim 1$).

Dabei ist zu beachten, dass die Schallgeschwindigkeit c vom jeweiligen Strömungszustand $\{u, v\}$ abhängt. Im Fall schallnaher Anströmung kann der Typ der Differentialgleichung auch innerhalb des Strömungsgebiets wechseln. Ein Beispiel ist die Umströmung eines Tragflügels (in zweidimensionaler Idealiserung); siehe Abbildung 2.1. Oberhalb des Flügels entsteht eine Überschallblase. Dieses Phänomen stellt eine der fundamentalen Schwierigkeiten in der Theorie und Numerik der Gasströmungen dar.

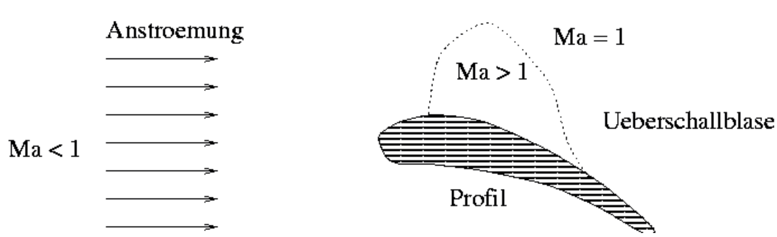

Abbildung 2.1: Strömung um einen Tragflügelquerschnitt mit Überschallblase

Charakteristiken hyperbolischer Gleichungen

Wir wollen zum Abschluss noch einige Ergebnisse zu Lösungen von hyperbolischen Differentialgleichungen rekapitulieren. Die Gasdynamische Gleichung ist ein Spezialfall der allgemeinen skalaren Differentialgleichung 2. Ordnung

$$Lu = a_{20}\partial_x^2 u + 2a_{11}\partial_x\partial_y u + a_{02}\partial_y^2 u + a_{10}\partial_x u + a_{01}\partial_y u + a_{00}u = f \tag{2.3.47}$$

mit (konstanten) Koeffizienten a_{ij}. Diese Gleichung werde auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet. Die quadratische Gleichung

$$a_{20}y_\tau^2 - 2a_{11}x_\tau y_\tau + a_{02}x_\tau^2 = 0 \tag{2.3.48}$$

bestimmt gewisse Richtungen $x_\tau/y_\tau = dy/dx$ bzw. $y_\tau/x_\tau = dx/dy$ von Kurven (mit Graph $y = y(x)$ oder $x = x(y)$) durch den Punkt (x_0, y_0). Zu deren Bestimmung nehmen wir o.B.d.A. an dass $a_{20} \neq 0$ und $x_\tau \neq 0$. Dann besitzt die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2a_{11}}{a_{20}}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a_{02}}{a_{20}} = 0$$

die Lösungen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{+/-} = \frac{a_{11}}{a_{20}} \pm \frac{1}{a_{20}}\sqrt{a_{11}^2 - a_{20}a_{02}}.$$

Diese entsprechen Steigungen von Kurven durch einen Punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma$, entlang welcher die höheren Ableitungen von u sich nicht aus Vorgaben entlang Γ bestimmen lassen. Entlang dieser „charakteristischen Kurven“ können Unstetigkeiten in der Lösung auftreten. Es ist also sehr wichtig, die Existenz von „Charakteristiken“ und deren Gestalt für den zu betrachtenden Differentialoperator vor Ansatz eines numerischen Verfahrens genau zu bestimmen. Die Existenz von Charakteristiken hängt allein von den Koeffizienten der höchsten Ableitungen des Operators L, d.h. seinem „Hauptteil“ $a_{22}\partial_x^2 u + 2a_{11}\partial_x\partial_y u + a_{02}\partial_y^2 u$, ab. Die Gleichung

$$q(\xi, \eta) := a_{20}\xi^2 + 2a_{11}\xi\eta + a_{02}\eta^2 = 0$$

beschreibt Kegelschnitte in der (ξ, η)-Ebene:

$$a_{11}^2 - a_{20}a_{02} \left\{ \begin{array}{lc} < 0 : & \text{Ellipse} \\ = 0 : & \text{Parabel} \\ > 0 : & \text{Hyperbel} \end{array} \right\}.$$

Von dieser rein formalen Charakterisierung stammen die Bezeichnungen für die drei Typen von partiellen Differentialgleichungen. Die Klassifikation eines Differentialoperators als „elliptisch“, „parabolisch“ oder „hyperbolisch“ wird für jeden einzelnen Punkt (x_0, y_0) separat vorgenommen. Im Falle variabler Koeffizienten $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$ oder im nichtlinearen Fall $a_{ij}(u(x, y))$ kann der Typ einer Gleichung also im Lösungsgebiet wechseln. Dies ist bei der Gasdynamischen Gleichung gerade der Fall. Für

$$u^2v^2 - (u^2 - c^2)(v^2 - c^2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + v^2 > c^2$$

ist hier $a_{11}^2 - a_{20}a_{02} > 0$, d. h.: Es existieren zwei charakteristische Richtungen im Punkt (x_0, y_0) mit den Steigungen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = m_{\pm} = \frac{a_{11}}{a_{20}} \pm \frac{\sqrt{a_{11}^2 - a_{20}a_{02}}}{a_{20}} = \frac{uv}{v^2 - c^2} \pm \frac{\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{v^2 - c^2}\,.$$

Da die Richtungen $m_{\pm}$ in jedem Punkt (x_0, y_0) von der aktuellen Lösung $\{u, v\}$ abhängen, tun dies auch die Charakteristiken. Lediglich im Fall einer linearen Differentialgleichung, wie z. B. bei dem System der Wellengleichung

$$\partial_x u - \partial_y v = 0, \quad \partial_y u - \partial_x v = 0\,, \tag{2.3.49}$$

bzw. $\partial_x^2 \Phi - \partial_y^2 \Phi = 0$ für $u = \partial_x \Phi$, $v = \partial_y \Phi$, sind die Charakteristiken, d.h. deren Steigungen $m_{\pm} = \pm 1$, in jedem Punkt des Lösungsgebietes a priori bestimmt.