6 Differentiell-algebraische Gleichungen (DAE)

Wir haben bisher ausschließlich sog. „explizite“ AWA betrachtet:

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0. \tag{6.0.1}$$

In der Praxis treten aber häufig auch *implizit* gestellte Aufgaben auf. Deren allgemeine Form ist

$$F(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0, \tag{6.0.2}$$

mit einer Vektorfunktion $F(t, x, \eta) : D \subset \mathbb{R}^{1+d+d} \to \mathbb{R}^d$. Unter der Annahme, dass die Ableitungsmatrix $F'_\eta(t, u, u')$ entlang einer Lösung (Existenz vorausgesetzt) regulär ist, kann (zumindest prinzipiell) das System lokal nach $u'(t)$ aufgelöst werden, und man erhält in diesem Fall wieder eine explizite AWA der Form (6.0.1). Ein Spezialfall ist die sog. „linear implizite“ Gleichung

$$M(t, u)u' = f(t, u), \tag{6.0.3}$$

mit einer Matrix $M(t, x) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d :\to \mathbb{R}^{d\times d}$. Für reguläres M ist dies äquivalent zur „normalen“ Gleichung $u' = M(t, u)^{-1} f(t, u)$.

Im Folgenden interessiert uns nun der Fall, dass $F'_\eta(t, u, u')$ bzw. $M(t, u)$ *nicht* regulär ist. Die linear implizite Gleichung zerfällt dann häufig in einen „differentiellen“ und einen „algebraischen“ Teil gemäß:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & 0_{22} \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} M_{11}u_1' &= f_1(t, u_1, u_2) \\ 0 &= f_2(t, u_1, u_2) \end{aligned} \quad .$$

In diesem Fall spricht man von einem „differentiell-algebraischen System“ (engl. „DAE“), bei dem es für die Ableitungen gewisser Komponenten von $u(t)$ keine Bestimmungsgleichungen gibt.

Beispiel 6.1: Als Beispiel betrachten wir die lineare AWA (siehe auch Kapitel 3.1.1):

$$u'(t) = Au(t) + b\,, \quad u(0) = u_0,$$

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_i = -2\,, \lambda_{2,3} = -40 \pm 40i$, d. h.: Die lineare AWA ist *strikt monoton*. Nach Satz 1.7 ist seine eindeutige Lösung dann exponentiell stabil. Da die AWA auch *autonom ist*, folgt weiter aus Satz 1.8, dass diese Lösung exponentiell gegen die Lösung u_∞ der algebraischen Gleichung

$$Au_\infty = -b$$

konvergiert. Die Lösung $u^0(t)$ der homogenen Gleichung $u'(t) = Au(t)$ zu denselben Anfangsbedingungen $u^0(0) = u_0$ ist

$$\begin{aligned} u_1^0(t) &= \tfrac{1}{2}\big\{e^{-2t} + e^{-40t}\,[\cos 40t + \sin 40t]\big\} \\ u_2^0(t) &= \tfrac{1}{2}\big\{e^{-2t} - e^{-40t}\,[\cos 40t + \sin 40t]\big\} \\ u_3^0(t) &= -e^{-40t}\,[\cos 40t - \sin 40t]\,. \end{aligned}$$

Sie hat die in der Grafik 6.1 dargestellte Form.

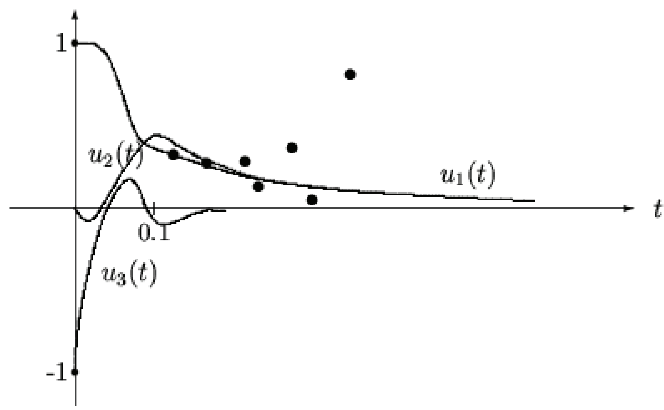

Abbildung 6.1: Komponenten der Lösung des homogenen Systems.

Die Funktion $\tilde u(t) := u^0(t) + u_\infty$ ist dann Lösung der AWA

$$\tilde u'(t) = u^{0\prime}(t) = Au^0(t) + Au_\infty - Au_\infty = A\tilde u(t) + b, \quad \tilde u(0) = u_0 + u_\infty, \tag{6.0.4}$$

und konvergiert exponentiell wie $u^0(t)$ gegen den Limes u_∞. Dabei konvergiert die dritte Komponente sehr viel schneller als die beiden anderen: $\tilde u_3(t) - u_{\infty,3} \sim e^{-40t}$. Nach einer kurzen Anfangsphase kann ihre zeitliche Variation vernachlässigt werden, so dass danach die dritte Gleichung durch die algebraische Beziehung

$$0 = 40\tilde u_1(t) - 40\tilde u_2(t) - 40\tilde u_3(t) + 1\,, \tag{6.0.5}$$

ersetzt werden kann. Über die ersten beiden Gleichungen beeinflußt $\tilde u_3(t)$ aber nach wie vor die Dynamik der Komponenten $\tilde u_1(t), \tilde u_2(t)$. Offenbar lässt sich aber $\tilde u_3(t)$ ganz aus dem System eliminieren, was die Dimension um eins reduziert. Das nichtreduzierte System stellt eine Differentialgleichung auf der durch die lineare Zwangsbedingung (6.0.5) beschriebenen Mannigfaltigkeit dar.

In der Praxis treten häufig solche DAEs direkt auf, z. B. in der Mehrkörpermechanik. Ihre effiziente numerische Lösung macht einen zunehmend großen Teil der numerischen Forschung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen aus.

6.1 Theorie differentiell-algebraischer Gleichungen

Wir betrachten eine allgemeine *implizite* AWA

$$F(t,u,u') \;=\; 0, \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0, \tag{6.1.6}$$

für Funktionen $u = u(t)$, mit einer L-stetigen Vektorfunktion $F(t,x,\eta) : \mathbb{R}^{1+d+d} \to \mathbb{R}^d$. Wir nehmen an, dass $F'_\eta(t,u,u')$ nicht regulär ist, so dass ein differentiell-algebraisches System (DAE) vorliegt. Durch fortgesetztes Differenzieren dieser Gleichung nach der Zeit kann man unter Umständen in endlich vielen Schritten Gleichungen für die Ableitungen $u'_i(t)$ aller Komponenten herleiten, d. h. das System in eine normale AWA überführen.

Definition 6.1 (Index der DAE): *Der „(differentielle) Index" der DAE (6.1.6) ist die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die der Ableitungsvektor $u'(t)$ durch die $k+1$ Gleichungen*

$$F(t,u,u') = 0, \quad \frac{d^i}{dt^i} F(t,u,u') = 0, \quad i = 1,...,k, \tag{6.1.7}$$

eindeutig in Ausdrücken von $u(t)$ bestimmt ist.

Beispiel 6.2: Ein einfaches Beispiel einer DAE vom Index $d \geq 1$ ist das d-dimensionale System

$$Mu' = u - b$$

mit der $d \times d$-Matrix

$$M = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} d.$$

In diesem Fall fehlt im System eine Gleichung für die Ableitung der ersten Komponente u'_1. Diese kann durch sukzessives Differenzieren und eliminieren der erzeugten Ableitungen $u'_l,\ l = d,...,1$, aus den jeweils vorausgehenden Gleichungen erzeugt werden:

$$\begin{array}{rclcl} u'_2 = u_1 - b_1 & \Rightarrow & u'_1 = b'_1 + u''_2 & & \\ u'_3 = u_2 - b_2 & \Rightarrow & u''_2 = b''_2 + u'''_3 & & \\ & \vdots & & & \\ u'_d = u_{d-1} - b_{d-1} & \Rightarrow & u^{(d-1)}_{d-1} = b^{(d-1)}_{d-1} + u^{(d)}_d & & \\ 0 = u_d - b_d & \Rightarrow & u^{(d)}_d = b^{(d)}_d & \Rightarrow & u'_1 = b'_1 + b''_2 + ... + b^{(d)}_d \end{array}$$

Nach Definition ist das System also vom Index d.

Beispiel 6.3: Ein wichtiger Spezialfall sind DAEs vom Index $k = 1$ in der sog. „(linear) expliziten“ Form

$$\begin{aligned} M(t,u,v)u' &= f(t,u,v), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0, \\ 0 &= g(t,u,v). \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

mit Vektorfunktionen $f(t,x,y),\ g(t,x,y) : \mathbb{R}^{1+d+d} \to \mathbb{R}^d$, und einer Matrixfunktion $M(t,x,y) : \mathbb{R}^{1+d+d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$. Wir setzen im Folgenden generell voraus, dass die Funktionen $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$, $M(t,x,y)$ in allen Argumenten stetig und bzgl. der Argumente x, y Lipschitz-stetig sind. Die Matrix $M(t,x,y)$ sei regulär. Ferner sei $g(t,x,y)$ differenzierbar mit regulärer Ableitungsmatrix $g'_y(t,x,y)$. Diese Eigenschaften sollen der Einfachheit halber gleichmäßig für alle Argumente gelten. Dann kann man die differenzierte Beziehung

$$0 = g'_t(t,u,v) + g'_x(t,u,v)u' + g'_y(t,u,v)v'$$

nach v' auflösen, und man erhält das normale System

$$u' = M(t,u,v)^{-1}f(t,u,v), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0, \tag{6.1.9}$$

$$\begin{aligned} v' &= -g'_y(t,u,v)^{-1}\big\{g'_t(t,u,v) + g'_x(t,u,v)u'\big\} \\ &= -g'_y(t,u,v)^{-1}\big\{g'_t(t,u,v) + g'_x(t,u,v)M(t,u,v)^{-1}f(t,u,v)\big\}. \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

Die DAE hat also den Index 1. Im Folgenden werden wir der Einfachheit halber nur DAE vom Index 1 betrachten, bei denen $M(t,x,y) \equiv I$ ist.

Beispiel 6.4: Ein weiterer typischer Fall ist die DAE

$$u' = f(t,u,v), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0, \tag{6.1.11}$$

$$0 = g(t,u), \tag{6.1.12}$$

in der die „algebraische“ Variable $v(t)$ in der algebraischen Gleichung gar nicht vorkommt. Zeitliche Ableitung von (6.1.12) ergibt

$$0 = g'_t(t,u) + g'_x(t,u)u',$$

und nach Kombination mit der Differentialgleichung:

$$g'_x(t,u)u' = g'_x(t,u)f(t,u,v) = -g'_t(t,u)\,.$$

Dies wird nun erneut differenziert, wodurch die Ableitung v' erscheint, aber noch mit u' verkoppelt. Drückt man hier nun u' mit Hilfe der ersten Differentialgleichung durch u, v aus, so erhält wieder ein Standardsystem für u, v, vorausgesetzt die Matrix

$$C := g'_x(t,u)f'_y(t,u,v)$$

ist regulär. Dann ist diese DAE also vom Index 2.

Im Folgenden betrachten wir nun ausschließlich DAE vom Index $k = 1$ in *expliziter* Form. Für diese gilt der folgende allgemeine Existenzsatz:

Satz 6.1 (Existenzsatz für DAE): *Die Funktionen $f(t, x, y)$ und $g(t, x, y)$ seien ausreichend differenzierbar. Ferner sei die Gleichung $g(t_0, x_0, y_0) = 0$ nach y_0 auflösbar. Ist dann $g'_y(t, x, y)$ in einer Umgebung von $\{t_0, x_0, y_0\}$ regulär, so besitzt die DAE (6.1.8) vom Index 1 eine eindeutig bestimmt lokale Lösung $\{u(t), v(t)\}$.*

Beweis: Der Beweis kann etwa analog zum Existenzsatz von Peano mit einem konstruktiven Argument direkt für die DAE oder auch durch Rückführung auf Resultate für normale AWA geführt werden. Letzterer Weg verwendet die vorausgesetzte Regularität der Ableitungsmatrix $g'_y(t, x, y)$, um die DAE in eine normale AWA zu überführen:

$$u' = f(t, u, v), \quad u(t_0) = u_0, \tag{6.1.13}$$

$$v' = -g'_y(t, u, v)^{-1}\big\{g'_t(t, u, v) + g'_x(t, u, v)f(t, u, v)\big\}. \tag{6.1.14}$$

Dabei wird der noch fehlende Anfangswert für v durch Lösung der algebraischen Gleichung $g(t_0, u_0, v(t_0)) = 0$ bestimmt. Auf diese AWA können nun die schon bekannten Existenz- und Eindeutigkeitsresultate angewendet werden. Die weiteren Details seien als Übungsaufgabe gestellt. Q.E.D.

6.2 Numerik differentiell-algebraischer Gleichungen

Ausgangspunkt ist eine DAE vom Index 1 der expliziten Form

$$u' = f(t, u, v), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad u(t_0) = u_0, \tag{6.2.15}$$

$$0 = g(t, u, v), \tag{6.2.16}$$

wobei die Ableitungsmatrix $g'_y(t, u, v)$ wieder entlang der ganzen Lösungstrajektorie regulär sein soll. Die Lösung existiere auf dem ganzen Intervall $I = [t_0, t_0 + T]$. In der Praxis ist die Dimension der algebraischen Bedingung (6.2.16) meist deutlich kleiner als die der Differentialgleichung (6.2.15).

Bei einer DAE kann „Steifheit“ in verschiedener Form auftreten. Zunächst kann der *differentielle* Anteil (6.2.15) im üblichen Sinne „steif“ sein mit $\|f'_x(t, x, y)\| \gg 1$. Daneben kann aber auch der *algebraische* Anteil „steif“ sein mit $\|g'_y(t, x, y)^{-1}\| \gg 1$. In beiden Fällen ist dann das abgeleitete System

$$\begin{aligned} u' &= f(t, u, v) \\ v' &= -g'_y(t, u, v)^{-1}\big\{g'_t(t, u, v) + g'_x(t, u, v)f(t, u, v)\big\} \end{aligned}$$

„steif“ im üblichen Sinne. Je nachdem, welcher Teil der DAE „steif“ ist, müssen im numerischen Verfahren *implizite* Komponenten verwendet werden. Wir wollen dies zunächst anhand der einfachsten Einschrittverfahren diskutieren.

a) Der nicht-steife Fall:
Mit der Bezeichnung $y_n \approx u(t_n)$, $z_n \approx v(t_n)$ lautet die Polygonzugmethode angewandt auf das obige System:

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), \quad n \geq 1, \quad y_0 = u_0, \tag{6.2.17}$$

$$0 = g(t_n, y_n, z_n)\,. \tag{6.2.18}$$

Wir sehen, dass dieses Schema wegen der algebraische Gleichung (6.2.18) immer eine *implizite* Komponente enthält. Zur Bestimmung von z_n aus (6.2.18) kann im Fall einer moderat konditionierten Jacobi-Matrix $g'_y(t,x,y)$ die einfache Fixpunktiteration

$$z_n^{(j)} = z_n^{(j-1)} - Cg(t_n, y_n, z_n^{(j-1)}), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \tag{6.2.19}$$

verwendet werden. Dabei ist C eine reguläre Matrix, die so zu wählen ist, dass

$$\|I - Cg'_y(t,x,y)\| < 1$$

garantiert ist (gemäß dem Konvergenzkriterium im Banachschen Fixpunktsatz). In diesem Fall konvergiert die Folge der Iterierten $z_n^{(j)}$ für jeden Startwert $z_n^{(0)}$ gegen die Lösung z_n der algebraischen Beziehung (6.2.18). Als Startwert mit guter Anfangsgenauigkeit dient meist $z_n^{(0)} := z_{n-1}$. Wir weisen auf die Ähnlichkeit der Iterationsvorschrift (6.2.19) mit dem Polygonzugschema (6.2.17) hin, wenn man $C = hI$ setzt. Die Folge $(z_n^{(j)})_{j=1,2,\dots}$ lässt sich dann interpretieren als Polygonzug-Approximation der AWA

$$z' = g(t,z), \quad t \geq t_n, \quad z(t_n) = z_{n-1}. \tag{6.2.20}$$

Deren Lösung konvergiert für $t \to \infty$ gegen einen Limes z_∞, wenn die Funktion $g(t,x,y)$ strikt monoton in y bzw. ihre Jacobi-Matrix $g'_y(t,x,y)$ strikt negativ definit ist.

b) Der semi-steife Fall:
Etwas kritischer ist die Situation, wenn die algebraische Gleichung (6.2.18) „steif“ ist, d. h.: $g'_y(t,x,y)$ ist zwar regulär, aber die Norm der Inversen ist groß : $\|g'_y(t,x,y)^{-1}\| \gg 1$. Dann wird die Gleichung (6.2.18) mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst:

$$g'_y(t_n, y_n, z_n^{(j-1)})z_n^{(j)} = g'_y(t_n, y_n, z_n^{(j-1)})z_n^{(j-1)} - g(t_n, y_n, z_n^{(j-1)}), \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei wieder der Startwert $z_n^{(0)} = z_{n-1}$ verwendet wird. Die in jedem Iterationsschritt zu lösenden linearen Gleichungssysteme sind zwar meist schlecht konditioniert, aber auch von moderater Größe verglichen mit dem Polygonzugschritt (6.2.17).

c) Der steife Fall:
Wenn die differentielle Gleichung (6.2.15) steif ist, muss zu ihrer Integration ein *implizites* Verfahren verwendet werden. Das implizite Euler-Schema lautet hier wie folgt:

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_n, y_n, z_n) \quad n \geq 1, \quad y_0 = u_0, \tag{6.2.21}$$

$$0 = g(t_n, y_n, z_n)\,. \tag{6.2.22}$$

Der Startwert für die algebraische Variable z_0 wird wieder aus der Gleichung

$$g(t_0, y_0, z_0) = 0$$

bestimmt. Wenn auch die algebraische Gleichung „steif“ ist, $\|g_y'(t,x,y)^{-1}\| \gg 1$, so stellt die Bestimmung eines „konsistenten“ Anfangswerts z_0 ein sehr schwieriges Problem dar. Dies liegt daran, dass in diesem Fall für das nur lokal konvergierende Newton-Verfahren keine offensichtliche Anfangsnäherung $z_0^{(0)} \approx z_0$ zur Verfügung steht, sondern erst konstruiert werden muss. Dies ist in komplizierten Anwendungsfällen oft „teurer“ als die anschließende Zeititeration. In den nachfolgenden Zeitschritten stellt sich dieses Problem bei der Lösung von $g(t_n, y_n, z_n) = 0$ nicht so scharf, da hier mit $z_n^{(0)} := z_{n-1}$ automatisch ein „guter“ Startwert verfügbar ist. In jedem Zeitschritt ist ein gekoppeltes Gleichungssystem der Form

$$y_n - hf(t_n, y_n, z_n) = y_{n-1}, \tag{6.2.23}$$

$$g(t_n, y_n, z_n) = 0, \tag{6.2.24}$$

zu lösen. Die zugehörige Newton-Matrix lautet

$$J_n = \begin{bmatrix} I - hf_x'(t_n, y_n, z_n) & -hf_y'(t_n, y_n, z_n) \\ g_x'(t_n, y_n, z_n) & g_y'(t_n, y_n, z_n) \end{bmatrix}.$$

Ihre Invertierung ist relativ leicht, wenn beide Diagonalblöcke $I - hf_x'(t_n, y_n, z_n)$ und $g_y'(t_n, y_n, z_n)$ positiv definit sind. Andernfalls ist die Gesamtmatrix streng *indefinit*, d. h.: Es liegt ein sog. „Sattelpunktproblem“ vor, zu dessen Lösung meist spezielle „Tricks“ erforderlich sind.

Zur Integration von steifen DAE können grundsätzlich alle für steife AWA geeignete Verfahren verwendet werden. Besonders naheliegend sind wegen ihrer einfachen Struktur die A(α)-stabilen BDF-Formeln („Rückwärtdifferenzen-Formeln“). Diese stehen zur Verfügung bis zur Ordnung $m = 6$, was für steife Probleme ausreichende Genauigkeit garantiert. Jeder Zeitschritt hat dann die Gestalt

$$y_n = -\sum_{r=1}^{R} \alpha_{R-r} y_{n-r} + h\beta_0 f(t_n, y_n, z_n), \quad n \geq R-1, \tag{6.2.25}$$

$$0 = g(t_n, y_n, z_n), \tag{6.2.26}$$

wobei die Startwerte $y_r,\ r = 0, ..., R-1,$ etwa mit Hilfe eines Einschrittverfahrens erzeugt werden. Für die Lösung der impliziten Gleichungssysteme in jedem Zeitschritt gilt dann dasselbe, was bereits zum impliziten Euler-Verfahren gesagt worden ist. In modernen ODE- oder DAE-Codes werden diese LMM mit variabler Ordnung auch direkt auf nichtäquidistanten Zeitgittern formuliert, was die Durchführung von Zeitschrittkontrolle stark vereinfacht. Dies führt allerdings auf kompliziertere Differenzenformeln mit zeitabhängigen Koeffizienten $\alpha_r(h_{n-1}, ..., h_{n-R})$. Die „Kunst“ besteht dann im Design einer effektiven Schrittweiten- und Ordnungssteuerung.

6.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1: Bei der Ortsdiskretisierung der „inkompressiblen“ Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungsmechanik entsteht eine $(n+m)$-dimensionale DAE der Gestalt

$$\begin{aligned} Mu'(t) &= Au(t) + N(u(t))u(t) + Bp(t) + b, \\ B^T u(t) &= 0, \quad t \ge 0, \quad u(0) = u_0, \end{aligned}$$

für die Vektoren der approximierenden Punktwerte $u(t) \in \mathbb{R}^n$ des Geschwindigkeitsfeldes und $p(t) \in \mathbb{R}^m$ des skalaren Druckfeldes. (Bemerkung: Die lineare algebraische Nebenbedingung $B^T u = 0$ repräsentiert die „Inkompressibilität“ des betrachteten Fluids.) Aus numerischen Gründen ist stets $n > m$. Die Systemmatrizen $M, A, N(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sind meist zeitlich konstant, wogegen der Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ zeitabhängig sein kann. Ferner sind die Matrizen M und A regulär.

a) Von welchem Typ ist diese DAE?

b) Unter welcher Zusatzbedingung an die Systemmatrizen ist diese DAE lösbar?

Aufgabe 6.2 (Praktische Aufgabe): Man löse die 3-dimensionale steife DAE

$$Mu'(t) = Au(t) + b, \quad t \ge 0, \quad u(0) = (1, 0, \text{unbestimmt})^T,$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

direkt, d. h. ohne Reduktion auf ein System der Dimension zwei, auf dem Intervall $I = [0, 10]$ mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens und der Trapez-Regel. Die (äquidistante) Schrittweite werde so gewählt, dass der absolute Fehler kleiner als 10^{-3} ist. Man vergleiche die Ergebnisse mit denen der Lösung der zugehörigen normalen AWA mit der Matrix $M = I$ und der Anfangsbedingung $u(0) = (1, 0, -1)^T$.

Aufgabe 6.3: Man versuche die folgenden Fragen möglichst ohne Verwendung des Textes knapp zu beantworten:

a) Welche Bedingung sichert die Eindeutigkeit der Lösung der AWA

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \ge t_0, \quad u(t_0) = u^0\,?$$

b) Was ist die Struktur des Lösungsraums des linearen homogenen Systems

$$u'(t) = A(t)u(t)$$

mit einer stetigen Matrixfunktion $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{d\times d}$?

c) Was besagt das Gronwallsche Lemma?

d) Hat die AWA

$$u'(t) = \sin(u(t)) + e^{-|u(t)|}, \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u^0,$$

eine globale Lösung?

e) Wie sieht die allgemeine Einschrittmethode zur Approximation der AWA $u'(t) = f(t, u(t)), t \geq t_0, \ u(t_0) = u^0$ aus, und was ist ihr „Abschneidefehler“ (bzw. „lokaler Diskretisierungsfehler“)?

f) Wie lautet die Trapezregel als Differenzenverfahren zur Approximation der allgemeinen AWA und was ist ihre Ordnung?

g) Wie lautet die allgemeine LMM zur Approximation der allgemeimen AWA und wie lautet ihr „Stabilitätspolynom“?

h) Wann nennt man eine allgemeine AWA „steif“?

i) Was bedeuten für eine LMM die Begriffe „null-stabil“, „A-stabil“ und „A(0)-stabil“?

j) Was sind die Stabilitätsgebiete der expliziten Euler-Formel (Polygonzugmethode), der impliziten Euler-Formel und der Trapezregel?

k) Was ist der „Index“ einer DAE?