1 Aus der Theorie der Anfangswertaufgaben

1.1 Existenzsätze

1.1.1 Existenz von Lösungen

Wir betrachten im Folgenden allgemeine Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in der (expliziten) Form

$$u'(t) = f(t, u(t)) . \tag{1.1.1}$$

mit Vektorfunktionen $u(t) = (u_1(t), \dots, u_d(t))^\top$ und $f(t,x) = (f_1(t,x), \dots, f_d(t,x))^\top$. Ausgehend von einem Anfangspunkt $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ werden Lösungen $u(t)$ auf einem „Zeit“-Intervall $I = [t_0, t_0 + T]$ oder auch $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ gesucht mit $u(t_0) = u_0$. Die Funktion $f(t,x)$ sei auf einem Zylinder

$$D = I \times \Omega \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$$

des (t,x)-Raumes, welcher den Punkt (t_0, u_0) enthält, definiert und dort stetig. Weiterhin werden die Standardnotationen für das euklidische Skalarprodukt und Norm

$$(x,y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i , \qquad \|x\| = (x,x)^{1/2} , \quad x, y \in \mathbb{R}^d ,$$

sowie für die zugehörige natürliche Matrizennorm $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\}$, für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, verwendet. Ableitungen werden wie folgt bezeichnet:

$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad f'_t(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}, \quad \partial_i f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}.$$

Unter einer „Anfangswertaufgabe“ (kurz „AWA“) wollen wir folgende Problemstellung verstehen:

Definition 1.1: *Zu einem gegebenen Punkt $(t_0, u_0) \in D$ ist eine (stetig) differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$ gesucht mit den Eigenschaften:*

1. $\mathrm{Graph}(u) := \{(t, u(t)), t \in I\} \subset D$,
2. $u'(t) = f(t, u(t))$, $\quad t \in I$,
3. $u(t_0) = u_0$.

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung ist eine stetige Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$ genau dann Lösung der AWA, wenn $\mathrm{Graph}(u) \subset D$ ist, und wenn sie die folgende „Integralgleichung“ erfüllt

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))\, ds , \quad t \in I . \tag{1.1.2}$$

Bemerkung 1.1: Die Integralgleichung (1.1.2) ist ein Spezialfall einer sog. „Volterraschen[1] Integralgleichung“

$$u(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,s,u(s))\,ds, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1.1.3}$$

mit gegebener „Inhomogenität“ $g(t)$ und „Integralkern“ $k(t,s,x)$. Ist die obere Integrationsgrenze fest gegeben,

$$u(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t_1} k(t,s,u(s))\,ds, \quad t \in [t_0, t_1],$$

spricht man von einer „Fredholmschen[2] Integralgleichung“.

Wir rekapitulieren die folgenden Bezeichnungen: Eine Differentialgleichung (oder ein System von solchen) (1.1.1) wird „autonom“ genannt, wenn die Funktion $f(t,x)$ nicht explizit von der Zeit abhängt, d. h.: $f(t,x) = f(x)$. Sie heißt „separiert“, wenn $f(t,x) = a(t)g(x)$, und „linear“, wenn

$$f(t,x) = A(t)x + b(t)$$

mit Matrizen- und Vektorfunktionen $A(\cdot)$, $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, bzw. $b(\cdot)$, $b(t) \in \mathbb{R}^d$. Beispiel einer autonomen Gleichung ist $u'(t) = u(t)^2$, und die Gleichung $u'(t) = qu(t) + 1$ ist linear. Die lineare Gleichung heißt „homogen“, wenn $b \equiv 0$ ist.

Eine allgemeine Aussage über die *lokale* Existenz von Lösungen der AWA macht der folgende fundamentale Satz von Peano[3]:

Satz 1.1 (Existenzsatz von Peano): *Die Funktion $f(t,x)$ sei stetig auf dem $(d+1)$-dimensionalen Zylinder*

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d :\ |t - t_0| \le \alpha\,, \|x - u_0\| \le \beta\}\,.$$

Dann existiert eine Lösung $u(t)$ der AWA *auf dem Intervall $I := [t_0 - T, t_0 + T]$, wobei*

$$T := \min\Big(\alpha, \frac{\beta}{M}\Big), \qquad M := \max_{(t,x)\in D} \|f(t,x)\|.$$

Beweis: Zum Beweis konstruieren wir mit Hilfe einer „Differenzenmethode“ eine Folge von stetigen, stückweise linearen Funktionen, welche eine Teilfolge besitzt, die (gleichmäßig) gegen eine Lösung der AWA konvergiert. O.B.d.A. genügt es, das Halbintervall $I =$

[1] Vito Volterra (1860–1940): Italienischer Mathematiker; Prof. in Pisa, Turin und Rom; Beiträge zur Analysis, Differential- und Integralgleichungen, zu Problemen der mathematischen Physik und Biologie.

[2] Erik Ivar Fredholm (1866–1927): Schwedischer Mathematiker; Prof. in Stockholm; Beiträge zur Analysis, Integralgleichungen, Potentialtheorie und Spektraltheorie.

[3] Guiseppe Peano (1858–1932): Italienischer Mathematiker; Prof. in Turin; Beiträge zur Analysis, gewöhnlichen Differentialgleichungen, einer der Väter der Mathematischen Logik

$[t_0, t_0+T]$ zu betrachten. Mit einem Schrittweitenparameter $h > 0$ $(h \to 0)$ wird eine äquidistante Unterteilung des Intervalls I gewählt:

$$t_0 < \ldots < t_n < \ldots < t_N = t_0 + T\,, \quad h = |t_n - t_{n-1}|\,.$$

Ausgehend von $u_0^h := u_0$ erzeugt dann die sog. „Eulersche Polygonzugmethode“ Werte u_n^h durch die sukzessive Vorschrift

$$u_n^h = u_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, u_{n-1}^h)\,, \quad n \geq 1\,. \tag{1.1.4}$$

Diese *diskreten* Funktionswerte werden linear interpoliert zu einem stetigen Polygonzug:

$$u^h(t) := u_{n-1}^h + (t - t_{n-1})f(t_{n-1}, u_{n-1}^h)\,, \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n\,.$$

(i) Wir zeigen zunächst, dass diese Konstruktion durchführbar ist, d. h.: Graph$(u^h) \subset D$. Sei $(t, u^h(t)) \in D$ für $t_0 \leq t \leq t_{k-1}$. Nach Konstruktion gilt dann für $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} u^h(t) - u_0 &= u^h(t) - u_{k-1}^h + \sum_{i=1}^{k-1}\{u_i^h - u_{i-1}^h\} \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) + h\sum_{i=1}^{k-1} f(t_{i-1}, u_{i-1}^h) \end{aligned}$$

und folglich

$$\|u^h(t) - u_0\| \leq (t - t_{k-1})M + (t_{k-1} - t_0)M = (t - t_0)M \leq \beta\,.$$

Also ist $(t, u^h(t)) \in D$ für $t_0 \leq t \leq t_k$. Durch Induktion folgt Graph$(u^h) \subset D$.

(ii) Wir zeigen als nächstes, dass die Funktionenfamilie $\{u^h\}_{h>0}$ *gleichgradig* stetig ist. Seien dazu $t, t' \in I$, $t' \leq t$, beliebig mit $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $t' \in [t_{j-1}, t_j,]$ für gewisse $t_j \leq t_k$. Im Fall $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$ (d. h.: $j = k$) ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u_{k-1}^h + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) - u_{k-1}^h - (t' - t_{k-1})f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) \\ &= (t - t')f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) \end{aligned}$$

und somit $\|u^h(t) - u^h(t')\| \leq M|t - t'|$. Im Fall $t_j < t_k$ ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u^h(t) - u_{k-1}^h + \sum_{i=j}^{k-1}\{u_i^h - u_{i-1}^h\} + u_{j-1}^h - u^h(t') \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) + h\sum_{i=j}^{k-1} f(t_{i-1}, u_{i-1}^h) + (t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, u_{j-1}^h) \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) + h\sum_{i=j+1}^{k-1} f(t_{i-1}, u_{i-1}^h) + (h + t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, u_{j-1}^h) \end{aligned}$$

und folglich

$$\|u^h(t) - u^h(t')\| \leq M\big\{(t - t_{k-1}) + (t_{k-1} - t_j) + (t_j - t')\big\} \leq M|t - t'|\,.$$

Also ist die Familie $\{u^h\}_{h>0}$ gleichgradig stetig (sogar gleichgradig Lipschitz-stetig). Ferner sind die Funktionen u^h wegen der gemeinsamen Anfangswerte $u^h(t_0) = u_0$ auch gleichmäßig beschränkt:

$$\|u^h(t)\| \le \|u^h(t) - u_0\| + \|u_0\| \le MT + \|u_0\|, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli existiert dann eine Nullfolge $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion u auf I, so dass

$$\max_{t\in I} \|u^{h_i}(t) - u(t)\| \to 0 \quad (i \to \infty)\,. \tag{1.1.5}$$

Da der Zylinder D abgeschlossen ist, ist dann auch $\mathrm{Graph}(u) \subset D$.

(iii) Es bleibt zu zeigen, dass die Limesfunktion u der Integralgleichung (1.1.2) genügt. Für $t \in [t_{k-1}, t_k] \subset I$ setzen wir $u^i(t) := u^{h_i}(t)$. Für jedes i gilt zunächst

$$\begin{aligned}
u^i(t) &= u^i_{k-1} + (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) \\
&= u^i_{k-2} + (t_{k-1} - t_{k-2}) f(t_{k-2}, u^i_{k-2}) + (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) \\
&\;\vdots \\
&= u_0 + \sum_{j=1}^{k-1} (t_j - t_{j-1}) f(t_{j-1}, u^i_{j-1}) + (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) \\
&= u_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1}, u^i_{j-1})\, ds + \int_{t_{k-1}}^{t} f(t_{k-1}, u^i_{k-1})\, ds \\
&= u_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\{ f(t_{j-1}, u^i_{j-1}) - f(s, u^i(s)) \big\}\, ds \\
&\quad + \int_{t_{k-1}}^{t} \big\{ f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) - f(s, u^i(s)) \big\}\, ds + \int_{t_0}^{t} f(s, u^i(s))\, ds\,.
\end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge D ist die stetige Funktion $f(t,x)$ auch gleichmäßig stetig. Ferner sind die Funktionen der Folge $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Zu beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es also $\delta, \varepsilon' > 0$, so dass für $|t - t'| < \delta$ und $\|x - x'\| < \varepsilon'$ gilt:

$$\|u^i(t) - u^i(t')\| \le \varepsilon', \qquad \|f(t,x) - f(t',x')\| < \varepsilon.$$

Für hinreichend großes $i \ge i_\varepsilon$, d. h. hinreichend kleines h_i, folgt damit

$$\max_{s\in[t_{k-1},t_k]} \|f(t_{k-1}, u^i(t_{k-1})) - f(s, u^i(s))\| \le \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Dies ergibt

$$\Big| u^i(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u^i(s))\, ds \Big| \le \varepsilon |t - t_0|.$$

Die gleichmäßige Konvergenz $u^i \to u$ auf I impliziert auch die gleichmäßige Konvergenz

$$f(\cdot, u^i(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot)) \quad (i \to \infty).$$

Im Limes $i \to \infty$ ergibt sich damit

$$\Big| u(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \Big| \le \varepsilon |t - t_0|.$$

Wegen der beliebigen Wahl von ε folgt, dass die Limesfunktion u die Integralgleichung (1.1.2) löst, was zu zeigen war. Q.E.D.

Wenn die AWA höchstens eine Lösung u auf I hat, erschließt man durch ein Widerspruchsargument, dass für jede Nullfolge des Schrittweitenparameters h die vom Eulerschen Polygonzugverfahren gelieferte Folge $(u^h)_h$ für $h \to 0$ gegen u konvergiert (Übungsaufgabe).

Der Beweis von Satz 1.1 zeigt, dass das Existenzintervall $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ der durch den Existenzsatz von Peano gelieferten lokalen Lösung im wesentlichen nur von den Stetigkeitseigenschaften der Funktion $f(t,x)$ abhängt. Durch wiederholte Anwendung dieses Argumentes ergibt sich die folgende Aussage.

Satz 1.2 (Fortsetzungssatz): *Die Funktion $f(t,x)$ sei stetig auf einem abgeschlossenen Bereich D des $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$, welcher den Punkt (t_0, u_0) enthält, und sei u eine Lösung der* AWA *auf einem Intervall $I = [t_0 - T, t_0 + T]$. Dann ist die lokale Lösung u nach rechts und links über jeden Zeitpunkt hinaus auf ein „maximales" Existenzintervall $I_{\max} = (t_0 - T_*, t_0 + T^*)$ (stetig differenzierbar) fortsetzbar, solange der Graph von u nicht an den Rand von D stößt. Dabei kann* $\mathrm{Graph}(u) := \{(t, u(t)), t \in I_{\max}\}$ *unbeschränkt sein sowohl für $t \to t_0 + T^* = \infty$ als auch für $t \to t_0 + T^* < \infty$.*

Beweis: O.B.d.A. wird nur die Fortsetzbarkeit der lokalen Lösung auf das rechtsseitige Intervall $[t_0, t_0 + T^*)$ betrachtet. Anwendung des Existenzsatzes von Peano liefert zunächst die Existenz einer Lösung u^0 der AWA auf einem Anfangsintervall $[t_0, t_1]$, $t_1 := t_0 + T_0$ der Länge

$$T_0 := \min(\alpha_0, \beta_0 / M_0).$$

Dabei hängt T_0 über die Konstanten α_0, β_0 nur von der Schranke M_0 für die Funktion $f(t,x)$ auf dem Zylinderbereich

$$Z_0 := \big\{ (t,x) \in D,\, |t - t_0| \le \alpha_0,\, \|x - u_0\| \le \beta_0 \big\}$$

ab. Wenn $(t_1, u(t_1))$ nicht auf dem Rand ∂D liegt, kann ausgehend von t_1 und dem Anfangswert $u_1 = u(t_1)$ der Satz von Peano erneut angewendet werden und liefert die Existenz einer Lösung u^1 dieser AWA auf einem Intervall $[t_1, t_2]$, $t_2 := t_1 + T_1$ der Länge $T_1 := \min(\alpha_1, \beta_1 / M_1)$. Dabei ist M_1 eine Schranke für $f(t,x)$ auf dem Zylinderbereich

$$Z_1 := \big\{ (t,x) \in D,\, |t - t_0| \le \alpha_1,\, \|x - u_1\| \le \beta_1 \big\}$$

Die so gewonnenen Lösungsstücke u^0, u^1 ergeben zusammengesetzt eine stetige und wegen der Stetigkeit von $f(t,x)$ sogar eine stetig differenzierbare Funktion $u(t)$ auf dem

Intervall $[t_0, t_0 + T_0 + T_1]$; im Übergangspunkt t_1 gilt für die rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen:

$$u^{0\prime}(t_1) = f(t, u^0(t_1)) = f(t, u^1(t_1)) = u^{1\prime}(t_1).$$

Nach Konstruktion ist u daher (lokale) Lösung der AWA. Dieser Prozess lässt sich offensichtlich fortsetzen, solange der Graph der Lösung nicht an den Rand von D stößt. Dabei kann es nicht passieren, dass die gewonnene Folge $(t_k, u(t_k)) \in D$ eine Teilfolge hat, welche gegen einen inneren Punkt (t_*, x_*) von D konvergiert, denn dann könnte man für diesen Punkt als Startpunkt wieder den Satz von Peano anwenden und so das Existenzintervall der Lösung über den Zeitpunkt t_* hinaus erweitern. Q.E.D.

Korollar 1.1 (Globale Existenz): *Sei die Funktion $f(t,x)$ in der* AWA *auf ganz $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ definiert und stetig. Besteht dann für jede durch den Satz von Peano gelieferte „lokale" Lösung $u(t)$ eine Abschätzung der Form*

$$\|u(t)\| \le \beta(t), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{1.1.6}$$

mit einer festen stetigen Funktion $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so lässt sich u zu einer „globalen" Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Beweis: Wegen der Schranke (1.1.6) für alle möglichen lokalen Lösungen kann keine von diesen auf einem beschränkten Zeitintervall einen unbeschränkten Graphen haben. Also impliziert der Fortsetzungssatz die Existenz einer globalen Lösung. Q.E.D.

Beispiel 1.1: Die skalare AWA

$$u'(t) = \sin(u(t)), t \ge 0, \quad u(0) = 0, \tag{1.1.7}$$

besitzt nach dem Satz von Peano lokale Lösungen. Für jede solche Lösung gilt dann

$$|u(t)| \le |u(0)| + \int_0^t |\sin(u(s))|\, ds \le |u_0| + t.$$

Nach Korollar 1.1 sind diese Lösungen also alle global auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar.

Beispiel 1.2: Die skalare AWA

$$u'(t) = u(t)^{1/3}, t \ge 0, \quad u(0) = 0, \tag{1.1.8}$$

besitzt für beliebiges $c \ge 0$ eine Lösung der Form

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t \le c \\ \left[\frac{2}{3}(t-c)\right]^{3/2} & , \quad c < t\,. \end{cases}$$

Das Eulersche Polygonzugverfahren liefert für alle $c > 0$ die Lösung $u_c(t) \equiv 0$. Die anderen (überabzählbar vielen!) Lösungen können also so nicht approximiert werden. Wird die Anfangsbedingung aber in $u(0) = 1$ abgeändert, ergibt sich die Lösung

$$u(t) = \left(\tfrac{2}{3}t + 1\right)^{3/2}.$$

Dass dies wirklich die einzige Lösung ist, werden wir weiter unten sehen.

Beispiel 1.3: Die AWA

$$u'(t) = u(t)^2\,, \quad 0 \le t < 1\,, \quad u(0) = 1, \tag{1.1.9}$$

besitzt eine (lokale) Lösung der Form $u(t) = (1-t)^{-1}$. Obwohl $f(t,x) = x^2$ eine glatte Funktion ist, wird die Lösung $u(t)$ für $t \to 1$ singulär. Dagegen hat die skalare AWA

$$u'(t) = -200\,t\,u(t)^2, \quad t \ge -3, \quad u(-3) = \frac{1}{901},$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ existierende Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1+100t^2},$$

welche auch eindeutig bestimmt ist. Dies zeigt wieder, wie unterschiedlich das Lösungsverhalten von sehr ähnlich aussehenden AWAn sein kann.

Beispiel 1.4: Das skalare „Modellproblem“

$$u'(t) = \lambda u(t)\,, \quad t \ge 0\,, \quad u(0) = u_0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

hat die globale (eindeutige) Lösung $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ mit dem asymptotischen Verhalten

$$Re\,\lambda < 0: \ \lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0, \quad Re\,\lambda = 0: \ |u(t)| = |u_0|, \quad Re\,\lambda > 0: \ \lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty.$$

Beispiel 1.5: Die Leistungsfähigkeit des Satzes von Peano in Verbindung mit dem Fortsetzungssatz sieht man z. B. anhand der stark nichtlinearen d-dimensionalen AWA

$$u'(t) = e^{-\|u(t)\|} \prod_{i=1}^{d} \sin(u_i(t)), \quad t \ge 0, \quad u(0) = u_0. \tag{1.1.10}$$

Der Definitionsbereich der zugehörigen Funktion $f(t,x) = e^{-\|x\|} \prod_{i=1}^d \sin(x_i)$ ist der ganze $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$, und die Funktion f ist auf diesem gleichmäßig beschränkt. Folglich existiert (mindestens) eine Lösung u auf ganz $\mathbb{R}$, was anhand der Form der Differentialgleichung nicht so einfach direkt zu sehen ist.

Aus der Integralgleichungsdarstellung (1.1.2) ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage über die Regularität von Lösungen der AWA.

Satz 1.3 (Regularitätssatz): *Sei u eine Lösung der* AWA *in Definition 1.1 auf dem Intervall I. Im Falle $f \in C^m(D)^d$, für ein $m \ge 1$, ist dann $u \in C^{m+1}(I)^d$.*

Beweis: Aus der Beziehung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds, \quad t \in I,$$

für die lokale Lösung u der AWA entnehmen wir, dass u im Falle $f \in C^1(D)^d$ zweimal stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$u''(t) = d_t f(t, u(t)) = \partial_t f(t, u(t)) + \nabla_x f(t, u(t)) u'(t),$$

mit der Jacobi-Matrix $\nabla_x f$ der Vektorfunktion f. Durch wiederholte Anwendung dieses Arguments folgt dann die Richtigkeit der Behauptung für $m \ge 1$. Q.E.D.

1.1.2 Konstruktion von Lösungen

In einfachen Fällen kann man Lösungen einer Differentialgleichung systematisch konstruieren. Wir diskutieren hier zwei der Standardmethoden.

(A) Methode der „Trennung der Variablen“

Wir betrachten die „separable“ Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)) = a(t)g(u(t)),$$

bei der in der rechten Seite die Variablen t und u separiert auftreten. Sei u eine Lösung. Im Fall $g(u(t)) \neq 0$ gilt dann

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{g(u(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Mit Hilfe der Variablensubstitution $z := u(s)$ im linken Integral ergibt sich

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{g(z)}\, dz = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Hieraus lässt sich in konkreten Fällen häufig eine Lösung $u(t)$ konstruieren. Z. B. ergibt sich für die Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t)^2, \quad f(t, x) = \alpha(t)g(x) = x^2,$$

durch den Ansatz

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{z^2}\, dz = -\frac{1}{z}\Big|_{u_0}^{u(t)} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)}$$

eine Lösung der Form

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}.$$

Diese existiert nicht für alle $t \geq t_0$ (Singulariät bei $t = t_0 + u_0^{-1}$), obwohl die Funktion $f(x) = x^2$ ein Polynom ist.

(B) Methode der „Variation der Konstanten“

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t), \quad t \in I := [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}, \tag{1.1.11}$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$. Die zugehörige „homogene“ Differentialgleichung

$$v'(t) = a(t)v(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

hat eine Lösung der Form

$$v(t) := c \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big),$$

mit einer freien Konstante $c \in \mathbb{R}$, was man direkt nachrechnet. Sei $v(t)$ eine Lösung mit $c = 1$. Zur Bestimmung einer Lösung der „inhomogenen" Differentialgleichung (1.1.11) wird c als Funktion von t angesetzt und so bestimmt, dass $u(t) := c(t)v(t)$ die Differentialgleichung erfüllt, d. h.:

$$u'(t) = c(t)v'(t) + c'(t)v(t) = a(t)u(t) + b(t).$$

Daher wird diese Methode auch „Variation der Konstante" genannt. Wegen $c(t)v'(t) = c(t)a(t)v(t) = a(t)u(t)$ ergibt sich die Bedingung

$$c'(t)v(t) = b(t)$$

bzw.

$$c(t) = \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds\Big)b(\tau)\,d\tau + \gamma$$

mit einer freien Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$. Damit wird

$$u(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big)\int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds\Big)b(\tau)\,d\tau + \gamma\exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big).$$

Durch Wahl der Konstante $\gamma = u_0$ kann erreicht werden, dass die Funktion $u(t)$ einen gegebenen Anfangswert $u(t_0) = u_0$ annimmt. Entsprechend schreiben wir

$$u(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big)\Big[u_0 + \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds\Big)b(\tau)\,d\tau\Big]. \tag{1.1.12}$$

Diese Funktion erfüllt dann die lineare Differentialgleichung (1.1.11). Wir werden im Folgenden sehen, dass diese Lösung durch die Vorgabe eines Anfangswertes $u(t_0) = u_0$ eindeutig festgelegt ist. Im einfachsten Fall konstanter Koeffizienten hat die homogene Differentialgleichung

$$u'(t) = au(t)$$

eine Lösung der Form $u(t) = ce^{at}$. Die inhomogene Differentialgleichung

$$u'(t) = au(t) + b(t)$$

hat nach dem oben Gezeigten eine Lösung der Form

$$u(t) = e^{a(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}b(\tau)\,d\tau. \tag{1.1.13}$$

Jede dieser Lösungen ist, wie wir später sehen werden, durch ihren Anfangswert $u(t_0) = u_0$ eindeutig bestimmt.

1.2 Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen

Wir wenden uns nun den Fragen nach der eindeutigen Bestimmtheit von Lösungen sowie ihrer Stabilität zu. Die Wichtigkeit der Kenntnis von Stabilität oder Instabilität von Lösungen wird durch das Beispiel des Lorenz-Systems illustriert.

1.2.1 Lokale Stabilität und Eindeutigkeit

Definition 1.2 (Lipschitz-Bedingung): *(i) Die Funktion $f(t,x)$ genügt auf ihrem Definitionsbereich $D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ einer (gleichmäßigen) „Lipschitz-Bedingung“, wenn mit einer stetigen Funktion $L(t)>0$ („L-Konstante“) gilt:*

$$\|f(t,x)-f(t,x')\|\le L(t)\|x-x'\|\,,\quad (t,x)\,,(t,x')\in D. \tag{1.2.14}$$

(ii) Die Funktion $f(t,x)$ genügt in D einer „lokalen“ Lipschitzbedingung, wenn $f(t,x)$ auf jeder beschränkten Teilmenge von D einer Lipschitz-Bedingung genügt (mit einer möglicherweise von dieser Teilmenge abhängigen Lipschitz-Konstante).

Beispiel 1.6: Die Funktion $f(t,x)$ habe auf D stetige partielle Ableitungen nach x, welche beschränkt sind:

$$\max_{1\le i,j\le d}|\partial_j f_i(t,x)|\le K\,,\quad (t,x)\in D\,.$$

Dann ist f Lipschitz-stetig bzgl. x mit der Lipschitz-Konstante $L=dK$. Zum Beweis schreiben wir

$$f_i(t,x)-f_i(t,x')=\int_0^1\frac{d}{ds}f_i(t,x'+s(x-x'))\,ds=\int_0^1\sum_{j=1}^d\partial_j f_i(t,x'+s(x-x'))(x_j-x_j')\,ds$$

und finden

$$\|f(t,x)-f(t,x')\|\le\|x-x'\|\Big[\sum_{i,j=1}^d\int_0^1|\partial_j f_i(t,x'+s(x-x'))|^2\,ds\Big]^{1/2}\le\|x-x'\|\,Kd\,.$$

Satz 1.4 (Lokaler Stabilitätssatz): *Mit zwei stetigen Funktionen $f(t,x)$ und $g(t,x)$ auf D seien die beiden AWAn*

$$u'(t)=f(t,u(t))\,,\quad t\in I\,,\quad u(t_0)=u_0\,, \tag{1.2.15}$$
$$v'(t)=g(t,v(t))\,,\quad t\in I\,,\quad v(t_0)=v_0\,. \tag{1.2.16}$$

betrachtet. Die Funktion $f(t,x)$ genüge der Lipschitzbedingung (1.2.14) auf $\mathring{D}$ mit $L:=\sup_{t\in I}L(t)<\infty$. Dann gilt für zwei beliebige Lösungen u von (1.2.15) und v von (1.2.16)

$$\|u(t)-v(t)\|\;\le\;e^{L(t-t_0)}\left\{\|u_0-v_0\|+\int_{t_0}^t\varepsilon(s)\,ds\right\}\,,\quad t\in I\,, \tag{1.2.17}$$

wobei $\varepsilon(t):=\sup_{x\in\Omega}\|f(t,x)-g(t,x)\|$.

Beweis: Für die Differenz $e(t) = u(t) - v(t)$ gilt

$$e(t) \; = \; \int_{t_0}^{t} \{f(s,u(s)) - f(s,v(s))\}\,ds + \int_{t_0}^{t} \{f(s,v(s)) - g(s,v(s))\}\,ds + u_0 - v_0.$$

Hieraus folgt

$$\|e(t)\| \; \le \; L \int_{t_0}^{t} \|e(s)\|\,ds + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\,ds + \|u_0 - v_0\|\,,$$

d. h.: Die (stetige) Funktion $w(t) = \|e(t)\|$ genügt einer linearen Integralungleichung. Mit Hilfe des Lemmas von Gronwall[4] (Hilfssatz 1.1) ergibt sich daraus die gewünschte Abschätzung. Q.E.D.

Hilfssatz 1.1 (Gronwallsches Lemma): *Die stückweise stetige Funktion $w(t) \ge 0$ genüge mit zwei Konstanten $a, b \ge 0$ der Integralungleichung*

$$w(t) \le a \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + b, \quad t \ge t_0. \tag{1.2.18}$$

Dann gilt die Abschätzung

$$w(t) \le e^{a(t-t_0)} b\,, \quad t \ge t_0\,. \tag{1.2.19}$$

Beweis: Für die Funktion

$$\psi(t) := a \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + b$$

gilt $\psi'(t) = aw(t)$ und somit gemäß Voraussetzung $\psi'(t) \le a\psi(t)$. Dies impliziert

$$\big(e^{-at}\psi(t)\big)' = e^{-at}\big(\psi'(t) - a\psi(t)\big) \le 0,$$

d. h.: Die Funktion $e^{-at}\psi(t)$ ist monoton fallend. Dies bedeutet, dass

$$e^{-at}w(t) \le e^{-at}\psi(t) \le \psi(t_0)e^{-at_0} = be^{-at_0}, \quad t \ge t_0,$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt. Q.E.D.

Bemerkung 1.2: Die Abschätzung (1.2.19) im Gronwallschen Lemma lässt verschiedene Verallgemeinerungen zu. Besteht z. B. eine Beziehung der Form

$$w(t) \le \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)\,ds + b(t), \quad t \ge t_0, \tag{1.2.20}$$

[4] T. H. Gronwall (Hakon Grönwall) (1877–1932): Schwedisch-amerikanischer Mathematiker und Ingenieur, zeitweise in Princeton (1913-1914); Beiträge zur komplexen Funktionentheorie, Zahlentheorie und Differentialgleichungen, aber auch zur physikalischen Chemie.

mit einer stetigen Funktion $a(t) \geq 0$ und einer nichtfallenden Funktion $b(t) \geq 0$, so folgt

$$w(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big) b(t)\,, \quad t \geq t_0. \tag{1.2.21}$$

Dazu definieren wir die Hilfsfunktionen

$$\varphi(t) := \int_{t_0}^t a(s)w(s)\,ds\,, \quad \psi(t) := w(t) - \int_{t_0}^t a(s)w(s)ds \,\leq\, b(t)\,.$$

Für diese gilt dann

$$\varphi'(t) = a(t)w(t)\,, \quad \varphi(t_0) = 0$$

und folglich

$$a(t)\psi(t) \;=\; a(t)w(t) - a(t)\int_{t_0}^t a(s)w(s)\,ds \;=\; \varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\,.$$

Also ist $\varphi(t)$ Lösung der linearen AWA

$$\varphi'(t) \;=\; a(t)\varphi(t) + a(t)\psi(t)\,, \quad t \geq t_0\,, \quad \varphi(t_0) = 0\,.$$

Durch Nachrechnen verifiziert man, dass

$$\varphi(t) \;=\; \exp\Big[\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big]\int_{t_0}^t \exp\Big[-\int_{t_0}^s a(r)dr\Big]a(s)\psi(s)\,ds\,.$$

Wegen $a(s) \geq 0$ und $\psi(s) \leq b(t)$ folgt

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq b(t)\exp\Big[\int_{t_0}^t a(s)ds\Big]\int_{t_0}^t \Big\{-\frac{d}{ds}\exp\Big[-\int_{t_0}^s a(r)dr\Big]\Big\}\,ds\\ &\leq b(t)\exp\Big[\int_{t_0}^t a(s)ds\Big] - b(t)\,.\end{aligned}$$

Das ergibt schließlich mit der Voraussetzung (1.2.20)

$$w(t) \;\leq\; \varphi(t) + b(t) \;\leq\; b(t)\exp\Big[\int_{t_0}^t a(s)ds\Big]\,.$$

Korollar 1.2 (Eindeutigkeitssatz): *Der Stabilitätssatz zeigt als Nebenprodukt, dass eine AWA mit Lipschitz-stetiger Funktion $f(t,\cdot)$ höchstens eine Lösung haben kann. Die durch den Existenzsatz von Peano gelieferte lokale Lösung ist in diesem Falle also eindeutig.*

Beweis: Gäbe es zwei Lösungen u und v, so würden diese dieselbe Differentialgleichung zu denselben Anfangsbedingungen erfüllen. Dies wäre dann die Situation des lokalen Stabilitätssatzes mit $g(t,x) = f(t,x)$ und $v_0 = u_0$. Die Stabilitätsabschätzung ergibt dann notwendig $u(t) = v(t)$ für alle $t \in I$. Q.E.D.

Korollar 1.3: *Wir betrachten eine skalare Differentialgleichung d-ter Ordnung der Form*

$$u^{(d)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(d-1)}(t)), \tag{1.2.22}$$

mit einer stetigen Funktion $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, welche bezüglich der letzten d Argumente einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann existiert für jeden Satz von d Werten $u_0, \dots, u_{d-1} \in \mathbb{R}$, genau eine lokale Lösung $u \in C^d[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ der Gleichung (1.2.22), welche den Anfangsbedingungen genügt:

$$u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_1,\ \dots,\ u^{(d-1)}(t_0) = u_{d-1}.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den vorangegangenen Resultaten angewendet auf das zu der Gleichung (1.2.22) d-ter Ordnung äquivalente System 1-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t)\,, \\ &\vdots \\ u_{d-1}'(t) &= u_d(t)\,, \\ u_d'(t) &= f(t, u_1(t), \dots, u_d(t)), \end{aligned}$$

wobei $u_1 := u, u_2 := u^{(1)}, \dots, u_d := u^{(d-1)}$. Die zugehörige Vektorfunktion $F(t, u_1, \dots, u_d)$ ist offensichtlich stetig und genügt der Lipschitz-Bedingung. Q.E.D.

Beispiel 1.7: Die Funktion $f(t,x) = x^{1/3}\,(d=1)$ aus Beispiel 1.2 ist auf dem Intervall $I = [0,1]$ in $x = 0$ nicht Lipschitz-stetig, woraus sich die Mehrdeutigkeit der Lösung der zugehörigen AWA erklärt. Für die Anfangsbedingung $u(0) = 1$ ergibt sich dagegen die Lösung $u(t) = [\frac{2}{3}t + 1]^{3/2}$, welche eindeutig ist, da die Funktion $f(t,x) = x^{1/3}$ bei $x = 1$ Lipschitz-stetig ist.

Beispiel 1.8: Die Funktion $f(t,x) = x^2\,(d=1)$ aus Beispiel 1.3 ist nur „lokal" Lipschitz-stetig, d. h. nur für beschränkte Argumente:

$$|x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \le L|x-y|$$

mit $L = \max\{|x+y|\,,\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Solange die Lösung der zugehörigen AWA existiert, ist sie jedoch eindeutig.

Beispiel 1.9: Die lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung (harmonischer Oszillator)

$$u''(t) + ku(t) = 0$$

mit einem festen $k \in \mathbb{R}_+$ besitzt die beiden auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen $u_1(t) = \cos(\sqrt{k}t)$ und $u_2(t) = \sin(\sqrt{k}t)$. Für beliebig gegebene $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ist auch die Linearkombination $u(t) = c_0 u_1(t) + c_1 u_2(t)$ Lösung. Wegen $u(0) = c_0$ und $u'(0) = c_1\sqrt{k}$ ist

$u(t)$ nach Korollar 1.3 die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung zu diesen Anfangswerten. Die Lösung zu den Anfangsdaten $c_0 = 0$ und $u'(0) = c_1$ ist

$$u(t) = \frac{c_1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t) = A \sin\Big(\frac{2\pi}{T} t\Big),$$

d. h. eine Sinusschwingung mit der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\sqrt{k}$ und der Amplitude $A = c_1/\sqrt{k}$

Als Folgerung aus den Sätzen 1.2 und 1.4 erhält man eine globale Existenzaussage für AWAn mit „linear beschränkter“ Nichtlinearität.

Korollar 1.4 (Globaler Existenzsatz): *Die Funktion $f(t,x)$ sei stetig auf $D = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ und genüge mit nicht-negativen, stetigen Funktionen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ der Wachstumsbedingung*

$$\|f(t,x)\| \le \alpha(t)\,\|x\| + \beta(t)\,, \quad (t,x) \in D\,. \tag{1.2.23}$$

Dann besitzt die zugehörige AWA eine „globale“ Lösung. Genügt $f(t,x)$ darüberhinaus einer Lipschitz-Bedingung, so ist die Lösung eindeutig.

Beweis: Für die durch den Peanoschen Satz gelieferte *lokale* Lösung u auf einem Intervall $I = [t_0, t_0 + T]$ gilt aufgrund der Wachstumsbeschränkung an $f(t,x)$

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int_{t_0}^t \{\alpha(s)\|u(s)\| + \beta(s)\}\, ds\,, \quad t \in I\,.$$

Mit Hilfe der verallgemeinerten Gronwallschen Ungleichung (1.2.21) folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \le \exp\Big[\int_{t_0}^t \alpha(s)\, ds\Big]\Big\{\|u_0\| + \int_{t_0}^t \beta(s)\, ds\Big\}, \quad t \in I\,,$$

d. h.: $\|u(t)\|$ bleibt auf jedem Existenzintervall unterhalb einer nur von T und den Funktionen $\alpha(t), \beta(t)$ abhängigen Schranke. Nach Satz 1.2 läßt sich der Graph von u aber bis zum Rand von D fortsetzen. Folglich existiert u für alle $t \ge t_0$. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich direkt aus Korollar 1.2. Q.E.D.

Aus Satz 1.4 folgt insbesondere, dass eine (global) L-stetige AWA

$$\|f(t,x)\| \le \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \le L\|x\| + \|f(t,0)\|,$$

eine eindeutige, globale Lösung besitzt. Durch Spezialisierung dieser Aussage erhält man die Existenz einer globalen und eindeutigen Lösung der allgemeinen *linearen* AWAn.

Korollar 1.5 (Lineare AWA): *Die Matrixfunktion $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ und die Vektorfunktion $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ seien stetig. Dann besitzt die lineare AWA*

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \ge t_0, \quad u(t_0) = u_0, \tag{1.2.24}$$

eine eindeutige „globale“ Lösung $u : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^d$.

Beweis: (i) Für die *lokale* Lösung u auf einem Intervall $I = [t_0, t_0 + T]$ gilt:

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \big\{\|A(t)\|\|u(s)\| + \|b(s)\|\big\}\, ds\,, \quad t \in I\,.$$

Mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \le \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\, ds\Big)\Big\{\|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|b(s)\|\, ds\Big\}\,, \quad t \in I\,,$$

d. h.: $\|u(t)\|$ bleibt auf jedem Existenzintervall unterhalb einer nur von T und den Funktionen $A(t)$, $b(t)$ abhängigen Schranke. Nach Satz 1.2 läßt sich der Graph von u aber bis zum Rand von D fortsetzen. Folglich existiert u für alle $t \ge t_0$. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich wegen der L-Stetigkeit der Funktion $f(t,x) := A(t)x + b(t)$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)x + b(t) - A(t)y - b(t)\| \le \|A(t)\|\, \|x - y\|,$$

direkt aus Satz 1.2. Q.E.D.

Der Existenzsatz von Peano zusammen mit dem Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.2 enthält einen Teil der Aussagen des klassischen Existenzsatzes von Picard[5]-Lindelöf[6], den wir im Folgenden formulieren.

Satz 1.5 (Existenzsatz von Picard-Lindelöf): *Die stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es zu jedem Paar $(t_0, u_0) \in D$ ein $T > 0$ und eine Lösung $u : I = [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^d$ der AWA*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I = [t_0, t_0 + T], \quad u(t_0) = u_0. \tag{1.2.25}$$

Diese lokale Lösung ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir führen einen Beweis, der unabhängig vom Satz von Peano ist und auf dem Banachschen Fixpunktsatz basiert. Ausgangspunkt ist wieder die zur AWA äquivalente Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds. \tag{1.2.26}$$

(i) Es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$K := \big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n :\, |t - t_0| \le \delta,\, \|x - u_0\| \le \delta\big\} \subset D.$$

Auf K erfüllt $f(t,x)$ eine Lipschitz-Bedingung mit Konstante L_K:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L_K \|x - y\|, \quad (t,x), (t,y) \in K.$$

[5] Charles Emile Picard (1856–1941): Französischer Mathematiker; Prof. in Toulouse und Paris; Beiträge zu Analysis, Funktionentheorie, Differentialgleichungen und Analytische Geometrie.

[6] Ernst Leonhard Lindelöf (1870–1946): Finnischer Mathematiker; Prof. in Helsinki; Beiträge zu Analysis, Differentialgleichungen und Funktionentheorie.

Da K kompakt und f stetig ist, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|f(t,x)\| \le M, \quad (t,x) \in K.$$

Wir setzen

$$T := \min\Big(\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L_K}\Big), \qquad I_T := [t_0 - T, t_0 + T],$$

und definieren den Vektorraum $V := C[t_0 - T, t_0 + T]^d$; dieser ist versehen mit der Norm $\|u\|_\infty = \max_{t\in[t_0-T,t_0+T]} \|u(t)\|$ ein Banach-Raum (vollständiger, normierter Vektorraum).

(ii) Auf dem Banach-Raum V definieren wir die Abbildung $g : V \to V$ durch

$$g(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds, \quad t \in I_T.$$

Für Funktionen u aus der abgeschlossenen Teilmenge

$$V_0 := \{v \in V : \max_{t\in I_T} \|v(t) - u_0\| \le \delta\} \subset V$$

gilt für $t \in I_T$:

$$\|g(u)(t) - u_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s))\|\, ds \le M|t - t_0| \le MT \le \delta,$$

d. h.: Die Abbildung g bildet die Teilmenge $V_0 \subset V$ in sich ab. Weiter gilt für je zwei Funktionen $u, v \in V_0$ aufgrund der L-Stetigkeit von $f(t, \cdot)$:

$$\begin{aligned}\|g(u)(t) - g(v)(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|\, ds \\ &\le L_K|t - t_0|\|u - v\|_\infty \le L_K T\|u - v\|_\infty.\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|g(u) - g(v)\|_\infty \le \tfrac{1}{2}\|u - v\|_\infty,$$

d. h. g ist auf V_0 eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat g in V_0 genau einen Fixpunkt u^*, d. h.:

$$u^*(t) = g(u^*)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u^*(s))\, ds, \quad t \in I_T.$$

Wegen der Äquivalenz dieser Integralbeziehung zur AWA folgt die Behauptung. Q.E.D.

Die im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf konstruierte Lösung u^* der Integralgleichung (1.2.26) erhält man durch die im Banach-Raum $V = C[I_T]$ konvergente Fixpunktiteration (sog. „sukzessive Approximation“)

$$u^k(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u^{k-1}(s))\, ds, \quad t \in I_T, \tag{1.2.27}$$

für irgendeine Startfunktion $u^0 \in V_0$. Dieses Iterationsverfahren kann in einfachen Situationen zur tatsächlichen Berechnung der Lösung der AWA verwendet werden.

Beispiel 1.10: Zur Lösung der AWA

$$u'(t) = 1 + u(t)^2, \quad t \geq 0, \qquad u(0) = 0,$$

wird die Fixpunktiteration mit der Startfunktion $u^0 \equiv 0$ verwendet:

$$u^k(t) = \int_0^t \big(1 + u^{k-1}(s)^2\big)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Wir finden:

$$u^1(t) = \int_0^t ds = t, \quad u^2(t) = \int_0^t (1 + s^2)\, ds = t + \tfrac{1}{3}t^3$$

$$\begin{aligned}
u^3(t) &= \int_0^t (1 + s^2 + \tfrac{2}{3}t^4 + \tfrac{1}{9}s^6)\, ds = t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + \tfrac{1}{63}t^7 \\
u^4(t) &= \int_0^t (1 + s^2 + \tfrac{2}{3}s^4 + (\tfrac{1}{9}{+}\tfrac{4}{15})s^6 + \tfrac{1}{63}s^8 + \dots)\, ds \\
&= t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + (\tfrac{1}{63} + \tfrac{1}{105})t^7 + \tfrac{1}{567}t^9 + \dots \\
u^5(t) &= \int_0^t (1 + s^2 + \tfrac{2}{3}s^4 + (\tfrac{1}{9}{+}\tfrac{4}{15})s^6 + \tfrac{4}{45}s^8 + \dots)\, ds \\
&= t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + (\tfrac{1}{63} + \tfrac{4}{105})t^7 + \dots .
\end{aligned}$$

Dies scheint die Taylor-Reihe der Funktion $u(t) = \tan(t)$ zu ergeben:

$$\tan(t) = t + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{15}t^5 + \tfrac{17}{315}t^7 + \dots .$$

Dies ist tatsächlich die (eindeutig bestimmte) Lösung der AWA, da

$$\tan'(t) = \Big(\frac{\sin}{\cos}\Big)'(t) = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t), \quad \tan(0) = 0.$$

Für spätere Zwecke benötigen wir noch stärkere Aussagen über die Abhängigkeit der Lösungen von AWAn von den Anfangswerten als die durch den Stabilitätssatz garantierte (Lipschitz)-Stetigkeit.

Satz 1.6 (Differenzielle Stabilität): *Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Existenzsatzes von Peano existiere die Funktionalmatrix $f'_x(t,x) = (\partial_j f_i(t,x))_{1\leq i,j\leq d}$ auf dem Zylinder D und sei dort stetig. Dann hängt die (eindeutige) Lösung der AWA stetig differenzierbar vom Anfangswert u_0 ab. Die zugehörige Ableitungsmatrix („Jacobi-Matrix“) $D_{u_0}u(t) = (\partial u_i(t)/\partial u_{0,j})_{i,j=1}^d$ ist gegeben als Lösung der linearen Matrix-AWA*

$$D_{u_0}u'(t) \;=\; f'_x(t, u\,(t))\, D_{u_0}u\,(t)\,, \quad t \in I, \quad D_{u_0}u(t_0) = I\,. \tag{1.2.28}$$

Beweis: Für kleines $\delta > 0$ betrachten wir die Anfangswerte $u(t_0) = u_0$ und $u_\delta(t_0) = u_0 + \delta e_j$ mit dem j-ten kartesischen Einheitsvektor e_j. Für die zugehörigen (lokalen) Lösungen u und u_δ der AWA gilt:

$$\begin{aligned}
\delta^{-1}(u_\delta - u)(t) &= e_j + \delta^{-1} \int_{t_0}^t \{f(s, u_\delta) - f(s, u)\}\, ds \\
&= e_j + \delta^{-1} \int_{t_0}^t \Big(\int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} f(s, u + \varepsilon(u_\delta - u))\, d\varepsilon \Big)\, ds \\
&= e_j + \int_{t_0}^t \Big(\int_0^1 f'_x(s, u + \varepsilon(u_\delta - u))\, d\varepsilon \Big)\, \delta^{-1}(u_\delta - u)(s)\, ds \\
&= e_j + \int_{t_0}^t B_\delta(s)\, \delta^{-1}(u_\delta - u)(s)\, ds\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$B_\delta(s) := \int_0^1 f'_x(s, u_\delta + \varepsilon(u_\delta - u))\, d\varepsilon \;\to\; f'_x(s, u(s)) \quad (\delta \to 0).$$

Zur Abkürzung setzen wir $\Delta_\delta u(t) := \delta^{-1}(u_\delta - u)$. Damit folgt aus der obigen Identität

$$\|\Delta_\delta u(t)\| \le \|e_j\| + \int_{t_0}^t \|B_\delta(s)\| \|\Delta_\delta u(s)\|\, ds.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an f gilt $\|B_\delta(s)\| \le L$ mit einem festen $L > 0$ (Lipschitz-Konstante). Mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas ergibt sich dann wegen $\|e_j\| = 1$:

$$\|\Delta_\delta u(t)\| \;\le\; \exp\Big(\int_{t_0}^t \|B_\delta(s)\|\, ds \Big) \|e_j\| \;\le\; e^{L(t-t_0)}.$$

Die Folge der Differenzenquotienten $\Delta_\delta u(t)$ ist also gleichmäßig beschränkt in der Maximumnorm auf jedem Zeitintervall $I = [t_0, t_0 + T]$, auf dem die lokalen Lösungen u_δ existieren. Wir wollen zeigen, dass sie sogar eine Cauchy-Folge ist. Für zwei beliebige Werte $\delta, \delta' > 0$ und die zugehörigen Lösungen $u_\delta, u_{\delta'}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\Delta_\delta u(t) - \Delta_{\delta'} u(t) &= \int_{t_0}^t B_\delta(s) \Delta_\delta u(s)\, ds - \int_{t_0}^t B_{\delta'}(s) \Delta_{\delta'} u(s)\, ds \\
&= \int_{t_0}^t B_\delta(s) \big(\Delta_\delta u(s) - \Delta_{\delta'} u(s) \big)\, ds + \int_{t_0}^t \big(B_\delta(s) - B_{\delta'}(s) \big) \Delta_{\delta'} u(s)\, ds,
\end{aligned}$$

und mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas folgt weiter analog zu oben:

$$\sup_{t \in I} \|\Delta_\delta u(t) - \Delta_{\delta'} u(t)\| \;\le\; e^{2LT} \int_{t_0}^{t_0+T} \|B_\delta(s) - B_{\delta'}(s)\|\, ds\,.$$

Nach Voraussetzung ist die Ableitung $f'_x(t,x)$ auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig. Dies gilt dann auch für $B_\delta(s)$ als Funktion sowohl von s als auch von δ. Durch Wahl von δ, δ' hinreichend klein kann daher $\sup_{t \in I} \|\Delta_\delta u(t) - \Delta_{\delta'} u(t)\|$ kleiner als jedes beliebig klein vorgegebene $\varepsilon > 0$ gemacht werden. Dies impliziert, dass für jede Nullfolge $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$

die zugehörige Folge von Differenzenquotienten $(\Delta_{\delta_i} u)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Maximumnorm auf $[t_0, t_0+T]$ ist. Deren stetiger Limes ist die gesuchte partielle Ableitung $D_{u_{0,j}}u$ von u nach der j-ten Komponente $u_{0,j}$ des Anfangswerts u_0:

$$\max_{t\in I} \|\Delta_{\delta_i} u(t) - D_{u_{0,j}}u(t)\| \to 0 \quad (\delta_i \to 0).$$

Durch Grenzübergang $\delta_i \to 0$ in obiger Identität ergibt sich weiter

$$D_{u_{0,j}}u(t) = e_j + \int_{t_0}^t f'_x(s,u) D_{u_{0,j}}u(s)\, ds,$$

d. h.: Die Vektorfunktion $D_{u_{0,j}}u(t)$ ist Lösung der AWA

$$(D_{u_{0,j}}u)'(t) = f'_x(t,u(t)) D_{u_{0,j}}u(t), \quad t \ge t_0, \quad D_{u_{0,j}}u(t_0) = e_j.$$

Führt man diese Konstruktion für alle Komponenten $u_{0,1}, \dots, u_{0,d}$ des Anfangswerts durch, so erhält man eine Matrixfunktion $D_{u_0}u(t) := [D_{u_{0,1}}u(t), \dots, D_{u_{0,d}}u(t)]$, welche dann nach Konstruktion Lösung der linearen Matrix-AWA (1.2.28) ist. Q.E.D.

1.2.2 Globale Stabilität

Wir wenden uns nun der Frage nach der „globalen“ Stabilität von Lösungen von AWAn zu. Neben der Lipschitz-Bedingung (L) wird dazu noch eine weitere Struktureigenschaft der Nichtlinearität $f(t,x)$ benötigt.

Definition 1.3 (Monotone AWA): *Die Funktion $f(t,x)$ genügt einer „Monotoniebedingung“, wenn mit einer Konstante $\lambda := \inf_{t\in I}\lambda(t) > 0$ gilt:*

$$-(f(t,x) - f(t,y), x-y) \ge \lambda(t)\|x-y\|^2, \quad (t,x)\,,\,(t,y) \in D. \tag{1.2.29}$$

Bemerkung 1.3: Die Bedingung (1.2.29) ist eine direkte Verallgemeinerung der *skalaren* Eigenschaft *monoton fallend* für vektorwertige Funktionen. Für eine skalare Funktion $g(x)$ ist die Beziehung

$$-(g(x) - g(y))(x-y) \ge \lambda|x-y|^2, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{g(x) - g(y)}{x-y} \le -\lambda,$$

bzw. $g' \le -\lambda$, wenn g differenzierbar ist. Im Falle einer linearen Vektorfunktion $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ ist (1.2.29) gleichbedeutend mit der gleichmäßigen negativen Definitheit der Matrix $A(t)$ auf dem Zeitintervall I. Der einfachste Spezialfall ist die skalare Funktion $f(t,x) = qx$, für die (1.2.29) gerade $q \le -\lambda < 0$ bedeutet.

Eine AWA, die einer (lokalen) Lipschitzbedingung bzw. einer Monotoniebedingung genügt nennen wir kurz „(lokal) L-stetig“ und „(stark) monoton“. Ihre Lösungen haben besonders starke Stabilitätseigenschaften.

Definition 1.4 (Exponentielle Stabilität): *Eine globale Lösung* u *einer* AWA *wird „exponentiell stabil" genannt, wenn es positive Konstanten* δ , α , A *gibt, so dass zu jedem Zeitpunkt* $t_* \geq t_0$ *und zu jedem* $w_* \in \mathbb{R}^d$ *mit* $\|w_*\| < \delta$ *jede (lokale) Lösung* v *der gestörten* AWA

$$v'(t) = f(t, v(t)) , \quad t \geq t_* , \quad v(t_*) = u(t_*) + w_* , \tag{1.2.30}$$

global ist und folgendes gilt:

$$\|(v-u)(t)\| \leq A\, e^{-\alpha(t-t_*)} \|w_*\| , \quad t \geq t_* . \tag{1.2.31}$$

Neben dem Begriff der „exponentiellen" Stabilität findet man in der Literatur noch eine Reihe anderer (schwächerer) Stabilitätsdefinitionen, z. B.: „asymptotische" Stabilität.

Satz 1.7 (Globaler Stabilitätssatz): *Alle Lösungen einer (lokal) L-stetigen und (stark) monotonen* AWA *sind global und exponentiell stabil mit* δ *beliebig und* $\alpha = \lambda$, $A = 1$. *Im Falle* $\sup_{t\geq t_0} \|f(t,0)\| < \infty$ *sind alle Lösungen gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: (i) Wir zeigen zunächst die globale Existenz von Lösungen. Wegen der angenommenen (lokalen) L-Stetigkeit hat die AWA eine eindeutige lokale Lösung u :

$$u'(t) = f(t, u(t)), \;\; t_0 \leq t \leq t_0 + T, \;\; u(t_0) = u_0.$$

Auf derem Existenzintervall erhalten wir durch skalare Multiplikation mit $u(t)\|u(t)\|^{-1}$;

$$(u'(t), u(t)\|u(t)\|^{-1}) - (f(t, u(t)), u(t)\|u(t)\|^{-1}) = 0$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\| - (f(t, u(t)) - f(t, 0), u(t) - 0)\|u(t)\|^{-1} = (f(t, 0), u(t))\|u(t)\|^{-1}.$$

Ausnutzung der Monotonieeigenschaft ergibt also

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\| + \lambda\|u(t)\| \leq \|f(t, 0)\|. \tag{1.2.32}$$

und nach Integration über $[t_0, t]$:

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, 0)\|\, ds =: g(t).$$

Die lokale Lösung u bleibt also auf jedem Existenzintervall durch die stetige Funktion $g(t)$ beschränkt und lässt sich daher auf ganz $[t_0, \infty)$ fortsetzen. Mit derselben Argumentation folgt auch die globale Lösbarkeit der gestörten AWA.

(ii) Als nächstes zeigen wir die gleichmäßige Beschränktheit der Lösung. Dazu multiplizieren wir die Ungleichung (1.2.32) mit $e^{\lambda(t-t_0)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{\lambda(t-t_0)}\|u(t)\|\Big] \leq e^{\lambda(t-t_0)}\|f(t, 0)\|.$$

Integration über $[t_0, t]$ ergibt dann

$$e^{\lambda(t-t_0)}\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \{e^{\lambda(s-t_0)}\|f(s,0)\|\}\, ds,$$

und folglich

$$\|u(t)\| \le e^{-\lambda(t-t_0)}\|u_0\| + \max_{s\in[t_0,t]} \|f(s,0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\, ds.$$

Wegen

$$e^{-\lambda(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\, ds \;=\; \frac{1}{\lambda}\{1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\}$$

erhalten wir schließlich die gewünschte Abschätzung

$$\|u(t)\| \le e^{-\lambda(t-t_0)}\|u_0\| + \frac{1}{\lambda} \sup_{s\ge t_0} \|f(s,0)\|, \quad t \ge t_0. \tag{1.2.33}$$

(iii) Wir haben gezeigt, dass sowohl die ungestörte AWA

$$u'(t) = f(t, u(t)), \;\; t \ge t_0, \;\; u(t_0) = u_0,$$

als auch die gestörte AWA

$$v'(t) = f(t, v(t)), \;\; t \ge t_*, \;\; v(t_*) = u(t_*) + w_*,$$

eindeutige, globale Lösungen haben. Wir setzen $w(t) := v(t) - u(t)$. Subtraktion der beiden Gleichungen und skalare Multiplikation mit $w(t)\|w(t)\|^{-1}$ ergibt analog wie in (i):

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\| - (f(t, v(t)) - f(t, u(t)), w(t))\|w(t)\|^{-1} = 0$$

und, unter Ausnutzung der Monotonieeigenschaft,

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\| + \lambda\|w(t)\| \le 0.$$

Wir multiplizieren dies mit $e^{\lambda(t-t_*)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{\lambda(t-t_*)}\|w(t)\|\Big] \le 0,$$

bzw. nach Integration über $[t_*, t]$,

$$\|w(t)\| \le e^{-\lambda(t-t_*)}\|w_*\|, \quad t \le t_*.$$

Dies vervollständigt den Beweis. Q.E.D.

Bemerkung 1.4: Die Abschätzung (1.2.33) zeigt, dass bei einer (stark) monotonen AWA der Einfluss des Anfangswerts u_0 exponentiell mit der Zeit abfällt. Auch der ständige „Energiezufluss“ durch eine beschränkte rechte Seite $f(t,0)$ wird durch diese exponentielle „Dämpfung“ kompensiert, so dass die Lösung nicht beliebig anwachsen kann.

Bemerkung 1.5: Bei Durchsicht des Beweises von Satz 1.7 sieht man, dass die L-Stetigkeit der Funktion $f(t,x)$ lediglich zur Sicherstellung der Eindeutigkeit der betrachteten Lösungen benötigt wird. Alle anderen Aussagen bleiben auch gültig, wenn lediglich die Stetigkeit von $f(t,x)$ gefordert wird.

Die meisten praktisch relevanten AWAn sind leider nicht von monotonem Typ. Trotzdem können ihre Lösungen durchaus exponentiell stabil in dem etwas schwächeren Sinne unserer Definition oder auch nur „asymptotisch stabil“ sein.

Korollar 1.6 (Lineare AWA): *Die stetige Matrixfunktion $A : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ und die Vektorfunktion $b : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ seien gleichmäßig negativ definit bzw. beschränkt. Dann besitzt die lineare AWA*

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \ge t_0, \quad u(t_0) = u_0, \tag{1.2.34}$$

eine eindeutige „globale“ Lösung $u : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^d$, welche beschränkt und exponentiell stabil ist.

Beweis: Für eine negativ definite Koeffizientenmatrix $A(t)$ genügt die zugehörige Funktion $f(t,x)$ der Monotoniebedingung:

$$-(f(t,x) - f(t,y), x-y) = -(A(t)(x-y), x-y) \ge \lambda\|x-y\|^2,$$

mit einer Konstante $\lambda > 0$. Ferner ist

$$\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|f(t,0)\| = \sup_{t\in[t_0,\infty)} \|b(t)\| < \infty.$$

Satz 1.7 liefert also die Beschränktheit sowie die exponentielle Stabilität der globalen Lösung u der linearen AWA. Q.E.D.

Zum Abschluß stellen wir noch den folgenden Satz über die Grenzwerte exponentiell stabiler Lösungen für $t \to \infty$ bereit.

Satz 1.8 (Stationäre Limiten): *Die AWA sei L-stetig und „autonom“, d. h. $f(t,x) \equiv f(x)$, und besitze eine Lösung $u(t)$. Ist diese dann exponentiell stabil mit Stabilitätsparametern δ, α, A, so existiert eine Lösung u_∞ der Gleichung $f(u_\infty) = 0$, und es gilt*

$$\|u(t) - u_\infty\| = O(e^{-\alpha t}) \quad (t \to \infty)\,. \tag{1.2.35}$$

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Lösung $u(t)$ gleichmäßig stetig auf $I = [t_0, \infty)$. Es gibt also ein $h_0 > 0$, so dass für $h \le h_0$ stets $\|u(t+h) - u(t)\| < \delta$ ist. Die „verschobene“ Funktion $u^h(t) = u(t+h)$ genügt ebenfalls der Differentialgleichung $\dot u^h(t) = f(u^h(t))$. Betrachtet man für ein beliebiges $h \le h_0$ die Differenz $u(t_0+h) - u(t_0)$ als Störung von $u(t_0)$, so folgt aufgrund der exponentiellen Stabilität von $u(t)$

$$\|u(t+h) - u(t)\| \le A\, e^{-\alpha(t-t_0)}\delta =: \tilde A \delta e^{-\alpha t}, \quad (t \ge t_0). \tag{1.2.36}$$

Für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, gilt also

$$\begin{aligned} \|u(t+nh) - u(t+mh)\| &\le \sum_{\nu=m}^{n-1} \|u(t+[\nu+1]h) - u(t+\nu h)\| \\ &\le \tilde A \delta e^{-\alpha t} \sum_{\nu=m}^{n-1} e^{-\alpha \nu h}, \end{aligned} \tag{1.2.37}$$

d. h.: $(u(t+nh))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge für jedes $t \ge t_0$, und es existiert

$$u^h_\infty(t) := \lim_{n\to\infty} u(t+nh).$$

Setzt man $m = 0$ in (1.2.37) und lässt $n \to \infty$, so folgt für kleines h:

$$\|u^h_\infty(t) - u(t)\| \le \tilde A \delta e^{-\alpha t} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\alpha\nu h} \le \tilde A \delta e^{-\alpha t} \frac{1}{1 - e^{-\alpha h}} \le \tilde A \delta e^{-\alpha t} \frac{2}{\alpha h}. \tag{1.2.38}$$

Mit $n = m+1$ folgt analog $u^h_\infty(t+h) = u^h_\infty(t)$, d. h.: $u^h_\infty(t)$ ist periodisch. Führt man diesen Konstruktionsprozess für zwei verschiedene $h_i \le h\,(i = 1, 2)$ durch, so sind die sich ergebenden Limesfunktionen $u^i_\infty(t)$ jeweils h_i-periodisch und stimmen daher wegen

$$\|u^1_\infty(t) - u^2_\infty(t)\| \;\le\; \|u^1_\infty(t) - u(t)\| + \|u(t) - u^2_\infty(t)\| \;\le\; \left\{ \frac{2\tilde A\delta}{\alpha h_1} + \frac{2\tilde A\delta}{\alpha h_2} \right\} e^{-\alpha t}$$

notwendig überein. Wir können also schreiben $u_\infty(t) = u^h_\infty(t)$ für alle $h \le h_0$. Da h beliebig klein gewählt werden kann, muss $u_\infty(t) \equiv u_\infty$ konstant sein. Schließlich folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$ in

$$u(t+[n+1]h) \;=\; u(t+nh) + \int_{t+nh}^{t+(n+1)h} \{f(u(s)) - f(u_\infty)\}\, ds + hf(u_\infty)$$

die Beziehung $f(u_\infty) = 0$. Q.E.D.

Wir haben den vorausgegangenen Satz vor allem bereit gestellt, um für spätere Zwecke folgendes Korollar zur Verfügung zu haben.

Korollar 1.7 (Monotone Gleichungen): *Die nichtlineare Abbildung $g(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sei L-stetig*

$$\|g(x) - g(y)\| \;\le\; L\|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{1.2.39}$$

und strikt monoton im Sinne

$$(g(x) - g(y), x - y) \geq \gamma \|x - y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2.40}$$

Dann besitzt die Gleichung

$$g(x) = c \tag{1.2.41}$$

für jede rechte Seite $c \in \mathbb{R}^d$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{R}^d$, d. h.: g ist bijektiv.

Beweis: Wir geben zwei Beweisvarianten. Die erste verwendet das Resultat von Satz 1.8, während die zweite davon unabhängig ist und auf dem Banachschen Fixpunktsatz fußt.
(i) Wir betrachten die autonome AWA

$$v'(t) = c - g(v(t)), \quad t \geq 0, \quad v(0) = 0. \tag{1.2.42}$$

Nach Konstruktion ist die Abbildung $c - g(\cdot)$ L-stetig und strikt monoton, so dass gemäß Satz 1.7 die Lösung $v(t)$ von (1.2.42) für alle $t \geq 0$ existiert und exponentiell stabil ist. Nach Satz 1.8 existiert dann $\bar{x} = v_\infty$ mit $c - g(\bar{x}) = 0$. Die Eindeutigkeit dieser Lösung folgt dann direkt aus der strikten Monotonieeigenschaft von $g(\cdot)$.

(ii) Wir betrachten die zur gestellten Gleichung äquivalente Fixpunktgleichung

$$G(x) := x - \theta(g(x) - c) = x$$

mit einem noch geeignet zu wählendem Parameter $\theta > 0$. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ für hinreichend kleines θ eine Kontraktion ist. Dann folgt über den Banachschen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes $\bar{x}$, der nach Konstruktion auch Lösung der Aufgabe $g(\bar{x}) = c$ ist. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir

$$\begin{aligned}\|G(x) - G(y)\|^2 &= \|x - \theta g(x) - y + \theta g(y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\theta(x - y, g(x) - g(y)) + \theta^2 \|g(x) - g(y)\|^2 \\ &\leq (1 - 2\gamma\theta + L^2\theta^2)\|x - y\|^2.\end{aligned}$$

Für jedes $\theta \in (0, 2\gamma/L^2)$ ist also G eine Kontraktion. Q.E.D.

1.3 Homogene lineare Systeme

Im Folgenden betrachten wir „homogene“ lineare Systeme von Differentialgleichungen

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{1.3.43}$$

mit stetigen Matrizenfunktionen $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{d \times d}$.

Satz 1.9: *(i) Die Menge der Lösungen des „homogenen“ d-dimensionalen lineare Differentialgleichungssystems*

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{1.3.44}$$

bildet einen Vektorraum H.

(ii) Zu jeder Basis $\{u_0^i, i = 1, \dots, d\}$ *des* $\mathbb{R}^d$ *erhält man mit den zugehörigen Lösungen der* d *AWAn*

$$u^{i\prime}(t) = A(t)u^i, \quad t \geq t_0, \qquad u^i(t_0) = u_0^i, \quad i = 1, \dots, d, \tag{1.3.45}$$

eine Basis $\{u^i, i = 1, \dots, d\}$ *dieses Lösungsraums, d. h.: Es ist* $\dim H = d$.

(iii) Ist $\{u^i, i = 1, \dots, d\}$ *eine Basis des Lösungsraums, so bilden für jedes* $t \geq t_0$ *die Vektoren* $\{u^i(t), i = 1, \dots, d\}$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^d$.

Beweis: (i) Sei H die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung (1.3.44). Offenbar ist die Nullfunktion in H, und jede Linearkombination $\alpha u + \beta v$ von Funktionen $u, v \in H$ ist wegen

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' = \alpha A(t)u + \beta A(t)v' = A(t)(\alpha u + \beta v)$$

ebenfalls in H. Also ist H ein Vektorraum.

(ii) Sei $\{u_0^i, i = 1, \dots, d\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^d$ und $\{u^i\}$ die nach Satz 1.5 eindeutigen globalen Lösungen der AWAn (1.3.45). Gibt es dann Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i u^i(t) = 0, \quad t \geq t_0,$$

so folgt, da dies auch für $t = t_0$ gilt, notwendig $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$. Die Funktionen $\{u^i, i = 1, \dots, d\}$ sind also linear unabhängig. Umgekehrt kann es nicht mehr als d linear unabhängige Funktionen in H geben, denn dann müssten auch deren Anfangswerte linear unabhängig sein, was nicht möglich ist. Also ist $\dim H = d$.

(iii) Die Argumentation verläuft analog wie unter (ii). Q.E.D.

Definition 1.5: *Eine Basis* $\{\varphi^i, \dots, \varphi^d\}$ *des Lösungsraumes des linearen Differentialgleichungssystems (1.3.44) etwa zu den Anfangswerten* $\varphi^i(t_0) = e^i$ *wird „„Fundamentalsystem“ der Gleichung genannt. Die Matrix* $\Phi = [\varphi^1, \dots, \varphi^d]$ *der Spaltenvektoren* φ^i *heißt „„Fundamentalmatrix“ des Systems. Diese ist regulär und genügt der Matrix-AWA (komponentenweise zu verstehen)*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad t \geq t_0, \quad \Phi(t_0) = I. \tag{1.3.46}$$

Satz 1.10 (Inhomogene lineare Systeme): *Die Matrixfunktion* $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{d \times d}$ *und die Vektorfunktion* $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ *seien stetig. Der Vektorraum der Lösungen des* *zugehörigen homogenen Systems sei mit H bezeichnet. Dann erhält man eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \tag{1.3.47}$$

in der Form

$$u_b(t) = \Phi(t)\Big(\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds + c\Big), \tag{1.3.48}$$

mit einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$. Jede andere Lösung der inhomogenen Gleichung hat die Gestalt $u(t) = u_b(t) + v(t)$ mit einer Funktion $v \in H$. Bei Wahl von $c = u_0$ erfüllt u die Anfangsbedingung $u_b(t_0) = u_0$.

Beweis: (i) Wir setzen

$$\psi := \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1} b\, ds + c, \qquad \psi' = \Phi^{-1} b.$$

Dann gilt für $u_b := \Phi\psi$ die Beziehung $u_b' = \Phi'\psi + \Phi\psi'$, woraus wegen $\Phi' = A\Phi$ folgt:

$$u_b' = A\Phi\psi + \Phi\psi' = Au_b + \Phi\psi' = Au_b + \Phi\Phi^{-1} b = Au_b + b.$$

Also ist u_b Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und für $c = u_0$ auch Lösung der entsprechenden AWA.

(ii) Sei u eine zweite Lösung der inhomogenen Gleichung. Dann erfüllt $w := u - u_b$ die Beziehung

$$w' = u' - u_b' = Au + b - Au_b - b = Aw,$$

d. h.: Es ist $w \in H$. Q.E.D.

Bemerkung 1.6: Die Aussagen dieses Abschnitts zeigen, dass zwischen der Theorie der Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen und der linearer Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^d$ eine weitgehende Analogie besteht.

Bemerkung 1.7: Die Darstellung

$$u(t) = \Phi(t)\Big(\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds + u_0\Big),$$

der (eindeutigen) Lösung der linearen AWA

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \ge t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$

entspricht der am Anfang dieses Kapitels für *skalare* lineare AWAn

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t), \quad t \ge t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$

mit Hilfe der Methode der Variation der Konstante gefundenen Darstellung

$$u(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\Big)\Big[\int_{t_0}^{t} \exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\Big) b(\tau)\, d\tau + u_0\Big].$$

Bemerkung 1.8: Für lineare Differentialgleichungssysteme mit *konstanten* Koeffizienten

$$u'(u) = Au(t) \tag{1.3.49}$$

bzw. skalare Gleichungen höherer Ordnung

$$u^{(d)}(t) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^{(i)}(t) \tag{1.3.50}$$

gibt es eine vollständige Lösungstheorie, die sich weitgehend algebraischer Argumente bedient. Diese hat enge Beziehungen zu den sog. „orthogonalen“ Polynomem, welche in der Numerik eine große Rolle spielen (z. B. Gauß-Integration). Aus Platzgründen wird diese aber hier nicht dargestellt und stattdessen auf die einschlägige Literatur verwiesen.

1.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1: Man forme die folgenden Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung

a) $\begin{aligned} v^{(iv)}(x) - a(x)\,u'(x) &= f(x), \\ u''(x) + b(x)\,v(x) &= g(x), \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} v^{(iv)}(x) - a(x)\,u''(x) &= f(x), \\ u''(x) + b(x)\,v(x) &= g(x), \end{aligned}$

in äquivalente Systeme erster Ordnung um.

Aufgabe 1.2: Gegeben sei die d-dimensionale Anfangswertaufgabe (AWA)

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad 0 \le t \le T, \quad u(0) = u_0,$$

mit einer stetigen Funktion $f(t,x)$, welche bzgl. des zweiten Arguments x global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L ist, d. h.:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\,\|x-y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T],$$

mit irgendeiner Vektornorm $\|\cdot\|$. Man zeige:

a) Die Anfangswertaufgabe ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$u(t) = Ku(t) := u_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds, \quad 0 \le t \le T,$$

d. h.: Jede Lösung $u \in C[0,T]$ der Integralgleichung ist automatisch auch in $C^1[a,b]$ und Lösung der Anfangswertaufgabe und umgekehrt.

b) Durch die rechte Seite der Integralgleichung ist ein sog. „Integraloperator“ $K : C[0,T] \to C[0,T]$ auf dem Banach-Raum $C[0,T]$ (Vektorraum der auf dem Intervall $[0,T]$ stetigen Funktionen versehen mit der „Maximumnorm“ $\|v\|_\infty := \max_{t\in[0,T]} |v(t)|$.) in sich definiert. Dieser ist im Falle $T < 1/L$ eine Kontraktion. Der Banachsche Fixpunktsatz garantiert folglich die Existenz eines (eindeutig bestimmten) „Fixpunktes“ $u \in C[0,T]$ des Integraloperators, welcher dann auch Lösung der AWA ist.

c) Als Nebenprodukt des Banachschen Fixpunktsatzes erhält man auch die gleichmäßige Konvergenz (d. h. Konvergenz in $C[0,T]$) der sukzessiven Approximation

$$u^k(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u^{k-1}(s))\, ds, \quad 0 \le t \le T, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

etwa für die Startfunktion $u^0 \equiv u_0$. Man gebe hierfür sog. „a priori“ und „a posteriori“ Fehlerabschätzungen an (s. etwa Vorlesungsskriptum „Numerik 0 (Einführung in die Numerische Mathematik)“:

$$\begin{aligned} \|u^k - u\|_\infty &\le F(L, T, u^0), \\ \|u^k - u\|_\infty &\le G(L, T, u^k, u^{k-1}). \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3: Man untersuche mit Hilfe der Resultate aus dem Text die Lösbarkeitseigenschaften (*eindeutig*, *global*, *beschränkt*) der folgenden AWAn:

$$\begin{array}{ll} a) & u'(t) = u(t)^2, \quad t \ge 0, \quad u(0) = 1; \\ b) & u'(t) = -u(t)^2, \quad t \ge 0, \quad u(0) = 1; \\ c) & u'(t) = u(t)^{1/2}, \quad t \ge 0, \quad u(0) = 1; \\ d) & u'(t) = \cos(u(t)) - 2u(t), \quad t \ge 0, \quad u(0) = 1. \end{array}$$

Aufgabe 1.4: Der im Text skizzierte konstruktive Beweis des Existenzsatzes von Peano sichert die gleichmäßige Konvergenz der „diskreten“ Funktionen u_{h_i} (Polygonzugmethode) für *(mindestens) eine* Teilfolge $(h_i)_{i\in N}$ gegen eine Lösung u der AWA.

a) Man zeige mit Hilfe eines Widerspruchsarguments, dass im Falle der Eindeutigkeit der Lösung der AWA die gesamte „Folge“ der u_h , d. h. *jede* Teilfolge $(u_{h_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $h_i \to 0$, gegen diese Lösung u konvergiert.

Bemerkung: Dies entspricht der bekannten Tatsache, dass beschränkte Zahlenfolgen mit nur einem einzigen Häufungspunkt insgesamt gegen diesen konvergieren (Folge des Satzes von Bolzano-Weierstraß).

b) In der Kontrolltheorie hat man es häufig mit AWAn zu tun, bei denen die Funktion $f(t,x)$ bzgl. des Arguments t (endlich viele) Unstetigkeitsstellen hat. Man begründe, dass der Peanosche Existenzssatz sowie der darauf basierende Fortsetzungssatz in diesem Fall sinngemäß ihre Gültigkeit behalten.

Aufgabe 1.5: Die Funktion $f(t,x) : D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ habe stetige partielle Ableitungen nach dem Argument x , welche beschränkt sind:

$$\max_{1\le i,j\le d} |\partial_j f_i(t,x)| \le K\,, \quad (t,x) \in D,$$

mit einer Konstante $K > 0$. Die Definitionsmenge D sei bzgl. der Komponenete x konvex. Man zeige, dass f dann in der euklidischen Norm Lipschitz-stetig bzgl. x mit der Lipschitz-Konstante $L = dK$ ist. (Hinweis: Man rekapituliere den im Text angegebenen Beweis.)

Aufgabe 1.6: Gegeben sei die lineare AWA (d-dimensionales System)

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u^0,$$

mit einer stetigen Matrix-Funktion $A(\cdot)$, $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, und Vektorfunktion $b(\cdot)$, $b(t) \in \mathbb{R}^d$. Nach einem Resultat im Text hat diese AWA eine eindeutig bestimmte, globale Lösung.

a) Man zeige, dass diese AWA „monoton" ist (Was heißt das?), wenn die Matrix $-A(t)$ symmetrisch und gleichmäßig für t positiv definit ist, d. h.: $A(t) = A(t)^T$ und

$$(-A(t)x, x)_2 \geq \gamma \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einer Konstante $\gamma > 0$. Hier bezeichnen $(\cdot,\cdot)_2$ das euklidische Skalarprodukt und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm. Dies ist gleichbedeutend damit, dass alle Eigenwerte der Matrizen $A(t)$ negativ und gleichmäßig von Null wegbeschränkt sind.

b) Man begründe mit den Resultaten aus dem Text, dass die eindeutige Lösung der AWA dann für $t \to \infty$ gleichmäßig beschränkt ist, wenn

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \|b(t)\|_2 < \infty.$$

Aufgabe 1.7 (Praktische Aufgabe): Man berechne näherungsweise den Wert $u(1)$ der Lösung $u(t) = \tan(t)$ der AWA

$$u'(t) = f(u(t)) = 1 + u(t)^2, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 0,$$

mit Hilfe der

(1) „Methode der sukzessiven Approximation" (mit k hinreichend groß)

$$u^k(t) = u_0 + \int_0^t f(u^{k-1}(s))\, ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad u^0 \equiv 0.$$

(2) „Taylor-Methode" (mit Schrittweite $H = 1$ und R hinreichend groß)

$$U_1^{(R)} = U_0 + H \sum_{r=1}^{R} \frac{H^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(U_0), \quad U_0 = 0, \quad f^{(r)} := \Big(\frac{d}{dt}\Big)^r f.$$

(3) Eulerschen „Polygonzugmethode" (mit hinreichend kleiner Schrittweite $h := 1/N$)

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad y_0 = 0.$$

Man vergleiche den jeweils erforderlichen Aufwand zur Erreichung eines relativen Fehlers von weniger als 10^{-r} für $r = 1, 2, 3, 4$.

Hinweis: Die Verfahren (1) und (2) können für kleines k bzw. r noch „per Hand" durchgeführt werden. Zur Durchführung der Polygonzugmethode (3) schreibe man aber ein MATLAB-Programm. Mit etwas Mehraufwand können auch die Verfahren (1) und (2) mit MATLAB realisiert werden. Wer dafür Ergeiz und Zeit hat, versuche sich daran.